1

Capitolo B38
numeri reali algebrici e reali costruibili

Contenuti delle sezioni

a. numeri reali algebrici p. 2
b. numeri reali costruibili p. 7
c. campo ordinato dei numeri costruibili p. 13
d. limiti di successioni calcolabili convergenti di reali costruibili p. 16

16 pagine

B380.01 Dopo aver introdotte le radici di numeri razionali e i numeri reali-iaq, cioè i numeri ilimitatamente approssimabili con numeri razionali, in questo capitolo si porta avanti la definizione dell'insieme dei numeri che si possono concretamente utilizzare, direttamente o indirettamente, per calcoli effettivi.

Nella prima parte sono introdotti i numeri algebrici come radici dei polinomi con coefficienti interi o, equivalentemente, con coefficienti razionali.

Successivamente viene discusso l'insieme dei numeri reali costruibili, insieme costituito dai numeri ciascuno dei quali si può individuare con una procedura che consenta di approssimarlo quanto si vuole mediante razionali o mediante reali costruibili precedentemente introdotti e gestibili con procedimenti ben controllabili.

La definizione delle procedure per la determinazione dei numeri reali (costruibili), amplia in due direzioni quella riguardante i numeri algebrici, precisamente circostanziata sulla approssimazione mediante razionali delle radici di polinomicon coefficienti razionali.
Il primo ampliamento consiste nelle procedure note per approssimare mediante reali costruibili noti di nuovi reali costruibili.
Il secondo è un ampliamento di prospettiva riguardante le procedure in grado di approssimare con numeri reali costruibili nuovi numeri di questo genere le quali in futuro potranno essere precisate affidabilmente e proposte come condivisibili.

L'insieme dei numeri reali costruibili risulta quindi introdotto in relazione alle esigenze che prevedibilmente in futuro emergeranno dalla necessità di risolvere nuovi problemi la cui natura potrebbe non essere stata ancora incontrata.

Si tratta quindi di un insieme numerico per il quale si può prospettare una crescita nel tempo in stretta relazione con i possibili avanzamenti delle conoscenze matematiche, scientifiche, tecnologiche e applicative di ogni genere.

I numeri reali calcolabili, come vedremo meglio in B42, costituiscono la parte concretamente utilizzabile per risolvere problemi specifici del più astratto insieme dei numeri reali, insieme che si può introdurre solo mediante assiomi e che ha lo scopo di semplificare una gran quantità di sviluppi (e di formule).

B38 a. numeri reali algebrici

B38a.01 Dopo aver discusso [B37] alcuni procedimenti per la determinazione delle radici dei numeri razionali, poniamo ora il più generale problema di individuare i numeri che costituiscono i cosiddetti **zeri di un'equazione polinomiale a coefficienti interi**, cioè i possibili valori per la variabile x che verificano una uguaglianza della forma

$$(1) \qquad a_0 + a_1\,x + \cdots + a_p\,x^p \;=\; 0 \qquad \text{con} \qquad p \in \mathbb{P} \;\text{ e }\; a_0, a_1, ..., a_p \in \mathbb{Z}\ .$$

Ci proponiamo di dimostrare che si possono individuare questi zeri come reali-iaq, ovvero come entità numeriche illimitatamente approssimabili mediante razionali.

Tali entità sono chiamate **numeri reali algebrici** e il loro insieme lo denotiamo con $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$.

(2) Prop.: L'insieme dei numeri algebrici contiene propriamente $\mathbb{Q}$.

Dim.: Ogni numero razionale m/n si può pensare soluzione della equazione $n\,x - m = 0$, cioè di una equazione di primo grado a coefficienti interi, caso molto particolare dell'equazione (1).
Inoltre $\mathbb{R}_{\mathsf{a}} \setminus \mathbb{Q}$ non è vuoto, ma per ogni $p = 2, 3, 4, ...$ contiene tutte le radici p-esime dei numeri razionali che non sono potenze p-esime di razionali, cioè tutte le radici della forma

$$\sqrt[p]{\frac{a}{b}} \quad \text{con} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{q \in \mathbb{Q}\ ,\ n = 2, 3, 4, ... \ :|\ \ q^p\}\ ▮$$

Gli elementi di $\mathbb{R}_{\mathsf{a}} \setminus \mathbb{Q}$ si dicono **numeri algebrici irrazionali**.

B38a.02 Denotiamo con $\mathbb{R}_{\mathsf{Q}}$ l'insieme degli zeri delle equazioni polinomiali con coefficienti razionali, anticipando che anche per queste entità si trova che sono reali-iaq.

(1) Prop.: L'insieme delle radici delle equazioni polinomiali con coefficienti razionali coincide con l'insieme degli zeri delle equazioni polinomiali con coefficienti interi, ossia $\mathbb{R}_{\mathsf{Q}} = \mathbb{R}_{\mathsf{a}}$.

Dim.: Dato che l'insieme delle equazioni con coefficienti razionali è più esteso dell'insieme delle equazioni con coefficienti interi, si ha $\mathbb{R}_{\mathsf{Q}} \supseteq \mathbb{R}_{\mathsf{a}}$.

L'uguaglianza si ottiene considerando la generica equazione polinomiale con coefficienti razionali per la quale assumiamo la forma $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_i\,x^i \;=\; 0$, dove n è un intero positivo e i q_i sono numeri razionali la cui forma ridotta con denominatore positivo scriviamo $\dfrac{a_i}{b_i}$.
Consideriamo il minimo comune multiplo degli $n+1$ denominatori b_i che scriviamo $m := \text{mcm}(b_0, ..., b_n)$; alla precedente equazione possiamo dare la forma equivalente $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\,\frac{m}{b_i}\,x^i \;=\; 0$ e i suoi coefficienti sono evidentemente numeri interi ▮

Consideriamo per esempio il polinomio

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) \;=\; x^3 - \frac{31}{30}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{30}\ .$$

La sua prima espressione ci dice che i suoi zeri sono 1/2, 1/3 e 1/5 e che nessun altro reale-iaq può annullare il polinomio.
Gli stessi numeri razionali sono gli zeri del polinomio a coefficienti interi $30\,x^3 - 3\,x^2 + 10\,x - 1$.

B38a.03 Cominciamo a orientarci sulla attività della determinazione approssimata degli zeri di un polinomio.

A questo fine si ricordano le proprietà e i significati geometrici delle derivate prime e seconde di un generico polinomio

$$P(x) = q_0 + q_1\, x + q_2\, x^2 + \cdots + q_n\, x^n \quad .$$

ed il fatto che si sanno calcolare con operazioni razionali i valori $P(q)$, $P'(q)$ e $P''(q)$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e che tutti questi valori sono numeri razionali.

Si ricorda inoltre la possibilità di stabilire se per $x \to \pm\infty$ la funzione polinomiale tenda a $+\infty$ o a $-\infty$.

Se il suo coefficiente dominante è positivo e se n è pari si hanno zeri solo se si trova qualche razionale q per il quale $P(q) \leq 0$, mentre se n è dispari le relazioni $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ garantiscono la presenza di almeno uno zero.

Un'altra utile considerazione preliminare discende dal seguente enunciato che consente di limitare la ricerca degli zeri ad n intervalli sufficientemente piccoli.

(1) Prop.: Un polinomio sui razionali di grado n ha più di n zeri distinti sse è il cosiddetto **polinomio identicamente nullo**, cioè se è il polinomio con tutti i coefficienti nulli.

Dim.: È ovvio che il polinomio identicamente si annulla per ogni valore razionale delle variabile, ossi che presenta ben più di n zeri.

Viceversa un polinomio della forma $\sum_{i=0}^{n} p_i\, z^i$ che presenta $n+1$ zeri z_0, z_1,...,z_n ha i coefficienti che soddisfano le $n+1$ equazioni lineari $\sum_{i=0}^{n} p_i\, {z_j}^i \;=\; 0$ relative a $j = 0, 1, ..., n$.

La teoria generale dei sistemi di equazioni lineari omogenee (sui razionali) [B32j] dice che la sola soluzione è quella evidente $q_0 = q_1 = \cdots = q_n = 0$ ∎

B38a.04 **(1) Prop.**: Le radici dei polinomi di terzo grado sono numeri reali-iaq, cioè sono approssimabili quanto si vuole con numeri razionali.

Dim.: Consideriamo solo i polinomi cubici $P(x)$ con coefficiente dominante positivo ed esaminiamo gli zeri e l'andamento della $Pprm(x)$ e della $P''(x)$.

Se $P'(x)$ ha due radici diverse, la $P(x)$ presenta due estremanti locali distinti t_1 e t_2 e un flesso obliquo per un valore razionale $x = f$ ottenibile come zero della retta $P''(x) = 0$. In questo caso vanno calcolati i valori $P(t_1)$, $P(f)$ e $P(t_2)$.

Se $P(t_2) < 0 < P(t_1)$ vi sono tre zeri semplici in $(-\infty :: t_1)$, in $(t_1 :: f)$ oppure in $(f :: t_2)$ (quale caso dipende dal segno di $P(f)$) e in $(t_2 :: +\infty)$.

Se $P(t_1) = 0$ deve essere $P(t_2) < 0$ e si ha uno zero di molteplicità 2 in t_1 e uno zero semplice in $(t_2 :: +\infty)$.

Se $P(t_2) = 0$ deve essere $P(t_1) > 0$ e si ha uno zero di molteplicità 2 in t_2 e uno zero semplice in $(-\infty :: t_1)$.

Se $0 < P(t_2) < P(t_1)$ si ha un solo zero semplice in $(-\infty :: t_1)$.

Se $P(t_2) < P(t_1) < 0$ si ha un solo zero semplice in $(t_2 :: +\infty)$.

Se $P'(x)$ ha uno zero doppio per $x = t$ deve essere $P''(t) = 0$ e la $P(x)$ non può presentare alcun estremante ma deve avere un flesso con tangente orizzontale; in tal caso deve essere $P(x) = a_3\,(x - t)^3$ e si ha uno zero triplo per $x = t$.

Se $P'(x)$ non presenta zeri si deve avere un unico zero semplice; per il suo posizionamento si può cercare lo zero f che deve presentare la $P''(x)$ risolvendo una equazione lineare; questo corrisponde a un flesso con tangente crescente e la intersezione $\langle g, 0\rangle$ di tale tangente implica che lo zero va cercato in $\boldsymbol{(}g :: f\boldsymbol{)}$ o in $\boldsymbol{(}f :: g\boldsymbol{)}$.

B38a.05 L'approssimazione di uno zero a meno della tolleranza richiesta, che denotiamo con $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$, si può effettuare banalmente suddividendo l'intervallo in sottointervalli-Q di ampiezza inferiore ad ϵ e campionando la $P(x)$ nelle ascisse razionali dei sottointervalli.

Quando fosse opportuno procedere in modo efficiente si possono effettuare successivi dimezzamenti dell'intervallo candidato e si può utilizzare la tangente al polinomio in estremi degli intervalli esaminati.

//input pB38a05

Se si tratta di cercare uno zero in un intervallo a priori illimitato si può ridurre a un intervallo finito con campionamenti effettuati con tentativi empirici.

Consideriamo quindi la ricerca di uno zero in un intervallo $\boldsymbol{(}t_2 :: +\infty\boldsymbol{)}$ nel quale sono crescenti sia la $P(x)$ (che ha come minimo $P(t_2) < 0$), che la $P'(x)$ e la $P''(x)$, i casi restanti essendo ottenibili mediante trasformazioni molto semplici.

Si può procedere con campionamenti in $t_2 + \Delta$, $t_2 + 2\,\Delta$, ... fino a che si trova $P(t_2 + k\,\Delta) > 0$ e successivamente analizzare l'intervallo finito $\boldsymbol{(}t_2 + (k-1)\Delta :: t_2 + k\Delta\boldsymbol{)}$ come detto sopra.

B38a.06 **(1) Prop.**: Le radici dei polinomi di quarto grado sono reali-iaq.

Dim.: Possiamo limitarci ancora ai polinomi con coefficiente dominante positivo.

Questi polinomi possono presentare tre estremanti locali, un minimo, un massimo e un minimo separati da due flessi, oppure un solo estremante locale, un minimo, in assenza di flessi.

//input pB38a06

Nel caso dei tre estremanti gli zeri possono essere quattro, due o nessuno; nel caso di un solo estremante si possono avere due zeri o nessuno.
Inoltre si possono avere flessi con tangente orizzontale che possono dare zeri di molteplicità due o quattro.

La scelta tra le precedenti situazioni si può effettuare esaminando preliminarmente gli zeri della cubica corrispondente a $P'(x)$ procedendo come indicato nel paragrafo precedente.

Successivamente si possono individuare alcuni intervalli candidati, si possono ridurre gli illimitati a intervalli finiti e infine si deve procedere a esaminare ciascuno degli intervalli finiti con la opportuna accuratezza ▮

B38a.07 **(1) Prop.**: I numeri reali algebrici sono approssimabili quanto si vuole con numeri razionali.

Dim.: Ci proponiamo di delineare un procedimento senza entrare in molti dettagli e senza pretendere di giungere a un procedimento efficiente. Ci basta convincere che mediante operazioni sui razionali si possano effettuare tutte le manovre checonsentono di approssimare gli zeri quanto richiesto dalle possibili esigenze specifiche.

Il procedimento si serve di due tipi di manovre: quelle volte a individuare gli intervalli razionali entro i quali si può trovare un solo zero e l'analisi di ciascuno di questi intervalli.

Tutte queste manovre si basano su campionature dei valori del polinomio e delle sue derivate per opportuni valori della variabile indipendente. $x \in \{q_1, q_2, ..., q_m\} \subset \mathbb{Q}$.

Mediante opportune campionature si sanno individuare gli intervalli razionali entro i quali si trovano i diversi zeri del polinomio ▮

Per ciascuno degli intervalli candidati $[a :: b]$, cioè per ciascuno degli intervalli nei quali si riesce a garantire la presenza di un solo zero, si considera il valore $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ sufficientemente piccolo da assicurare un valore tollerabile per l'ascissa approssimata; può essere opportuno assumere un ϵ non eccessivamente piccolo per contenere il numero delle operazioni razionali da effettuare.

Nell'intervallo $[a :: b]$, per esempio mediante un procedimento dicotomico, si riesce a individuare un intervallo di ampiezza non superiore ad ϵ, $[c :: d]$, entro il quale cambia di segno $P(x)$ una delle sue derivate.

B38a.08 Ogni numero reale algebrico α che sia zero di un polinomio a coefficienti razionali $P(x)$ si può individuare come elemento di un intervallo razionale entro il quale non si trova nessuno degli altri zeri del polinomio stesso.

Si sa precisare anche un programma di indagine che consenta di collocare α in successivi intervalli razionali la cui ampiezza dimezza a ogni successivo stadio, in accordo con lo schema dalla `saqnic` [B37b03].

Questa situazione consente di affermare che ogni numero reale algebrico si sa approssimare quanto si vuole con numeri razionali.

Di conseguenza, dati un qualsiasi numero algebrico irrazionale α e un qualsiasi numero razionale q, si sa trovare un intervallo razionale $[a :: b]$ che include α ed esclude q; possedendo tale conoscenza si dice che $\alpha < q$ sse $b < q$ e si afferma che $q < \alpha$ sse $q < a$.

Inoltre dati due numeri reali algebrici (irrazionali o meno) diversi α e β, si è in grado di collocarli in due intervalli razionali di ampiezza minore di $\dfrac{|\alpha - \beta|}{2}$, ossia in due intervalli disgiunti; di conseguenza con il confronto tra gli estremi dei due intervalli si sa decidere se $\alpha < \beta$ oppure se $\beta < \alpha$.

La relazione $\leq$ tra numeri reali algebrici risulta essere una relazione d'ordine totale come diretta conseguenza del carattere di ordine totale della $\leq$ come relazione tra numeri razionali.

Si trova poi che si sanno approssimare quanto si vuole con numeri razionali tutte le somme, le differenze, i prodotti, i quozienti di numeri reali algebrici, ossia tutte le composizioni razionali di questi numeri.

Si può quindi concludere che l'insieme dei numeri algebrici costituisce un **campo ordinato calcolabile**, cioè un campo ordinato le cui operazioni sono eseguibili sotto il controllo di ben definiti algoritmi.

Questo campo è una estensione del campo dei razionali di evidente utilità.
Tale struttura algebrica ordinata la denotiamo con $\mathbb{R}_{\mathsf{A};Fld}$.

B38a.09 **Prop.** L'insieme dei numeri reali algebrici è numerabile.

Dim.: Dato che $\mathbb{Q}$ è numerabile e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{a}}$, il cardinale dei numeri algebrici è almeno $\aleph_0$, in quanto non può essere inferiore a quella di un suo sottoinsieme.

Per dimostrare che $|\mathbb{R}_{\mathsf{a}}|$ non può essere superiore ad $\aleph_0$ si delinea una procedura che qui denotiamo con $\mathcal{P}$, la quale procede a generare tutte le soluzioni di tutte le equazioni polinomiali a coefficienti interi.

La $\mathcal{P}$ organizza una corsa primaria su stadi successivi caratterizzati dai valori $p = 1, 2, 3, ...$, detti valori dell'indice primario.

Per $p = 1$ la $\mathcal{P}$ genera tutte le coppie di coefficienti $\langle a_0, a_1 \rangle$ relative ai valori $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$.

Per ogni successivo stadio relativo all'indice principale $p = 2, 3, ...$ si ha una prima fase che organizza una corsa sui successivi interi $q = 1, 2, ..., p-1$ e per ciascuno di questi organizza la generazione delle sequenze $\langle a_0, a_1, ..., a_q \rangle$ con le componenti in $[0 : p]$, ma escludendo quelle aventi tutte le componenti in $[0 : p-1]$ (le sequenze con tutte le componenti in quest'ultimo insieme sono state generate negli stadi che precedono quello relativo al valore p per l'indice primario).

Nella seconda fase relativa al valore p dell'indice principale sono generate tutte le sequenze $\langle a_0, a_1, ..., a_p \rangle$ con le componenti in $[0 : p]$.

Non è difficile rendersi conto che la $\mathcal{P}$ procede a generare tutte le sequenze di due o più interi. Dato che ciascuna delle precedenti sequenze individua biunivocamente una equazione polinomiale a coefficienti interi, si constata che essa consente di prendere in considerazione la totalità di queste equazioni.

La procedura $\mathcal{P}$ si deve poi preoccupare per ciascuna equazione generata di individuare tutti gli zeri attraverso intervalli di razionali ai quali si chiede di avere ampiezza minore di un razionale dato e di contenere un solo zero.
La definizione di questa manovra richiede di conoscere alcune proprietà dei polinomi e qui, ricordando le considerazioni nei paragrafi precedenti, ci limitiamo ad affermare che può essere realizzata con un numero finito di passi.

A questo punto risulta dimostrato, per grandi linee, che è possibile procedere nella individuazione di intervalli razionali capaci di delimitare tutti i numeri reali algebrici e che di conseguenza l'insieme di questi è al più numerabile.

Si osserva che tra gli intervalli individuati come sopra si possono avere gruppi di intervalli che si intersecano e potrebbero individuare lo stesso numero reale algebrico.

Tuttavia queste situazioni possono essere monitorate e ridotte per produrre solo intervalli aventi in comune solo le estremità.

Anche tenendo conto di queste possibilità risulta comunque dimostrato che $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$ è numerabile ▮

B38a.10 A questo punto va ricordato il **teorema di Ruffini-Abel** (wi) che afferma che non tutte le equazioni polinomiali a coefficienti interi posseggono soluzioni che possono essere espresse a partire dai coefficienti mediante operazioni razionali (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione) ed estrazioni di radici.

Ne consegue che l'insieme dei numeri ottenibili dagli interi con operazioni razionali ed estrazioni di radici, oltre a contenere propriamente l'insieme dei razionali, è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri reali algebrici.

In particolare l'insieme delle radici della forma $\sqrt[p]{q}$ con $p \in \mathbb{P}$ e $q \in \mathbb{P} \setminus \{k \in \mathbb{P} :| k^p\}$ è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri algebrici irrazionali positivi.

Segnaliamo che il teorema di Ruffini-Abel attualmente viene dimostrato preferenzialmente nell'ambito della `teoria di Galois` (wi).

Ricordiamo anche che sui numeri reali algebrici esprimibili mediante radicali si è sviluppato un calcolo letterale piuttosto impegnativo.

B38 b. numeri reali costruibili

B38b.01 Come si è già segnalato, molti problemi presentabili in termini della geometria del piano e dello spazio tridimensionale sui razionali portano a ricercare rapporti tra lunghezze, aree, volumi e analoghe grandezze che si dimostrano non essere esprimibili come numeri razionali; si tratta dei cosiddetti rapporti tra **quantità incommensurabili**.

Oltre ai rapporti irrazionali riconducibili a estrazioni di radici di interi e a zeri di polinomi con coefficienti interi o razionali, si incontrano molti rapporti irrazionali in costruzioni ottenibili con procedimenti che non si possono ricondurre a operazioni algebriche.

Tra questi rapporti i più noti e utilizzati sono π, il rapporto tra lunghezza di una circonferenza e lunghezza di un suo diametro ed e, il numero di Napier, definibile, in particolare, come

$$\mathsf{e} := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Un esame dei problemi che portano a rapporti incommensurabili, anche se condotto al semplice livello dell'intuizione visiva o al livello dell'analogia formale, suggerisce che si possano risolvere mediante costruzioni che portano a luoghi geometrici (curve o superfici) le cui intersezioni individuano le soluzioni.

Sono proprio queste intersezioni di luoghi geometrici suggeriti da considerazioni euristiche che non si possono esprimere con coordinate razionali.

Queste impossibilità si esprimono dicendo che queste curve e queste superfici che si possono definire come insiemi di punti con coordinate razionali non hanno la proprietà della **continuità**.

Di conseguenza si è profondamente sentita l'esigenza di disporre di entità numeriche che consentissero di trattare rapporti tra quantità incommensurabili e di definire curve e superfici continue le cui intersezioni (consistenti, risp., in punti o curve) potessero essere pienamente definite come entità matematiche e quindi come oggetti utilizzabili in modo affidabile in elaborazioni costruttive, e in particolare in algoritmi numerici.

La richiesta basilare in questo ambito si può esprimere con la individuazione di entità numeriche che consentano di essere le coordinate dei punti di una retta orientata che estende la retta dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in modo da poter sostenere tutti i risultati di elaborazioni algoritmiche.

Queste entità numeriche e la nozione di continuità loro collegata, a questo punto sono solo prospettive euristiche che ci si può solo proporre di definire ed esaminare progressivamente.
Esse però potranno essere inquadrate nella definizione assiomatica dei numeri reali [B42b], in modo che le loro proprietà possano essere sostenute da dimostrazioni che si possano qualificare "rigorose" e conseguentemente possano essere utilizzate con elevata coerenza e con efficacia pienamente condivisibile.

Per queste entità numeriche abbiamo usato il termine **numeri irrazionali** e abbiamo mostrato che di essi fanno parte quelli che abbiamo chiamati numeri reali algebrici irrazionali.

B38b.02 Per molte applicazioni pratiche i numeri irrazionali che risultano utili potrebbero essere individuati solo da numeri razionali che li approssimano quanto serve per le esigenze delle specifiche circostanze applicative.

In effetti queste approssimazioni razionali sono ampiamente utilizzate nei calcoli che portano a determinare i valori numerici delle grandezze che costituiscono le soluzioni di problemi applicativi e che servono a precisare conseguenze e previsioni governate da molti generi di leggi quantitative.

Un tema importante in questo campo riguarda quanto devono essere precise le approssimazioni razionali dei numeri irrazionali che costituiscono gli elementi intermedi delle elaborazioni perché sia garantita una buona precisione per i valori delle grandezze che una applicazione richiede.

Si può quindi essere indotti a pensare che l'ampliamento del campo dei razionali non sia un'esigenza primaria.

In effetti in molte attività pratiche sono sufficienti le accennate approssimazioni razionali accompagnate da giustificazioni delle rispettive accuratezze, in quanto questi dati vengono usati per considerazioni ad hoc, spesso basate sul semplice buon senso.

In concreto queste approssimazioni razionali per alcuni secoli sono state disponibili a partire da disegni tracciati con accuratezza, in particolare su carte nautiche e abbastanza recentemente su carta millimetrata), nelle pagine di ponderose tavole numeriche e con l'uso di strumenti analogici in particolare usando regoli calcolatori.

Più recentemente le approssimazioni razionali sono state utilizzate come procedimenti algoritmici incorporati in calcolatrici prima elettromeccaniche e poi esclusivamente elettroniche, nonchè in sistemi software e in dispositivi per scopi specifici facilmente utilizzabili sul campo.

Tutti questi strumenti, anche quelli che attualmente sono giudicati obsoleti, sul piano storico vanno comunque considerati come essenziali per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica, soprattutto dal XVII secolo alla prima parte del XX secolo.

È opportuno aggiungere che anche le macchine calcolatrici, come il regolo calcolatore e le tavole dei logaritmi, per la gran parte delle elaborazioni si servono solo di insiemi finiti di numeri razionali.

B38b.03 Questo atteggiamento di ridotta attenzione nei confronti delle esigenze di sviluppi matematicamente più impegnativi, risultano però insoddisfacenti almeno per tre ordini di ragioni.

Per applicazioni specifiche che richiedono valutazioni elaborate ed estese, quando si considerassero solo i numeri razionali sui quali si effettuano i calcoli e non si facesse alcun riferimento verbale ai numeri irrazionali che idealmente si possono usare, si cadrebbe spesso in complicazioni espositive che renderebbero assai onerose le argomentazioni che giustificano i calcoli.

Solo facendo riferimento a entità individuabili con procedimenti più complessi come i numeri reali algebrici e i numeri costruibili trascendenti si riescono a semplificare le esposizioni.

Quando si affrontano problemi che richiedono calcoli effettivi di un certo impegno risulta necessario elaborare procedimenti di modellizzazione e di calcolo avanzati che richiedono sviluppi matematici simbolici che necessitano di riferimenti a classi specifiche di numeri irrazionali e a funzioni trattabili con procedimenti sostanzialmente più complessi di quelli algebrici.
Gli esempi di questo genere si trovano nelle funzioni trascendenti elementari, cioè nelle funzioni esponenziali, nelle logaritmiche e nelle trigonometriche.

Innanzi tutto sono determinanti molti risultati concernenti numeri irrazionali ottenuti come limiti di successioni di razionali, come somme di serie di termini razionali e anche come prodotti infiniti e come frazioni continue, come avremo modo di approfondire in I10 ed I11.

La necessità di servirsi di numeri irrazionali, anzi la necessità di padroneggiarli con metodi matematici che in buona parte prescindono da considerazioni sulle approssimazioni e da istanze algoritmiche, emerge con evidenza quando si vogliono affrontare metodologie di supporto ai calcoli di ampia portata e con forti garanzie di coerenza logica e metodologica.

A questo livello degli studi risulta necessario sviluppare teorie generali e chiarire collegamenti che hanno scarsa evidenza nel panorama delle nozioni matematiche di uso pratico; molti studi di lunga portata non possono evitare di ricorrere a teorie astratte come la topologia, l'analisi funzionale e l'analisi armonica.

Inoltre oggi si deve ricorrere a vari risultati generali e strumentali dell'informatica che consentano di progettare e implementare strumenti computazionali efficaci e versatili, strumenti che possano richiedere procedimenti di supporto come calcoli simbolici, manipolazioni di basi di dati e controlli di correttezza che fanno ricorso a metodi algebrici e probabilistici.

B38b.04 Le entità con caratteristiche numeriche non esprimibili come numeri razionali. sarebbe opportuno poterle trattare con le stesse modalità adottate per i numeri razionali e per le relative espressioni, in quanto risulta utile e significativo sottoporre anch'essi a operazioni come le aritmetiche (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione), confrontarli con numeri razionali e tra di essi secondo la relazione di ordine totale " $\leq$ ".
Solo in tal modo si ha un efficace ampliamento del campo numerico.
Per tali rapporti nelle prossime pagine usiamo il termine "numeri utilizzabili".

Il modo più semplice per servirsi di un numero utilizzabile ρ in genere consiste nell'approssimarlo mediante numeri razionali.
Se lo si vuole tenere sotto controllo con una buona sicurezza si cerca di individuare un intervallo con estremi razionali a e b che sicuramente lo contiene: $a \leq \rho \leq b$.
Ovviamente è opportuno che un tale intervallo sia poco esteso, cioè che $b - a$ sia sufficientemente piccolo, in relazione alla precisione richiesta per i valori che da esso si vogliono derivare.

Nei calcoli nei quali serve un numero utilizzabile potrebbe essere sostituito da un intervallo che lo contiene. Esaminiamo quindi alcune proprietà computazionali degli intervalli di razionali.

B38b.05 Consideriamo i seguenti numeri razionali a e b tali che $a \leq b$; c e d tali che $c \leq d$; p numero razionale positivo; k razionale qualsiasi; e e f tali che $0 < e \leq f$; g e h tali che $0 < g \leq h$.
Valgono le seguenti proprietà

(1) $[a :: b] + k \;=\; [a + k :: b + k]$;
(2) $p \cdot [a :: b] \;=\; [p\,a :: p\,b]$;
(3) $-p \cdot [a :: b] \;=\; [-p\,b :: -p\,a]$;
(4) $[a :: b] + [c :: d] \;=\; [a + c :: b + d]$;
(5) $[a :: b] - [c :: d] \;=\; [a - d :: b - c]$;
(6) $[e :: f] \cdot [g :: h] \;=\; [e\,g :: f\,h]$;
(7) $[e :: f]/[g :: h] \;=\; [e/h :: f/g]$ ▮

B38b.06 Per chiarire le caratteristiche dei numeri utilizzabili occorre introdurre alcune nozioni specifiche ed esaminare alcune loro proprietà.

Diciamo **successione algoritmica di intervalli reali-iaq, chiusi e annidati**, o in breve `sarni`, ogni successione di intervalli

$$\langle n \in \mathbb{N} :| [a_n :: b_n] \rangle \quad \text{con} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;:\; a_n, b_n \in \mathbb{Q} \,,\; a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

muniti di un algoritmo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ consente di calcolare a_n e b_n con una qualsivoglia precisione.

In particolare abbiamo definito [B37b03] **successione algoritmica di intervalli reali-iaq, chiusi e annidati e convergente**, in sigla `sarnic`, ogni `sarni` tale che, espressa nella forma precedente, per ogni razionale positivo δ (che potrebbe essere arbitrariamente piccolo) si trova un intero naturale m_δ tale che,

$$b_{m_\delta} - a_{m_\delta} < \delta \,.$$

Evidentemente sono `sarnic` le successioni della forma

$$\langle n \in \mathbb{N} :| \, [q :: q] \rangle \ ,$$

cioè le successioni di intervalli ridotti a un unico punto corrispondente al reale-iaq q.

Altre interessanti `sarnic` hanno una forma

$$\left\langle n \in \mathbb{N} :| \left[q - \frac{1}{B^n} :: q + \frac{1}{B^n} \right] \right\rangle$$

ove $q \in \mathbb{R}_{\mathsf{Q}}$ e B è un intero maggiore o uguale a 2, cioè un intero che può essere assunto come base di una numerazione posizionale.

Accertiamoci che si tratta effettivamente di una `sarnic`: dato che in questo caso $b_n - a_n = \dfrac{2}{B^n}$, per ogni razionale positivo δ, basta assumere $n > \mathsf{Logtr}_B \left(\dfrac{2}{\delta}\right) + 1$ per avere intervalli di ampiezza inferiore a δ; ricordiamo che la definizione del logaritmo troncato Logtr è in B10a10.

Negli esempi precedenti il carattere costruibile della successione degli intervalli è garantito dalla possibilità di esprimere gli estremi a_n e b_n mediante semplici espressioni razionali.
In altri casi gli estremi degli intervalli possono essere individuati da procedimenti più complessi e la loro razionalità potrebbe richiedere argomentazioni apposite.

B38**b.07** Diciamo **numero reale costruibile**, in breve **reale-c** una entità ρ sottoponibile alle operazioni razionali che si può associare a una `sarnic` $\langle n \in \mathbb{N} :| \, [a_n :: b_n] \rangle$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq \rho \leq b_n$.

Una tale entità può essere approssimata quanto si vuole da numeri razionali dati da scritture posizionali relative a una qualsiasi base $B \in \{2, 3, ...\}$, cioè da elementi di un insieme $\mathbb{Q}_{base=B}$: infatti ρ può essere approssimato quanto si vuole da numeri razionali come a_n, b_n o $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ e questi numeri possono essere approssimati quanto si vuole servendosi di un insieme $\mathbb{Q}_{base=B}$.

Un esempio di reale-iaq riguarda π, numero per ll quali si individuano le approssimazioni decimali che formano la seguente `sarnic`:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 3.1 & 3.14 & 3.141 & 3.1415 & 3.14159 \\ [3 :: 4] & [3.1 :: 3.2] & [3.14 :: 3.15] & [3.141 :: 3.142] & [3.1415 :: 3.1416] & [3.14159 :: 3.14160] \\ & & & 3.141593 & ... & \\ & & & [3.141593 :: 3.141594] & ... & \end{array} .$$

Queste considerazioni valgono per le rappresentazioni posizionali per qualsiasi base intera B.

B38**b.08** Consideriamo due `sarni`

$$\mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| \, [a_n :: b_n] \rangle \quad \text{e} \quad \mathsf{c} := \langle k \in \mathbb{N} :| \, [c_k :: d_k] \rangle \ .$$

Esse si dicono `sarnic` **equivalenti-lim** sse
(a) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si trova $k_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n \leq c_{k_n} \leq d_{k_n} \leq b_n$ e
(b) per ogni $k \in \mathbb{N}$ si trova $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $c_k \leq a_{n_k} \leq b_{n_k} \leq d_k$.

(1) Prop.: La relazione di equivalenza-lim è riflessiva, simmetrica e transitiva, e quindi, a giustificazione dal nome assegnatole, è una equivalenza.

Dim.: Riflessività e simmetria discendono immediatamente dalla definizione.

Per la transitività consideriamo, oltre ad **a** e c, la `sarni` **e** $:= \langle k \in \mathbb{N} :| \, [e_k :: f_k] \rangle$, supponiamo la equivalenza-lim di **a** e c e la equivalenza-lim di c con **e**; si tratta di dimostrare la equivalenza-lim di **a** con **e**.

. . . . . ▮

Sono per esempio equivalenti-lim le `sarnic`

$$\big\langle n \in \mathbb{P} :|\ [-1/n :: 1/n]\big\rangle\ ,\quad \big\langle n \in \mathbb{P} :|\ [-1/n^2 :: 1/n^3]\big\rangle \quad \text{e} \quad \big\langle k \in \mathbb{P} :|\ [-2^{-k} :: 2^{-k}]\big\rangle$$

e le due `sarnic`

$$\big\langle n \in \mathbb{P} :|\ [2 - 1/n :: 4 + 1/n^2]\big\rangle \quad \text{e} \quad \big\langle n \in \mathbb{P} :|\ [2 - 1/2n^3 :: 4 + 1/2n]\big\rangle\ .$$

Sono anche equivalenti-lim una data `sarni` e ogni `sarni` costituita da una sua qualsiasi sottosuccessione di intervalli illimitata.

B38b.09 Richiamandoci a Borel e a Turing, chiamiamo **numeri reali costruibili** le classi di equivalenza-lim delle `sarnic`.

Denotiamo l'insieme di queste entità con $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$.

Le classi di equivalenza-lim contenenti delle `sarnic` individuate da un solo numero razionale garantiscono che l'insieme dei reali costruibili include l'insieme dei razionali.

Individuiamo ora una `sarnic` che individua un numero irrazionale come $\sqrt{2}$, in modo da confermare l'inclusione propria $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{C}}$.

Questa `sarnic` ha la forma

$$\left\langle n \in \mathbb{P} :\left|\ \left[\frac{h_n}{10^n} :: \frac{h_n+1}{10^n}\right]\right.\right\rangle\ ,$$

dove h_n è l'intero positivo tale che sia ${h_n}^2 < 2 \cdot 10^{2n} < (h_n+1)^2$. Tale `sarnic` presenta le seguenti componenti iniziali

$$\left\langle \Big[1, 2\Big], \Big[\frac{14}{10}, \frac{15}{10}\Big], \Big[\frac{141}{10}, \frac{142}{10}\Big], \Big[\frac{1414}{10}, \frac{1415}{10}\Big], \ldots \right\rangle\ .$$

Un algoritmo semplice, anche se inefficiente, che consente di individuare un h_n si serve di h_{n-1} e si preoccupa solo di confrontare con $2 \cdot 10^{2n}$ i successivi quadrati $(h_n \cdot 10 + i)^2$ per $i = 0, 1, ..., 10$.

Costruzioni analoghe alla precedente mostrano che tutti i razionali che non sono quadrati di razionali hanno radici quadrate che non appartengono a $\mathbb{Q}$ ma costituiscono numeri reali costruibili.

È facile rendersi conto che tutti i numeri algebrici sono numeri reali costruibili: tutti i procedimenti visti che consentono di approssimare illimitatamente le radici dei polinomi a coefficienti razionali rendono tali entità numeriche dei numeri reali costruibili. Quindi valgono le inclusioni

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{a}} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{C}}\ .$$

B38b.10 Occorre giustificare più compiutamente l'uso del termine numeri per queste entità. Questo si ottiene attraverso i passi che seguono.

(a) Si stabilisce un ordinamento totale tra classi di equivalenza-lim di `sarnic` che estende l'ordinamento tra razionali e si stabilisce che tale ordinamento rispetta le operazioni razionali.

(b) Si definiscono le operazioni binarie di somma, sottrazione, prodotto e divisione tra `sarnic` (l'ultima con la restrizione del nonannullamento del secondo operando) in modo tale che forniscano nuove `sarnic`.

(c) Si dimostra che queste operazioni sono estensioni delle operazioni omologhe sopra i numeri razionali e che valgono le proprietà che le rendono operazioni di un campo.

A questo punto sarà completamente lecito affermare che l'insieme dei numeri reali costruibili costituisce un campo ordinato.

B38b.11 Ogni numero reale costruibile è pienamente utilizzabile quando si padroneggia un procedimento che consente di determinare coppie di valutazioni razionali $\langle a_n, b_n \rangle$ i cui membri lo approssimano, risp., per difetto e per eccesso con una precisione che si può migliorare quanto si vuole.

Successive coppie di valutazioni possono ragionevolmente associarsi a successivi calcoli o a esperimenti previsti da un progetto di calcolo o di misurazioni che consentono di approssimare il numero costruibile sempre meglio attraverso attività che richiedono utilizzi di risorse prevedibilmente progressivamente crescenti.

Per esempio un piano per dare valutazioni per difetto e per eccesso del rapporto tra diagonale e lato di un quadrato prevede all'n-esimo stadio di individuare le due migliori approssimazioni razionali a_n e b_n esprimibili con n cifre decimali.

Queste due successioni di valutazioni costituiscono la $\langle n \in \mathbb{N} :| [a_n :: b_n] \rangle$, cioè una `sarnic` per il numero utilizzabile ρ.

Occorre segnalare che due `sarnic` equivalenti-lim si possono associare a due diversi progetti di valutazioni illimitatamente precise dello stesso numero utilizzabile.

B38 c. campo ordinato dei reali costruibili

B38c.01 Consideriamo una `sarnic` $s = \left\langle n \in \mathbb{N} :| \left\langle a_n :: b_n \right\rangle \right\rangle$ e un razionale q. Si riscontrano tre possibili alternative:

(a) Si trova un intero n tale che $q < a_n$; in tal caso si stabilisce che $q < s$.

(b) Si trova un intero n tale che $b_n < q$; in tal caso si stabilisce che $s < q$.

(c) In caso contrario per ogni n si ha $a_n < q < b_n$; in tal caso si stabilisce che $s = q$.

Conclusioni simili si possono raggiungere dal confronto tra due `sarnic` $s = \langle n \in \mathbb{N} :| [a_n :: b_n] \rangle$ e $t = \langle n \in \mathbb{N} :| [c_n :: d_n] \rangle$. Ancora si danno tre possibilità:

(a) Si trova un intero n tale che $d_n < a_n$; in tal caso si stabilisce che $t < s$.

(b) Si trova un intero n tale che $b_n < c_n$; in tal caso si stabilisce che $s < t$.

(c) In caso contrario le due `sarnic` risultano equivalenti-lim e si stabilisce che $s = t$.

B38c.02 Dalla definizione della somma $q+s$ di un razionale q e una `sarnic` s e dalla definizione della somma $s+t$ di due `sarnic` s e t si deduce che la somma tra reali-c è un ampliamento della somma tra numeri razionali.

Analoghe considerazioni si sviluppano per la sottrazione.

Dalla definizione del prodotto $q \cdot s$ di un razionale q e una `sarnic` s e dalla definizione del prodotto $s \cdot t$ di due `sarnic` s e t si ricava che il prodotto tra reali-c è un ampliamento del prodotto tra numeri razionali.

Simili considerazioni si svolgono per la divisione tra reali-c diversi da 0.

B38c.03 **(1) Teorema** $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$ munito delle operazioni di somma e prodotto costituisce un campo totalmente ordinato.

Il campo dei numeri reali costruibili lo denotiamo con $\mathbb{R}_{\mathsf{C},Fld}$.

Un campo ordinato si tripartisce nell'insieme dei numeri negativi, definiti come i maggioranti dello zero, nel singoletto $\{0\}$ e nell'insieme dei numeri positivi, definiti come i maggioranti dello zero.

Un campo ordinato si dice che gode della **proprietà di Archimede** sse per ogni coppia di suoi elementi positivi s e t con $s < t$ si trova un intero $m \geq 2$ tale che $t < m \cdot s$.

(2) Teorema $\mathbb{R}_{\mathsf{C};Fld}$ gode della proprietà di Archimede.

Dim.: consideriamo le `sarnic` $\langle n \in \mathbb{N} :| [a_n :: b_n] \rangle$ e $\langle n \in \mathbb{N} :| [c_n :: d_n] \rangle$ rappresentanti, risp., i numeri reali-c positivi s e t. con $0 < s < t$.
È lecito limitarsi al caso in cui sia $\forall n \in \mathbb{N} \;\vdots\; b_n < c_n$: in caso contrario basta passare a considerare due `sarnic` ottenute, risp., da s e t privandole di alcuni intervalli iniziali.
Per gli estremi degli intervalli iniziali abbiamo $0 < a_0 \leq b_0 < c_0 \leq d_0$.
Definito $m := \left\lfloor \dfrac{d_0}{a_0} \right\rfloor + 1$ si trova che $m\,a_0 > d_0$ e quindi

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\vdots\; c_n \leq d_n < m\,a_0 \leq m\,a_n \leq m\,b_n \;,$$

catena di relazioni che consente di concludere che $t < m \cdot s$ ▮

B38c.04 Torniamo sul fatto che i numeri algebrici non esauriscono l'insieme dei numeri reali costruibili, e più precisamente sulla possibilità di trovare costruzioni matematiche che conducono a numeri

esprimibili con `sarnic`, ovvero che possono essere approssimati da razionali con errori arbitrariamente piccoli e quindi sono numeri costruibili, i quali non possono essere numeri algebrici.
Questi numeri sono detti **numeri trascendenti**.

I primi esempi di numeri trascendenti nonalgebrici sono stati individuati da Liouville nel 1850: si tratta di numeri dotati di approssimazioni razionali molto rapidamente convergenti come la cosiddetta **costante di Liouville**

$$c_{Lvl} := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{24} + \cdots = 1.110001000000000000000001... \ .$$

Successivamente nel 1873 Charles Hermite ha dimostrato che il numero $\mathsf{e} := 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + ...$ è trascendente; la sua dimostrazione è stata in seguito semplificata da David Hilbert.

Nel 1882 Ferdinand Lindemann ha dimostrato che anche π, il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, è un numero nonalgebrico.

Ricordiamo anche che con questo risultato è stata dimostrata l'impossibilità di risolvere il problema della `quadratura del cerchio` `(wi)`, problema la cui soluzione è stata cercata per più di 2000 anni.

B38c.05 Teorema L'insieme $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$ dei numeri reali costruibili è numerabile.

Dim.: Dato che l'insieme dei numeri costruibili contiene l'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ (e anche$\mathbb{Q}$ 4 $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$), deve avere almeno cardinale $\aleph_0$.

Per la disuguaglianza riflessa consideriamo l'insieme di tutte le procedure che consentono di individuare numeri reali costruibili è numerabile, insieme che denotiamo con $\mathsf{PRCDR}(\mathbb{R}_{\mathsf{c}})$, e PRCDR.

Ogni procedura deve poter essere descritta in modo preciso con qualche linguaggio su un alfabeto finito, ad esempio in un linguaggio naturale opportunamente esteso con notazioni riguardanti manipolazioni formali ed di entità matematiche.

Dunque l'insieme di tutte le procedure è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dell'insieme di tutte le parole sopra l'accennato alfabeto ed è quindi un insieme numerabile; a fortiori è numerabile il suo sottoinsieme $\mathsf{PRCDR}(\mathbb{R}_{\mathsf{c}})$.

Può accadere che diverse di queste procedure portino a uno stesso numero costruibile; quindi si può affermare che l'insieme dei numeri costruibili ha al più il cardinale $\aleph_0$.

In conclusione $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$ è numerabile ▮

Occorre osservare che la precedente dimostrazione è ben lontana dall'essere costruttiva, mentre è tale la dimostrazione di $|\mathbb{R}_{\mathsf{a}}| = \aleph_0$ in a07 .

In effetti, mentre i confini di $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$ sono definiti in modo da essere algoritmicamente gestibili, non possiamo dire molto dell'insieme $\mathsf{PRCDR}(\mathbb{R}_{\mathsf{c}})$ delle procedure in grado di portare a numeri costruibili. definito come prospettiva.

Mentre possiamo decidere se un complesso di istruzioni costituisce una procedura che porta a un numero costruibile, non sappiamo stabilire con qualche efficacia cosa non sia una procedura che porta a numeri costruibili.

Questo insieme è stato definitocome prospettiva motivata da una esigenza generica, ma ciascuno dei suoi elementi che si vuole utilizzare per determinare un numero da utilizzare in qualche applicazione deve essere individuato mediante argomentazioni specifiche.

Possiamo anche dire che la conoscenza di $\mathsf{PRCDR}(\mathbb{R}_{\mathsf{c}})$ è potenzialmente progressiva e tale è di conseguenza la conoscenza di $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$.

B38c.06 I numeri interi costruibili si rivelano strumenti computazionali e concettuali di grande importanza e su di essi si basano numerose costruzioni altrettanto importanti.

Cominciamo a definire i vari tipi di intervalli di tali numeri e le loro corrispondenti motazioni, anticipando che gli stessi termini e le stesse notazioni vengono utilizzate per gli intervalli di numeri reali. In effetti in molte argomentazioni non ha interesse distinguere i reali costruibili dai numeri reali definiti assiomaticamente in quanto questi ultimi non vengono utilizzati negli sviluppi che conduconoa risultati specifici riutilizzabili per ulteriori sviluppi specifici.

A partire dai numeri reali (costruibili) a e b con $a \leq b$, definiamo:

intervallo chiuso tra a e b $[a, b]$

intervallo aperto tra a e b (a, b)

intervallo chiuso-aperto tra a e b $[a, b)$

intervallo aperto-chiuso tra a e b $(a, b]$

intervallo chiuso illimitato superiormente tra b e $+\infty$ $[b, +\infty)$

intervallo aperto illimitato superiormente tra b e $+\infty$ $[b, +\infty)$

intervallo chiuso illimitato inferiormente tra $-\infty$ e a $(-\infty, a]$

intervallo aperto illimitato superiormente tra $-\infty$ e a $(-\infty, a]$

B38 d. limiti di successioni calcolabili convergenti di reali costruibili

B38d.01 In questa sezione trattiamo successioni di numeri razionali aventi le componenti determinabili mediante espressioni o più in generale mediante algoritmi che consentono di calcolarle con qualsivoglia precisione e che al crescere dell'indice presentano differenze sempre inferiori, cioè tali da individuare valori via via più circoscritti.

Queste successioni consentono di individuare numerose collezioni di numeri reali costruibil che risultano di grande interesse sia per la organizzazione delle conoscenze che per le applicazioni.

B38d.02 **Teorema** Per ogni intero $B \geq 2$ assunto come base di numerazione posizionale, si può considerare l'insieme $\mathbb{R}_{\mathsf{C},base=B}$ dei numeri r per i quali esiste un procedimento che, fissato un intero positivo grande quanto si vuole p, permetta di individuare un numero razionale q multiplo di $u := B^{-p}$ tale che sia $q < r < q + u$.

I numeri di $\mathbb{R}_{\mathsf{C},base=B}$ si possono scrivere nella forma

$$r = n + \frac{d_1}{B} + \frac{d_2}{B^2} + \cdots + \frac{d_p}{B^p} + \cdots \ ,$$

nella quale i puntini finali indicano che si potrebbero individuare ulteriori addendi, ma non in grado di modificare d_p, ultima cifra nella base B precisata (scrittura di una approssimazione per difetto).

A questo proposito va rilevato che nella definizione di $\mathbb{R}_{\mathsf{C},B}$ non si è richiesto che esista una proprietà che consenta di collegare i diversi d_i: questo lascia una grande libertà di arricchire la lista dei numeri specifici che sappiamo appartenere a questo insieme.

Si dimostra che l'insieme numerico $\mathbb{R}_{\mathsf{C},base=B}$ non dipende da B.
Si potrebbe quindi usare per esso una scrittura come $\mathbb{R}_{\mathsf{C},*}$; si tratterebbe tuttavia di una scrittura provvisoria in quanto questo insieme si trova coincidere con l'insieme dei reali costruibili $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$.

Con calcoli un tempo impegnativi, ma ora eseguibili agevolmente mediante strumenti digitali efficienti, versatili e disponibili, si trovano espressioni posizionali decimali come

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242... \ , \quad \sqrt[3]{3} = 1.4422495703068802246212164... \ ,$$
$$\sqrt[5]{10} = 1,5848931924611134852021013733... \ .$$

B38d.03 Nozione di limite di una successione di razionali costruibile convergente
Nozione di somma di una serie di razionali costruibile