Capitolo B51:
equazioni polinomiali

Contenuti delle sezioni

8 pagine

B51:**0.01** Questo capitolo riprende la trattazione dei polinomi considerandoli definiti sia sopra un campo generico sia sui due campi dei numeri reali e dei numeri complessi, i due campi infiniti ampiamente utilizzati e di interesse primario, sia per gli sviluppi delle teorie matematiche, sia per le effettive attività computazionali.

Il problema della ricerca delle radici dei polinomi trova una soluzione generale di massima nell'ambito dei polinomi sui numeri complessi.

Per queste soluzioni si pone il problema della distinzione tra i polinomi dotati o meno di radici reali, problema a sua volta di grande interesse per numerose applicazioni.

Dopo avere richiamato i risultati della ricerca delle radici n-esime dei numeri complessi, si affronta la ricerca delle soluzioni dell'equazione polinomiale di terzo grado giungendo alle formule trovate dagli algebristi del rinascimento.

Successivamente si ottengono le soluzioni delll'equazione di quarto grado utilizzando quelle per il terzo grado.

Nell'ultima parte si affronta il problema della equazione polinomiale generale giungendo al cosiddetto teorema fondamentale dell'algebra.

B51:a. radici dei numeri complessi

B51:**a.01** Riprendiamo i risultati ottenuti sul problema della definizione e del calcolo delle radici ai diversi gradi dei numeri complessi.

Iniziamo ricordando le radici n-esime dell'unità.

B51:b. radici delle equazioni di terzo grado

B51:**b.01** Cerchiamo la soluzione nel campo complesso dell'equazione polinomiale di terzo grado

(1) $$F(\xi) \;=\; a_3\,\xi^3 + a_2\,\xi^2 + a_1\,\xi + a_0 \;=\; 0\ ,$$

Introdotta la variabile traslata $x := \xi - \alpha$ con $\alpha := -\dfrac{a_2}{3\,a_3}$ si ottiene la più semplice equazione

(2) $$x^3 + p\,x + q \;=\; 0\ , \qquad \text{con} \quad p := \frac{F'(\alpha)}{a_3} \quad \text{e} \quad q := \frac{F(\alpha)}{a_3}\ .$$

Le equazioni (1) e (2) sono equivalenti: se è nota una soluzione x_0 della (2) si ottiene una soluzione della (1) $\xi_0 = x_0 - \dfrac{a_2}{3\,a_3}$ e viceversa. Per risolvere il problema posto possiamo quindi cercare le soluzioni della (2).

Per questa equazione per trascurare le situazioni banali possiamo assumere

(3) $$p \;\neq\; 0 \quad \text{e} \quad q \;\neq\; 0 \quad \text{ovvero} \quad p^2 + q^2 > 0\ .$$

B51:**b.02** Ci proponiamo di determinare i valori di due variabili complesse u e v alla cui somma

$$x = u + v$$

chiediamo di soddisfare la (2).

Queste due variabili devono soddisfare la $x^3 = u^3 + v^3 + 3\,u\,v\,x$ e quindi l'uguaglianza

(1) $$x^3 - 3\,u\,v\,x - (u^3 + v^3) \;=\; 0.$$

Questa si identifica con la (2) sse u e v soddisfano le relazioni $-3\,u\,v \;=\; p$ e $-(u^3+v^3) \;=\; q$, ovvero

(2) $$u\,v = -\frac{p}{3} \qquad \text{e} \qquad u^3 + v^3 = -q\ .$$

Elevando al cubo i due membri della prima equazione abbiamo il sistema

(3) $$u^3\,v^3 \;=\; -\frac{p^3}{27} \qquad \text{e} \qquad u^3 + v^3 \;=\; -q\ .$$

Dalle considerazioni sulle equazioni di secondo grado [B37d03] abbiamo che u^3 e v^3 sono le soluzioni dell'equazione

(4) $$y^2 + q\,y - \frac{p^3}{27} \;=\; 0;$$

possiamo quindi affermare

(5) $$u^3 \;=\; -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad v^3 \;=\; -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\ .$$

B51:**b.03** Possiamo unificare i secondi membri delle espressioni precedenti con la formula $-\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ e prendere in considerazione la sua radice cubica $\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$.

Possiamo inoltre utilizzare una radice cubica dell'unità $u_3 \;:=\; \dfrac{-1 \pm i\,\sqrt{3}}{2}$ per giungere alle espressioni:

(1) $$u = {u_3}^r\,\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = {u_3}^s\,\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{con} \quad r, s = 0, 1, 2\ .$$

La $u^3\,v^3 \;=\; -\dfrac{p^3}{27}$ comporta $u\,v \;=\; -{u_3}^r\,\dfrac{p}{3}$ per $r = 0,1,2$.
Dei due radicali cubici possiamo scegliere due determinazioni che scriviamo

$$(2)\qquad \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ ,$$

per le quali chiediamo che il prodotto valga $u\,v \;=\; -\dfrac{p}{3}$.
Per le tre radici dell'equazione b01(2) possiamo quindi affermare:

$$(3)\qquad x \;=\; {u_3}^r\,\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \;+\; {u_3}^{3-r}\,\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad \text{con} \quad r = 0,1,2\ .$$

B51:**b.04** Consideriamo il caso in cui i coefficienti p e q dell'equazione b01(2) siano reali e discutiamo la realtà e i segni delle radici.
Come suggeriscono le formule in b03(3) e l'analogo problema per le equazioni di secondo grado, l'elemento determinante per la questione proposta, è l'argomento delle radici quadrate interne, sicuramente diverso da 0 per b01(3), $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$.
Definiamo **discriminante dell'equazione polinomiale** b01(2) l'espressione ottenuta moltiplicando la precedente per -108 e sulla quale risulta conveniente impostare la discussione:

$$(1)\qquad D \;:=\; -108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)\ .$$

Come per le equazioni di secondo grado, vanno distinti i tre casi $D_{p,q} < 0$, $D_{p,q} = 0$ e $D_{p,q} > 0$.

B51:**b.05** Se $D_{p,q} < 0$ le due espressioni $-\dfrac{q}{2}+\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$ forniscono due valori reali e la richiesta $u\,v \;=\; -\dfrac{p}{3}$ implica che a ogni valore reale di u corrisponde un valore reale di v; quindi una radice dell'equazione è data dall'espressione di valori reali

$$(1)\qquad x_1 \;=\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \;-\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ ,$$

dove per i due radicali vanno assunti i valori principali.
Denotiamo con $\overline{u}$ e $\overline{v}$ questi valori principali, che grazie a b01(3) possiamo assumere diversi da 0; quindi per le tre radici dell'equazione otteniamo

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \overline{u}+\overline{v} \\ x_2 &= u_3\,\overline{u}+{u_3}^2\,\overline{v} \;=\; -\frac{1}{2}\,(\overline{u}+\overline{v})+\frac{i\sqrt{3}}{2}\,(\overline{u}-\overline{v}) \\ x_3 &= {u_3}^2\,\overline{u}+u_3\,\overline{v} \;=\; -\frac{1}{2}\,(\overline{u}+\overline{v})-\frac{i\,\sqrt{3}}{2}\,(\overline{u}-\overline{v}) \end{aligned}\ .$$

Dunque l'equazione presenta una radice reale e due radici complesse coniugate.

B51:**b.06** Se $D_{p,q} = 0$, cioè $\dfrac{p^3}{27} = -\dfrac{q^2}{4}$, l'equazione presenta almeno due radici coincidenti.
Dato che in questo caso $u^3 = v^3$ e per le due radici coincidenti si trova $u = v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}$, per le radici dell'equazione b02(2) si hanno le espressioni:

$$(1)\qquad x_1 \;=\; 2\,\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \quad , \quad x_2 \;=\; x_3 \;=\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\,(u_3+{u_3}^2) \;=\; -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ .$$

B51:**b.07** Infine se $D_{p,q} > 0$, cioè se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, i valori di u^3 e v^3 sono complessi coniugati e tali sono anche i valori di u e v: infatti se così non fosse il prodotto $u\,v$ non sarebbe reale.

Dunque in questo caso l'equazione possiede tre radici reali e distinte.

Occorre segnalare che le espressioni trovate per le soluzioni dell'equazione polinomiale cubica sono importanti per l'inquadramento algebrico delle possibilità computazionali, ma non sono molto efficienti per i calcoli numerici sistematici.
Per questi risultano più adatti i procedimenti generali di approssimazione numerica.

B51:c. radici delle equazioni di quarto grado

B51:**c.01** Consideriamo l'equazione polinomiale nel campo complesso

(1) $$F(\xi) \;=\; a_4\,\xi^4 + a_3\,\xi^3 + a_2\,\xi^2 + a_1\,\xi + a_0` =\; 0 \;.$$

Introdotta la variabile traslata $x := \xi - \alpha$ con $\alpha := -\dfrac{a_3}{4\,a_4}$, si ottiene l'equazione

(2) $$x^4 + p\,x^2 + q\,x + r \;=\; 0 \quad \text{con} \quad p \;:=\; \frac{F'(\alpha)}{a_3} \quad \text{e} \quad q \;:=\; \frac{F(\alpha)}{a_3} \;.$$

Le equazioni (1) e (2) sono equivalenti: se è nota una soluzione x_0 della (2) si possiede una soluzione della (1) $\xi_0 = x_0 - a_3/4a_4$ e viceversa.

Per risolvere il problema posto possiamo quindi focalizzare l'attenzione sulla ricerca delle soluzioni della (2) che svolgiamo secondo il procedimento proposto da Euler.

B51:**c.02** Procedendo analogamente a quanto fatto per le equazione di terzo grado, ci proponiamo di determinare i valori di tre variabili complesse, incognite ausiliarie, u, v e w alle quali imponiamo un primo vincolo

(1) $$x \;=\; u + v + w$$

e chiediamo di soddisfare la c01(2).

Da questa segue l'equazione

(2) $$\begin{aligned}&\left(u^2+v^2+w^2\right)^2 + 2\,(u\,v + v\,w + w\,u)\left(2\,(u^2+v^2+w^2) + p\right)\\ &\qquad + 4\,(u\,v + v\,w + w\,u)^2 + p\,(u^2+v^2+w^2) + q\,(u+v+w) + r \;=\; 0\end{aligned} \;.$$

Questa equazione viene semplificata imponendo come secondo vincolo

$$u^2 + v^2 + w^2 \;=\; -\frac{p}{2}$$

che le fa assumere la forma

$$-\frac{p^2}{4} + 4\,(u\,v + v\,w + w\,u)^2 + q\,(u+v+w) + r \;=\; 0 \;.$$

Ulteriori manipolazioni conducono alla

$$-\frac{p^2}{4} + 4\,(u\,v + v\,w + w\,u)^2 + (8\,u\,v\,w)\,(u+v+w) + r \;=\; 0 \;.$$

A questa imponiamo come terzo vincolo

$$u\,v\,w \;=\; -\frac{q}{8} \;,$$

per ottenere

$$u^2\,v^2 + v^2\,w^2 + w^2\,u^2 \;=\; \frac{p^2 - 4\,r}{16} \;.$$

Dunque le variabili u, v e w se soddisfano il sistema

(3) $$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 \;=\; -\dfrac{p}{2} \\ u\,v\,w \;=\; -\dfrac{q}{8} \\ u^2\,v^2 + v^2\,w^2 + w^2\,u^2 \;=\; \dfrac{p^2 - 4\,r}{16} \end{cases} \;,$$

allora soddisfano anche la (2) e quindi la (1) conduce alla soluzione della equazione di quarto grado c01(2).

B51:**c.03** Occorre dimostrare anche la implicazione inversa: ogni radice dell'equazione c01(2) si può ottenere dalla soluzione della c02(3).

Per questo consideriamo il sistema di equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} u^2+v^2+w^2 &=& -\dfrac{p}{2} \\ u\,v\,w &=& -\dfrac{q}{8} \\ u\,v\,w &=& -\dfrac{q}{2} \end{cases} ,$$

nel quale u, v e w sono da considerare le incognite e x fa da parametro complesso generico.

Ci proponiamo di dimostrare che questo sistema è risolubile per essere in grado di concludere che una sua soluzione soddisfa anche c02(2) e quindi che la somma dei valori delle incognite $x = u + v + w$ soddisfa l'equazione c01(2)

B51:**c.04**

B51:**c.05**

B51:**c.06** Consideriamo come esempio l'equazione

$$(1) \qquad x^4 - 8\,x^3 + 10\,x^2 + 64\,x - 195 \;=\; 0\ .$$

Posto $y := x - 2$, otteniamo l'equazione equivalente

$$y^4 - 14\,y^2 + 40\,y - 75 \;=\; 0\ .$$

Per la corrispondente equazione risolvente cubica si trova

$$z^3 - 7\,z^2 + 31\,z - 25 \;=\; 0\ ,$$

le cui radici sono

$$z_1 = 1\ ,\ z_2 = 3 + 4\,i = (2+i)^2\ ,\ z_3 = 3 - 4\,i = (2-i)^2\ .$$

Dato che $(2+i)(2-i) = 5$, scegliamo $\sqrt{z_1} = -1$, $\sqrt{z_2} = 2+1$ e $\sqrt{z_3} = 2-i$, in modo che, per le [20] abbiamo:

$$y_1 = 3\ ,\ y_2 = -5\ ,\ y_3 = 1 + 2\,i\ ,\ y_4 = 1 - 2\,i\ ;$$

quindi per le radici della (1) troviamo

$$x_1 = 5\ ,\ x_2 = -3\ ,\ x_3 = 3 + 2\,i\ ,\ x_4 = 3 - 2\,i\ .$$

B51:d. teorema fondamentale dell'algebra

B51:**d.01** Dopo aver ottenuto nel secolo XVI le formule per le radici di terzo e quarto grado si è a lungo affrontato invano il problema di trovare formule per le equazioni polinomiali di grado superiore al quarto in grado da esprimere mediante i coefficienti dell'equazioni, operazioni razionali (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione) ed estrazioni di radici tutte (o in buona parte) le soluzioni delle equazioni stesse.

Acadde invece che all'inizio del secolo XIX Ruffini e Abel hanno dimostrato la impossibilità di risolvere questo problema in generale.

Il **teorema di Ruffini-Abel** afferma che per l'equazione polinomiale

(1) $$x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0 \;=\; 0 \quad \text{con} \;\; n > 4$$

i cui coefficientia_i si considerano variabili complesse (o anche solo reali) indipendenti (non soggette ad alcun vincolo) non è possibile trovare un'espressione finita che si serve delle a_i, di operazioni razionali e di estrazioni di radice che soddisfi l'equazione stessa.

Ne consegue che l'insieme dei numeri ottenibili dagli interi con operazioni razionali ed estrazioni di radici, oltre a contenere propriamente l'insieme dei razionali, è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri algebrici $\mathbb{R}_{\mathsf{A}}$.

In particolare l'insieme delle radici della forma $\sqrt[p]{q}$ con $p \in \mathbb{P}$ e $q \in (\mathbb{P} \setminus \{k \in \mathbb{P} :| k^p\}$ è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri algebrici irrazionali positivi $(\mathbb{R}_{\mathsf{A}} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathbb{R}_+$.

Si deve tuttavia segnalare che se i coefficienti della (1) sono soggetti a specifici vincoli si possono trovare soluzioni mediante radicali.

Di più esiste una importante teoria dovuta ad Evariste Galois che permette di stabilire per ogni particolare equazione della forma c01(1) se è risolvibile mediante radicali o meno.

Occorre anche dire che il teorema di Ruffini-Abel attualmente viene dimostrato nell'ambito della accennata `teoria di Galois` (wi).

Testi dell'*esposizione* in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/