1

Capitolo B43
piano-RR e funzioni-RtR trascendenti elementari

Contenuti delle sezioni

22 pagine

B430.01 Le pagine che seguono presentano le nozioni di base per lo studio del piano cartesiano sui numeri reali $\mathbb{R}\times\mathbb{R} := \{x, y \in \mathbb{R} :| \langle x, y\rangle\}$, l'ambiente utilizzato per iniziare la presentazione del calcolo infinitesimale.

Mentre in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si possono presentare nel modo migliore gli sviluppi delle conoscenze generali delle funzioni-RtR, le funzioni di variabile reale con valori reali, quando ci si occupa della effettiva eseguibilità dei calcoli per affrontare problemi concreti risulta sufficiente il suo sottoinsieme costruibile $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}\times\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$, il piano dei punti-RR costruibili, oggetti che si possono chiamare anche **punti-RCRC**.

Per questo motivo può essere opportuno collocare alcune argomentazioni entro $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che consente discorsi più scorrevoli, ed altre più attente alle applicazioni effettive entro $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}\times\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$.

Occorre anche dire che gran parte degli sviluppi con i numeri reali e con i numeri reali costruibili sono sostanzialmente equivalenti, ovvero che si può trasformare facilmente una versione entro $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in una versione entro $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}\times\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$ e viceversa.

B43 a. geometria del piano-RR

B43a.01 Al piano sui reali $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si possono estendere tutte le costruzioni introdotte per il piano sui razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ [B30 e B31], e in parte estese al piano sui numeri algebrici e al piano sui reali costruibili [B38] e tutte le proprietà conseguenti.

Si definiscono come **rette-RR** gli insiemi di punti-RR che soddisfano equazioni lineari nelle due variabili reali per le quali si usano per tradizione le lettere x e y; si tratta delle equazioni della forma

$$a\,x + b\,y + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a^2 + b^2 > 0 \ .$$

Si definiscono poi, similmente a quanto fatto per $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, le semirette-RR, le rette orientate-RR, i segmenti-RR, i vettori-RR, i vettori applicati-RR e le costruzioni che riguardano tali oggetti.

Si definisce come **distanza euclidea tra due punti-RR** $P = \langle a, b\rangle$ e $Q = \langle c, d\rangle$ come

$$|PQ| \ := \ \mathrm{dist}_2(P, Q) \ := \ \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

e la strettamente collegata **quadranza**

$$\mathsf{Qdr}(P, Q) \ := \ (a-c)^2 + (b-d)^2 \ = \ |PQ|^2 \ .$$

Si definiscono la **distanza Manhattan**, variante della distanza euclidea $\mathrm{dist}_1(P, Q) \ := \ |a-c| + |b-d|$ e la generalizzazione per ogni $p \in [1, +\infty)$

$$\mathrm{dist}_p(P, Q) \ := \ (|a-c|^p + |b-d|^p)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Inoltre denotiamo con **FunRtR** l'insieme delle funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$, funzioni che chiamiamo anche **funzioni-RtR**.

B43a.02 In modo del tutto simile a quello adottato in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, mediante sequenze di segmenti consecutivi si definiscono le **poligonali-RR orientate**, le **poligonali-RR**, le più particolari poligonali-RR ciclochiuse dette concisamente **poligonali-RRcy**.

Le poligonali nel piano-RR sono le più basilari e le più familiari poligonali, ma possono interessare entità con questo nome collocate in ambienti diversi da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, in particolare in $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Quando ci si limita al piano-RR, come nel presente capitolo, è giustificabile la semplificazione consistente nel trascurare la specificazione -RR.

Tra le poligonali-RRcy si distinguono le **poligonali-RRcynR**, poligonali-RRcy con nodi nonconsecutivi non ripetuti.

Tra queste ultime si distinguono le **poligonali-RRcy intrecciate**, poligonali nelle quali si trovano due coppie di segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ che si intersecano in un punto comune che potrebbe o meno coincidere con qualcuna delle estremità.
Le alternative **poligonali-RRcy nonintrecciate** sono dette spesso poligonali semplici.

Dalle poligonali-RRcy si ottengono le **classi equicicliche di poligonali-RRcy** che chiameremo più concisamente **poligonali-RRcy.EC**. termine che abbreviamo in **poligonali.CEC**.

Si osserva che una poligonale-RRcy equivale ad una poligonale.CEC munita di un suo nodo privilegiato, il nodo iniziale e finale della poligonale-RRcy.

B43a.03 Riveste interesse l'involuzione che associa a una poligonale la sua riflessa; questa in particolare associa a una poligonale-RRcy la poligonale-RRcy sua riflessa e induce l'importante involuzione per riflessione tra le poligonali.CEC.

Ad ogni duetto di poligonali.CEC (orientate) riflesse l'una dell'altra si associa una **poligonale.CEC nonorientata**.

Le poligonali.CEC nonintrecciate (orientate) consentono di introdurre i **poligoni orientati nonintrecciati**, le figure piane per le quali si distinguono i punti interni, i punti esterni e i punti della frontiera.
Lasciando cadere l'orientazione si hanno i **poligoni nonorientati nonintrecciati**.

Nella gran parte degli sviluppi le configurazioni nonorientate e in particolare i poligoni nonorientati, possono bastare e risultano più agevolmente trattabili; per alcune attività computazionali, invece, risultano più precise e preferibili le considerazioni sulle configurazioni orientate.

Accade comunque che in molte considerazioni le differenze tra configurazioni orientate e nonorientate si possono sottintendere senza seri rischi di ambiguità.

B43a.04 Tra i poligoni nonintrecciati si distinguono i **poligoni convessi orientati** e i **poligoni convessi nonorientati** dai nonconvessi: un poligono convesso è caratterizzato dal fatto che per ogni duetto di suoi punti $\{P, Q\}$, che possono essere interni o di sua frontiera, tutti i punti del segmento $\overline{PQ}$ sono punti interni del poligono stesso.

I poligoni sono casi particolari di figure-RR. Dal punto di vista insiemistico (e topologico) per i poligoni e molti altri generi di figure piane è necessari distinguere le figure che contengono i punti della loro frontiera, chiamate **figure chiuse**, da quelle che non ne contengono alcuno, chiamate **figure aperte**) e da quelle che ne contengono solo una parte (che raramente risultano interessanti).

In molte considerazioni conviene invece fare riferimento anche alle figure geometriche che chiamiamo **figure.RRmf**, definite come le classi di equivalenza delle figure-RR ottenute prescindendo dalla appartenenza o meno a esse dei punti sulla loro frontiera (la lettera "m" della specificazione intende richiamere "modulo".
Occorre aggiungere che anche per questi oggetti geometrici talora serve distinguere tra le orientate e le nonorientate.

B43a.05 Ai vari oggetti che si collocano in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, punti, segmenti, poligonali, poligoni, cerchi, ... orietati o meno, si devono associare valutazioni numeriche come coordinate, lunghezze, aree, pendenze, variazioni, ...

Per le elaborazioni effettive queste valutazioni si possono applicare solo a oggetti che si possono definire in $\mathbb{R}_\mathsf{C} \times \mathbb{R}_\mathsf{C}$ e si possono esprimere solo mediane numeri in $\mathbb{R}_\mathsf{C}$.

Ogni punto in $\mathbb{R}_\mathsf{C} \times \mathbb{R}_\mathsf{C}$ (che chiamiamo anche punto-RCRC) si può individuare effettivamente con una coppia di razionali ottenuti troncando opportunamente due `sarnic`.

Per esempio un triangolo orientato in $\mathbb{R}_\mathsf{C} \times \mathbb{R}_\mathsf{C}$ si può determinare con una sestupla di intervalli razionali chiusi opportunamente strutturata derivata da una sestupla di `sarnic`.

A tale triangolo si può assegnare come area il limite delle aree associabili ai triangoli-QQ corrispondenti, limite sicuramente esistente finito in quanto esprimibile come composizione aritmetica di limiti esistenti finiti.
Tale area è quindi espressa da un numero di $\mathbb{R}_\mathsf{C}$ che può essere negativo o positivo in dipendenza della orientazione del triangolo stesso.

Risulta possibile assegnare un'**area con segno** ad ogni poligono-RRmf orientato o equivalentemente a ciascuna delle poligonali-RR orientate (nonintrecciate o intrecciate) che lo delimitano grazie alla additività richiesta per le aree e alla possibilità di decomporre ogni poligono-RRmf in un numero finito di triangoli-RRmf.

Da queste considerazioni segue che le formule trovate per i poligoni-QQ e le poligonali-QQ rimangono valide per i poligoni-RR e per le poligonali-RR aventi i vertici in punti-RR costruibili.

B43a.06 Consideriamo i polinomi in una variabile reale x e le funzioni polinomiali del genere $\lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ loro associate.

Queste funzioni sono utili per moltissimi sviluppi e di esse si possono trattare molte caratteristiche costruttivamente e con relativa facilità; inoltre di essi si conosce una casistica molto vasta.

Per ogni funzione polinomiale di **FunRtR** $\searrow$ $y = p(x)$, l'insieme delle coppie $\{x \in \mathbb{R} :| \langle x, p(x)\rangle\}$ costituisce un esempio di curva nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, curva che chiamiamo concisamente **curva-RR**.

Le funzioni polinomiali di grado zero, cioè le funzioni costanti $y = \overline{y}$ relative ai possibili $\overline{y} \in \mathbb{R}_{nz}$, forniscono le rette orizzontali, ad esclusione dell'asse Ox, corrispondente al polinomio nullo, al quale assegnamo il grado -1.

I polinomi di grado 1 forniscono tutte le rette-RR a eccezione delle rette verticali esprimibili con le relazioni $x = \overline{x}$ per i vari $\overline{x} \in \mathbb{R}$.
Tutte le rette-RR si possono ottenere applicando delle rototraslazioni ad una qualsiasi di esse, per esempio a quella data dalla equazione $y = x$, .

I polinomi di grado 2, caratterizzati delle equazioni della forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$, esprimono parabole con asse verticale.
Tutte le parabole si possono ottenere da una di esse, in particolare da quella espressa dalla $y = x^2$, applicandole traslazioni e omotetie.

I polinomi di grado 3 forniscono le cosiddette **funzioni reali cubiche**; i polinomi di grado 4 le cosiddette **funzioni reali quartiche**; i polinomi di grado 5 le cosiddette **funzioni reali quintiche**; e così via.

B43a.07 Se consideriamo un polinomio in due variabili reali x e y, $P(x, y)$, la corrispondente funzione polinomiale è del genere $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$, ossia una funzione-RRtR.

Grande interesse rivestono gli insiemi di punti-RR $\langle x, y\rangle$ determinati da equazioni polinomiali della forma $P(x, y) = 0$: questi sono detti **curve razionali intere** e costituiscono esempi della variegata collezione delle **curve reali piane**.

Tra i più semplici esempi di curve razionali intere vi sono sono la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 di equazione $x^2 + y^2 = 1$, la più generale ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e l'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Tutte le circonferenze di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si ottengono applicando traslazioni e omotetie a una di esse, in particolare alla $x^2 + y^2 = 1$.

Tutte le ellissi si ottengono applicando a circonferenze traslazioni, omotetie unidirezionali e rotazioni. In particolare per ogni $a, b \in \mathbb{R}_+$ la ellissi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si ottiene applicando alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ la omotetia unidirezionale $\left\lceil x \mapsto \dfrac{x}{a} \right\rceil$ e la omotetia unidirezionale $\left\lceil y \mapsto \dfrac{y}{b} \right\rceil$.

Tutte le iperboli si ottengono applicando traslazioni, omotetie unidirezionali e rotazioni alla $y = \dfrac{1}{x}$.
Le ellissi, le iperboli e le parabole fanno parte delle curve fornite da equazioni di secondo grado nelle variabili x e y. Queste curve posseggono importanti proprietà comuni e sono studiate a partire dalla loro definizione come sezioni coniche in G50 e G70b.

Curve più generali sono date dall'annullamento di polinomi di gradi superiori al secondo.

A talune di queste conviene dare la forma di **curve razionali** determinate da equazioni della forma $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = 0$, dove $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ denotano polinomi in due variabili e con coefficienti reali.

Conviene segnalare subito che presentano grande interesse anche curve-RR non ottenibili con equazioni algebriche ma con equazioni che presentano forme più libere [G70i,j,k].

B43a.08 La determinazione delle caratteristiche delle curve piane, anche se esse si possono ricondurre alla sola nozione di polinomio, cioè alle sole operazioni aritmetiche su numeri e variabili reali, presenta aspetti impegnativi che richiedono sviluppi specifici; questi si collocano nella complessa disciplina chiamata `geometria algebrica (wi)` e richiedono di allargare la visione da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ al piano sui numeri complessi $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

In generale si pone il problema dello studio di **curve costruibili** determinate da richieste per le quali non bastano le espressioni basate sulle operazioni aritmetiche e su funzioni specifiche come le funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche che vedremo tra poco. Molte curve di interesse applicativo richiedono altri procedimenti costruttivi, innanzi tutto quelli basati sui molti meccanismi sviluppati dall'analisi infinitesimale.

Prima di affrontare questi studi, dunque, è necessario sviluppare solide conoscenze riguardanti il calcolo infinitesimale, conoscenze che si sono avvicinate nei capitoli B35 e B36 e che saranno sviluppate sistematicamente nei primi capitoli del tomo I.

B43a.09 Prospettiamo un altro approccio per lo studio della geometria del piano.

Oltre alle equazioni della forma $f(x,y) = 0$ con x e y variabili reali, risulta interessante e proficuo considerare disequazioni, cioè relazioni di una forma come $f(x,y) > 0$ o come $f(x,y) \leq 0$; queste relazioni individuano insiemi di punti-RR che costituiscono le figure piane sui reali, ossia le figure-RR.

Si tratta di sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sostanzialmente più estesi delle curve-RR i quali individuano talune di queste curve in quanto loro frontiere.

Come esempi relativamente semplici di figure-RR citiamo:

- il cerchio con centro nell'origine e raggio $r > 0$ costituito dai punti $\langle x, y\rangle$ tali che $x^2 + y^2 \leq r^2$;
- l'insieme dei punti esterni all'ellisse con con nell'origine e semiassi a e b costituito dai punti $\langle x, y\rangle$ tali che $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$;
- regioni delimitate da uno o da due rami di un'iperbole;
- regione al di sopra di una curva esponenziale.
- regione delimitata da curve trigonpmetriche.

In molti problemi si incontrano combinazioni insiemistiche (unioni, intersezioni, complementi, ...) delle accennate figure.

Una distinzione importante tra le figure-RR vede contrapposte le figure limitate, cioè interamente contenute in un rettangolo piano o in un disco piano e le illimitate.

Evidentemente queste figure presentano interesse per discipline come la cartografia, l'architettura, la progettazione di vari tipi di macchine e lo studio dei molti generi di movimenti di corpi singoli e di collezioni di molteplici tipi di oggetti (in particolare nella robotica, nella biologia molecolare e nella paleontologia).

B43 b. grafici di funzioni-RtR e curve piane

B43b.01 Sottoinsiemi del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di notevole importanza e utilità sono quelli delimitati dai grafici di funzioni-RtR costruibili a partire da espressioni matematiche o da altre richieste formali specifiche.

Si tratta di insiemi della forma $\{x \in D :| \langle x, f(x)\rangle\}$, con D sottoinsieme costruibile di $\mathbb{R}$ ed $f \in$ **FunRtR** costruibile, cioè tale che esista un procedimento che a ogni $x \in D \cap \mathbb{R}_{\mathsf{C}}$ permetta di approssimare illimitatamente il valore reale $f(x)$.
Ciascuna di queste ordinate evidentemente è un reale costruibile.

L'insieme di questi grafici è estremamente variegato e risulta utile classificarlo in vari modi:
sulla base delle caratteristiche del dominio della funzione,
distinguendo il genere del procedimento per il calcolo delle sue ordinate,
in relazione alla complessità delle elaborazioni richieste per determinare i suoi punti e ,
facendo riferimento alle simmetrie che lo riguardano.

Procedendo con sistematicità, ciascuna delle classi di grafici così individuate si può utilmente collegare ai generi delle possibili applicazioni.

Per lo studio di molti grafici di funzioni servono strumenti matematici e informatici piuttosto impegnativi, ma che negli ultimi decenni sono diventati sempre più efficienti, versatili e disponibili.

Ricordiamo in particolare i metodi del calcolo infinitesimale (che sono introdotti nei capitoli I12, I13, I15, I20 ed I25) e i pacchetti computazionali sviluppati da progetti di ricerca e da industrie di software.

B43b.02 Tra le funzioni reali hanno particolare importanza quelle che sono individuate da espressioni di forme conosciute e controllabili.

Le prime da considerare sono le funzioni polinomiali, le funzioni definite sull'intero $\mathbb{R}$ e i cui valori si possono ottenere da espressioni della forma

$$y = p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i\, x^i$$

per ogni valore reale dell'argomento x già trattate in B33 e in B41e; il loro insieme lo denotiamo con ***FunPln***.

Dopo di esse conviene considerare le **funzioni reali razionali** o **funzioni-RtR razionali**, le funzioni di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ fornite da espressioni nelle quali compare almeno una divisione, oltre alla variabile x, a possibili operatori di somma, sottrazione e prodotto e a eventuali costanti e parametri reali; le loro espressioni sono riconducibili a equivalenti espressioni costituite da quozienti di polinomi irriducibili della forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
Il loro insieme viene denotato con FunRat.

Queste funzioni sono definite per tutti gli x reali, a eccezione degli zeri del polinomio a denominatore $q(x)$.

Più in generale si introducono curve algebriche mediante espressioni della forma $\mathcal{R}(x, y) = 0$, dove $\mathcal{R}$ denota una espressione razionale.

Spesso una funzione-RtR razionale viene individuata mediante una sua espressione senza specificare il suo dominio, sottintendendo che esso sia il più ampio insieme di numeri reali per i quali l'espressione può essere calcolata.

Questo accade per molte altre funzioni di variabile reale o anche a funzioni di una o più variabili nel campo dei complessi o di altre strutture algebriche che sono fornite mediante espressioni in qualche misura controllabili. Per tutte queste funzioni si pone il cosiddetto **problema della determinazione del dominio**.
Questo problema è relativamente semplice da risolvere per le funzioni-RtR razionali, in quanto si riconduce alla determinazione degli zeri del polinomio denominatore della sua forma ridotta, mentre può richiedere gli studi più diversi e risultare molto impegnativo per altre funzioni [e.g. `funzione di Riemann (wi)`].

B43b.03 Le proprietà di simmetria dei grafici delle funzioni-RtR, come per molte altre configurazioni geometriche e per molte altre costruzioni matematiche, possono essere di grande utilità nella determinazione delle caratteristiche di queste entità e per renderne più compatta e organica la presentazione.

Una funzione-RtR $f(x)$ si dice **funzione-RtR pari** sse il suo grafico è invariante per la riflessione rispetto all'asse delle ordinate; equivalentemente si può dire che una funzione è pari sse il suo dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine e per ogni $x \in \mathsf{dom}(f)$ si ha $f(-x) = f(x)$.

Una funzione-RtR $g(x)$ si dice **funzione-RtR dispari** sse il suo grafico è invariante per la simmetria centrale di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con centro nell'origine; equivalentemente si può dire che una funzione è dispari sse il suo dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine e se per ogni $x \in \mathsf{dom}(f)$ si ha $f(-x) = -f(x)$.

Sono funzioni pari le funzioni date da polinomi in cui compaiono solo potenze pari della variabile x.
Più in generale è una funzione pari una funzione che si può rappresentare con un'espressione nella quale la variabile x si può far comparire solo come sottoespressione x^2.

Sono funzioni dispari le funzioni espresse da polinomi in cui compaiono solo potenze dispari della x e le funzioni che si possono identificare con un'espressione nella quale compaiono solo potenze dispari della variabile.

Componendo funzioni pari con lo stesso dominio mediante operazioni di combinazione lineare, prodotto e divisione si ottiene una funzione pari.
Ogni combinazione lineare di funzioni dispari con lo stesso dominio è una funzione dispari. Il prodotto e la divisione di due funzioni dispari con lo stesso dominio forniscono funzioni pari.
Componendo con un prodotto o con una divisione una funzione pari ed una dispari aventi lo stesso dominio si ottengono funzioni dispari.

B43b.04 Sia T un numero reale positivo; si dice che una funzione $f(x)$ definita sull'intero $\mathbb{R}$ è una **funzione periodica** di periodo T sse $\forall x \in \mathbb{R} \;\vdots\; f(x+T) = f(x)$.
Questa richiesta è equivalente alla richiesta $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ z \in \mathbb{Z} \;\vdots\; f(x + z\,T) \;=\; f(x)$.

Un semplice esempio di funzione periodica è la funzione **mantissa** $\mathrm{mant}(x) \;:=\; x - \lfloor x \rfloor$; si tratta di una funzione di periodo 1.
Altre funzioni periodiche si ottengono con varie modifiche della funzione mantissa: Ad esempio $\mathrm{mant}(2\,x)$ è periodica di periodo $1/2$, e $a + b\,\mathrm{mant}(x\,c + d)$, con a, b e d reali qualsiasi e c reale nonnullo qualsiasi è periodica di periodo $1/c$; è periodica anche ogni funzione della forma $P(\mathrm{mant}(x))$ con $P(x)$ polinomio qualsiasi.

//input pB43b04

Come vedremo in :e, sono funzioni periodiche le funzioni circolari.

B43b.05 Spesso è utile caratterizzare le funzioni reali rispetto all'ordinamento totale "$\leq$" dell'insieme dei reali del quale fanno parte i rispettivi domini e codomini.

Si dice **funzione reale crescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathsf{dom}(f) \;\; \vdots \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \; .$$

Si dice **funzione reale decrescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathsf{dom}(f) \;\; \vdots \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \; .$$

Si dice **funzione reale nondecrescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathsf{dom}(f) \;\; \vdots \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \; .$$

Si dice **funzione reale noncrescente** u na funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathsf{dom}(f) \;\; \vdots \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \; .$$

Collettivamente si dicono **funzioni monotòne** [in senso stretto] le funzioni che sono crescentoppure decrescenti e si dicono **funzioni monotòne in senso lato** le funzioni che sono nondecrescenti o noncrescenti.

Sono funzioni crescenti le funzioni date da potenze dispari della variabile $y = x^{2h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.
Ogni funzione esponenziale della forma b^x è decrescente se $0 < b < 1$, mentre è crescente se $b > 1$.
Si può quindi dire che tutte le funzioni b^x con b positivo e diverso da 1 sono funzioni monotone.

Le funzioni opposte delle funzioni crescenti sono funzioni decrescenti.
Le combinazioni lineari con coefficienti positivi di funzioni crescenti (risp. decrescenti) sono funzioni crescenti (risp. decrescenti).
Il prodotto di due funzioni crescenti positive è una funzione crescente positiva. Sottraendo da una funzione crescente una funzione noncrescente (o decrescente) si ottiene una funzione crescente.

Se $c(x)$ è una funzione crescente, sono funzioni nondecrescenti $\lfloor c(x) \rfloor$ e $\lceil c(x) \rceil$.
Se $d(x)$ è una funzione decrescente sono funzioni noncrescenti $\lfloor d(x) \rfloor$ e $\lceil d(x) \rceil$.

B43b.06 Una proprietà importante per le funzioni reali è costituita dall'essere invertibile, cioè dall'appartenere a $\lceil \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R} \rceil$.
A ogni funzione invertibile f è associata la funzione inversa $f^{-\mathbf{1}}$,

$$\forall x \in \mathsf{dom}(f) \;\vdots\; f^{-\mathbf{1}}(f(x)) = x \quad \text{ e } \quad \forall y \in \mathsf{cod}(f) \;\vdots\; f(f^{-\mathbf{1}}(y)) = y \; .$$

La determinazione di una funzione inversa in linea di principio richiede una precisa determinazione del dominio e del codominio della funzione di partenza. Per molte funzioni note la determinazione della funzione inversa ha condotto a una funzione "nuova" di rilevante utilità.

La funzione inversa della $y = f(x)$ può essere espressa sia come $x = f^{-\mathbf{1}}(y)$, sia come $y = f^{-\mathbf{1}}(x)$.

Il primo tipo di espressione è vantaggiosa nelle applicazioni nelle quali la x e la y riguardano grandezze variabili di natura diversa; tipicamente quando la $y = f(x)$ esprime la dipendenza di una grandezza fisica rappresentata dalla y da un'altra rappresentata dalla x, entrambe le grandezze essendo ben definite operativamente.

Il secondo tipo di espressione risulta conveniente quando si studiano con sistematicità alcune funzioni reali specifiche e risulta interessante confrontare due funzioni l'una l'inversa dell'altra e più in generale due funzioni con un forte collegamento delle rispettive espressioni.

In questi paragrafi interessa maggiormente questo secondo tipo, in particolare perché in varie circostanze risulta utile servirsi simultaneamente del grafico di una $y = f(x)$ e di quello della corrispondente $y = f^{\mathbf{-1}}(x)$.
È importante notare che il secondo di questi grafici in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si ottiene applicando al primo la riflessione rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante $y = x$.

B43b.07 Conviene anche osservare esplicitamente che non vanno confusi il passaggio alla funzione inversa, cioè il passaggio da una f alla $f^{\mathbf{-1}}$, con il passaggio alla funzione reciproca, ossia il passaggio da una $f(x)$ alla $(f^{-1})(x) \ := \ \dfrac{1}{f(x)}$: la prima trasformazione riguarda l'inversione del prodotto di composizione tra funzioni, la seconda l'inversione del prodotto tra valori di funzioni, cioè l'estensione cartesiana della passaggio al numero reale reciproco di un reale nonnullo.

Conviene osservare esplicitamente che per gli esponenti del segno di funzione "f" nei due casi sono stati utilizzati segni leggermente diversi:

$$f^{\mathbf{-1}} \ \neq \ f^{-1} \ .$$

Sono invertibili tutte le funzioni crescenti e tutte le decrescenti.
La inversa della funzione $y = m\,x + c$ con $m \in \mathbb{R}_{nz}$ è la $y = \dfrac{x}{m} - c$.
La inversa della funzione $y = x^2$ avente come dominio $\mathbb{R}_+$ è la funzione radice quadrata aritmetica $y = \sqrt{x}$; la sua reciproca è invece la $y = \dfrac{1}{x^2}$.
La inversa della funzione $y = x^{2k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$ avente come dominio e come codominio l'intero $\mathbb{R}$ è la funzione radice $2k+1$-esima $\ y = \sqrt[2k+1]{x}$.

B43b.08 Si dice **funzione reale involutoria** ogni funzione-RtR che coincide con la propria inversa; una tale funzione ovvviamente deve avere dominio e codominio coincidenti.

Una funzione involutoria T può anche considerarsi una funzione con $\mathsf{dom}(T) = \mathsf{cod}(T)$ che è una endofunzione entro $\mathsf{dom}(T)$ tale che $T \circ T = \mathsf{Id}_{\mathsf{dom}(T)}$.

Coincidono con la propria inversa le funzioni $y = x$, $y = -x$, $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = -\dfrac{1}{x}$: in effetti sono trasformazioni involutorie l'identità di $\mathbb{R}$, il passaggio al numero reale opposto, il passaggio al numero reale (nonnullo) reciproco e il passaggio al numero reale opposto del reciproco.

Per la quarta funzione è utile osservare che si tratta della funzione composta della seconda e della terza, che queste sono trasformazioni commutative e che in generale il prodotto di composizione di due trasformazioni commutative involutorie T_1 e T_2 è anch'essa involutoria: infatti

$$(T_1 \circ T_2)^{\mathbf{-1}} \ = \ T_2^{\mathbf{-1}} \circ T_1^{\mathbf{-1}} \ = \ T_2 \circ T_1 \ = \ T_1 \circ T_2 \ .$$

B43b.09 Lo studio delle figure geometriche piane (chiamate spesso figure 2D) e delle figure solide, cioè figure nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^{\times 3}$ (chiamate spesso figure 3D) si serve sia dei cosiddetti metodi sintetici sia dei cosiddetti metodi analitici.

I primi riguardano proprietà esprimibili in termini puramente geometrici, mentre i metodi analitici procedono utilizzando sistematicamente le coordinate dei punti che compongono le figure. Si parla quindi spesso di **geometria sintetica** e di **geometria analitica**.

A grandi linee accade che i metodi sintetici possono portare a risultati molto incisivi attraverso procedimenti che riguardano proprietà essenziali, mentre i metodi analitici richiedono di affrontare molti dettagli e spesso devono servirsi di espressioni elaborate, ma possono essere portati avanti in modo sistematico piuttosto agevolmente.

Se possibile risulta più diretto e significativo procedere con argomentazioni sintetiche; spesso però si è costretti a procedere per via analitica o alternando procedimenti sintetici e analitici.

Per affrontare molti problemi, soprattutto quelli posti dalle applicazioni più elaborate, occorre procedere per via analitica e spesso si devono effettuare delle approssimazioni.

Per queste attività occorre osservare che gli odierni strumenti di calcolo automatico, grazie alla crescita delle loro prestazioni, possono servire come utili suggeritori e orientatori, sono sostanzialmente indispensabili per le valutazioni approssimate, consentono di costruire grafici e animazioni utili sia per le presentazioni dei risultati che per il suggerimento di modelli e procedimenti più raffinati. Naturalmente questi vantaggi richiedono la possibilità e la capacità di servirsi di strumenti non banali.

Inoltre le procedure automatiche (sistemi CAS) vengono usate anche per rielaborare formule molto impegnative al fine di ricavarne algoritmi di approssimazione.
Occorre anche segnalare che in attività di ampio interesse collegate allo studio delle funzioni-RtR e ancor di più in quelle collegate allo studio delle funzioni tra spazi mulidimensionali da alcuni anni sono adottati procedimenti complessi sviluppati nell'area dell'intelligenza artificiale.

B43**b.10** Per affrontare molti problemi si rende necessario lo studio di funzioni della forma $y = f(x)$ in 2D e $z = f(x, y)$ in 3D, sempre con l'intesa che x, y e z siano variabili reali.

Tra le prime funzioni che interessano ci sono le funzioni-RtR polinomiali in una variabile sui reali e le funzioni in due variabili $P(x, y) \in \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$, cioè funzioni-RRtR.
Queste funzioni polinomiali sono utili direttamente, in quanto servono ad individuare direttamente molti enti geometrici e possono essere efficacemente studiate e sottoposte a manipolazioni numeriche e simboliche.

Le funzioni inverse delle funzioni polinomiali comprendono le **funzioni esprimibili mediante radicali**, ma non solo quelle.
Abbiamo la funzione radice quadrata definibile solo per argomenti nonnegativi; una situazione analoga si ha per le funzioni radici di grado pari, mentre le radici di grado dispari sono invece definite per ogni valore dell'argomento.

B43**b.11** Tra i sottoinsiemi del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hanno grande importanza quelli costituiti dai grafici di funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ costruibili a partire da richieste specifiche.
Si tratta quindi di insiemi della forma $\{x \in D :| \langle x, f(x) \rangle\}$ con D sottoinsieme costruibile di $\mathbb{R}$, ed f funzione del genere $\lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ e costruibile, cioè tale che esista un procedimento che a ogni $x \in D \cap \mathbb{R}_{\mathsf{C}}$ permetta di ricavare il valore reale (costruibile) $f(x)$.

B43 c. esponenziali e logaritmi

B43c.01 Per ogni reale positivo $B \neq 1$ la funzione esponenziale $y = B^x$ è decrescente se $B < 1$ e crescente se $B > 1$; quindi per ogni $B \in (0,1) \dot\cup (1,+\infty)$ la $y = B^x$ è dotata di funzione inversa: questa funzione si dice **funzione logaritmo** in base B e si denota con $y = \log_B(x)$.

Dato che $\mathsf{dom}(B^x) = \mathbb{R}$ e $\mathsf{cod}(B^x) = \mathbb{R}_+$, le funzioni logaritmo sono del genere $\lceil \mathbb{R}_+ \leftrightarrow \mathbb{R} \rceil$; inoltre per $0 < B < 1$ si hanno funzioni esponenziali decrescenti e per $b > 1$ funzioni esponenziali crescenti.

In termini discorsivi si può dire che $\log_B(x)$ esprime l'esponente da assegnare alla base B per ottenere il valore x.

B43c.02 Per esponenziali e logaritmi si dimostrano le proprietà che seguono e che esponiamo assumendo $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

(1) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \log_b(b^x) = x$.

Dim.: Se $y = \log_b(b^x)$ allora $b^x = b^y$ e la monotonia delle funzioni esponenziali implica $y = x$ ▮

(2) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;:\; b^{\log_b(x)} = x$.

Dim.: Direttamente dalla definizione ▮

(3) Prop.: $\log_b(b) = 1$.

Dim.: Dalla definizione ▮

(4) Prop.: $\log_b(1) = 0$ ▮

(5) Prop.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \;:\; \log_b(x_1\, x_2) = \log_b(x_1) + \log_b(x_2)$.

Dim.: Dalla definizione ▮

(6) Prop.: $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$

Dim.: Dalla definizione ▮

(7) Prop.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \;:\; \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_b(x_1) - \log_b(x_2)$.

Dim.: Dalla definizione, oppure da (5) e (6) ▮

Si trovano poi le formule relative al cambiamento della base b alla base c, con c reale positivo diverso da 1:

(8) Prop.: $\log_b(c) = \dfrac{1}{\log_c(b)}$.

Dim.: Se $L := \log_b(c)$ si ha $b^L = c$, mentre se $M := \log_c(b)$ si ha $b = c^M$; inoltre $(b^L)^M = c^M = b^{L\cdot M} = b$ e grazie alla monotonia delle funzioni esponenziali si ottiene $L = \dfrac{1}{M}$ ▮

(9) Prop.: $\forall m \in \mathbb{P} \;:\; \log_b(c^m) = m\, \log_b(c)$.

Dim.: Dalla (5) ▮

(10) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \log_b(c^x) = x\, \log_b(c)$ ▮

(11) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \log_c(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(c)} = \log_c(b) \cdot \log_b(x)$ ▮

Per i cambiamenti della base degli algoritmi sono utili i seguenti valori numerici

$\log_{10} 2 = 0.30102999566398119521373889472449$ $\quad \log_2 10 = 3.3219280948873623478703194294894$

$\log_{10} e = 0.43429448190325182765112891891661$ $\log_e 10 = 2.3025850929940456840179914546844$

$\log_e 2 = 0.69314718055994530941723212145818$ $\log_2 e = 1.4426950408889634073599246810019$

B43c.03 Nello studio delle funzioni-RtR definite mediante espressioni e con il dominio il più possibile esteso, si riscontrano proprietà come quelle di simmetria, di monotonia e di invertibilità solo in una gamma ristretta di casi; accade più di frequente di riscontrare le suddette proprietà in funzioni ottenute dalle espressioni restringendo opportunamente il loro possibile dominio.

Per esempio la funzione $y = x^2$ definita per ogni x reale non è monotona, mentre lo sono le sue riduzioni a $\mathbb{R}_{-0}$ e a $\mathbb{R}_{0+}$.

Similmente la funzione $y = x^3 - x = (x-1)x(x+1)$ non è invertibile, mentre lo sono le sue riduzioni ai sottodomini disgiunti $\Big(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big]$, $\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big]$, $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\Big)$ (questa affermazione si chiarisce osservando la sua derivata $y' = 3x^2 - 1 = (\sqrt{3}\,x - 1)(\sqrt{3}\,x + 1)$.

B43 d. circonferenze e angoli

B43d.01 Consideriamo la generica circonferenza in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: sia $C = \langle x_C, y_C\rangle$ il suo centro ed r il suo raggio. La sua equazione esprime direttamente la definizione di luogo dei punti-RR che distano r dal centro è

$$(1) \quad (x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = r^2 \qquad \text{ovvero} \qquad x^2+y^2-2\,x\,x_C-2\,y\,y_C+{x_C}^2+{y_C}^2-r^2=0\ .$$

Da qui si ricava anche che un'equazione della forma $x^2+y^2+B\,x+C\,y+D=0$ rappresenta la circonferenza avente il centro in $\left\langle -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right\rangle$ e di raggio $\sqrt{\frac{B^2+C^2}{4}-D}$, sotto la condizione che B, C e D rendano positivo quest'ultimo radicando.

Una circonferenza particolare è quella con centro nell'origine e raggio 1; essa viene detta **circonferenza goniometrica**.
La circonferenza che soddisfa la (1) viene trasformata nella circonferenza goniometrica dalla trasformazione $\boldsymbol{Trsl}(\langle -x_C, -y_C\rangle)\circ_{lr} \boldsymbol{Hmtt}(1/r)$ alla quale diamo il nome di **trasloomotetia**.
Di conseguenza molte proprietà delle circonferenze si possono ottenere da proprietà della circonferenza goniometrica attraverso semplici traslazioni e omotetie.

B43d.02 Definiamo ora la lunghezza della circonferenza goniometrica.

Se ci accontentiamo di un semplice modello materiale possiamo dire che essa è la lunghezza del segmento che si ottiene tagliando la circonferenza in un suo punto e "rettificando" questa curva, cioè chiedendo che sia costituita da un materiale filiforme flessibile ma non estendibile e facendo assumere a tale oggetto forma rettilinea.

Più matematicamente la lunghezza della circonferenza si ottiene come limite per n tendente a $+\infty$ delle due successioni dei perimetri dei poligoni regolari di n lati, risp., inscritti nella e circoscritti alla circonferenza.
Per ottenere questo limite possono considerare solo i poligoni aventi $4,\ 8,\ 16, ...,\ 2^k, ...$ lati, che in linea di principio sono facilmente costruibili.

//input pB43d02

Con tale processo si individua un numero reale costruibile che si denota con $2\,\pi$.

La ricerca di approssimazioni sempre più precise del numero reale π è stata considerata una sfida intellettuale da numerosi ricercatori dai tempi antichi alle attuali attività che utilizzano programmi sofisticati e potenti sistemi di calcolo automatico (`History of numerical approximations of pi (we)`].

La sua approssimazione con 50 cifre è la seguente:

$$\pi \approx 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ .$$

B43d.03 La lunghezza di una circonferenza di raggio r è data da $2\,\pi\,r$. Infatti tutti i poligoni che servono alle approssimazioni successive di questa lunghezza, rispetto ai poligoni utilizzati per la circonferenza goniometrica hanno le lunghezze dei lati e dei perimetri utilizzati per la circonferenza goniometrica moltiplicate per r.

Si dice **arco di circonferenza iniettivo** l'insieme dei suoi punti determinati da una coppia di essi, chiamiamola $\langle P, Q\rangle$, e dall'essere toccati da un punto che si muove nel verso orario da P a Q. Esso si denota con $\overparen{PQ}$.

Una circonferenza con una coppia di un suo punto replicato $\langle P, P\rangle$ si può associare sia a un arco di lunghezza 0 ridotto al punto P sia all'intera circonferenza da percorrere da P a P.

Si definisce come **lunghezza di un arco iniettivo** $\overparen{PQ}$ l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte all'arco stesso. Questa lunghezza si può individuare come limite della successione delle lunghezze delle poligonali ottenute con k successivi dimezzamenti dell'arco in esame, ossia delle poligonali aventi i vertici separati da ampiezze angolari esprimibili con espressioni della forma $\dfrac{h}{2^k}\,\alpha$.

La lunghezza dell'arco $\overparen{PQ}$ si denota con $|\overparen{PQ}|$.

La lunghezza di una circonferenza si può considerare come estremo superore delle lunghezze dei suoi archi.

Data una circonferenza di raggio r si ottengono con operazioni geometriche molto semplici le sue suddivisioni in $k = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16$ archi congruenti; le ampiezze di tali suddivisioni sono date dalla espressione $\dfrac{2\,\pi}{k}$ e le corrispondenti lunghezze dalla $\dfrac{2\,\pi\,r}{k}$.

B43d.04 Ad un arco iniettivo $\overparen{PQ}$ si associano due ordinamenti totali dei suoi punti che chiamiamo **versi di percorrenza**: quello che porta da P a Q che diciamo **verso positivo** o **verso antiorario** e quello che porta da Q a P che diciamo **verso negativo** o **verso orario**.

Si dice **arco orientato iniettivo** di una circonferenza una coppia costituita da un suo arco iniettivo $\overparen{PQ}$ e da uno dei suoi due versi di percorrenza. L'arco orientato corrispondente ad $\overparen{PQ}$ percorso secondo il verso positivo si denota con $+\overparen{PQ}$; l'arco orientato opposto del precedente, corrispondente al percorrere $\overparen{PQ}$ secondo il verso negativo, si denota con $-\overparen{PQ}$.

Si conviene di attribuire agli archi iniettivi orientati con verso antiorario $+\overparen{PQ}$ una lunghezza positiva, $|\overparen{PQ}|$, cioè la lunghezza del relativo arco e attribuire agli archi orientati con verso orario $-\overparen{PQ}$ una lunghezza negativa, $-|\overparen{PQ}|$.

Consideriamo ancora una circonferenza di centro C e raggio r un suo arco iniettivo $\overparen{PQ}$ e i corrispondenti due archi orientati $+\overparen{PQ}$ e $-\overparen{PQ}$.

All'arco orientato antiorario $+\overparen{PQ}$ associamo la coppia $\left\langle \overline{CP}\,, \dfrac{|\overparen{PQ}|}{r} \right\rangle$ che chiamiamo **angolo orientato positivo**.

All'arco orientato orario $-\overparen{PQ}$ associamo la coppia $\left\langle \overline{CP}\,, \dfrac{-|\overparen{PQ}|}{r} \right\rangle$ che chiamiamo **angolo orientato negativo**.

A un arco limite $\overparen{PP}$ costituito dal solo punto P si associa l'angolo $\langle \overline{CP}\,, 0\rangle$.

A un arco costituito dai punti dell'intera circonferenza percorsi a partire da un punto P in verso antiorario si attribuisce l'angolo $\langle \overline{CP}\,, 2\pi\rangle$; al suo opposto, ovvero alla circonferenza percorsa in verso orario, si assegna l'angolo $\langle \overline{CP}\,, -2\pi\rangle$.

Gli angoli degli archi orientati iniettivi quindi sono in corrispondenza biunivoca con le coppie $\langle\sigma, a\rangle$ costituite da una semiretta e da un numero reale dell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

Questo numero reale si dice **ampiezza in radianti dell'angolo** e la misura dell'angolo di un radiante si denota con rad.

Può essere opportuno presentare queste entità con descrizioni intuitive; si presenta $\left\langle \overline{CP}\,, +\frac{|\widehat{PQ}|}{r} \right\rangle$ come l'insieme dei punti del piano toccati muovendo una semiretta variabile $\overline{CA}$ determinata dal punto A che si muove sull'arco da P a Q; si descrive invece $\left\langle \overline{CP}\,, -\frac{|\widehat{PQ}|}{r} \right\rangle$ come l'insieme dei punti del piano toccati muovendo una semiretta variabile $\overline{CA}$ determinata dal punto A che si muove sull'arco da Q a P.

Chiaramente l'ampiezza di un arco orientato iniettivo non dipende dal raggio della circonferenza alla quale appartiene l'arco utilizzato per la definizione.

È risultato vantaggioso riferirsi a circonferenze di raggio 1, in quanto le lunghezze con segno dei loro archi forniscono direttamente le ampiezze degli angoli orientati.

B43d.05 In generale si definisce **angolo orientato** del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ogni coppia $\langle\overline{CP}\,, \alpha\rangle$ costituita da una qualsiasi semiretta e da un numero reale α qualsiasi; C si dice vertice dell'angolo e α ampiezza dell'angolo.

Intuitivamente un angolo orientato corrisponde a un movimento di una semiretta di estremo C che parte dalla posizione $\overline{CP}$ e ruota in verso antiorario se $\alpha > 0$, in verso orario se $\alpha < 0$, in modo da percorrere sulla circonferenza di centro C e raggio 1 un arco di lunghezza $|\alpha|$, con la possibilità di compiere più di un giro.

In molte questioni della geometria e delle sue applicazioni interessano soprattutto ampiezze inferiori a π di angoli nonorientati e la definizione data può essere considerata inutilmente complicata.

La definizione data però consente di utilizzare senza vincoli gli angoli e le loro ampiezze in molte costruzioni formali e in molte procedure di grande utilità.
In particolare si possono effettuare senza restrizioni tutte le operazioni aritmetiche sulle ampiezze degli angoli orientati e queste operazioni si possono utilizzare in una grande varietà di composizioni e di trasformazioni geometriche.

In molti contesti comunque risulta possibile senza ingenerare ambiguità confondere gli angoli con le loro ampiezze e trascurare le orientazioni di archi e angoli.

B43d.06 Si dice **angolo retto** ogni angolo di ampiezza $\frac{\pi}{2}$; si dice **angolo piatto** ogni angolo di ampiezza π; si dice **angolo acuto** ogni angolo avente ampiezza appartenente a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; si dice **angolo ottuso** ogni angolo avente ampiezza appartenente a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

In molte attività pratiche conviene esprimere le ampiezze degli angoli nella scala dei **gradi sessagesimali**. Si tratta di una scala proporzionale alla scala dei radianti secondo la quale all'ampiezza π radianti, l'ampiezza degli angoli piatti, corrisponde l'ampiezza di 180°; alla scala sessagesimale inoltre si chiede di utilizzare come sottomultipli del grado le sue sessantesime parti chiamate **gradi primi**; si chiede anche di utilizzare come sottomultipli del grado primo le sue sessantesime parti chiamate **gradi secondi** e di servirsi dei sottomultipli decimali dei gradi secondi.

Si usano quindi notazioni come $37^\circ\ 23'\ 07.56''$ per denotare l'ampiezza di

$$36 + \frac{23}{60} + \frac{7.56}{3\,600} \;=\; \frac{36 \cdot 360\,000 + 23 \cdot 6\,000 + 756}{360\,000} \;=\; \frac{13\,098\,756}{360\,000} = 36.3854\overline{33} \text{ gradi sessagesimali.}$$

Si hanno dunque le seguenti uguaglianze

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} \text{ gradi} \qquad 1' = \frac{1}{60} \text{ gradi} \qquad 1'' = \frac{1}{3\,600} \text{ gradi}$$

e si utilizzano i seguenti fattori di conguaglio

$$1^\circ = 0.017\,453\,29... \text{ rad} \qquad 1' = \; 0.000\,290\,888... \text{ rad} \qquad 1'' = \; 0.000\,000\,484\,81 \text{ rad} \;\text{ e}$$

$$1 \text{ rad} = \; 57.295\,779\,51^\circ = \; 3\,437.7468' = \; 206\,264.81'' \;.$$

Talora però si esprimono gli angoli mediante i gradi e i loro sottomultipli decimali; in questo caso si parla di scala dei **gradi decimali**.

Nel seguito, salvo avvertimento contrario, esprimeremo tutte le ampiezze degli angoli in radianti.

B43 e. funzioni circolari

B43e.01 Facciamo ancora riferimento alla circonferenza goniometrica e consideriamo un suo punto generico $P = \langle a, b\rangle$, le sue proiezioni $A = \langle a, 0\rangle$ sull'asse delle ascisse e $B = \langle 0, b\rangle$ sull'asse delle ordinate e il triangolo OAP rettangolo in A; chiamiamo inoltre x l'ampiezza con segno dell'angolo orientato $\widehat{AOP}$.

Si dice **seno** dell'angolo $\widehat{AOP}$ di ampiezza x, e si scrive $\sin(x)$ o $\sin x$, la lunghezza con segno del segmento orientato $\overrightarrow{AP}$, cioè la ordinata del punto P.

Si dice **coseno** dell'angolo $\widehat{AOP}$ di ampiezza x, e si scrive $\cos(x)$ oppure $\cos x$, la lunghezza con segno del segmento orientato $\overrightarrow{OA}$, cioè la ascissa a del punto P.

Il punto P quindi si può esprimere come $P = \big\langle \cos x, \sin x\big\rangle$.

Per le potenze delle funzioni circolari si usano scritture come $\sin^2 x$ per denotare $(\sin x)^2$, $\cos^3 x$ per denotare $(\cos x)^3$ e $\tan^4 x$ per denotare $(\tan x)^4$.

Per le funzioni seno e coseno ottenute facendo variare x in $\mathbb{R}$, ovvero muovendo nei molti modi possibili il punto P sulla circonferenza goniometrica, si trovano subito le proprietà che seguono.

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad , \qquad -1 \le \cos x \le 1 \ ,$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \ \sin(x + k\,2\,\pi) \ = \ \sin x \quad , \qquad \cos(x + k\,2\,\pi) \ = \ \cos x \ ,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \ = \ 1 \ ,$$

$$\cos(-x) \ = \ \cos(x) \quad , \qquad \sin(-x) \ = \ -\sin(x) \quad .$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1 .

Si osserva anche che gli zeri della funzione $\sin x$ costituiscono l'insieme $\{k \in \mathbb{Z} :|\ k\pi\}$, mentre l'insieme degli zeri della funzione $\cos x$ è $\left\{k \in \mathbb{Z} :|\ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$.

B43e.02 Si definisce **tangente** di un angolo di ampiezza x

$$\tan x \ := \ \frac{\sin x}{\cos x} \ .$$

Questa funzione è definita per ogni x reale a eccezione dei punti in cui si annulla la funzione $\cos x$, cioè i punti $x = (2\,k + 1)\frac{\pi}{2}$ per ogni k intero; scriviamo quindi $\mathsf{dom}(\tan) \ = \ \mathbb{R} \setminus (2 \cdot \mathbb{Z} + 1)\,\frac{\pi}{2}$.

Si definisce **cotangente** di un angolo di ampiezza x

$$\cot x \ := \ \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \ .$$

Questa funzione è definita per ogni x reale a eccezione dei punti in cui si annulla la $\sin x$, ovvero la $\tan x$, cioè i punti $x = k\,\pi$ per ogni k intero; scriviamo quindi $\mathsf{dom}(\cot) \ = \ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cdot \pi$.

Sia la tangente che la cotangente sono funzioni dispari, in quanto la tangente è quoziente di una dispari con una pari e la cotangente quoziente di una pari con una dispari.

Per tangente e cotangente si trovano subito le proprietà di periodicità:

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,,\ x \in \mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}{+}1){\cdot}\frac{\pi}{2}\ \ \because\ \ \tan(x{+}k\,\pi)\ =\ \tan\,x \quad,\quad \forall k \in \mathbb{Z}\,,\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}{\cdot}\pi\ \ \because\ \ \cot(x{+}k\,\pi)\ =\ \cot\,x\ .$$

B43e.03 In taluni studi, per esempio in astronomia, sono molto usate altre due funzioni goniometriche, la secante e la cosecante, che sono, risp., le funzioni reciproche della funzione coseno e della funzione seno.

$$\sec x := \frac{1}{\cos\,x} \qquad \csc\,x := \frac{1}{\sin\,x}\ .$$

La **secante**, come la tangente, è definita in $\mathsf{dom}(\sec)\ =\ \mathbb{R}\setminus(2\cdot\mathbb{Z}+1)\,\frac{\pi}{2}$; la **cosecante**, come la cotangente, è definita in $\mathsf{dom}(\csc\,)\ =\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\cdot\pi$.

Le proprietà di parità e periodicità di secante e cosecante si ricavano direttamente dalle proprietà corrispondenti delle funzioni seno e coseno:

$$\sec(-x)\ =\ \sec x \quad,\qquad \csc\,(-x)\ =\ -\csc\,(x)$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}\ \because\ \sec(x+k2\pi)\ =\ \sec x \quad,\quad \csc\,(x+k2\pi)\ =\ \csc\,x$$

$$\sec\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ =\ -\csc\,x \quad,\quad \sec(x+\pi)\ =\ -\sec x \quad,\quad \sec\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)\ ==\csc\,x\ ,$$

$$\csc\,\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ =\ \sec x \quad,\quad \csc\,(x+\pi)\ =\ -\csc\,x \quad,\quad \csc\,\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\sec x\ .$$

Risulta spesso utile tenere presente che

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus(2\mathbb{Z}+1)\cdot\frac{\pi}{2}\ \because\ \sec^2 x-\tan^2 x\ =\ 1 \qquad,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\cdot\pi\ \because\ \csc\,^2 x-\cot^2 x\ =\ 1\ .$$

B43e.04 La seguente tabella di espressioni consente di collegare i quadrati delle funzioni goniometriche.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$	$\sec^2 x$	$\csc\,^2 x$
$\sin^2 x$	–	$1-\cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\frac{1}{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec^2 x-1}{\sec^2 x}$	$\frac{1}{\csc\,^2 x}$
$\cos^2 x$	$1-\sin^2 x$	–	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$	$\frac{1}{\sec^2 x}$	$\frac{\csc\,^2 x-1}{\csc\,^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	–	$\frac{1}{\cot^2 x}$	$\sec^2 -1$	$\frac{1}{\csc\,^2 x-1}$
$\cot^2 x$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	–	$\frac{1}{\sec^2 x-1}$	$\csc\,^2 -1$

B43e.05 Effettuando la rotazione di angolo β del punto $\langle\cos\,x,\sin\,x\rangle$ si trovano le seguenti formule di addizione

$$\cos(x+\beta)\ =\ \cos\,x\,\cos\beta-\sin\,x\,\sin\beta\ \ ,$$

$$\sin(x+\beta)\ =\ \sin\ \cos\beta+\cos\,x\,\sin\beta\ \ .$$

Ricordando le proprietà di parità di seno e coseno abbiamo:

$$\cos(x-\beta)\ =\ \cos\,x\,\cos\beta+\sin\,x\,\sin\beta\ \ ,$$

$$\sin(x-\beta)\ =\ \sin\,x\,\cos\beta-\cos\,x\,\sin\beta\ \ .$$

Considerando particolari valori di β:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad , \quad \cos(x+\pi) = -\cos x \quad , \quad \cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = \sin x \ ,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad , \quad \sin(x+\pi) = -\sin x \quad , \quad \sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = -\cos x \ .$$

Da queste uguaglianze si ricavano le formule di addizione per tangente e cotangente:

$$\tan(x+x') = \frac{\tan x + \tan x'}{1-\tan x \tan x'} \quad , \quad \tan(x-x') = \frac{\tan x - \tan x'}{1+\tan x \cdot \tan x'} \quad ,$$

$$\cot(x+x') = \frac{\cot x \cdot \cot x' - 1}{\cot x + \cot x'} \quad , \quad \cot(x-x') = \frac{\cot x \cdot \cot x' + 1}{\cot x - \cot x'} \quad .$$

Da queste formule si ricavano le formule concernenti argomenti multipli:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \ , \ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \ ,$$

$$\sin 4x = 8\cos^3 x \sin x - 4\sin x \cos x \ ,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \ , \ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\,cos\,x \ , \ \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \ ,$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x} \ , \ \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} \ , \ \tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x} \ ,$$

$$\cot 2x = \frac{\cot 2x - 1}{2\cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2} \ , \ \cot 3x = \frac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1} \ , \ \cot 4x = \frac{\cot^4 x - 6\cot^2 x + 1}{4\cot^3 x - 4\cot x} \ .$$

Dalle precedenti si ricavano le **formule di bisezione**, concernenti argomenti dimezzati:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad , \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad ,$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad , \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad .$$

In queste formule le scelte dei segni sono determinate dal quadrante nel quale cade l'angolo x.

Si trovano inoltre le seguenti formule univoche:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \quad , \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} \quad .$$

B43e.06 Sono dette **formule di prostaferesi** le formule che consentono di esprimere somme o differenze di funzioni circolari mediante prodotti di funzioni dello stesso tipo:

$$\sin x + \sin x' = 2\sin\frac{x+x'}{2}\cos\frac{x-x'}{2} \quad , \quad \sin x - \sin x' = 2\sin\frac{x-x'}{2}\cos\frac{x+x'}{2} \quad ,$$

$$\cos x + \cos x' = 2\cos\frac{x+x'}{2}\cos\frac{x-x'}{2} \quad , \quad \cos x - \cos x' = -2\sin\frac{x-x'}{2}\sin\frac{x+x'}{2} \quad .$$

Dalle formule precedenti si ricavano facilmente le cosiddette **formule di Werner**, formule che consentono di esprimere prodotti di funzioni circolari mediante somme di funzioni loro collegate:

$$\sin x \cdot \sin x' = \frac{1}{2}\left[\cos(x-x') - \cos(x+x')\right] \quad , \quad \cos x \cdot \cos x' = \frac{1}{2}\left[\cos(x-x') + \cos(x+x')\right] \quad ,$$

$$\sin x \cdot \cos x' = \frac{1}{2}\left[\sin(x-x') + \sin(x+x')\right] \quad ,$$

$$\tan x \cdot \tan x' = \frac{\tan x + \tan x'}{\cot x + \cot x'} = -\frac{\tan x - \tan x'}{\cot x - \cot x'} \quad ,$$
$$\cot x \cdot \cot x' = \frac{\cot x + \cot x'}{\tan x + \tan x'} = -\frac{\cot x - \cot x'}{\tan x - \tan x'} \quad ,$$
$$\tan x \cdot \cot x' = \frac{\tan x + \cot x'}{\cot x + \tan x'} = -\frac{\tan x - \cot x'}{\cot x - \tan x'} \quad ,$$
$$\sin(x+x')\sin(x-x') = \cos^2 x' - \cos^2 x \quad , \qquad \cos(x+x')\cos(x-x') = \cos^2 x' - \sin^2 x \quad .$$

In particolare si trovano formule per le potenze delle funzioni circolari:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \qquad \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \quad , \qquad \sin^4 x = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8} \quad ,$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \qquad \cos^3 x = \frac{3\sin x + \sin 3x}{4} \quad , \qquad \cos^4 x = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8} \quad .$$

B43e.07 Per vari angoli particolari si trovano espressioni numeriche specifiche; le formule di base di questo genere riguardano angoli del I quadrante:

x	0	$\frac{\pi}{10} = 18°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Formule corrispondenti concernenti angoli degli altri quadranti si ottengono considerando le proprietà di periodicità e di parità.

B43 f. funzioni inverse delle circolari

B43f.01 La funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo $I := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; più precisamente la funzione ristretta $\sin\rfloor_I(x)$ è una biiezione crescente da I all'intervallo $[-1, 1]$

È interessante considerare la inversa della restrizione della $\sin x$ a questo intervallo I: essa è chiamata **funzione arcoseno** e si denota con $\arcsin x \;:=\; \left(\sin\rfloor_I(x)\right)^{-\mathbf{1}}$.

Il suo dominio è $[-1, 1]$, codominio della funzione $\sin x$, ed in esso la funzione è crescente da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Concisamente si dice che l'arcoseno appartiene a $\lceil [-1, 1] \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{\leq} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rceil$.

Il suo grafico, come per ogni altra funzione inversa di una data, si ottiene riflettendo quello della $\sin\rfloor_I(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$.

Come la funzione $\sin x$, anche l'arcoseno è funzione dispari: $\arcsin(-x) \;=\; \arcsin(x)$.

B43f.02 La funzione $\cos x$ è decrescente nell'intervallo $J := [0, \pi]$. Si può considerare la inversa della restrizione della $\cos x$ a questo intervallo: essa è chiamata **funzione arcocoseno** e si denota con $\arccos x \;:=\; (\cos x|_J)^{-\mathbf{1}}$.

Il suo dominio è $[-1, 1]$, codominio della funzione $\cos x$, ed in esso la funzione è decrescente da π a 0. Essa quindi appartiene a $\lceil [-1, 1] \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{\geq} [0, \pi] \rceil$.

Il suo grafico si ottiene riflettendo quello della $\cos x|_J$ rispetto alla bisettrice $y = x$. Il grafico della funzione $\arccos x$ è invariante per la simmetria centrale con centro in $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, simmetria espressa dalla funzione $\left\downarrow \begin{matrix} x & y - \frac{\pi}{2} \\ -x & \frac{\pi}{2} - y \end{matrix} \right\downarrow$.

B43f.03 La funzione $\tan x$ è crescente nell'intervallo $H := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Si può considerare la inversa della restrizione della $\tan x$ a questo intervallo: essa è chiamata **funzione arcotangente** e si denota con $\arctan x \;:=\; (\tan x|_H)^{-\mathbf{1}}$.

Il suo dominio è l'intero $\mathbb{R}$, codominio della funzione $\tan x$, ed in esso la funzione è crescente da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ a 0.

Il suo grafico si ottiene riflettendo quello della $\tan x|_H$ rispetto alla bisettrice $y = x$.

Come la funzione tangente, anche la funzione $\arctan x$ è dispari.

B43f.04 La funzione $\cot x$ è decrescente nell'intervallo $K := [0, \pi]$.

Si può considerare la inversa della restrizione della $\cot x$ a questo intervallo: essa è chiamata **funzione arcocotangente** e si denota con $\operatorname{arccot} x \;:=\; (\cot x|_K)^{-\mathbf{1}}$.

Il suo dominio è l'intero $\mathbb{R}$, codominio della funzione $\cot x$, ed in esso la funzione è decrescente da π a 0.

Il suo grafico si ottiene riflettendo quello della $\cot x|_K$ rispetto alla bisettrice $y = x$.

Il grafico della funzione arcocotangente è invariante per simmetria centrale di centro $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Come la funzione cotangente, anche la funzione $\operatorname{arccot} x$ è dispari.

B43f.05 Anche per le funzioni inverse delle circolari si trovano con semplici manipolazioni a partire dalle definizioni, varie formule che ne stabiliscono simmetrie e regole di trasformazione.

$$\arcsin x \;=\; -\arcsin(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \arccos x \;=\; \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x}} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\arccos x \;&=\; \pi - \arccos(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \arcsin\, x \;=\; \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \\
\arctan\, x \;&=\; -\arctan(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x \;=\; \arcsin\, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \\
\operatorname{arccot} x \;&=\; \pi - \operatorname{arccot}(-x) \;=\; \frac{\pi}{2} - \arctan\, x \;=\; \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad ,
\end{aligned}$$

B43f.06 Si possono definire in modo del tutto simile anche la **funzione arcosecante**, inversa della secante, e la **funzione arcocosecante**, inversa della cosecante.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`