1

Capitolo B36
limiti, derivate e andamenti delle funzioni sui razionali

Contenuti delle sezioni

20 pagine

B360.01 Questo capitolo procede nella graduale introduzione delle nozioni basilari per l'analisi infinitesimale, limitatamente alle funzioni di una variabile sui numeri razionali a valori razionali, le sole funzioni numeriche finora definite in modo da essere pienamente utilizzabili.

Queste funzioni consentono di impostare attraverso precise definizioni, senza dover fare ricorso all'intuizione, le esigenze computazionali che conducono alla introduzione dei numeri calcolabili e successivamente all'uso dei numeri reali e delle corrispondenti funzioni, ossia dall'analisi infinitesimale e delle sue diffuse applicazioni.

Va osservato che le funzioni sui razionali, con i loro ingredienti sensibilmente più elementari di quelli delle funzioni sui reali a valori reali, consentono di introdurre (con portata limitata ma logicamente solida e significativamente esemplificabile) nozioni essenziali per le funzioni univariate quali: limiti al finito e all'infinito, derivate, comportamenti rispetto a crescita o decrescita, concavità e convessità, comportamenti rispetto alle trasformazioni fondamentali, ossia rispetto alle traslazioni, alle omotetie e alle riflessioni.

B36 a. funzioni sui razionali [2]

B36a.01 In queste pagine prenderemo in considerazione funzioni del genere $\{\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\rceil$, funzioni univariate che chiamiamo anche **funzioni-QtQ** cioè particolari insiemi di coppie di razionali tali che

$$\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in F \implies b = c \ .$$

Il loro insieme lo denoteremo con FunQtQ; per identificare una generica di tali funzioni useremo tipicamente la lettera f.

Tra le funzioni-QtQ quelle che più spesso prendiamo in considerazione sono quelle individuate da espressioni nelle quali intervengono solo una variabile razionale, che spesso si scrive x, costanti razionali e le **operazioni aritmetiche**: addizione, sottrazione, prodotto e divisione. Queste sono dette funzioni-QtQ razionali e il loro insieme si denota con FunQtQRat.

Se in particolare nella espressione non interviene la divisione si hanno le **funzioni-QtQ polinomiali**, il cui insieme denotiamo con FunQtQPln.

Come visto in B33, sono funzioni-QtQ polinomiali: x^3, $4\,x^4 - x^2 + 3\,x - 3.5$.
Sono invece esempi di funzioni-QtQ razionali non polinomiali: $1/x$, $\dfrac{x-1}{x+1}$, $x^2\,\dfrac{4\,x^3+4}{x^2+x-5/3}$.

B36a.02 Spesso è utile trattare espressioni razionali nelle quali interviene qualche parametro, che di solito qui denoteremo con lettere come a, b, m ed n.

Può essere opportuno considerare che questi parametri corrano su $\mathbb{Q}$; si potrebbe pensare che le funzioni individuate da queste espressioni siano funzioni razionali bivariate oppure che si tratti di famiglie di funzioni-QtQ indicizzate da parametri razionali. In effetti questo dilemma va considerato tutt'altro che grave, in quanto il contesto, ovvero gli scopi per i quali si utilizzano questi oggetti chiariscono di che si voglia trattare ed è perdonabile che non si insista sulla distinzione. Anzi per la scorribilità della presentazione può essere raccomandabile non insistere sulle distinzioni.

Talora è opportuno servirsi di parametri a valori interi e per questi si preferiscono le lettere M, n e d.

In molti discorsi matematici come questo, dopo aver introdotto certi oggetti con definizioni precise, si procede a utilizzarli parlandone con minore precisione. Se questo atteggiamento è motivato dalla scorrevolezza della presentazione e il contesto consente di evitare dubbi sostanziali si può parlare di vaghezza accettabile.

Constateremo che molte situazioni di vaghezza accettabile possono anche considerarsi situazioni di abuso di linguaggio. In molti contesti si possono trascurare alcune specificazioni, ad esempio parlare di funzioni polinomiali invece che di funzioni-QtQ polinomiali; questo può vedersi come vaghezza per la mancanza di precisazione di dominio e di codominio o come abuso di linguaggio.
Il contesto di queste situazioni deve essere formulato in modo da evitare ogni ambiguità.

Inoltre va notato che la vaghezza in situazioni come la precedente nella quale si trascura una specificazione come "-QtQ" diventa ancor più giustificata, in quanto riguarda sviluppi ed enunciati validi sia per funzioni-QtQ che per le entità che chiameremo funzioni-RtR e per altre più generali.

B36a.03 Nel seguito incontreremo molti intervalli e molti altri sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ e più avanti molti intervalli e sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali; per tali oggetti useremo notazioni compatibili distinte dalle sole specificazioni. Talora inoltre useremo notazioni semplificate che trascurano le specificazioni; presenteremo quindi situazioni vaghe che il contesto dovrà rendere accettabili.

Ricordiamo che si denota con **IntvlQ** l'insieme degli intervalli di numeri razionali; più in particolare si denota con **IntvlQLtd** l'insieme degli intervalli limitati di razionali e con **IntvlQNltd** l'insieme degli intervalli illimitati di razionali.

Per il dominio della generica $f \in \mathsf{FunQtQ}$ scriviamo $D := \mathsf{dom}(f)$; inoltre scriviamo $\overline{D} := \boldsymbol{Adrn}_{\mathbb{Q}}(D)$ l'insieme dei punti di accumulazione di tale dominio e, tipicamente, per uno di questi punti useremo la scrittura $\overline{x} \in \overline{D}$.

Una comune semplificazione del linguaggio consiste nell'utilizzare una espressione per identificare la funzione che essa individua. Questo abuso di linguaggio in genere, cioè in molti contesti, è veniale e giustifica notazioni come "$f(x)$" per individuare non completamente una funzione che a ogni lecito valore di x associa il valore fornito dall'espressione $f(x)$.

Nelle presentazioni di fatti matematici la sostituzione di una entità matematica (funzione, insieme, relazione, ...) con una espressione in grado di identificarlo (espressione costituita da variabili, costanti, operatori e altri costrutti noti) è molto comune; essa si può chiamare **metonimia espressione pro entità**.

Una funzione individuata da una espressione potrebbe essere precisamente quella che ha come dominio l'insieme di tutti i valori della variabile per i quali l'espressione è sensata; questa metonimia è tranquillamente accettabile per le funzioni-QtQ razionali , in quanto, come vedremo, per ciascuna di tali espressioni si sa determinare facilmente il preciso dominio.

Va tuttavia segnalato che talora con una espressione si vuole più vagamente individuare qualche funzione che si avvicina alla suddetta, soprattutto quando il dominio di questa non si sa o non si vuole individuare.
In effetti le metonimie "espressione pro entità" sono da utilizzare con una certa elasticità.

Osserviamo anche che diverse espressioni equivalenti individuano la stessa funzione-QtQ; è auspicabile che il fatto di non distinguere tra queste sia solo un abuso di linguaggio veniale.

B36a.04 Prendiamo ora in considerazione vari esempi di funzioni-QtQ individuate da una espressione.
Le più semplici da definire sono le funzioni espresse da un polinomio definite per ogni x razionale, come la $f(x) := 3x^3 - 4x_7$.

Si hanno poi funzioni-QtQ definite da una espressione limitatamente a un preciso sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$, per esempio: $f(x) := (x^3)|_{\mathbb{Q}_+}$.

Spesso interessano funzioni definite da due o più espressioni riguardanti sottodomini privi di punti-QtQ comuni come quella definita con la scrittura

$$F(x) := \left\lceil x \in (0 :: 1] \mapsto x^2 \right\rceil \dot{\cup} \lceil x \in (1 :: +\infty) \mapsto 2x - 1 \rceil ,$$

o con la quasi equivalente

$$F(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \quad , \\ 2x - 1 & \text{se } 1 < x \quad . \end{cases}$$

Per avere vera una formula equivalente avremmo dovuto appesantirla richiedendo anche $x \in \mathbb{Q}$; anche questo tipo di semplificazione conviene considerarla come vaghezza accettabile.

Possono presentare interesse funzioni-QtQ date da una espressione ma con l'eccezione di alcuni valori della variabile per i quali alla funzione si fanno assumere valori diversi da quelli forniti dalla espressione che in tal modo vale solo negli intervalli aperti delimitati dai suddetti valori: un esempio:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{Q}_- \dot{\cup} \mathbb{Q}_+ \ , \\ 0 & \text{se } x = 0 \ . \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \dfrac{1 + 0.5x^2}{4 - x^2} & \text{se } -2 < x < 0 \quad , \\ 4 & \text{se } x = 0 \quad , \\ 0.25\, x^3 & \text{se } 0 < x < 2 \quad . \end{cases}$$

Si possono considerare anche funzioni definite da espressioni diverse in una infinità numerabile di intervalli come:

$$r(x) \;:=\; \dot{\bigcup}_{j=1}^{+\infty} \lceil (j-1) < x \leq j \Vdash j(-1)^{j-1}\, x \rceil \qquad , \qquad s(x) \;:=\; \dot{\bigcup}_{j=1}^{+\infty} \lceil (j-1) < x \leq j \Vdash j/x \rceil \ .$$

Infine segnaliamo funzioni che in ogni intervallo finito del dominio assumono infiniti valori. Per un esempio si considerino i numeri dell'intervallo $(0 :: 1)$ e per il generico di questi numeri scriviamo n/d la sua forma frazionaria ridotta e ricordiamo che la sua scrittura in base 2 i ha la forma $0.b_1\, b_2\, b_3 \ldots$.
Chiamato E il sottoinsieme dei numeri la cui scrittura binaria richiede un numero finito di bits si osserva che è costituito da tutti e soli i numeri razionali x con il denominatore della forma ridotta d pari a una potenza di 2 che scriviamo $2^{L(x)}$, con $L(x) := \log_2(d)$.

I rimanenti razionali in esame, il cui insieme denotiamo con $\overline{E}$, sono tutti quelli per i quali d è multiplo di un numero primo diverso da 2, ovvero tutti quelli che richiedono una scrittura binaria infinita.

Esaminiamo la funzione

$$\left\lceil\; x \in E \Vdash L(x) \;\right\rceil \;\dot{\cup}\; \left\lceil\; x \in \overline{E} \Vdash x \;\right\rceil \ .$$

In ogni intervallo I contenuto in $[0 :: 1)$ si trovano infiniti valori: tutti gli infiniti valori razionali appartenenti ad I e tutti gli interi positivi. Osserviamo anche che si tratta di una funzione tutt'altro che facile da visualizzare, ma che il valore che essa assume in corrispondenza di un qualsiasi punto del suo dominio si può calcolare con facilità.

B36 b. limiti al finito delle funzioni-QtQ

B36b.01 Consideriamo la funzione-QtQ $f(x)$ e denotiamo con D il suo dominio.

Si dice che il numero razionale L è **limite-Q di una funzione** $f(x)$ per x tendente a $\overline{x}$, e si scrive $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) \;=\; L$, sse

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}_+ \quad : \quad \mathbb{Q}_+ \ni \delta_\epsilon \;\rceil\!\!\rceil\; x\in D\cap\mathbf{[}\overline{x}-\delta_\epsilon :: \overline{x}+\delta_\epsilon\mathbf{]} \implies |f(x)-L|<\epsilon\ .$$

La precedente situazione si può appoggiare su una figura come la seguente

//input pB36b01

Dalle definizioni si ricavano direttamente le seguenti affermazioni.

$$\lim_{x\to 3} 2\,x^2 \;=\; 18\ .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+4}{x^3-6x+8} \;=\; \frac{1}{2}\ .$$

B36b.02 Si dice che il limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $\overline{x}$ è $+\infty$, e si scrive $\displaystyle\lim_{x\to\overline{x}} f(x) \;=\; +\infty$, sse

$$\forall M\in\mathbb{Q}_+ \quad : \quad \mathbb{Q}_+ \ni \delta_M \;\rceil\!\!\rceil\; x\in D\cap\mathbf{[}\overline{x}-\delta_\epsilon :: \overline{x}+\delta_\epsilon\mathbf{]} \implies f(x)>M\ .$$

Si dice che il limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $\overline{x}$ è $-\infty$ e si scrive $\displaystyle\lim_{x\to\overline{x}} f(x) \;=\; -\infty$, sse

$$\forall M\in\mathbb{Q}_+ \quad : \quad \mathbb{Q}_+ \ni \delta_M \;\rceil\!\!\rceil\; x\in D\cap\mathbf{[}\overline{x}-\delta_\epsilon :: \overline{x}+\delta_\epsilon\mathbf{]} \implies f(x)<-M\ .$$

Per interpretare le definizioni precedenti possono servire figure come le seguenti.

//input pB36b02

Dalle definizioni si ricava direttamente che

$$\lim_{x\to 4}\frac{3}{(x-4)^2} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to -a}\frac{x}{(x+a)^4} = -\infty\ .$$

B36b.03 Si dice che il numero razionale L è limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; L$ sse

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}_+ \quad : \quad \mathbb{Q}_+ \ni M \;\rceil\!\!\rceil\; x\in D\cap\mathbf{[}M :: +\infty\mathbf{]} \implies |f(x)-L|<\epsilon\ .$$

Si dice che il numero razionale L è limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ e si scrive $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ sse

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}_+ \quad : \quad \mathbb{Q}_+ \ni M \;\rceil\!\!\rceil\; x\in D\cap\mathbf{[}-\infty :: -M\mathbf{]} \implies |f(x)-L|<\epsilon\ .$$

Per interpretare e ricordare le precedenti definizioni possono servire le figure seguenti.

//input pB36b03

Dalle definizioni si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x^2-4}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4\,x^3-5\,x-18}{6\,x^3}=\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+4}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{(x-4)^2}=0$$

B36b.04 Si dice che il limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $+\infty$ è $+\infty$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ sse

$$\forall M\in\mathbb{Q}_+ \quad\vdots\quad \mathbb{Q}_+\ni N_M \;]\!\!|\; x\in D\cap[N_M::+\infty] \implies f(x)>M\ .$$

Si dice che il limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $+\infty$ è $-\infty$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ sse

$$\forall M\in\mathbb{Q}_+ \quad\vdots\quad \mathbb{Q}_+\ni N_M \;]\!\!|\; x\in D\cap[N_M::+\infty] \implies f(x)<-M\ .$$

Si dice che il limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ è $+\infty$ e si scrive $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ sse

$$\forall M\in\mathbb{Q}_+ \quad\vdots\quad \mathbb{Q}_+\ni N_M \;]\!\!|\; x\in D\cap[-\infty::-N_M] \implies f(x)>M\ .$$

Si dice che il limite-Q della $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ è $-\infty$ e si scrive $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ sse

$$\forall M\in\mathbb{Q}_+ \quad\vdots\quad \mathbb{Q}_+\ni N_M \;]\!\!|\; x\in D\cap[-\infty::-N_M] \implies f(x)<-M\ .$$

Le precedenti situazioni si possono presentare con le figure che seguono.

//input pB36b04

Dalle definizioni si ottengono le seguenti relazioni:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2-4x+20 \;=\; +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}(7-x)^3) \;=\; -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}x^2-4x+20 \;=\; +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)(x-3)(x-5) \;=\; -\infty$$

B36 c. limiti di composizioni di funzioni-QtQ

B36c.01 Il calcolo dei limiti, come vedremo, riveste grande importanza e quindi risulta opportuno predisporre strumenti che consentano di eseguirlo in modo efficiente ed efficace.

Sarebbe molto faticoso individuare ciascun limite ricorrendo ad una delle precedenti definizioni. Risulta invece possibile servirsi dei risultati che presentiamo qui di seguito che consentono di calcolare un limite di una funzione F ottenuta componendo funzioni più semplici f_i mediante opportune combinazioni di limiti delle funzioni f_i.

B36c.02 Nel seguito faremo spesso riferimento a intervalli di razionali e per essi conviene introdurre alcune notazioni di interesse locale.

Consideriamo $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\delta, \delta_-, \delta_+, M_-, M_+ \in \mathbb{Q}_+$ e poniamo:

$\boldsymbol{i}(x_0, \delta) := \boldsymbol{(}x_0 - \delta :: x_0 + \delta\boldsymbol{)}$, intervallo aperto con centro in x_0 e semiampiezza δ ;

$\boldsymbol{i}'(x_0, \delta) := \boldsymbol{i}(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, corrispondente "bucato" di $\boldsymbol{i}(x_0, \delta)$;

$\boldsymbol{i}_-(x_0, \delta_-) := \boldsymbol{(}x_0 - \delta_- :: x_0\boldsymbol{)}$, intervallo aperto a sinistra di x_0 con ampiezza δ_- ;

$\boldsymbol{i}_+(x_0, \delta_+) := \boldsymbol{(}x_0 :: x_0 + \delta_+\boldsymbol{)}$, intervallo aperto a destra di x_0 con ampiezza δ_+ ;

$\boldsymbol{i}_-(M_-) := \boldsymbol{(} - \infty :: M_-\boldsymbol{)}$, intervallo aperto illimitato a sinistra di M_- ;

$\boldsymbol{i}_+(M_+) := \boldsymbol{(}M_+ :: +\infty\boldsymbol{)}$, intervallo aperto illimitato a destra di M_- ;

Introduciamo anche le seguenti notazioni:

$\mathsf{Intvl}_{\mathbb{Q},O,Ltd}$ per l'insieme degli intervalli razionali aperti limitati, notazione che localmente abbreviamo con $\mathbf{I}_f$;

$\mathsf{Intvl}_{\mathbb{Q},O,-\infty}$ per l'insieme degli intervalli razionali aperti illimitati inferiormente, con la sua abbreviazione locale $\mathbf{I}_-$;

$\mathsf{Intvl}_{\mathbb{Q},O,+\infty}$ per l'insieme degli intervalli razionali aperti illimitati superiormente¿ con la sua abbreviazione $\mathbf{I}_+$;

Ci occuperemo spesso del comportamento di funzioni del genere $\{\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\rceil$ limitatamente all'interno di qualche intervallo di razionali aperto (limitato o illimitato) I contenuto nel dominio di tali funzioni e troveremo conveniente denotare con $\mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ l'insieme delle funzioni razionali aventi dominio contenente I.

Ricordiamo anche che tutte le funzioni polinomiali sono definite in ogni intervallo razionale, mentre ciascuna delle funzioni razionali è definita soltanto negli intervalli aperti che non contengono nessuno dei punti razionali nei quali si annulla il suo denominatore nella sua forma ridotta.

B36c.03 Consideriamo due funzioni $f, g \in \mathsf{FunQtQ}$ definite in un intervallo razionale aperto I e un suo punto-Q x_0 ; in altre parole consideriamo $f, g \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ e $x_0 \in I$.

(1) Prop.: Se esistono finiti i due limiti-Q $\lim_{x\to x_0} f(x) =: L_f$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) =: L_g$, allora esiste il limite-Q della somma delle due funzioni ed è

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) .$$

Dim.: Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ l'esistenza del primo limite implica che si trova $\delta_\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (dipendente da ϵ) tale che $\forall x \in \boldsymbol{i}'(x_0, \delta_\epsilon) \;:\; |L_f - f(x)| < \epsilon/2$.

L'esistenza del secondo limite a sua volta implica che si trova $\eta_\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ tale che

$$\forall x \in \boldsymbol{i}'(x_0, \eta_\epsilon) \;\; \vdots \;\; |L_g - g(x)| < \epsilon/2 \; ;$$

Introdotto $\rho_\epsilon := \min(\delta_\epsilon, \eta_\epsilon)$, accade che
$\forall x \in \boldsymbol{i}'(x_0, \rho_\epsilon) \;\; \vdots \;\; |L_f + L_g - (f(x) + g(x))| = |L_f - f(x) - L_g - g(x)| \leq |L_f - f(x)| + |L_g - g(x)| < \epsilon$ ▮

Semplificando alquanto il precedente enunciato si riformula dicendo che il limite della somma di due funzioni è la somma dei loro limiti.

B36c.04 Consideriamo la funzione $f \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ e il numero $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(1) Prop.: Se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) =: L$, allora esiste finito il limite della funzione $\alpha\, f(x)$ proporzionale di quella data e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha\, f(x) \;=\; \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) \; .$$

Dim.: Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (idap) l'esistenza del limite implica che si trova $\delta_\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ tale che

$\forall x \in [x_0 - \delta_\epsilon :: x_0 + \delta_\epsilon] \setminus \{x_0\} \;\; \vdots \;\; |L - f(x)| < \epsilon/|\alpha|$.

Accade quindi che $\forall x \in \boldsymbol{i}'(x_0, \delta_\epsilon) \;\; \vdots \;\; |\alpha\, L - \alpha\, f(x)| = |\alpha| \cdot |L - f(x)| < \epsilon$ ▮

In particolare $\lim_{x \to x_0} (-f(x)) \;=\; -\lim_{x \to x_0} f(x)$, se il limite al secondo membro esiste finito; questo fatto sbrigativamente si presenta dicendo che il limite della funzione opposta è l'opposto del limite della funzione data.

B36c.05 **(1) Prop.**: Consideriamo l'intervallo $I \in \mathbf{I}_f$, un punto $x_0 \in I \setminus \{0\}$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$. Se esistono i due limiti $L_f := \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $L_g := \lim_{x \to x_0} g(x)$, allora esiste il limite dalla loro differenza e si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) \;=\; \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) \; .$$

Dim.: Si ottiene dalle due proposizioni precedenti c01 e c02 ▮

In parole povere si afferma che il limite della differenza di due funzioni è la differenza dei loro limiti.

Gli enunciati in c02(1), c03(1) e c04(1) si semplificano, sottacendo le condizioni di validità, anche affermando che il passaggio al limite **rispetta le operazioni razionali su funzioni**, somma di funzioni, moltiplicazione per una costante di una funzione e differenza tra funzioni.

(2) Prop.: Consideriamo l'intervallo razionale I, un razionale $x_0 \in I$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$; siano inoltre α e β due numeri razionali.
Se esistono finiti i due limiti $L_f := \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $L_g := \lim_{x \to x_0} g(x)$, allora esiste finito il limite dalla loro combinazione lineare e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \alpha\, f(x) + \beta\, g(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x) \; .$$

Dim.: La la funzione del primo membro dell'enunciato si ottiene mediante due moltiplicazioni per costanti e una somma delle funzioni di cui sono noti i limiti, cioè mediante operazioni che rispettano il passaggio al limite; quindi l'enunciato segue da c02 e c03 ▮

Semplificando alquanto si dice che il limite di una combinazione lineare è la combinazione lineare dei limiti.

B36c.06 **Prop.** 1 Consideriamo l'intervallo razionale I, un punto-Q $x_0 \in I$ e due funzioni $f(x), g(x) \in$ FunQtQ$_{\supseteq I}$ Se esistono finiti i due limiti $L_f \;:=\; \lim_{x\to x_0} f(x)$ e $L_g \;:=\; \lim_{x\to x_0} g(x)$, allora esiste finito il limite del loro prodotto e si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) \;=\; \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\ .$$

Dim.: Per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si tratta di individuare un intervallo $\boldsymbol{i}(x_0,\delta_\epsilon)$ con $\delta_\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ tale che sia $\forall x \in \boldsymbol{i}'(x_0,\delta) \;\vdots\; |f(x)\cdot g(x) - L_f\cdot L_g| < \epsilon$.

Dato che $|f(x)\,g(x) - L_f\,L_g| = |f(x)\,g(x) - L_f\,g(x) + L_f\,g(x) - L_f\,tL_g| \le |g(x)|\,|f(x)-L_f| + |L_f|\,|g(x)-L_g|$, introdotto $G \;:=\; \max\,(x\in I\setminus\{x_0\} \,:|\, |g(x)|)$, basta assumere $\delta,\eta \in \mathbb{Q}_+$ tali che per $x \in \boldsymbol{i}'(x_0,\delta)$ sia $|f(x) - L_f| < \dfrac{\epsilon}{2\,G}$ e $|g(x) - L_g| < \dfrac{\epsilon}{2\,L_g}$; con tali scelte infatti si ottiene

$$|f(x)\cdot g(x) - L_f\cdot L_g| \;<\; G\,\frac{\epsilon}{2\,G} + L_g\,\frac{\epsilon}{2\,L_g} \;=\; \epsilon\ ▮$$

In parole povere: il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti, oppure il passaggio al limite rispetta il prodotto tra funzioni-QtQ.

(2) Prop.: Consideriamo un $I \in$ **IntvlQ**, un $x_0 \in I$, una $f(x) \in$ FunQtQ$_{\supseteq I}$ e un qualsiasi intero positivo d; se esiste finito il limite $L \;:=\; \lim_{x\to x_0} f(x)$, allora esiste finito il limite per x tendente a x_0 della funzione $f(x)^d$ ed è uguale a $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^d$.

Dim.: Basta applicare $d-1$ volte la proposizione precedente ▮

In parole povere: il limite della potenza d-esima di una funzione è la potenza d-esima del limite della funzione data.

B36c.07 **(1) Prop.**: Consideriamo l'intervallo razionale I, un punto-Q $x_0 \in I$ e una $g(x) \in$ FunQtQ$_{\supseteq I}$; se esiste finito il limite $L \;:=\; \lim_{x\to x_0} g(x)$ ed è $L \neq 0$, allora esiste finito il limite della funzione reciproca per x tendente a x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} \;=\; \frac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\ .$$

Dim.: L'enunciato chiede di associare a ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ un intervallo $\boldsymbol{i}(x_0,\delta_\epsilon)$ con $\delta_\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ tale che sia

$$\forall x \in \boldsymbol{i}'(x_0,\delta) \;\vdots\; \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon\ .$$

Dato che $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L}\right| \;=\; \dfrac{|g(x) - L|}{|L|\,|g(x)|}$, introdotto $G := \max\{x \in I\setminus\{x_0\} \,:|\, g(x)\}$, basta assumere $\delta_\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ tale che per $x \in \boldsymbol{i}'(x_0,\delta_\epsilon)$ sia $|g(x) - L| < \epsilon\,|L|\,G$ per assicurare che per $x \in \boldsymbol{i}'(x_0,\delta)$ si abbia $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L}\right| \;<\; \dfrac{\epsilon\,|L|\,G}{|L|\,G}$, cioè che valga la disuguaglianza richiesta ▮

In parole povere: il limite della funzione reciproca di una funzione data è il reciproco del limite di tale funzione; oppure: il passaggio al limite rispetta la trasformazione nella funzione reciproca.

(2) Prop.: Consideriamo l'intervallo razionale I, un punto-Q $x_0 \in I$ e due funzioni $f(x), g(x) \in$ FunQtQ$_{\supseteq I}$

Se esistono finiti i due limiti $L_f \;:=\; \lim_{x\to x_0} f(x)$ e $L_g \;:=\; \lim_{x\to x_0} g(x)$ e questo è diverso da 0, allora esiste finito il limite del quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\ .$$

Dim.: Discende direttamente da c05(1) e da c06(1) ▮

La semplificazione analoga a quelle date per le precedenti proposizioni recita:

il limite del quoziente di due funzioni è il quoziente dei loro limiti.

B36c.08 I risultati dei paragrafi precedenti si possono sintetizzare dicendo, sempre con linguaggio semplificato, che in condizioni opportune, l'azione di ciascuna delle 4 operazioni aritmetiche su funzioni-QtQ si può scambiare con l'operazione di passaggio al limite.

A questo punto possiamo prendere in considerazione il problema di ottenere il limite di una funzione-QtQ $F(x)$ che sappiamo esprimere come polinomio di funzioni razionali $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ dandogli una forma esprimibile come $P(f_1(x), ..., f_m(x))$, limite relativo alla tendere della variabile x a un numero razionale $\overline{x}$ che sia diverso dai valori che rendono nullo qualche denominatore delle $f_i(x)$.
Infatti sappiamo che i limiti per x tendente a $\overline{x}$ di ciascuna delle $f_i(x)$ è esprimibile come $f_i(\overline{x})$ e quindi il limite della $F(x)$ richiesto si può ottenere valutando l'espressione $P(f_1(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}))$.

Con parole semplici possiamo affermare che il limite di una composizione polinomiale come la suddetta esiste ed è dato dalla stessa composizione polinomiale dei valori limite delle $f_i(x)$, cioè dei valori $f_i(\overline{x})$.

Più in generale accade che, ricorrendo anche alle proposizioni c06(1)(2), esiste il limite di una qualunque composizione razionale di funzioni-QtQ esprimibile come $R(f_1(x), ..., f_m(x))$ per la variabile tendente a ogni valore razionale $\overline{x}$ che non renda nullo alcuno dei denominatori delle funzioni razionali in gioco e che tale limite è ottenibile con operazioni razionali dalla espressione $R(f_1(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}))$.
Quindi in parole povere diciamo che il limite di una composizione razionale di un certo numero di funzioni-QtQ dotate di limiti finiti esiste ed è dato dalla stessa composizione razionale dei corrispondenti valori limite.

Anticipando la possibilità di definire e controllare funzioni individuate da espressioni non razionali, possiamo arrivare a una conclusione ancor più generale riguardante il limite per x tendente ad un valore $\overline{x}$ per il quale non si annulla alcuna delle funzioni in gioco di una funzione esprimibile razionalmente mediante funzioni per le quali si sanno calcolare i valori limiti per x tendente a $\overline{x}$. Questo limite è dato dalla composizione razionale dei valori limiti delle funzioni in gioco.

B36 d. continuità-Q delle funzioni-QtQ a

B36d.01 Consideriamo l'intervallo razionale finito aperto I, un punto-Q $x_0 \in I$ e una funzione $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$.
Tale $f(x)$ si dice **funzione-QtQ continua-Q** in x_0 sse $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Si dice anche che una tale funzione gode della **continuità-Q puntuale** in x_0.

Una funzione di $\mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ che è continua-Q in tutti i punti dell'intervallo-Q I si dice funzione continua-Q in tale intervallo; si dice anche che essa gode della proprietà della **continuità-Q nell'intervallo** I.

Denotiamo con $\mathsf{FunQtQCnt}_{x_0}$ l'insieme delle funzioni-QtQ continue-Q nel punto-Q x_0 appartenente al proprio dominio.

Nel seguito, per evitare appesantimenti poco utili, in genere trascureremo la specificazione "-Q".

B36d.02 La somma di due funzioni continue in un intervallo I è continua in I.

La funzione ottenuta moltiplicando per un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{Q}$ una funzione continua in un intervallo I è continua in I.

Ogni combinazione lineare di due funzioni continue in un intervallo I è continua in I.

La funzione prodotto di due funzioni-QtQ continue in un intervallo di razionali I è continua in I.

Per ogni d intero positivo la potenza d-esima di una funzione di $\mathsf{FunQtQCnt}_I$ è continua in I.

B36d.03 Le funzioni-QtQ polinomiali, che come si è trovato, sono funzioni il cui dominio è l'intero $\mathbb{Q}$, sono continue in ogni punto di $\mathbb{Q}$.
Si possono definire le combinazioni polinomiali di funzioni di FunQtQ.
Le combinazioni polinomiali di funzioni di $\mathsf{FunQtQCnt}_I$ sono funzioni continue in I.

Ricordiamo che i polinomi si possono considerare anche come strumento per la composizione di funzioni sugli elementi di un campo che contiene $\mathbb{Q}$ e a valori a valori in tale campo.

B36d.04 Una funzione-QtQ $f \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ si dice **funzione infinitesima** in un punto x_0 di I sse $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
Sono esempi di funzioni-QtQ razionali infinitesime relativamente al razionale x_0 le funzioni della forma $(x - x_0)^k$ per ogni k intero positivo.

Inoltre se $\rho(x)$ è una qualsiasi funzioni-QtQ continua in un intorno di x_0, accade che per ogni intero positivo k si ha

$$\lim_{x \to x_0} \left((x - x_0)^k \cdot \rho(x)\right) \;=\; 0 \cdot \rho(x_0) \;;$$

quindi anche la funzione $(x - x_0)^k \cdot \rho(x)$ è infinitesima per x tendente a x_0.

Si osserva che la funzione $(x - x_0)^k$ è un polinomio di grado k. Anche alle funzioni della suddetta forma $(x - x_0)^k \cdot \rho(x)$ si attribuisce il grado k e si dicono **funzioni infinitesime di grado** k in un intorno del razionale x_0.
Per queste funzioni-QtQ si dice anche che x_0 è uno **zero di grado** k.
Si dice anche che x_0 è uno zero di grado k per la suddetta funzione

Alle funzioni definite in un intorno di x_0 e ivi continue si attribuisce il grado di infinitesimalità uguale a 0.

Si dimostra allora facilmente che, date due funzioni-QtQ che in un intorno I di un razionale x_0 sono infinitesime dei gradi, risp., h e k, il loro prodotto è una funzione-QtQ che nell'intorno I è infinitesima di grado $h+k$.

B36d.05 Consideriamo la semplice funzione $\dfrac{1}{(x-x_0)^d}$ definita in un intorno di x_0 a eccezione di x_0; tale funzione si dice definita in ogni intorno bucato di x_0.
Evidentemente $\lim_{x \to x_0-} \dfrac{1}{(x-x_0)^d} = (-1)^d \infty$ e $\lim_{x \to x_0+} \dfrac{1}{(x-x_0)^d} = +\infty$.
Servendoci del passaggio al valore assoluto si ha che per ogni d intero positivo

$$\lim_{x \to x_0+} \left| \frac{1}{(x-x_0)^d} \right| = +\infty \ .$$

Il valore razionale x_0 viene detto **polo di ordine d di una funzione**, della funzione precedente, alla quale si può dare la forma $(x-x_0)^{-d}$

Conviene notare esplicitamente che quest'ultima funzione non è una funzione razionale, in quanto ottenibile con l'operazione di passaggiol al valore assoluto che non è una operazione aritmetica elementare.
Per ogni funzione-QtQ della forma $\dfrac{1}{(x-x_0)^d} \cdot g(x)$ con $g(x)$ funzione-QtQ definita e continua in un intorno di x_0 si giunge alla conclusione simile

$$\lim_{x \to x_0+} \left| \frac{1}{(x-x_0)^d} \cdot g(x) \right| = +\infty \ .$$

Anche per una di queste funzioni-QtQ si dice che x_0 costituisce un polo di ordine d.

B36d.06 Si osserva che una funzione-QtQ definita in un intervallo $I := (a :: b)$ con l'eventuale esclusione del valore x_0 interno a I e avente la forma $(x-x_0)^n \cdot g(x)$ con n intero (diverso da 0) e con $g(x)$ continua e non infinitesima in x_0, se $n > 0$ si dice avere in x_0 un **infinitesimo di grado n**, se $n < 0$ si dice avere un **polo di ordine positivo** $-n = |n|$.

I ruoli di grado di infinitesimo e di ordine di polo si possono considerare l'uno il reciproco dell'altro.

Questa contrapposizione si chiarisce meglio con le considerazioni che seguono su somme, prodotti e divisioni tra funzioni-QtQ aventi uno zero o un polo in un intorno di un punto razionale x_0.

Consideriamo due funzioni-QtQ definite in un intervallo $I := (a :: b)$ con la eventuale esclusione del valore interno x_0 e alle quali si possono dare, risp., le forme

$f(x) = (x-x_0)^m \cdot \rho(x)$ e $g(x) = (x-x_0)^n \cdot \sigma(x)$, con m ed n interi e $\rho(x)$ e $\sigma(x)$ continue in I .

Sono interessanti i comportamenti delle composizioni razionali di queste funzioni.

B36 e. limiti infiniti e all'infinito delle funzioni-QtQ

B36e.01 Procediamo ora a occuparci della possibilità di ricavare informazioni sui limiti di funzioni-QtQ ottenute per composizione razionale di funzioni-QtQ per le quali abbiamo informazioni sui limiti nei casi nei quali si vogliano limiti relativi alla variabile tendente a $+\infty$ o tendente a $-\infty$ o si abbiano valori limite espressi da $-\infty$ e da $+\infty$.

Nel seguito intendiamo che x denoti una variabile razionale, che a, b e x_0 denotino numeri razionali; inoltre faremo riferimento a un intervallo aperto di razionali $I := (a :: b)$, a un suo valore interno x_0, cioè a un razionale x_0 tale che $a < x_0 < b$, all'insieme $\mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ costituito dalle funzioni-QtQ aventi come dominio I o un suo sovrainsieme e in particolare al suo sottoinsieme $\mathsf{FunQtQRat}_{\supseteq I}$ costituito dalle funzioni-QtQ razionali il cui dominio contiene I.

Si dice che per x tendente a b da sinistra $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ tende a $+\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $\epsilon_M \in \mathbb{Q}_+$ tale che per ogni $x \in (b - \epsilon :: b)$ sia $M < f(x)$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to b-} f(x) = +\infty$.

Si dice che per x tendente a b da sinistra $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ tende a $-\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $\epsilon_M \in \mathbb{Q}_+$ tale che per ogni $x \in (b - \epsilon :: b)$ sia $f(x) < -M$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to b-} f(x) = -\infty$.

Si dice che per x tendente ad a da destra $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ tende a $+\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $\epsilon_M \in \mathbb{Q}_+$ tale che per ogni $x \in (a :: a + \epsilon)$ sia $M < f(x)$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$.

Si dice che per x tendente ad a da destra $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$ tende a $-\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $\epsilon_M \in \mathbb{Q}_+$ tale che per ogni $x \in (a :: a + \epsilon)$ sia $f(x) < -M$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$.

Si dimostrano facilmente questi esempi riguardanti funzioni-QtQ:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

$$\lim_{x\to -2-} \frac{x^4 - 20}{x+2} = -\infty .$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty .$$

$$\lim_{x\to 4+} \frac{x - 10}{(x-4)^4} = -\infty .$$

B36e.02 Consideriamo ora due intervalli illimitati aventi, risp., la forma $J := (b :: +\infty)$ e la forma $K := -\infty :: a$.

Si dice che per x tendente a $+\infty$ $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq J}$ tende a un razionale L sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (ipap) si trova un $r_\epsilon \in J$ tale che per ogni $x \in (r :: +\infty)$ sia $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$.

Si dice che per x tendente a $+\infty$ $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq J}$ tende a $+\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $r_M \in J$ tale che per ogni $x \in (r :: +\infty)$ sia $M < f(x)$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si dice che per x tendente a $+\infty$ $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq J}$ tende a $-\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $r_M \in J$ tale che per ogni $x \in (r :: +\infty)$ sia $f(x) < -M$. in tale caso scriviamo $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

Si dice che per x tendente a $-\infty$ $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq K}$ tende a un razionale L sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (ipap) si trova un $r_\epsilon \in K$ tale che per ogni $x \in (-\infty :: r)$ sia $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. in tale caso scriviamo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Si dice che per x tendente a $-\infty$ $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq K}$ tende a $+\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $r_M \in K$ tale che per ogni $x \in (-\infty :: r)$ sia $M < f(x)$. in tale caso scriviamo $\lim_{x \to +infty} f(x) = +\infty$.

Si dice che per x tendente a $-\infty$ $f(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq J}$ tende a $-\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{Q}_+$ (ippag) si trova un $r_M \in K$ tale che per ogni $x \in (-\infty :: r)$ sia $f(x) < -M$. in tale caso scriviamo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
.

B36e.03 **(1) Prop.:** Consideriamo $I \in \mathbf{I}_f$, $x_0 \in I$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$; se esiste finito il limite $L_f := \lim_{x \to x_0} f(x)$ con $L_f \neq 0$, e si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } L_f < 0 \\ +\infty & \text{se } L_f > 0 \end{cases} .$$

Dim.: . . . . ▮

(2) Prop.: Consideriamo $I \in \mathbf{I}_f$, $x_0 \in I$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \mathsf{FunQtQ}_{\supseteq I}$; se esiste finito il limite $L_f := \lim_{x \to x_0} f(x)$ con $L_f \neq 0$, e si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } L_f < 0 \\ +\infty & \text{se } L_f > 0 \end{cases} .$$

Dim.: . . . . . .

B36 f. derivate delle funzioni-QtQ

B36f.01 Consideriamo una funzione-QtQ $f(x)$ con $D := \mathsf{dom}(f)$, due razionali x_1 e x_2 in D con $x_1 < x_2$ e l'intervallo $I := [x_1 :: x_2]$ (non ridotto a un punto).
Si dice pendenza media nell'intervallo I della $f(x)$ il rapporto

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Evidentemente se la $f(x)$ è crescente in I la sua pendenza media in I è positiva, mentre se la $f(x)$ è decrescente in I la sua pendenza media in I è negativa.

Si osserva anche che modificando la $f(x)$ in una funzione che cresce più rapidamente aumenta la sua pendenza media. Per esempio moltiplicando per un fattore $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ una funzione-QtQ a valori positivi se $\alpha > 1$ si aumenta la sua pendenza, se $0 < \alpha < 1$ la sua pendenza diminuisce.

Una piccola generalizzazione porta a considerare l'elemento di riferimento $\overline{x} \in D$ e il suo cosiddetto incremento $h \in \mathbb{Q}_{nz}$ tale che anche $\overline{x} + h$ appartenga a D ed entrambi i valori siano contenuti in un intervallo interamente contenuto in D. La pendenza media della $f(x)$ relativa al valore del suo argomento $\overline{x}$ e alla variante di questo $\overline{x} + h$ ottenuta con l'incremento h viene fornita dal cosiddetto **rapporto incrementale**

$$\frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} \ ;$$

Al variare di h abbiamo una funzione di tale variabile.

B36f.02 Si dice **pendenza in un punto** $\langle \overline{x}, f(\overline{x}) \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ della funzione-QtQ $f(x)$ il limite per l'incremento h tendente a 0 del relativo rapporto incrementale, se tale limite esiste:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h} \ .$$

Facendo variare $\overline{x}$ sull'insieme $D' \subseteq D$ dei valori per i quali questa funzione risulta definita si ottiene una funzione associata alla $f(x)$ chiamata **derivata della funzione-QtQ** $f(x)$ in $\overline{x}$.
Per tale funzione si usano tre notazioni

$$f'(x) \ := \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \ := \ \mathrm{D}_x f(x) \ := \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \ .$$

Una funzione-QtQ f che nell'intervallo $I \subseteq \mathsf{dom}(f)$ possiede la derivata (finita) è detta **funzione derivabile nell'intervallo** I.
Denotiamo con $\mathsf{FunQtQDrvb}_I$ l'insieme delle funzioni-QtQ derivabili in I; in particolare denotiamo con $\mathsf{FunQtQRatDrvb}_I$ l'insieme delle funzioni-QtQ razionali e derivabili in I.

B36f.03 Cominciamo con il valutare le derivate delle funzioni monomiali.
Per ogni $a \in \mathbb{Q}$ si ha $\mathrm{D}_x[a] \ = \ \lim_{h \to 0} \dfrac{a - a}{h} \ = \ 0$, evidentemente.

$\mathrm{D}_x[a\,x + b] \ = \ \lim_{h \to 0} \dfrac{a(x + h) + b - a\,x - b}{h} \ = \ a$.

Dunque la derivata della funzione che rappresenta una retta-QQ nonverticale è una costante.

$\mathrm{D}_x x^2 \ = \ \lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h} \ = \ \lim_{h \to 0} \dfrac{2\,h\,x + h^2}{h} \ = \ 2\,x$.

La derivata della funzione che rappresenta una parabola per l'origine con asse verticale e concavità verso l'alto rappresenta una retta per l'origine con pendenza positiva e la cosa si interpreta dicendo che tale parabola è una curva che per $x << 0$ decresce molto rapidamente, poi decresce sempre meno, poi inizia a crescere e continua crescendo sempre di più.

$\mathrm{D}_x[x^3] \;=\; \lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\dfrac{3\,x^2\,h + 3\,x\,h^2 + h^3}{h} \;=\; 3\,x^2$.

Questa funzione è sempre crescente.

(1) Prop.: Per ogni intero positivo m si ha $\mathrm{D}_x\,x^m \;=\; m\,x^{m-1}$.

Dim.: Occorre servirsi dello sviluppo del binomio [B33f01]

$$(x+h)^m \;=\; x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 + \cdots m(xh^{m-1}) + h^m$$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^m - x^m}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\dfrac{h\,m\,x^{m-1}\,x + h^2\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} + h^3[\cdots]}{h} \;=\; mx^{m-1}$ ▮

B36f.04 **(1) Prop.**: Consideriamo $f(x), g(x) \in \mathsf{FunQtQDrvb}_I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

(1) $$\mathrm{D}_x[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathrm{D}_x f(x) + \beta\mathrm{D}_x g(x)$$

Dim.:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_x[\alpha\,f(x) + \beta\,g(x)] \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{\alpha\,f(x+h) + \beta\,g(x+h) - [\alpha\,f(x) + \beta\,g(x)]}{h}\\ &=\; \alpha\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \beta\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \;=\; \alpha\,\mathrm{D}_x f(x) + \beta\,\mathrm{D}_x g(x)\end{aligned}$$ ▮

Abbiamo quindi che la derivazione è una trasformazione lineare delle funzioni-QtQ alle quali si può applicare.

In particolare la derivazione si può applicare a tutti i polinomi su qualsiasi intervallo di $\mathbb{Q}$.

Dalla linearità e dalla derivata delle potenze positive della variabile si deduce che la derivata di un polinomio di grado m è un polinomio di grado $m-1$:

(2) $$\mathrm{D}_x\left[\sum_{i=0}^{m}\alpha_i x^i\right] = \sum_{i=1}^{m} i\alpha_{i-1}x^{i-1} \;=\; \sum_{j=0}^{m-1}(j+1)\,\alpha_{j+1}\,x^j\ .$$

B36f.05 **Prop.** Consideriamo $f(x), g(x) \in$ **Fun** $t\ Drvb_I$.

(1) $$\mathrm{D}_x[f(x)\cdot g(x)] \;=\; \mathrm{D}_x[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot\mathrm{D}_x[g(x)]\ .$$

Dim.: $\mathrm{D}_x[f(x)\cdot g(x)] \;=\; \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h) = f(x)g(x)}{h} \;=$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} \;=\; \mathrm{D}_x[f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\mathrm{D}_x[g(x)]$ ▮

La (1) è chiamata formula per la derivazione del prodotto di funzioni.

B36f.06 **(1) Prop.**: $\mathrm{D}_x\dfrac{1}{x} \;=\; -\dfrac{1}{x^2}$.

Dim.: $\mathrm{D}_x\dfrac{1}{x} \;=\; \lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{h}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\dfrac{x-(x+h)}{h(x+h)x} \;=\; \lim_{h\to 0}-\dfrac{1}{(x+h)x} \;=\; -\dfrac{1}{x^2}$ ▮

Questo permette di affermare che la funzione-QtQ che rappresenta l'iperbole equilatera è decrescente in $\mathbb{Q}_{nz}$.

(2) Prop.: $\mathrm{D}_x\dfrac{1}{x^k} \;=\; -k\dfrac{1}{x^{k+1}}$.

Dim.: $$\mathrm{D}_x \frac{1}{x^k} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^k} - \frac{1}{x^k}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^k - (x+h)^k}{h(x+h)^k x^k}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^k - [x^k + khx^{k-1} + h^2 \cdots]}{h(x+h)^k x^k} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{-k}{(x+h)^k x}\right] = -k \frac{1}{x^{k+1}}$$

Si ha quindi l'enunciato più comprensivo

(3) Prop.: $\forall z \in \mathbb{Q}_{nz}$: $\mathrm{D}_x[x^z] = z\, x^{z-1}$, $\mathrm{D}_x[x^0] = 0$.

B36f.07 Prop. Consideriamo $f(x), g(x) \in \mathsf{FunQtQDrvb}_I$.

(1) $$\mathrm{D}_x \left[\frac{n(x)}{d(x)}\right] = \frac{n'(x)\, d(x) - n(x)\, d'(x)}{d^2(x)} = \frac{n'(x)}{d(x)} - \frac{n(x)\, d'(x)}{d^2(x)} .$$

Dim.: $$\mathrm{D}_x \left[\frac{n(x)}{d(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{n(h+h)}{d(x+h)} - \frac{n(x)}{d(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, \frac{n(x+h)\, d(x) - n(x)\, d(x+h)}{d(x+h)\, d(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(n(x+h) - n(x))\, d(x) - n(x)\,(d(x+h) - d(x))}{h\, d(x+h)\, d(x)} = \frac{n'(x)\, d(x) - n(x)\, d'(x)}{d^2(x)}$$ ▮

La precedente va considerata la formula per la derivata del quoziente tra due funzioni derivabili.

Alcuni esempi:

$$\mathrm{D}_x \frac{a\,x + b}{c\,x + d} = \frac{a(c\,x + d) - (a\,x + b)c}{(c\,x + d)^2} .$$

B36 g. andamenti delle funzioni-QtQ polinomiali

B36g.01 L'andamento delle funzioni monomiali è facilmente conoscibile.
Derivata positiva equivale a funzione crescente.
Derivata negativa equivale a funzione decrescente.
Funzioni che crescono / decrescono illimitatamente per $x \to \pm\infty$. Queste due situazioni dipendono dal segno del coefficiente del termine $\alpha_n\, x^n$ del grado più elevato e dalla parità di tale grado n.
. . . . .
Esempi . . . . .

B36g.02 Presentazione geometrica della derivata e della tangente a una curva polinomiale.
Equazione della tangente nel punto x_0 di una curva data da una funzione $P(x)$ in un intorno del punto $\big\langle x_0, P(x_0)\big\rangle$ nel quale è derivabile espressa come funzione $T(X)$.

$$\frac{T(X) - P(x_0)}{X - x_0} = P'(x_0) \quad \text{ovvero} \quad T(X) \;=\; P'(x_0)\, X + P(x_0) - P'(x_0)\, x_0 \ .$$

Si tratta di una funzione crescente [risp. decrescente] sse la $P(x)$ in un intorno di x_0 è crescente [risp. decrescente].
In particolare la formula vale per la tangente a una curva polinomiale per qualsiasi valore (razionale) di x_0.

B36g.03 Polinomio derivato. Collegamento tra andamento di una funzione polinomiale e andamento della funzione del suo polinomio derivato.
Punti di massimo relativo e punti di minimo relativo.
Punto di minimo per $x = 0$ per le potenze pari x^{2h}
Massimi, minimi e annullamento della derivata prima

B36g.04 Derivate successive.

$$\forall k = 1, 2, ..., m \;\; \vdots \;\; \mathrm{D}_x{}^k x^m = m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k} \ .$$

Dipendenza dalla derivata seconda la quale esprime concavità verso l'alto o verso il basso.

Flessi delle funzioni polinomiali. Punti di flesso e annullamento della derivata seconda
x^3 presenta un flesso orizzontale per $x = 0$; lo stesso accade per ogni potenza dispari x^{2h+1}.

B36g.05 Dato un polinomio si dicono suoi **polinomi antiderivati** i polinomi le cui derivate coincidono con $P(x)$.
Antiderivate del polinomio $ax^2 + bx + c$ sono i polinomi $\dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2 + c\, x + \mathtt{C}$, con $\mathtt{C}$ costante (razionale) arbitraria.
La differenza di due qualsiasi polinomi antiderivati di uno stesso polinomio è una costante.
Interpretazione del polinomio antiderivato come area.

B36 h. punti singolari e andamenti delle funzioni-QtQ razionali

B36 h.01 Andamento presso l'origine di $1/x$, $1/x^2$ e $1/x^n$.
Punti singolari
Esempi

B36 i. traslazioni, dilatazioni e riflessioni delle funzioni-QtQ

B36i.01 Le funzioni-QtQ, in quanto sottoinsiemi del piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, possono essere assoggettate a varie trasformazioni.
Qui consideriamo le più semplici che portano a nuove funzioni-QtQ facilmente individuabili, per le quali risulta agevole stabilire quali caratteristiche rimangono invariate e quali sono i cambiamenti delle caratteristiche modificate.

Le prime trasformazioni sono le traslazioni orizzontali e verticali.
Vengono poi le omotetie in orizzontale e in verticale
Seguono le riflessioni rispetto a rette-QQ orizzontali e everticali.
Va considerata inoltre la riflessione rispetto alla diagonale principale, trasformazione che raramente porta a funzioni-QtQ.
In particolare la riflessione rispetto a una retta-QQ parallela alla diagonale $y = x$ o alla codiagonale $y = -x$ trasforma una retta-QQ in una retta-QQ.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`