1

Capitolo B37
radicali e calcoli con radici

Contenuti delle sezioni

19 pagine

B370.01 Il capitolo è dedicato alla introduzione delle prime entità numeriche non razionali concretamente utilizzabili per affrontare problemi che nascono quando si vogliono risolvere problemi significativi sopra entità costruite a partire da numeri razionali, ma che si dimostrano impossibili da trattare facendo uso dei soli numeri razionali.

Più precisamente si esaminano problemi esprimibili in termini geometrici e riconducibili alla soluzione di equazioni in due variabili nelle quali compaiono solo operazioni razionali.

Questi problemi possono essere vantaggiosamente presentati, almeno a livello intuitivo, ricorrendo alla nozione di linea curva disegnabile materialmente da una punta tracciante mossa con regolarità. Un tale scenario conduce alla più semplice concezione della nozione di continuità.

Nel capitolo si procede al primo di una serie di successivi ampliamenti dell'insieme dei numeri razionali motivati dalla necessità di definire entità numeriche atte a consentire calcoli che non si riescono ad effettuare con le entità precedentemente disponibili.

I nuovi numeri qui definiti nelle pagine che seguono si possono ricondurre alla individuazione dei punti nei quali si intersecano curve piane definite sui soli razionali e in particolare alla individuazione di intersezioni con linee rette di funzioni polinomiali e di circonferenze.

Nell'ultima parte del capitolo vengono esposte le formule basilari per la manipolazione simbolica delle espressioni contenenti radicali.

B37 a. radici di interi e di razionali positivi

B37a.01 Il primo insieme numerico infinito che conviene studiare, l'insieme dei numeri naturali, è stato esteso [B20] all'insieme degli interi relativi al fine di riuscire a effettuare l'operazione differenza su tutte le coppie di elementi dell'insieme numerico disponibile.
La differenza può vedersi come operazione inversa della somma: sapendo che $a + x = c$ e conoscendo a, si ottiene il valore c con il calcolo di $x = c - a$.

Successivamente [B30] si è ampliato l'insieme dei numeri interi a quello dei numeri razionali per estendere la possibilità di effettuare operazioni di divisione, ovvero operazioni inverse dei prodotti tra interi: sapendo che $a \cdot x = c$ e conoscendo a e c si ottiene x calcolando $x = c/a$, cosa che ha senso, cioè che risulta computazionalmente utile, solo se $a \neq 0$.

Come ampliamento successivo finalizzato alla crescita del repertorio dei meccanismi utilizzabili per risolvere problemi si impogono estensioni dell'insieme dei razionali.

Tale operazione si prospetta fruttuosa, in quanto l'insieme dei numeri razionali consente di effettuare elaborazioni maneggevoli che si sono indubbiamente in grado di risolvere molti problemi, ma hanno anche fatto emergere ulteriori obiettivi che il campo dei razionali non può a raggiungere.
In particolare le elaborazioni con numeri razionali consentono di avviare molti calcoli approssimati che portano a risultati che non sono capaci di inquadrare in modo soddisfacente.

Già il primo ampliamento dell'insieme dei razionali di cui si manifesta la necessità riguarda la possibilità di effettuare un'operazione inversa, la individuazione delle radici di numeri razionali o di equazioni razionali, operazione che si può effettuare solo in modo approssimato con i numeri razionali.

B37a.02 Ricordiamo che l'operazione di elevamento a una potenza intera positiva trasforma interi naturali in interi naturali [B12b07] e numeri razionali in razionali [B12b01].

In varie applicazioni si richiede di effettuare la trasformazione inversa: dato un numero razionale positivo q, trovare il numero x che elevato a una data potenza intera positiva p riproduca q, cioè tale che $x^p = q$. In prima battuta questo x lo si cerca tra i numeri razionali positivi.

Esempi ben evidenti vengono dalla geometria e dalle sue applicazioni. Se viene chiesto di costruire una vasca a forma di parallelepipedo retto a base quadrata di data altezza h che abbia una data capacità C, la misura del lato del quadrato base della vasca che risolve il problema sarà data dal numero positivo x tale che $x^2 = C/h$ [v.a. `duplicazione del cubo (wi)`].

Per $p = 2, 3, ...$ il numero positivo x tale che $x^p = q$ viene detto **radice p-esima** di q, o **radice di ordine** p di q, e si scrive $\sqrt[p]{q}$.

Nel caso $p = 2$ si parla di **radice quadrata** e si adotta la scrittura abbreviata $\sqrt{q}$.

Nel caso $p = 3$ si parla di **radice cubica**, per $p = 4$ si parla di **radice quartica**, per $p = 5$ di **radice quintica** e così via.

Come sarà chiarito più avanti si dovrebbe parlare più correttamente di ricerca del *valore principale di una radice*, ma questa precisazione si può sottacere quando, come in questo capitolo, non si prendono in considerazione le radici nell'ambito dei numeri complessi [B50, I37].

B37a.03 Chiaramente per ogni intero positivo p si ha $\sqrt[p]{1} = 1$ e $\sqrt[p]{0} = 0$; inoltre $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$; più in generale, per ogni intero naturale n, $\sqrt{n^2} = n$ e per ogni p intero positivo $\sqrt[p]{n^p} = n$.

Se invece cerchiamo la radice quadrata di un intero positivo che non si può ottenere come quadrato di un altro intero positivo, (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ...) non si riesce a trovare nessun razionale che soddisfi la richiesta.

Infatti se fosse $\sqrt{2} = m/n$ con $m = 2^h \cdot H$, per H non divisibile per 2 ($H \perp 2$) e con $n = 2^k \cdot K$, per $K \perp 2$, sarebbe $m^2 = 2 \cdot n^2$, cioè $2^{2\,h} \cdot H = 2 \cdot 2^{2\,k} \cdot K$; questa uguaglianza tra interi positivi implica che siano uguali le due potenze di 2, cioè che sia $2\,h = 2\,k + 1$, uguaglianza assurda.

In generale se l'intero positivo q non è il quadrato di un intero positivo, cioè se $q \notin \{k \in \mathbb{P} :| k^2\}$, si dimostra in modo analogo a quanto sopra che non si trova alcun razionale che sia radice quadrata di q.

Più in generale si dimostra l'enunciato che segue, presente già negli *Elementi di Euclide*.

(1) Prop.: Consideriamo un qualsiasi intero $p \geq 2$ e un intero positivo $q \notin \{k \in \mathbb{P} :| k^p\}$; allora non si trova alcun razionale che sia radice di ordine p di q.

Dim.: Se fosse $\sqrt[p]{q} = e/f$ con $e = q^h \cdot H$ per $H \perp q$ e con $f =: q^k \cdot K$ per $K \perp q$, dovrebbe essere $e^p = q \cdot f^p$, cioè $q^{p\,h} \cdot H^p = q \cdot q^{p\,k} \cdot K^p$; questa uguaglianza implica l'uguaglianza delle due potenze di q, cioè $p\,h = p\,k + 1$, uguaglianza evidentemente non riscontrabile ▮

B37a.04 Generalizziamo ulteriormente i risultati negativi precedenti.

(1) Prop.: Consideriamo un qualsiasi intero $p \geq 2$ e un razionale positivo $\dfrac{n}{d}$ che non sia potenza p-esima di un altro razionale positivo, cioè un $\dfrac{n}{d} \notin \left\{\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ :\middle|\, \left(\dfrac{a}{b}\right)^p\right\}$; allora non si trova alcun razionale $\dfrac{e}{f}$ che sia radice di ordine p di $\dfrac{n}{d}$.

Dim.: Scegliamo un q primo divisore di n e coprimo con d e scriviamo $n =: q^\nu \cdot N$ con $N \perp q$.
Nel caso q divisore di e e $q \perp f$ scriviamo $e =: q^\epsilon\,\overline{e}$; la richiesta $\dfrac{n}{d} = \dfrac{e^p}{f^p}$ comporta l'espressione
$\dfrac{n}{d} = \dfrac{q^\nu\,N}{d} = \dfrac{q^{\epsilon p} \cdot \overline{e}^p}{f^p} = \left(\dfrac{q^\epsilon\,\overline{e}}{f}\right)^p$ che si cercava di evitare.
Nel caso q divisore di f e $q \perp e$, posto $f =: q^\phi\,\overline{f}$, si avrebbe $\dfrac{n}{d} = q^\nu\,\overline{n} = \left(\dfrac{e}{q^\phi\,\overline{f}}\right)^p$, uguaglianza tra razionali inaccettabile per le posizioni delle potenze di p ▮

Le grandezze che non si possono valutare come multipli razionali di una prefissata unità di misura sono dette **grandezze incommensurabili**.
L'enunciato (1) si può riesprimere dicendo che la radice di ordine p di un razionale positivo che non sia potenza p-esima di un razionale positivo può esprimere solo qualche grandezza incommensurabile.

B37a.05 Si manifesta quindi l'esigenza di disporre di entità con caratteristiche numeriche, cioè entità che possano essere sottoposte a operazioni che generalizzano le operazioni razionali (somma, differenza, prodotto divisione) e quindi sono coerenti con quelle applicabili ai numeri razionali, le quali permettano di esprimere le radici di ordine intero positivo p di tutti gli interi positivi, anche di quelli che non sono potenze p-esime di interi positivi.
Tali entità numeriche le chiamiamo **radici irrazionali**.

Una tale esigenza, storicamente, si è manifestata nel circolo dei seguaci di Pitagora (probabilmente intorno al 550 a.C.), pensatori che si erano posti l'obiettivo di spiegare l'intera realtà con schemi basati solo sui numeri razionali e quindi convinti che esistessero solo oggetti e fenomeni misurabili ricorrendo a numeri interi.

Questo progetto entrò in una crisi, drammatica per i pitagorici, quando incontrarono problemi risolvibili calcolando grandezze quali la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo con entrambi i cateti lunghi 1 (lunghezza che oggi esprimiamo scrivendo $\sqrt{2}$) o la lunghezza della diagonale di un cubo con i lati uguali ad 1 (lunghezza che oggi scriviamo $\sqrt{3}$).

I due precedenti numeri si possono considerare, risp., come soluzioni delle equazioni $x^2 - 2 = 0$ e $x^3 - 3 = 0$.

Più in generale si incontrano problemi che portano a soluzioni di equazioni della forma $x^p - q = 0$ con $p \in \mathbb{P}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Più precisamente se p è pari si deve chiedere $q \in \mathbb{Q}_+$, mentre se p è dispari si distinguono il caso $q \in \mathbb{Q}_+$ che fa cercare soluzioni x nello stesso $\mathbb{Q}_+$ e il caso $q \in \mathbb{Q}_-$ riconducibile al precedente per ottenere una soluzione negativa, possibilmente in $\mathbb{Q}_-$.

Più avanti [B38] considereremo il problema ancor più generale di individuare entità numeriche che costituiscono le radici delle generiche equazioni polinomiali a coefficienti interi.

B37 b. approssimazioni con intervalli razionali delle radici di interi e di razionali

B37b.01 Vediamo come si possono organizzare operazioni sopra le radici irrazionali di numeri razionali per rendere tali entità utilizzabili sistematicamente per elaborazioni significative.

Cominciamo con il problema ben evidente del controllo della radice quadrata di un intero nonquadrato di intero.
A questo problema si riduce il controllo della radice quadrata di un numero razionale positivo n/d equivalente al calcolo del rapporto tra le radici quadrate di n e di d.
Più avanti vedremo che il controllo delle radici di ordine p maggiore di 2 si possono trattare in modi simili.

Pensiamo a una attività computazionale specifica che richiede di servirsi di un valore attribuibile a $\sqrt{m}$ con $m \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_{sq}$.
Ai fini pratici è sufficiente trovare un razionale q tale che $|q^2 - m|$ può essere considerato trascurabile per successivi utilizzi di q come sostituto di $\sqrt{m}$.

Alternativamente si possono cercare due numeri razionali D ed E che approssimano questa entità numerica, risp., per difetto e per eccesso, entrambi differendo da $\sqrt{m}$ per quantità che si possono valutare trascurabili: deve quindi essere $D < E$, $D^2 < m < E^2$ ed $E - D$ trascurabile per le esigenze di successive prevedibili manovre computazionali.

D viene detto **approssimazione [razionale] per difetto** ed E **approssimazione [razionale] per eccesso** dell'entità $\sqrt{m}$; si parla anche di valutazione per difetto o per eccesso.

B37b.02 Sul piano delle metodologia ci si propone di individuare un procedimento in grado di rispondere a ogni possibile richiesta di approssimazione razionale.

Scendendo nei dettagli per il controllo di $\sqrt{m}$ si cerca di delineare un procedimento che per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ consenta di individuare un intervallo razionale $[D_\epsilon :: E_\epsilon]$ di ampiezza minore di ϵ tale che ${D_\epsilon}^2 < m < {E_\epsilon}^2$.

È anche opportuno che i valori ricercati D ed E siano esprimibili in modo da poter essere utilizzati agevolmente per successive costruzioni e in particolare per fare da operandi di operazioni razionali agevolmente eseguibili.

In questo contesto il parametro ϵ si dice svolgere il ruolo del **parametro di tolleranza**.

B37b.03 Per definire queste nuove entità numeriche e renderle ampiamente utilizzabili è opportuno introdurre alcune costruzioni formali specifiche e chiarire alcune loro proprietà che consentano di proporre loro possibili modalità di utilizzo.

Diciamo **successione algoritmica di intervalli razionali, chiusi e annidati**, o in breve `saqni`, ogni successione di intervalli

$$\langle n \in \mathbb{N} :| [a_n :: b_n] \rangle \quad \text{con} \quad \forall n \in \mathbb{N} \because\ a_n, b_n \in \mathbb{Q}\ ,\ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

accompagnata da un algoritmo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ consente di calcolare a_n e b_n.

Diciamo poi in particolare **successione algoritmica di intervalli razionali, chiusi e annidati convergente**, in sigla `saqnic`
Ogni `saqni` tale che, espressa nella forma precedente, per ogni razionale positivo ϵ (che intuitivamente qualifichiamo come arbitrariamente piccolo) si trova un intero naturale ν_ϵ tale che,

$$\forall n \geq \nu_\epsilon \ \because\ b_n - a_n < \epsilon\ .$$

La definizione consente di considerare `saqnic` le successioni della forma

$$\left\langle n \in \mathbb{N} :| \; [q :: q] \right\rangle ,$$

cioè le successioni di intervalli ridotti a un unico punto corrispondente a un qualsiasi numero razionale q.
Evidentemente una tale `saqnic` è informativamente equivalente al semplice q, non gli aggiunge alcuna possibilità operativa.

Altre `saqnic` hanno una forma

$$\left\langle n \in \mathbb{N} :| \; \left[q - \frac{1}{B^n} \; :: \; q + \frac{1}{B^n} \right] \right\rangle$$

ove $q \in \mathbb{Q}$ e B è un intero maggiore o uguale a 2; questo intero potrebbe essere assunto come base di una numerazione posizionale; in particolare potrebbe essere $B = 10$.

Accertiamoci che si tratta effettivamente di una `saqnic`: dato che in questo caso $b_n - a_n = \dfrac{2}{B^n}$, per ogni razionale positivo ϵ, basta assumere $n > \mathsf{Logtr}_B \left(\dfrac{2}{\delta} \right) + 1$ per avere intervalli di ampiezza inferiore a ϵ [per la definizione del logaritmo troncato Logtr v. B10a09].

B37b.04 Negli esempi precedenti il carattere algoritmico degli intervalli componenti di una `saqni` viene garantito dalla possibilità di esprimere gli estremi a_n e b_n mediante semplici espressioni razionali.

Si osserva che la definizione vuole consentire che gli estremi razionali degli intervalli possano essere individuati da procedimenti più elaborati del calcolo di espressioni razionali, ma che evidentemente si possano attuare in tempi finiti, cioè siano in ogni caso formulabili come algoritmi.

Gli esempi precedenti di `saqni` e di `saqnic` sono tali per cui si conosce un razionale che appartiene a tutti gli intervalli. Una `saqnic` con questa proprietà si dice `saqnic` **rappresentante di numero razionale**.

Vi sono invece dei `saqnic` per i quali questo non può accadere: in particolare, ricordando che $\sqrt{2} \approx 1.4142...$, non può essere `saqnic` di numero razionale quella ottenibile dalle cifre decimali che si trovano per $\sqrt{2}$ cioè

$$\Big\langle [1 :: 2], [1.4 :: 1.5], [1.41 :: 1.42], [1.414 :: 1.415] [1.4142 :: 1.4153], ... \Big\rangle .$$

Introduciamo il termine (con funzione intermediaria) **numero reale illimitatamente approssimabile mediante razionali**, in breve **reale-iaq**, un oggetto ρ sottoponibile alle operazioni razionali e confrontabile con i razionali che si può associare a una `saqnic` della forma $\langle n \in \mathbb{N} :| \; [a_n \; :: \; b_n] \rangle$ attraverso la richiesta $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; a_n \leq \rho \leq b_n$.

In seguito vedremo che per ciascuno di questi numeri si può utilizzare il termine più preciso e comprensivo **numero reale costruibile**, termine che abbreviamo con **reale-c** e che conviene utilizzare fin da ora come sinonimo di reale-iaq. Il loro insieme lo denotiamo con $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$.

Una tale entità, per definizione, può essere approssimata quanto si vuole da numeri razionali. Nella pratica spesso questi numeri sono espressi da notazioni posizionali finite o periodiche relative a una qualsiasi base $B \in \{2, 3, ...\}$, cioè possono essere approssimati quanto si vuole da elementi dell'insieme di numeri razionali $\mathbb{Q}_{base=B}$.
Infatti ρ può essere approssimato quanto si vuole da numeri razionali come a_n, b_n o $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ e questi numeri possano essere approssimati quanto si vuole servendosi di un insieme $\mathbb{Q}_{base=B}$.

B37b.05 Le `saqni` sono costruzioni formali piuttosto elaborate (anche rispetto alle sezioni razionali di Dedekind spesso utilizzate per definire i numeri reali).

Qui esse sono adottate sistematicamente in quanto possono servire come schemi di attività di misurazioni sperimentali che hanno il pregio di prospettare procedimenti evidentemente realizzabili.

Una parte iniziale finita di una `saqni` costituita da m intervalli razionali annidati $\langle i = 1, ..., m :| [a_i :: b_i]\rangle$ consente di rappresentare la esecuzione di una sequenza di m osservazioni sperimentali volte a misurare una grandezza fisica o numerica ρ utilizzando strumenti o metodi via via più precisi.

Dopo aver accertato che il valore della ρ appartiene all'intervallo $[a_i :: b_i]$, nella $i+1$-esima di queste osservazioni, adottando una tecnica più precisa (spesso più impegnativa) si individuano una approssimazione razionale per difetto a_{i+1} e/o una per eccesso b_{i+1}, complessivamente più effettive, ovvero caratterizzate da $a_1 \le a_{i+1} \le b_{i+1} \le b_i$ e $b_{i+1} - a_{i+1} < b_i - a_i$.

Un esempio di progressivo miglioramento sperimentale consiste nel procedere dimezzando in ogni nuova osservazione l'intervallo $[a_i :: b_i]$ nel quale collocare ρ per decidere se $a_{i+1} = a_i$ e $b_{i+1} = \dfrac{b_i - a_i}{2}$, oppure se $a_{i+1} = \dfrac{b_i - a_i}{2}$ e $b_{i+1} = b_i$.

Questo tipo di procedimento conduce ad approssimazioni mediante notazioni binarie.

Varianti di questo modo di procedere facilmente immaginabili conducono ad approssimazioni espresse da notazioni decimali o in altra base $B > 2$.

Il procedere delle osservazioni con tecniche via via migliori si può significativamente associare all'evoluzione storica delle tecniche di indagine e al crescere delle aspirazioni applicative.

In particolare va ricordata l'evoluzione delle procedure volte alla precisazione delle approssimazioni di costanti matematiche importanti come π ed $\mathtt{e}$.

B37b.06 I numeri reali-iaq che non sono razionali li chiamiamo numeri irrazionali-iaq.
Individuiamo ora una `saqnic` che individua un numero irrazionale-iaq come $\sqrt{2}$, in modo da stabilire l'inclusione propria $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_{\mathsf{C}}$. Questa `saqnic` ha la forma

$$\left\langle n \in \mathbb{P} :| \left[\frac{h_n}{10^n} :: \frac{h_n + 1}{10^n}\right]\right\rangle ,$$

dove h_n è l'intero positivo tale che sia ${h_n}^2 < 2 \cdot 10^{2n} < (h_n + 1)^2$.

Tale `saqnic` presenta le seguenti componenti iniziali

$$\left\langle \left[1, 2\right], \left[\frac{14}{10}, \frac{15}{10}\right], \left[\frac{141}{100}, \frac{142}{100}\right], \left[\frac{1414}{1000}, \frac{1415}{1000}\right], ...\right\rangle .$$

Un algoritmo semplice, anche se inefficiente, che consente di individuare un h_n si serve di h_{n-1} e si preoccupa solo di confrontare con $2 \cdot 10^{2n}$ i successivi quadrati $(h_n \cdot 10^n + i)^2$ per $i = 0, 1, ..., 10$.

Costruzioni analoghe alla precedente mostrano che tutti i razionali che non sono quadrati di razionali hanno radici quadrate che non appartengono a $\mathbb{Q}$, ma costituiscono numeri reali costruibili.

B37b.07 Consideriamo due `saqni`

$$\mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| [a_n :: b_n]\rangle \quad \text{e} \quad \mathsf{c} := \langle k \in \mathbb{N} :| [c_k :: d_k]\rangle .$$

Esse si dicono `saqni` **equivalenti-lim** sse

(a) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si trova $k_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n \le c_{k_n} \le d_{k_n} \le b_n$ e

(b) per ogni $k \in \mathbb{N}$ si trova $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $c_k \le a_{n_k} \le b_{n_k} \le d_k$.

(1) Prop.: La relazione di equivalenza-lim è riflessiva, simmetrica e transitiva, e quindi, a giustificazione dal nome assegnatole, è una equivalenza.

Dim.: Riflessività e simmetria discendono immediatamente dalla definizione.

Per la transitività consideriamo, oltre ad $\mathtt{a}$ e $\mathtt{c}$, la `saqni` $\boldsymbol{e} := \langle k \in \mathbb{N} :| \,[e_k :: f_k]\rangle$, supponiamo l'equivalenza-lim di $\mathtt{a}$ e $\mathtt{c}$ e l'equivalenza-lim di $\mathtt{c}$ con $\boldsymbol{e}$.
L'equivalenza-lim di $\mathtt{a}$ con $\boldsymbol{e}$ viene garantita dalle seguenti affermazioni riguardanti indici che le equivalenze ipotizzate dicono potersi individuare.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si trova $k_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n \leq c_{k_n} \leq d_{k_n} \leq b_n$ e si trova $q(k_n) \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq c_{k_n} \leq e_{q(k_n)} \leq f_{q(k_n)} \leq d_{k_n} \leq b_n$.
Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si trova $p_m \in \mathbb{N}$ tale che $e_m \leq c_{p_m} \leq d_{p_m} \leq f_m$ e si trova $h(p_m) \in \mathbb{N}$ tale che $e_m \leq c_{p_m} \leq a_{h(p_m)} \leq b_{h(p_m)} \leq d_{p_m} \leq f_m$ ∎

Sono evidentemente equivalenti-lim le `saqni`

$$\left\langle n \in \mathbb{P} :\left| \left[2 - \frac{1}{n} :: 4 + \frac{1}{n^2}\right]\right.\right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle n \in \mathbb{P} :\left| \left[2 - \frac{1}{2n^3} :: 4 + \frac{1}{2n}\right]\right.\right\rangle .$$

L'equivalenza-lim interessa soprattutto per le `saqnic`. Sono per esempio equivalenti-lim le `saqnic`

$$\langle n \in \mathbb{P} :| \,[-1/n :: 1/n]\rangle \ , \quad \left\langle n \in \mathbb{P} :\left| \left[-\frac{1}{n^2} :: \frac{1}{n^3}\right]\right.\right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle k \in \mathbb{P} :\left| \left[-2^{-k} :: 2^{-k}\right]\right.\right\rangle$$

B37b.08 Ogni `saqni` risulta equivalente-lim a qualsiasi `saqni` costituita da una qualsiasi sottosuccessione illimitata dei suoi intervalli.
Inoltre ogni `saqnic` risulta equivalente-lim a qualsiasi `saqnic` costituita da una qualsiasi sottosuccessione illimitata dei suoi intervalli.

Per esempio si riscontra equivalenza-lim tra le seguenti coppie di `saqni`:
$\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_n :: f_n]\rangle$ e $\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_{2n} :: f_{2n}]\rangle$
$\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_n :: f_n]\rangle$ e $\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_{n+m} :: f_{n+m}]\rangle$ per ogni $m \in \mathbb{P}$,
$\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_n :: f_n]\rangle$ e $\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_{kn} :: f_{kn}]\rangle$ per ogni $k = 2, 3, 4, ...$
$\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_n :: f_n]\rangle$ e $\langle n \in \mathbb{P} :| \,[e_{n^2} :: f_{n^2}]\rangle$.

B37b.09 Nel seguito facciamo riferimento alla `saqni` $\mathtt{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| \,[a_n :: b_n]\rangle$.

Si dice `saqni` **opposta** della $\mathtt{a}$ la `saqni` $-1 \cdot \mathtt{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| \,[-b_n :: -a_n]\rangle$

Chiaramente l'opposta di una `saqnic` è una `saqnic`.

Si dice che $\mathtt{a}$ è una `saqni` **positiva** sse si trova un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \nu \implies a_n > 0$.

Si dice che $\mathtt{a}$ è una `saqni` **negativa** sse si trova un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \nu \implies b_n < 0$.

Similmente si definiscono le `saqni` nonnegative e le nonpositive.

Si dice che la $\mathtt{a}$ delimita il numero razionale q sse si trova un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \nu \,\because\, a_n \leq q \leq b_n$.

Chiaramente l'opposta di una `saqni` positiva è una `saqni` negativa e viceversa, mentre l'opposta di una `saqni` che delimita $q \in \mathbb{Q}$ è una `saqni` che delimita $-q$.

Si dice `saqni` **stabile** una `saqni` della forma $\langle n \in \mathbb{N} :| \,[q :: r]\rangle$ per $q, r \in \mathbb{Q}$ e $q \leq r$; per tale `saqni` q si dice estremo sinistro ed r estremo destro.
In particolare una `saqnic` stabile è una `saqni` con gli estremi coincidenti.

Chiaramente le `saqni` stabili sono equivalenti agli intervalli razionali e le `saqnic` stabili sono equivalenti ai numeri razionali.

Queste due nozioni sono state introdotte per poter considerare gli intervalli razionali come casi particolari di `saqni` ed i numeri razionali come casi particolari di `saqnic`.

B37b.10 Ogni `saqni`

$$\boldsymbol{e} := \langle n \in \mathbb{N} :| \,[e_n :: f_n]\rangle \ \text{ tale che } \lim_{n\to+\infty} e_n = \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$$

è chiaramente una `saqnic` che chiamiamo `saqnic` **infinitesima**.

Due esempi di `saqni` infinitesime sono $\left\langle n \in \mathbb{P} :\middle| \left[\frac{1}{n} :: \frac{1}{n^2}\right]\right\rangle$ e $\left\langle n \in \mathbb{P} :\middle| \left[-\frac{1}{n^2} :: \frac{1}{n^2}\right]\right\rangle$.

Ogni `saqnic` infinitesima è in biiezione con una coppia di successioni, infinitesime, una di razionali negativi e una di razionali positivi.

È anche evidente che ogni `saqnic` infinitesima delimita lo 0 e che ogni `saqnic` che delimita lo 0 è infinitesima.

Si constata facilmente che anche l'opposta di ogni `saqni` infinitesima è una `saqnic` infinitesima.

Inoltre data una successione infinitesima $\langle n \in \mathbb{N} :| \, a_n\rangle$ le risulta associata biunuivocamente la `saqni` $\langle n \in \mathbb{N} :| \,[-|a_n| :: |a_n|]\rangle$ che è una `saqnic` infinitesima invariante per cambiamento di segno, ovvero una `saqnic` costituita da intervalli razionali simmetrici rispetto allo 0.

B37 c. operazioni per le saqnic e numeri reali-iaq

B37c.01 Nel seguito prenderemo in esame le seguenti saqni generiche

$$\mathbf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| \, [a_n :: b_n] \rangle \ , \quad \mathbf{c} := \langle k \in \mathbb{N} :| \, [c_k :: d_k] \rangle \quad \text{e} \quad \boldsymbol{e} := \langle k \in \mathbb{N} :| \, [e_k :: f_k] \rangle \ ;$$

Inoltre con α e con β denotiamo due numeri razionali.

Ci occuperemo dei numeri individuati dalle saqnic e a questo scopo si possono distinguere tre tipi di saqnic: quelle che da una componente n in poi presentano intervalli di soli numeri positivi, quelli che da una componente n in poi presentano intervalli di soli numeri negativi e le saqnic infinitesime.

Osserviamo anche che per quanto riguarda i numeri individuati ogni saqnic può essere rimpiazzata da una sua sottosuccessione infinita.

Nel seguito quindi possiamo limitarci ad esaminare solo saqnic con intervalli interamente contenuti in $\mathbb{Q}_+$, saqnic con intervalli interamente contenuti in $\mathbb{Q}_-$, e saqnic con intervalli che contengono il numero 0.

B37c.02 Si definisce come **somma delle saqni a e c**

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} \ := \langle n \in \mathbb{N} :| \, [a_n + c_n :: b_n + d_n] \rangle \ .$$

Si vede facilmente che l'entità ottenuta è una saqni, che $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$ e che $\mathbf{a} + (\mathbf{c} + \boldsymbol{e}) = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + \boldsymbol{e}$. Dunque la somma tra saqni è un'operazione binaria commutativa e associativa.

(1) Prop.: La somma di due saqnic è una saqnic.

Dim.: Dobbiamo esaminare l'andamento al crescere di n della ampiezza $w_n := (b_n + d_n) - (a_n + c_n) = b_n - a_n + d_n - c_n$.
Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trovano $\mu \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq \mu \ : \ (b_n - a_n) < \epsilon/2p$ e $\nu \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq \nu \ : \ (d_n - c_n) < \eta/2p$.
Per ogni $n \geq \max(\mu, \nu)$ si ha $D_n < \epsilon$ e l'arbitrarietà di ϵ dimostra la convergenza del saqnic somma ▮

Per ogni $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ si definisce come **moltiplicazione per α di a** la saqni

$$\alpha \cdot \mathbf{a} \ := \langle n \in \mathbb{N} :| \, [\alpha \, a_n :: \alpha \, b_n] \rangle \ .$$

(2) Prop.: La moltiplicazione per α della saqnic **a** è una saqnic.

Dim.: Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trova $\nu \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq \nu \ : \ (b_n - a_n) < \epsilon/\alpha$; quindi per ogni $n \geq \nu$ accade che $\alpha \, b_n - \alpha \, a_n < \epsilon$ e l'arbitrarietà di ϵ dimostra la convergenza della saqnic $\alpha \cdot \mathbf{a}$ ▮

(3) Prop.: L'opposta dellasaqnic **a** è una saqnic.

Dim.: Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trova $\nu \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq \nu \ : \ (b_n - a_n) < \epsilon$; quindi per ogni $n \geq \nu$ accade che $-1 \cdot a_n - (-1) \cdot b_n = b_n - a_n < \epsilon$ e questo gaarantisce la convergenza della saqni $\alpha \cdot \mathbf{a}$ ▮

Consideriamo anche due numeri razionali α e γ.
Si definisce come **combinazione lineare** di **a** e **c** relativa ai coefficienti α e γ la successione di intervalli

$$\alpha \cdot \mathbf{a} + \gamma \cdot \mathbf{c} \ := \langle n \in \mathbb{N} :| \, [\alpha \, a_n + \gamma \, c_n :: \alpha \, b_n + \gamma \, d_n] \rangle \ .$$

Si vede facilmente che anche questa successione è una saqni.

(4) Prop.: Ogni combinazione lineare di due o più saqnic con coefficienti razionali è una saqnic.

Dim.: Segue da (1) e (2) ▮

Si dice **differenza tra la** `saqni` **a e la** `saqni` **c** la successione, che evidentemente è una `saqni`

$$\mathsf{a} - \mathsf{c} \ := \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ [a_n - c_n :: b_n - d_n] \big\rangle \ .$$

(5) Prop.: La differenza di due `saqnic` è una `saqnic`.

Dim.: Segue da (1) e (3) ▮

Evidentemente la somma di una `saqni` e della sua opposta delimita il numero 0; ma si può affermare di più.

Prop. 5 La somma di una `saqnic` **a** e della sua opposta è una `saqnic` infinitesima.

Dim.: Supponiamo, senza ledere la generalità, che la **a** tenda a un $r \in \mathbb{Q}_+$ e supponiamo che i suoi intervalli siano formati solo da razionali positivi, situazione sempre ottenibile con la semplice eliminazione di una prima sottosequenza di intervalli.
Se si scrive $\mathsf{a} = \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n :: b_n \big\rangle$ abbiamo $\mathsf{a} - \mathsf{a} \ = \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n - a_n :: a_n - b_n \big\rangle$ e quindi la ampiezza dell'intervallo n-esimo è $(a_n - b_n)$
Scegliamo un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (ipap) e si trovi $\nu \in \mathbb{N}$ tale che. $\forall n \geq \nu \ \colon \ b_n - a_n < \dfrac{\epsilon}{2}$. per tali n l'ampiezza dell'intervallo della `saqni` $\mathsf{a} - \mathsf{a}$ è inferiore a ϵ ▮

B37c.03 Consideriamo due `saqni` **a** e **c** positive; si dice **prodotto delle due** `saqni`

$$\mathsf{a} \cdot \mathsf{c} \ := \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ [a_n \, c_n :: b_n \, d_n] \big\rangle \ .$$

Prop. 1 il prodotto di due `saqni` positive è una `saqni` positiva.

Dim.: Dobbiamo esaminare l'andamento al crescere di n di $D_n := b_n \, d \, n - a_n \, c_n = b_n(d_n - c_n) + c_n(b_n - a_n)$; ci servono $p := \max(b_1 \, d_1)$ e $\pi := \max(\mu, \nu)$. si constata che $D_n < p[(d_n - c_n) + (b_n - a_n)]$.
Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trovano $\mu \in \mathbb{N} \, \rrbracket \, \forall m \geq \mu \ \colon \ (b_n - a_n) < \epsilon/2p$ e $\nu \in \mathbb{N} \, \rrbracket \, \forall n \geq \nu \ \colon \ (d_n - c_n) < \eta/2p$.
Per ogni $n \geq \nu$ si ha $D_n < p \, \epsilon$ e il carattere di ϵ implica la convergenza del prodotto ▮

Consideriamo una `saqni` positiva **a** con $0 < a_1 < b_1$; si dice **reciproca della** `saqni` **a** la successione

$$\mathsf{a}^{-1} = \frac{1}{\mathsf{a}} \ := \ \left\langle n \in \mathbb{N} \,\Big\vert\, \frac{1}{b_n} :: \frac{1}{a_n} \right\rangle \ .$$

Evidentemente anche questa è una `saqni`.

Prop. 2 La reciproca di una `saqnic` positiva è una `saqnic` positiva.

Dim.: Dobbiamo esaminare l'andamento al crescere di n di $D_n \ := \ \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{b_n} \ = \ \dfrac{b_n - a_n}{a_n \, b_n}$.
Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trova $\nu \in \mathbb{N} \, \rrbracket \, \forall n \geq \nu \ \colon \ (b_n - a_n) < \epsilon \, {a_1}^2$.
Quindi per ogni $n \geq \nu$ si ha $D_n < \dfrac{\epsilon \, {a_1}^2}{a_n \, b_n} < \epsilon$, in quanto $a_1 \leq a_n \leq b_n$ e questo dimostra la convergenza della `saqni` a^{-1} ▮

Consideriamo due `saqni` positive **a** e **c**; si dice **quoziente tra le due** `saqni` **a** e **c** la successione

$$\frac{\mathsf{a} \cdot \mathsf{c}^{-1} \ = \ \mathsf{a}}{\mathsf{c} := \big\langle n \in \mathbb{N} \, \vdots \, \frac{a_n}{d_n} :: \frac{b_n}{c_n} \big\rangle} \ .$$

Evidentemente anche questa successione di intervalli è una `saqni`.

Prop. 2 Il quoziente di due `saqnic` positive è una `saqnic` positiva.

Dim.: Segue da (1) e (2) ▮

B37c.04 Di una `saqnic` positiva si possono definire le potenze intere positive e negative e si può definire la potenza zero come `saqnic` $\big\langle n \in \mathbb{N} :| \ 1 :: 1 \big\rangle$. Tutte le successioni così ottenute son delle `saqnic`.

Le operazioni tra `saqnic` si possono estendere senza difficoltà alle saqnic di ogni segno tenendo conto degli effetti del cambiamento di segno.

Inoltre si dimostra che tutte queste operazioni tra `saqnic` valgono le proprietà algebriche e di ordine che si sono trovate per i numeri razionali,

Questo fa sì che l'insieme delle `saqnic` si possa considerare un campo abeliano totalmnte ordinato che estende il campo dei numeri razionali.

Questo rende lecito trattare l'insieme delle classi di equivalenza-lim delle `saqnic` come campo che estende il campo dei razionali.

Come si è detto tale campo viene detto campo dei reali-iaq.

Nella pratica le operazioni tra numeri di questo campo saranno da eseguira con tecniche di calcolo approssimato.

B37 d. equazioni di secondo grado

B37d.01 Cerchiamo le radici della **equazione di secondo grado**

(1) $$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R}_{\mathsf{C}} \;\text{ e }\; a \neq 0 \;.$$

Questa equazionesi risolve facilmente se $c = 0$, cioè se si può riscrivere $(a\,x + b)x = 0$: infatti in questo caso, evidentemente, una radice è $x_1 = 0$ e l'altra è $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

L'equazione si risolve facilmente anche se $b = 0$, cioè se le si può dare la forma $a\,x^2 + c = 0$ (con $a \neq 0$), ovvero $x^2 = -\dfrac{c}{a}$.

Per procedere si deve esaminare $-\dfrac{c}{a}$.

Se il suo valore è negativo non si ha alcuna soluzione in $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$.

Se invece $-\dfrac{c}{a} > 0$ si hanno le due radici opposte individuate dall'espressione $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{c}}{a}$.

Se $c = 0$ l'unica soluzione è lo 0; questa soluzione viene detta soluzione di molteplicità 2 e per segnalarla si usa scrivere $x_{1,2} = 0$.

Questa qualificazione per ora la giustifichiamo intuitivamente considerando che la soluzione 0 si possa pensare come unico limite delle due precedenti ottenuto rendendo $|c|$ sempre più piccolo.

La nozione di molteplicità delle radici delle equazioni polinomiali sarà giustificata in modo completamente soddisfacente analizzando queste equazioni quando si consente che i loro coefficienti e i possibili valori delle incognite si trovino nel campo complesso [B50, I38].

B37d.02 La soluzione generale dell'equazione d01(1) si ottiene con una opportuna traslazione della variabile x che riconduce l'equazione alla forma particolare vista in precedenza.

Introduciamo la generica variabile traslata $X := x - \overline{x}$, ove $\overline{x}$ è un razionale la cui determinazione viene effettuata in modo da giungere a una equazione per la quale sia facile trovare le souzioni.

L'equazione assume dunque la forma $a(X - \overline{x})^2 + b(X - \overline{x}) + c = 0$, ovvero

(1) $$a\,X^2 + (b - 2\,a\,\overline{x})X + a\,\overline{x}^2 - b\,\overline{x} + c \;=\; 0 \;.$$

Si osserva che conviene scegliere $\overline{x} := \dfrac{b}{2\,a}$ in modo da ottenere l'equazione nella X che segue, priva del termine di primo grado:

$$a\,X^2 - \frac{b^2}{4\,a} + c \;=\; 0 \qquad \text{ovvero} \qquad X^2 \;=\; \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4a^2} \;.$$

A questo punto conviene introdorre il **discriminante dell'equazione** $D := b^2 - 4\,a\,c$.

Si può quindi affermare che se $D < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali-c, se $D > 0$ ha le due soluzioni $X_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{D}}{2\,a}$ e se $D = 0$ ha come soluzione $X = 0$ che si conviene di considerare soluzione di molteplicità 2.

Per concludere si torna alla variabile originaria x e dare per essa l'espressione risolutiva

(2) $$x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,a} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \;.$$

B37d.03 Consideriamo l'equazione di secondo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ con discriminante positivo e quindi dotata di due radici reali distinte x_1 e x_2.

Può risultare utile collegare i coefficienti a, b e c del polinomio con le sue radici x_1 e x_2 e si trova:

(1) $$x_1 + x_2 \;=\; -\frac{b}{a} \qquad , \qquad x_1 \cdot x_2 \;=\; \frac{c}{a}\ .$$

B37 e. regola di Cartesio

B37e.01 Consideriamo un'equazione di secondo grado con discriminante positivo e quindi dotata di due distinte radici costruibili.

Per talune argomentazioni (ne incontreremo poco più avanti) non è necessario conoscerne i precisi valori delle radici, ma è sufficiente confrontarli con il numero 0, ossia stabilire se se sono entrambe positive o negative, oppure se hanno segni opposti.

Evidentemente le due radici sono concordi in segno sse il loro prodotto $\dfrac{c}{a}$ è positivo.

Si hanno quindi le possibilità che seguono.

- Le due radici sono positive sse la loro somma e il loro prodotto sono positivi.
- Le due radici sono negative sse la loro somma è negativa e il loro prodotto è positivo.
- Le radici sono discordi e ha modulo maggiore quella positiva sse il loro prodotto è negativo e la loro somma è positiva.
- Le radici sono discordi e ha modulo maggiore quella negativa sse il loro prodotto è negativo e la loro somma è negativa.

B37e.02 Diciamo che un'equazione di secondo grado presenta una variazione quando due suoi coefficienti consecutivi hanno segni opposti, mentre diciamo che presenta una permanenza quando due suoi coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno.

Evidentemente queste caratterizzazioni sono immediatamente derivabili dalla scrittura dell'equazione.

Se ci limitiamo a considerare equazioni con $a > 0$, restrizione che non riduce la generalità, abbiamo il quadro che segue.

a	b	c	$\dfrac{c}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$	x_1	x_2	
$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	due permanenze
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	una permanenza e una variazione
$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	due variazioni
$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	una variazione e una permanenza

Le precedenti considerazioni si possono presentare attraverso l'enunciato che segue.

(1) Prop.: (**regola di Cartesio**) Un'equazione di secondo grado con discriminante maggiore o uguale a zero ha tante radici positive quante sono le sue variazione e tante negative quante le sue permanenze; inoltre se la variazione precede la permanenza è maggiore in modulo la radice positiva, se la permanenza precede la variazione ha valore assoluto la radice negativa.

B37e.03 Alla regola di Cartesio si può ricondurre anche il confronto delle radici di un'equazione con determinante nonnegativo con un numero q diverso dallo 0: si tratta di effettuare la modifica della variabile x nella $X := x - q$ ottenendo un'equazione le cui radici possano essere confrontate con lo 0 secondo il procedimento visto in precedenza.

B37 f. equazioni riducibili al secondo grado

B37f.01 Si dice **equazione trinomia** una equazione polinomiale della forma

$$a\,x^{2\,n} + b\,x^n + c \;=\; 0\ . \tag{1}$$

Una tale equazione si riconduce a un'equazione di secondo grado introducendo una nuova variabile $X := x^n$:

$$aX^2 + bX + c = 0\ . \tag{2}$$

trovate le radici X_1 e X_2 di questa si tratta di risolvere le equazioni

$$x^n \;=\; X_1 \qquad \text{e} \qquad x^n \;=\; X_2\ . \tag{3}$$

Queste sono dette **equazioni binomie**.

Se si vogliono soluzioni espresse mediante radicali deve essere innanzi tutto $D \;:=\; b^2 - 4\,a\,c \geq 0$

In tal caso si devono distinguere i due casi di n pari e di n dispari.

Se n è pari le equazioni (3) hanno due radici reali-c e opposte quando si ha, risp., $X_1 > 0$ e $X_2 > 0$. L'equazione (1) può quindi avere 4, 2 o 0 radici reali e si può sapere rapidamente di quale situazione si tratta applicando la regola di Cartesio alla (2).

Se n è dispari ciascuna delle equazioni (3) ammette una radice reale costruibile e quindi la (1) se il suo discriminante è positivo ammette due radici reali-c.

B37f.02 Si dice **equazione biquadratica** l'equazione trinomia nel caso $n = 2$, cioè l'equazione della forma

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0\ .$$

Le sue soluzioni sono fornite dalla espressione a 4 valori

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}\ .$$

B37 g. manipolazione di espressioni con radicali

B37g.01 Per risolvere molti problemi si richiede il calcolo di espressioni numeriche nelle quali compaiono operazioni razionali e calcoli di radici di numeri razionali, riducibili queste a calcolo di radici di interi positivi Ciascuna di queste espressioni la chiamiamo **espressione-qr**.

Espressioni di questio tipo si incontrano nella geometria del piano, in particolare quando si incontrano diagonali di quadrati ($\sqrt{2}$), altezze di triangoli equilateri ($\sqrt{3}$), corde di pentagoni regolari ($\sqrt{5}$), lati di cubi aventi un volume doppio dell'altro ($\sqrt[3]{2}$).

Dal punto di vista dello svolgimento effettivo dei calcoli una espressione con operazioni razionali e radicali si può pensare come un algoritmo che prevede operazioni su numeri interi finite e fasi elaborative potenzialmente illimitate da portare avanti fino a che si raggiunge una precisione accettabile, compatibilmente con le risorse disponibili.
Queste fasi derivano da operazioni di estrazioni di radici e da operandi rappresentati da numeri reali-c, in genere attraverso notazioni posizionali, in genere decimali.

Qui non ci occupiamo dei problemi di approssimazione, studiati dall'`analisi numerica (wi)`, ma delle manipolazioni formali delle espressioni-qr volte a ridurre le occorrenze di richieste di fasi potenzialmente illimitate.

Queste manipolazioni possono essere notevolmente vantaggiose in quanto le richieste di fasi potenzialmente illimitate costituiscono componenti tendenzialmente onerose delle espressioni numeriche, sia in quanto richiedono calcoli impegnativi, sia perchè non facili da sottoporre a semplificazioni.

B37g.02 Si dice **razionalizzazione di un'espressione-qr** $\mathcal{E}$ ogni manipolazione formale che riesce a trasformare tale formula in un'espressione equivalente priva di radicali.

Questa trasformazione va giudicata vantaggiosa in quanto il calcolo di ogni radicale è considerato più oneroso delle divisioni a loro volta più onerose delle moltiplicazioni e queste più impegnative delle addizioni e delle sottrazioni.

Cominciamo prendendo in considerazione le due formule che seguono, nelle quali assumiamo che a e b siano ono due reali-c positivi distinti:

(1) $$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \;=\; a-b\ ,$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \;=\; \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\ .$$

La formula (2) riguarda una funzione data da due espressioni la prima con il denomintore impegnativo e la seconda con il numeratore più impegnativo.

L'opportunità della sua applicazione dipende da quanto sia più opportuno avere radicali nel numeratore e non nel denominatore.

Se il primo o il terzo membro fanno parte dei iuna espressione più elaborata occorre confrontare le possibilità di semplificazioni che si possono avere con ciascuna delle suddette sottoespressioni.

B37g.03 Le uguaglianze sulle quali si può basare una manovra di razionalizzazione sono raccolte qui sotto.
Qui a e b denotano reali-c o, più in generale, espressioni in grado di fornire reali-c, mentre n ed m denotano interi positivi.

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2} &= a \;\text{ se }\; a > 0\ ,\\
\left(\sqrt[n]{a}\right)^n &= a \;\text{ se }\; a > 0 \;\text{ per }\; n \in \mathbb{E}\mathsf{ven} \;\text{ oppure se }\; n \in \mathbb{O}\mathsf{dd}\ ,\\
\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a\,b}\ ,\\
\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ,\\
\sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}\ ,\\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m\cdot n]{a}\ ,\\
(\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}\ ,\\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m}\ ,\\
a^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ ,\\
\sqrt[n]{a^n} &= a\ ,\\
\sqrt{a \pm \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\ .
\end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza si chiede $a^2 - b$ sia in grado di fornire numeri reali-c positivi e quindi che sia $a^2 > b$.

B37g.04 Si dice **numero irrazionale quadratico** ogni numero irrazionale che costituisce la soluzione di una equazione quadratica con i coefficienti razionali che sia irriducibile sull'insieme $\mathbb{Q}$, cioè che non sia trasformabile nella forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$.

Questi numeri sono quindi particolari numeri reali algebrici e possono essere forniti da una espressione della forma

$$(1) \qquad \frac{a + b\sqrt{c}}{d} \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}\ \ , d \neq 0 \;\text{ e }\; c \notin \{z \in \mathbb{Z} :|\ z^2\}\ .$$

Si osserva che anche il reciproco di un irrazionale quadratico si può porre nella forma precedente e quindi è anch'esso un irrazionale quadratico. Infatti

$$(2) \qquad \frac{d}{a + b\sqrt{c}} = \frac{d(a - b\sqrt{c})}{(a - b\sqrt{c})\,(a + \sqrt{c})} = \frac{a\,d - b\,d\sqrt{c}}{a^2 - b^2\,c}\ .$$

B37g.05 Esponiamo la dimostazione di Theodor Estermann e Colin Richard Hughes della irrazionalità delle radici quadrate dei naturali nonquadrati. dimostrazione che non si avvale del teorema fondamentale dell'algebra.

Sia d un tale numero e sia n il naturale positivo tale che $n^2 < d < (n + 1)^2$; quindi vale la catena di disuguaglianze $0 < \sqrt{d} - n < 1$.

Procedendo per assurdo supponiamo che si possano avere espressioni della forma $\sqrt{d} = \dfrac{p}{q}$ con p e q interi positivi; più precisamente assumiamo che q sia il minimo dei possibili denominatori perqueste espressioni razionali di $\sqrt{d}$ e quindi assumiamo che sia il minimo q per il quale $q\sqrt{d} \in \mathbb{P}$.

Di conseguenza anche $(\sqrt{d} - n)\,q\,\sqrt{d} = q\,d - n\,q\,\sqrt{d} \in \mathbb{P}$ e pertanto, essendo $\sqrt{d} - n < 1$ deve essere $(\sqrt{d} - n)\,q < q$, contro la minimalità ipotizzata per q ▮