1

Capitolo B35
numeri razionali: successioni, serie e loro rappresentazioni

Contenuti delle sezioni

a. sottoinsiemi dell'insieme ordinato dei razionali p. 2
b. successioni di razionali e loro limiti p. 8
c. composizioni di successioni-Q e loro proprietà p. 13
d. serie di razionali e loro somme p. 18
e. notazioni posizionali dei numeri razionali p. 22
f. rappresentazione dei razionali con frazioni continue p. 26

28 pagine

B35 0.01 Le successioni e le serie sono nozioni strettamente interconnesse e di vasta portata che verranno esaminate a più riprese, più avanti in particolare nei capitoli I12 e I13.

Nelle pagine che seguono sono introdotte le successioni e le serie costituite solo da numeri razionali, entità spesso trascurate, ma concretamente controllabili grazie alla loro facile costruibilità e costituenti strumenti indipensabili per tanti sviluppi, in particolare per la introduzione della nozione di limite e la conseguente introduzione dei numeri reali costruibili e del calcolo numerico approssimato.

Dopo le definizioni basilari [:a, :b e :c], vedremo in :d come successioni e serie di razionali consentono di definire in modo preciso le notazioni posizionali per i numeri razionali; queste sono strumenti di largo uso e si possono estendere direttamente alle scritture posizionali dei numeri reali costruibili.

Si tratta di notazioni di indubbbio interesse pratico utilizzate in tutti gli studi quantitativi; inoltre esse aiutano a portare avanti una introduzione intuitiva dei numeri reali.

Bisogna tenere presente che i numeri reali sono le entità sulle quali si basano praticamente tutte le introduzioni dell'analisi infinitesimale, lo studio delle funzioni più comuni e l'esame delle configurazioni continue; si tratta di idealizzazioni molto utili alle esposizioni con scopi generali, ma la soluzione di problemi specifici richiede elaborazioni effettive che si servono solo di numeri costruibili e spesso solo di numeri razionali.

Le relazioni tra razionali e reali sono comunque molto strette ed è opportuno siano ben chiarite.

Alla fine del capitolo vengono definite le frazioni continue e il loro uso per le rappresentazioni dei razionali; questo consente di individuare com maggiore chiarezza alcune caratteristiche operative di questi oggetti numerici.

Osserviamo inoltre che la priorità qui accordata alle successioni e alle serie di razionali aiuta a chiarire le differenze tra argomentazioni costruttive, argomentazioni quasi costruttive che si servono di elementi intuitivi e argomentazioni assiomatiche che, idealmente, sono integralmente formali; queste differenze conviene siano ben chiare quando soprattutto quando si sviluppa l'analisi infinitesimale e quando si esaminano le sue applicazioni.

B35 a. sottoinsiemi dell'insieme ordinato dei razionali

B35 a.01 Prendiamo in esame i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ considerato come insieme numerabile dotato dell'ordinamento totale $\leq$.

Per la relazione "$\leq$" tra razionali ricordiamo che, contrariamente a quanto accade per a $\mathbb{Z}$, per nessuno dei numeri razionali ha senso di parlare di un razionale successivo. Infatti, dati due razionali r ed s con $r < s$, si trova sempre un numero razionale compreso tra di essi, per esempio il loro valore medio $\frac{r+s}{2}$; anzi sono facilmente individuabili insiemi numerabili di tali numeri interposti: due esempi sono

$$\left\{ n = 2, 3, \ldots \;\middle|\; s - \frac{s-r}{n} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ n = 2, 3, \ldots \;\middle|\; r + \frac{s-r}{n^2} \right\} .$$

Sia E un insieme nonvuoto di numeri razionali, cioè sia $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$. Esso si dice

- **insieme limitato inferiormente** sse esiste un razionale m tale che per ogni q di E sia $m \leq q$;
- **insieme limitato superiormente** sse esiste un razionale M tale che per ogni q di E sia $q \leq M$;
- **insieme limitato** sse è limitato sia inferiormente che superiormente.

Un numero razionale si dice

- **minorante-Q dell'insieme** E sse è minore di tutti gli elementi di E;
- **maggiorante-Q dell'insieme** E sse è maggiore di tutti gli elementi di E.

Evidentemente ogni insieme $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$

- possiede almeno un minorante-Q sse è limitato inferiormente;
- possiede almeno un maggiorante-Q sse è limitato superiormente.

Inoltre per ogni insieme $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$

- ogni numero razionale minore di un minorante-Q di E è minorante-Q di E;
- ogni numero razionale maggiore di un maggiorante-Q di E è maggiorante-Q di E.

Un $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$ è limitato inferiormente sse possiede infiniti minoranti-Q. Infatti per la definizione di minorante se E possiede infiniti minoranti-Q è limitato inferiormente; per il viceversa, chiamato m un razionale minore o uguale di tutti gli elementi di E, sono minoranti di E anche tutti i razionali della forma $m - \rho$ con ρ razionale positivo qualsiasi.

Similmente un $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$ è limitato superiormente sse possiede infiniti maggioranti-Q.

Due enunciati come i precedenti si dicono collegati dalla dualità-UD [B55a07].

B35 a.02 Consideriamo un sottoinsieme E nonvuoto dell'insieme dei numeri razionali.

- E si dice dotato di **massimo-Q** sse contiene un elemento maggiore di tutti i suoi altri elementi; tale elemento, se esiste, si denota con $\max_Q(E)$.
- E si dice dotato di **minimo-Q** sse possiede un elemento maggiore di tutti i suoi altri elementi; tale elemento, se esiste si denota con $\min_Q(E)$.

Ogni insieme finito di razionali, evidentemente, è limitato, ossia è dotato di minimo-Q e dotato di massimo-Q; questi due elementi si possono individuare con opportune sequenze finite di confronti.
Inoltre ogni insieme finito di razionali ha come minoranti-Q tutti i razionali minori del suo minimo ed ha come maggioranti-Q tutti i razionali maggiori del suo massimo.
L'insieme dei numeri naturali è limitato inferiormente e dotato di minimo, il numero 0; suoi minoranti-Q sono tutti i razionali negativi; esso non è invece limitato superiormente, ovvero non possiede alcun maggiorante-Q.

L'insieme dei razionali negativi è invece limitato superiormente e illimitato inferiormente, suoi maggioranti-Q sono tutti i razionali nonnegativi e non possiede massimo: infatti per ogni suo elemento al quale diamo la forma $-a$ si trova almeno un suo altro elemento maggiore, ad esempio $-a/2$.

B35 a.03 Definiamo i vari tipi di intervalli di numeri razionali, oggetti che chiamiamo concisamente **intervalli-Q**.

Se a e b denotano due numeri razionali introduciamo

- $(a :: b) := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} a < q < b\}$ intervallo-Q limitato aperto;
- $[a :: b) := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} a \leq q < b\}$ intervallo-Q limitato aperto-chiuso;
- $(a :: b] := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} a < q \leq< b\}$ intervallo-Q limitato chiuso-aperto;
- $[a :: b] := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} \ \leq q \leq b\}$ intervallo-Q limitato chiuso;
- $(a :: +\infty) := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} a < q\}$ intervallo-Q illimitato superiormente aperto inferiormente;
- $[a :: +\infty) := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} a \leq q\}$ intervallo-Q illimitato superiormente chiuso inferiormente;
- $(-\infty :: b) := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} q < b\}$ intervallo-Q illimitato inferiormente aperto suuperiormente;
- $(-\infty :: b] := \{q \in \mathbb{Q} \mathbin{\P} q < b\}$ intervallo-Q illimitato inferiormente chiuso superiormente.

Un intervallo-Q $(a :: b)$ ha come minoranti-Q tutti i razionali minori o uguali ad a e come maggioranti tutti i razionali maggiori o uguali a b.
Un intervallo-Q $[a :: b]$ ha come minoranti-Q tutti i razionali minori di a e come mgagioranti tutti i razionali maggiori di b.
Un intervallo-Q $[a :: +\infty]$ ha come minoranti-Q tutti i razionali minori di a e nessun magiorant.
Sono facilmente individuabili i minoranti e i maggioranti degli altri tipi di intervalli-Q.

Posseggono elemento minimo, uguale ad a, solo $[a :: b)$, $[a :: b]$ e $[a :: +\infty)$.
Posseggono elemento massimo, uguale a b, solo $(a :: b[$, $[a :: b]$ e $[-\infty :: b)$.

B35 a.04 Nell'ambito di un insieme $E \subset_{ne} \mathbb{Q}$ definiamo quanto segue:

- **estremo-Q inferiore** di E o **infimo-Q** di E è il numero razionale e_i, se esiste, tale che per ogni $x \in E$ si ha $e_i \leq x$ e per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trova almeno un $y \in E$ tale che $y \leq e_i + \epsilon$;
- **estremo-Q superiore** di E o **supremo-Q** di E è il numero razionale e_s, se esiste, tale che per ogni $x \in E$ si ha $x \leq e_s$ e per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trova almeno un $y \in E$ tale che $e_s - \epsilon \leq y$.

In altre parole l'infimo-Q di E è il minorante di E tale che si trovano elementi di E vicini a esso quanto si vuole, mentre il supremo-Q di E è il maggiorante di E tale che si trovano elementi di E vicini a esso quanto si vuole.

Si dimostrano facilmente i seguenti enunciati per ogni $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$.

(1) Prop.: Se E possiede un infimo-Q questo è unico; se E possiede un supremo-Q questo è unico ▮

(2) Prop.: Ogni E dotato di infimo-Q è limitato inferiormente e ogni E dotato di supremo-Q è limitato superiormente ▮

(3) Prop.: Ogni E dotato di minimo-Q è dotato di infimo-Q e questo coincide con il minimo-Q ▮

(4) Prop.: Ogni E dotato di massimo-Q è dotato di supremo-Q e questo coincide con il massimo-Q ▮

B35 a.05 Denotiamo con **IntvlQ** l'insieme degli intervalli di numeri razionali; più in particolare denotiamo con **IntvlQLtd** l'insieme degli intervalli limitati di razionali e con **IntvlQNltd** l'insieme degli intervalli illimitati di razionali.
Si constata che l'insieme degli intervalli di numeri interi, che conveniamo di denotare con **IntvlZ**, è un sottoinsieme proprio di **IntvlQ**.

Consideriamo $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$; come si è visto sopra l'intervallo-Q $\mathbf{[}a : b\mathbf{]}$ possiede infimo-Q, uguale al suo minimo a, e possiede supremo-Q, uguale al suo massimo b. Anche gli intervalli $\mathbf{(}a :: b\mathbf{]}$ e $\mathbf{(}a :: b\mathbf{)}$, pur non possedendo minimo-Q, possiedono infimo-Q uguale ad a. Similmente gli intervalli $\mathbf{[}a :: b\mathbf{)}$ e $\mathbf{(}a :: b\mathbf{)}$, pur non possedendo massimo-Q, possiedono supremo-Q uguale a b.

Questi semplici esempi consentono di affermare che per la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ dotati di infimo-Q è un sovrainsieme proprio della collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ dotati di minimo e che la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ dotati di supremo-Q è un sovrainsieme proprio della collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ dotati di massimo.

A questo proposito si dice anche che nell'ambito degli insiemi di numeri razionali il ruolo di infimo-Q è **ruolo più attribuibile** del ruolo di minimo-Q e, dualmente-UD, che il ruolo di supremo-Q è ruolo più attribuibile del ruolo di massimo-Q.

La conoscenza dell'infimo-Q e quella del supremo-Q per gli $E \subset_{ne} \mathbb{Q}$ consentono di dare delimitazioni migliori o uguali di quelle che possono essere fornite, risp., dalla conoscenza del minimo e dalla conoscenza del massimo.

L'insieme $\{n \in \mathbb{P} :| \ 1/n\}$ è dotato di massimo-Q (e supremo-Q) 1, non possiede minimo-Q, ma 0 è il suo infimo-Q.
L'insieme $\{n \in \mathbb{P} :| \ (-1)^n(1 - 1/n\}$ è limitato, non possiede né minimo-Q, né massimo-Q, ma possiede infimo-Q, -1, e supremo-Q, $+1$.

Ogni $q \in \mathbb{Q}$ tripartisce l'insieme $\mathbb{Q}$ come segue:
- intervallo-Q $\mathbf{(}-\infty :: q\mathbf{)}$ illimitato inferiormente dotato di estremo-Q superiore (q stesso) e privo di massimo;
- singoletto $\{q\}$;
- intervallo-Q $\mathbf{(}q :: +\infty\mathbf{)}$ illimitato superiormente dotato di estremo-Q inferiore (q stesso) e privo di minimo.

B35 a.06 Introduciamo la endofunzione su $\mathbb{Q}$ $^{\searrow} Opp_Q := \ulcorner\, q \in \mathbb{Q} \mapsto -q \,\urcorner$ che chiamiamo **opposizione-Q**; evidentemente essa è una biiezione su $\mathbb{Q}$, più precisamente una involuzione su $\mathbb{Q}$.

Evidentemente la opposizione-Q scambia le due relazioni d'ordine $\leq$ e $\geq$ e quindi le relazioni $<$ e $>$.
Inoltre essa comporta degli scambi anche quando agisce sulle varie nozioni introdotte basandosi solo sull'insieme $\mathbb{Q}$ e sulle due relazioni $\leq$ e $\geq$.
Di conseguenza si hanno degli scambi anche tra gli enunciati che riguardano solo $\mathbb{Q}$, le relazioni $\leq$ e $\geq$ e le nozioni da essi derivate: $<$, $>$, min, max, inf, sup, qualifica inferiore, qualifica superiore,... .

Nell'insieme di queste entità si individuano vari duetti i cui elementi si scambiano tra di loro in conseguenza della $Opp_{\mathbb{Q}}$, ovvero in conseguenza dello scambio $\mathbf{[} \leq \longleftrightarrow \geq \mathbf{]}$, nonché delle conseguenti trasformazioni delle nozioni derivate.

Inoltre si individuano enunciati (definizioni e risultati) che rimangono invariati in conseguenza delle suddette trasformazioni; un esempio è la qualifica "essere limitato" degli insiemi numerici e le qualifiche aperto e chiuso degli intervalli-Q.

La trasformazione complessiva delle definizioni e dei risultati che dipendono solo da $\mathbb{Q}$ e da $Opp_{\mathbb{Q}}$; la chiameremo **dualità-UD**.

Chiaramente, come la trasformazione $\mathbf{[} \leq \longleftrightarrow \geq \mathbf{]}$, anche la dualità-UD è una involuzione: applicata due volte riporta alle enunciazioni iniziali.

B35 a.07 Nel seguito incontreremo molte altre situazioni come la precedente nelle quali si riconoscono un insieme ambiente E, una collezione $\mathcal{D}$ di definizioni he che lo riguardano, una sua involuzione $\boldsymbol{I}$ e l'insieme $\mathcal{P}$ delle proprietà (ossia degli enunciati) che discendono solo dalle definizioni in $\mathcal{D}$.
Sono particolarmente gestibili le situazioni nelle quali sono agevolmente riconoscibili gli effetti della involuzione $\boldsymbol{I}$ su una parte consistente di proprietà costituenti $\mathcal{P}$.

In queste situazioni si individua una cosiddetta **dualità** che si può denotare con $Duality(\mathsf{E}, \boldsymbol{I}, \mathcal{D}) := \mathcal{S}$, la quale consiste in una involuzione ricavabile da $\boldsymbol{I}$ che agisce sopra $\mathcal{D}$ e sopra la parte accennata di $\mathcal{P}$.

Le definizioni e le proprietà che $\mathcal{S}$ scambia vengono dette **definizioni e proprietà duali** per la $\mathcal{S}$, mentre le definizioni e le proprietà che non cambiano sono qualificate come **definizioni e proprietà autoduali** per la $\mathcal{S}$.

Le proprietà ottenibili per dualità sono casi particolari di proprietà ricavabili da simmetrie.

Tornando ai numeri razionali, sono molte le altre definizioni e le altre proprietà concernenti $\mathbb{Q}$ e riconducibili alle due relazioni scambiabili $\leq$ e $\geq$ che applicando la dualità-UD si trasformano in definizioni ed enunciati altrettanto validi.
Da queste constatazioni ci si può rendere conto dei vantaggi per la organizzazione dei risultati ai quali può portare la consapevolezza della dualità-UD.
Più in generale questo accade per ciascuna delle molte dualità che si possono riconoscere.

B35 a.08 Può essere utile la seguente tabella di nozioni collegate dalla dualità-UD che, intenzionalmente, non limitiamo all'insieme dei numeri razionali.

$\leq$	$\geq$
$<$	$>$
numero	numero di segno opposto
insieme limitato inferiormente	insieme limitato superiormente
insieme limitato	insieme limitato
elemento e insieme minorante	elemento e insieme maggiorante
elemento minimo	elemento massimo
estremo inferiore o infimo	estremo superiore o supremo
intervallo aperto	intervallo aperto
intervallo chiuso	intervallo chiuso
intervallo aperto-chiuso	intervallo chiuso-aperto

La involuzione dualità-UD si applica a insiemi numerici più estesi e meno estesi di $\mathbb{Q}$ e più in generale a totalmente ordinati. Sarà molto utile prenderla in considerazione per i numeri reali [B42].

Come accennato interessanti trasformazioni di dualità si trovano in vari altri capitoli della matematica. La individuazione di una di tali involuzioni consente di controllare meglio i risultati concernenti le nozioni che essa tocca.
Infatti dopo aver ottenuta una dimostrazione D di una certa proprietà nonautoduale diventa possibile ottenere la dimostrazione della proprietà duale applicando la trasformazione di dualità a tutti gli enunciati che costituiscono la catena dimostrativa della D.

Questa considerazione rende lecito enunciare una proprietà duale di una che è stata dimostrata con una certa fatica evitando la nuova dimostrazione, conseguendo quindi una qualche economia di pensiero. Inoltre la consapevolezza di una dualità consente di controllare e di esporre meglio il complesso dei risultati concernenti l'ambiente della dualità e di semplificare varie argomentazioni.

B35 a.09 Introduciamo ora alcune nozioni che riprenderemo con maggiore generalità trattando i numeri reali [B46], gli spazi metrici e gli spazi topologici.

Dato un insieme di razionali $E \subset_{ne} \mathbb{Q}$ diciamo **chiusura convessa dell'insieme** di E e scriviamo $Cnvxcl_Q(E)$ l'insieme di tutti i razionali che sono minori o uguali di qualche elemento di E e sono maggiori o uguali di qualche elemento di E:

$$Cnvxcl_Q(E) \ := \ \{x \in \mathbb{Q} \quad :| \quad E \ni m \ \P \ m \leq x \ \wedge \ E \ni M \ \P \ x \leq M\} \ .$$

Spesso, se non si rischiano ambiguità le notazioni della forma $Cnvxcl_Q(E)$ si sostituiscono le più concise della forma $\overline{E}$.

Chiaramente la chiusura convessa di un insieme di razonali è un intervallo di razionali: tale intervallo-Q è finito sse E è limitato, è un intervallo chiuso a sinistra sse E possiede minimo, è chiuso a destra sse E possiede massimo.

La chiusura convessa si può considerare una endofunzione di $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$; come tale essa manda insiemi di razionali in intervalli di razionali.
Inoltre evidentemente essa è una trasformazione ampliante ed isotona, cioè

$$E \subseteq F \subseteq \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad E \subseteq Cnvxcl_Q(E) \ \wedge \ Cnvxcl_Q(E) \subseteq Cnvxcl_Q(F) \ .$$

È facile anche constatare che la chiusura convessa della chiusura convessa di E coincide con la chiusura convessa di E, ovvero che sia

$$\forall E \subseteq \mathbb{Q} \ \vdots \ Cnvxcl_Q(\mathsf{ClsrQ}(E)) \ = \ Cnvxcl_Q(E) \ .$$

Questo si esprime anche affermando che la chiusura convessa dei razional è una endofunzione idempotente facente parte di $\mathbf{Endo}(\mathbb{Q})$.

Si osserva che la chiusura convessa rispetta l'unione di insiemi:

$$\forall A, B \subset \mathbb{Q} \ \vdots \ Cnvxcl_Q(A \cup B) \ = \ Cnvxcl_Q(A) \cup Cnvxcl_Q(B) \ .$$

Si osserva invece che essa può non rispettare l'intersezione di insiemi: in generale accade che

$$\forall A, B \subset \mathbb{Q} \vdots \ Cnvxcl_Q(A \cap B) \ \subseteq \ Cnvxcl_Q(A) \cap Cnvxcl_Q(B) \ .$$

Ad esempio se $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$ abbiamo

$$Cnvxcl_Q(A \cap B) \ = \ \emptyset \subset Cnvxcl_Q(A) \cap Cnvxcl_Q(B) \ = \ [2 :: 3] \ .$$

B35 a.10 Introduciamo ora la prima nozione di punto di accumulazione da attribuire a un insieme di numeri razionali.

Consideriamo un $E \subseteq_{ne} \mathbb{Q}$; si dice **punto di accumulazione-Q di un insieme** E, oppure **punto aderente-Q di un insieme** E ogni $L \in \mathbb{Q}$ tale che, per qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trova almeno un razionale $x \in E$ diverso da L per il quale $|x - L| < \epsilon$ o, equivalentemente, tali che sia $L - \epsilon < x < L + \epsilon$.
Denotiamo con $\mathbf{AdrnQ}(E)$ l'insieme dei punti di accumulazione-Q di E.

Dati due razionali r ed s il numero razionale nonnegativo $|r - s|$ si dice **distanza tra i due numeri** r ed s.
La precedente definizione può convenientemente essere riformulata in termini di distanza.

(1) Prop.: $L \in \mathbf{AdrnQ}(E)$ sse per qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trovano infiniti razionali $x \in E$ per i quali $|x - L| < \epsilon$.

Se per ϵ_1 si trova $x_1 \in E$ tale che $|x_1 - L| < \epsilon_1$, assunto $\epsilon_2 := (x_1 - L)/2$ si trova $x_2 \in E$ tale che $|x_2 - L| < \epsilon_2$; la derivazione di x_2 da x_1 può procedere illimitatamente con la individuazione di infiniti razionali x_i che soddisfano la richiesta. ▮

(2) Prop.: Consideriamo $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$.

$\mathbf{AdrnQ}((a:b)) = [a:b]$; $\mathbf{AdrnQ}([a:b)) = [a:b]$; $\mathbf{AdrnQ}((a:b]) = [a:b]$; $\mathbf{AdrnQ}([a:b]) = [a:b]$ ∎

(3) Prop.: $\mathbf{AdrnQ}(\mathbb{Z}) = \emptyset$; $\forall d \in \mathbb{Q}_+ \ : \ \mathbf{AdrnQ}\{n \in \mathbb{Z} :| \ n/d\} = \emptyset$ ∎

(4) Prop.: $\forall d \in \{2,3,4,...\} \ : \ \mathbf{AdrnQ}\{n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P} :| \ n/d^p\} = \mathbb{Q}$ ∎

(5) Prop.: (a) Per ogni $E \subset_{ne} \mathbb{Q}$ privo di minimo-Q ma dotato di infimo-Q, cioè limitato inferiormente, questo è un punto di accumulazione-Q di E.

(b) Dualmente-UD per ogni $E \subset_{ne} \mathbb{Q}$ privo di massimo-Q ma dotato di supremo-Q, questo è un punto di accumulazione-Q di E.

Dim.: La definizione di infimo-Q implica che si può verificare la proprietà che definisce il punto di accumulazione-Q. Lo stesso vale per la definizione di supremo-Q ∎

B35 a.11 Presentiamo altri insiemi di razionali con i relativi punti di accumulazione.

L'insieme $E_3 := \left\{ n = 2,3,4,5,... \,\middle|\, n\%3 + \frac{1}{n} \right\}$ possiede 3 punti di accumulazione: 0,1 e 2. Infatti esso contiene 2+1/2, 0+1/3, 1+1/4, 2+1/5,0+1/6, 0+1/7, 1+1/8, 2+1/9, ...
Quindi vi sono infiniti valori di questa successione che si trovano in prossimità di 0, di 1 o di 2.

Più in generale per ogni intero m maggiore o uguale a 3 l'insieme

$$E_m := \left\{ n = 2,3,4,5,... \,\middle|\, n\%m + \frac{1}{n} \right\}$$

possiede i punti di accumulazione 0, 1, 2, ..., $m-1$.

B35 a.12 Introduciamo ora per l'insieme dei numeri razionali una prima definizione di intorno, anche questa una nozione che si può definire in molti altri ambienti numerici e anche nei più generali cosiddetti ambienti topologici.

Si dice **intorno-Q del punto-Q** q ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ contenente un intervallo aperto di razionali che a sua volta contiene q.

Evidentemente l'intersezione di due o di un numero finito di intorni-Q di un razionale q è un intorno di q. Lo stesso vale per l'unione di intorni-Q di un numero razionale.

Si osserva che gli intervalli chiusi, aperti, aperti-chiusi e chiusi-aperti che contengono un razionale sono suoi intorni particolari e particolarmente semplici da individuare.

B35 b. successioni di razionali e loro limiti

B35 b.01 Useremo il termine **successioni di numeri razionali** o l'equivalente sincopato **successioni-Q**, per denotare funzioni del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$ o funzioni di un genere $\lceil \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$ con il dominio D poco diverso da $\mathbb{N}$, ovvero di un genere riconducibile a $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$ con cambiamenti formali che si rivelano di poco conto.
Tra le successioni-Q comprendiamo in particolare le funzioni del genere $\lceil \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$ e più in generale le funzioni del genere $\lceil \{k, k+1, k+2, ...\} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$.

Una successione di razionali viene presentata con scritture come la seguente

$$\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle \tag{1}$$

o come quest'altra

$$\mathsf{b} = \langle b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{P} :| \ b_n \rangle \ . \tag{2}$$

Questi due tipi di entità sono sostanzialmente equivalenti; infatti ad una a della forma (1) si associa una equivalente b del genere $\lceil \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$ ponendo $b_n := a_{n-1}$ per $n = 1, 2, 3, ...$, mentre a una b della forma (2) si associa una a equivalente del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$ ponendo $a_n := b_{n+1}$ per $n = 0, 1, 2, ...$

Nelle scritture precedente l'intero n viene detto **indice della successione**, mentre gli a_n sono chiamati **componenti della successione**.

Queste successioni sono chiaramente i sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ privi di duetti $\{\langle n, q_1 \rangle, \langle n, q_2 \rangle\}$ con $q_1 \neq q_2$.

Tra le successioni di numeri razionali del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$, come tra le funzioni di molti altri generi, sono utili concretamente (cioè utili per risolvere problemi specifici) le **successioni costruibili**, cioè le successioni $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ per le quali si conosce un algoritmo in grado di fornire per ogni $n \in \mathbb{N}$ la componente a_n.

Successioni costruibili particolari sono le successioni per le quali è nota una espressione chiaramente interpretabile che fornisce per ogni $n \in \mathbb{N}$ la componente a_n. Sono queste le più utilizzate nelle presentazioni riguardanti successioni e serie dei vari generi, come vedremo anche nella presente sezione.

B35 b.02 Le successioni di interi sono casi particolari di successioni-Q che risulta conveniente studiare separatamente.

L'insieme delle successioni-Q, d'altro lato, costituisce un sottoinsieme proprio dell'insieme delle successioni di numeri reali che esamineremo in particolare in I12 e questo a sua volta costituisce un sottoinsieme delle successioni di numeri complessi che tratteremo in I32.

Proseguendo con le generalizzazioni incontreremo le successioni di elementi di spazi metrici e di spazi topologici [B46].

Tra le successioni-Q può essere utile distinguere quelle a componenti positive, quelle a componenti negative, quelle a componenti nonnegative e quelle a componenti nonpositive. Una tale distinzione vedremo essere conveniente per vari altri generi di funzioni a valori reali.

Come per tutte le funzioni il cui dominio e il cui codominio sono totalmente ordinati, si distinguono le successioni-Q crescenti, le decrescenti, le noncrescenti e le nondecrescenti.

Come per tutte le funzioni aventi valori reali, complessi o in generale facenti parte di un campo, sulle successioni-Q si possono effettuare le operazioni componente per componente di somma, moltiplicazione

per un razionale (in particolare il cambiamento di segno) e più in generale le combinazioni lineari componente per componente.

Chiaramente cambiando il segno a una successione-Q crescente si ottiene una successione-Q decrescente, cambiando di segno a una successione-Q noncrescente si ottiene una successione-Q nondecrescente.

Sommando due successioni-Q crescenti si ottiene un'altra successione-Q crescente; sommando due successioni-Q noncrescenti si ottiene un'altra successione-Q noncrescente; sommando una successione crescente con una successione nondecrescente si ottiene una successione-Q crescente.

Eserc. (1) Si osservi che anche ai precedenti enunciati si applica la dualità-UD e si precisino i duetti duali.

Rivestono grande importanza anche le **successioni-Q a segni alterni**, successioni-Q tali che $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \cdot a_{n+1} < 0$.
Esempi di tali successioni-Q sono

$$\left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{n}, ... \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{24}, ..., \frac{(-1)^{n}}{n!}, ... \right\rangle .$$

B35 b.03 Consideriamo un insieme infinito di numeri razionali $D \subseteq \mathbb{Q}$ e una funzione $f \in \lceil D \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$.
Si dice **punto di accumulazione** o **valore limite** per i valori di tale funzione ogni $L \in \mathbb{Q}$ tale che, per qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si trovano infiniti elementi $x \in D$ per i quali $|f(x) - L| < \epsilon$, ovvero per i quali $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$.

La precedente definizione costituisce una generalizzazione della definizione di punto di accumulazione di una successione-Q; infatti questa si può considerare una funzione a valori razionali avente come dominio l'insieme degli interi naturali o un insieme di interi facilmente riconducibile a $\mathbb{N}$.

Denotiamo con $\mathbf{LimvQ}(f)$ l'insieme dei valori limite della funzione f. In particolare l'insieme dei valori limite di una successione $\mathsf{s}$si denota con $\mathbf{LimvQ}(\mathsf{s})$.

Si osserva che l'insieme dei punti limite della f si può definire anche con l'espressione

$$\mathbf{LimvQ}(f) \ := \ \mathbf{AdrnQ}(\mathsf{cod}(f)) \ .$$

Per una successione-Q individuata da una espressione $\mathcal{E}_n$ nella quale compare una n variabile nell'insieme $\mathbb{N}$ possono essere utili anche notazioni della forma $\mathbf{LimvQ}\langle \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{N}}$, della forma $\mathbf{LimvQ}\langle \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \rangle$ o anche della forma $\mathbf{LimvQ}\langle \mathcal{E}_n \rangle$.

Per l'insieme dei punti di accumulazione di una successione a valori in $\mathbb{Q}$, si possono riscontrare varie situazioni.

Una successione a valori coincidenti $\langle c, c, c, ... \rangle$ ha c come unico valore limite $\mathbf{LimvQ}\langle c \rangle_{\mathbb{N}} = \{c\}$-; questo numero da solo costituisce il codominio della successione.

Una successione come la $\mathsf{s} = \left\langle 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ... \right\rangle$ possiede un unico valore limite, l'intero 0, il quale non fa parte del suo codominio: $\mathbf{LimvQ}(1/\mathbb{P}) = \{0\} \notin \mathsf{cod}(\mathsf{s})$.

Una successione come la $\mathsf{t} = \langle 0, 1, 2, 0, 1, 2, ..., n\%3, ... \rangle$ possiede un numero finito, 3, di valori limite: $\mathbf{Limv}\langle \mathbb{N}\%3 \rangle = \{0, 1, 2\} = \mathsf{cod}(\mathsf{t})$; in questo caso l'insieme dei valori limite della successione coincide con il suo codominio (finito).

Una successione ottenuta sequenzializzando tutte le frazioni di interi positivi come la

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{1}{1} \ , \ \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \ , \ \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \ , \ \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \ , \ ... \right\rangle$$

ha come insieme di valori limite l'intero $\mathbb{Q}_{0+}$; quindi $\textbf{LimvQ}(\mathbf{r}) = \mathbb{Q}_{0+}$.

B35 b.04 Riconducendosi alle definizioni per gli insiemi di razionali esposte in :a, una successione di numeri razionali $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ viene detta

- **successione limitata inferiormente** sse $\mathsf{cod}(\mathsf{a})$ è limitato inferiormente, cioè sse esiste un razionale m tale che per ogni n sia $m \leq a_n$;
- **successione limitata superiormente** sse $\mathsf{cod}(\mathsf{a})$ è limitato superiormente, cioè sse esiste un razionale M tale che per ogni n sia $a_n \leq M$;
- **successione limitata** *tout court* sse è limitata sia inferiormente che superiormente.

La $\langle n \in \mathbb{N} :| \ 3\,n + 2 \rangle \ = \langle 2, 5, 8, 11, 14, ... \rangle$ è limitata inferiormente ma non superiormente.

La $\langle n \in \mathbb{N} :| \ 200 + 3n - n^2 \rangle = \langle 200, 202, 202, 200, 196, 190, 182, 172, ... \rangle$ è limitata superiormente ma non inferiormente.

La $\langle n \in \mathbb{N} :| \ (-3)^n \rangle \ = \langle 1, -3, 9, -27, 81, -243, 729, ... \rangle$ è illimitata inferiormente e superiormente.

La $\left\langle n \in \mathbb{P} :| \ 2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rangle$ è limitata inferiormente e superiormente.

Evidentemente si può abche affermare che una successione-Q a è limitata sse esiste un razionale positivo q tale che per ogni n sia $|a_n| \leq q$.

B35 b.05 Una successione-Q $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si dice **successione-Q convergente** sse possiede un solo valore limite razionale. Questo valore, che qui denotiamo con L, si dice **limite-Q della successione-Q**; in tal caso si dice che questa a tende o converge ad L per n tendente all'infinito.
Questa situazione si enuncia scrivendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ = \ L \qquad \text{oppure} \qquad \lim \mathsf{a} \ = \ L \qquad \text{oppure} \qquad \lceil\!\lceil \, a_n \to L \ \text{ per } \ n \to +\infty \, \rceil\!\rceil \ .$$

Le successioni convergenti-Q sono tra le successioni-Q di elementi di $\mathbb{Q}$ quelle che presentano i maggiori motivi di interesse: ciascuna di queste entità consente di individuare uno specifico numero razionale e taluni di questi numeri razionali traggono vantaggio dalla possibilità di essere individuati sia mediante una frazione, che mediante una successione-Q.

Con l'espressione "entità che traggono vantaggio" si intende affermare che queste entità possono essere utilizzate più agevolmente per risolvere problemi.

B35 b.06 Prop. Una successione-Q $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente-Q sse esiste un $L \in \mathbb{Q}$ tale che, comunque scelto un $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$, si trova un intero naturale N_ϵ tale che $\forall n \geq N_\epsilon \ : \ L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.

Dim.: "$\Longleftarrow$" Il numero L dell'ipotesi, grazie a b03, è punto di accumulazione delle successione. Inoltre se vi fosse un altro punto di accumulazione L', per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si troverebbe un intero N' tale che per $n > N'$ sarebbe $|L - a_n| < \epsilon/2$ ed $|L' - a_n| < \epsilon/2$, e quindi $|L - L'| \leq |L - a_n| + |L' - a_n| < \epsilon$; ma la disuguaglianza $|L - L'| < \epsilon$, per la possibilità di scegliere arbitrariamente ϵ, può sussistere solo se $L' = L$.

" $\Longrightarrow$ " Se la a possiede un unico punto di accumulazione-Q L, per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ i componenti a_m della a tali che $|L - a_m| > \epsilon$ non possono fornire altri punti di accumulazione-Q e quindi sono in numero finito ∎

B35 b.07 Prop. Ogni successione-Q che è convergente-Q è limitata.

Dim.: Consideriamo la successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ che converge-Q al valore $L \in \mathbb{Q}$. Fissato un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$, si trova un intero positivo N_ϵ tale che per ogni $n > N_\epsilon$ il valore a_n appartiene

all'intervallo-Q $\mathbf{[}L-\epsilon :: L+\epsilon\mathbf{]}$; i rimanenti a_0, a_1, ... a_{N_ϵ}, essendo in numero finito, costituiscono un insieme limitato e devono appartenere a un opportuno intervallo $\mathbf{[}m :: M\mathbf{]}$. L'intero codominio della successione deve appartenere all'unione dei due suddetti intervalli finiti e quindi è limitato ∎

Si verifica senza difficoltà che le successioni-Q che seguono sono convergenti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+1}=1 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-2n-7}{2n^2+5n-11}=\frac{3}{2} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1000\,n^2+307}{2n^3-3n+6}=0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-2n-7}{4n^4-7n^2+7}=\frac{1}{4} \ .$$

B35 b.08 Nelle definizioni dei punti di accumulazione e dei valori limite [ad esempio in a10 e b05], si è fatto ricorso a numeri positivi, spesso denotati con ϵ, che si consente di scegliere ad arbitrio.

Queste definizioni prospettano manovre che a partire da una scelta di un valore di ϵ verificano una certa proprietà $P(\epsilon)$ che spesso consiste nella appartenenza a un insieme dipendente da ϵ che al diminuire di ϵ diventa più ridotto.

Consideriamo due di queste manovre associate a due valori ϵ_1 e ϵ_2 con $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$; se si è verificata la proprietà $P(\epsilon_2)$ è garantita la verifica della $P(\epsilon_1)$: quindi il lettore è indotto a pensare principalmente a valori di ϵ molto piccoli.

Questi ϵ si possono dichiarare come "potenzialmente molto piccoli" o anche "piccoli quanti si vuole"; queste espressioni evidentemente si collocano a un livello intuitivo.

Altre definizioni che incontreremo ricorrono invece a numeri positivi che denotiamo con M che si possono scegliere ad arbitrio e prospettano verifiche di proprietà $P(M)$ riconducibili ad appartenenza ad insiemi che si riducono al crescere di M. A livello intuitivo questi M si possono dichiarare "grandi quanto si vuole".

In molte definizioni dei generi prospettati può essere utile inserire delle annotazioni che intendono aiutare una loro familiarizzazione a livello intuitivo.

Questo ci proponiamo di fare spesso servendoci delle abbreviazioni che presentiamo qui di seguito, ma riservandoci di effettuare chiarimenti in successive definizioni specifiche.

ipag := intuitivamente presentato come arbitrariamente grande;

ipagm := intuitivamente presentato come arbitrariamente grande in modulo;

ipap := intuitivamente presentato come arbitrariamente piccolo;

ipapm := intuitivamente presentato come arbitrariamente piccolo in modulo;

ipmag := intuitivamente presentato come in modulo arbitrariamente grande;

ipmap := intuitivamente presentato come in modulo arbitrariamente piccolo;

ipnag := intuitivamente presentato come negativo arbitrariamente grande;

ipnap := intuitivamente presentato come negativo arbitrariamente piccolo;

ippag := intuitivamente presentato come positivo arbitrariamente grande;

ippap := intuitivamente presentato come positivo arbitrariamente piccolo;

ipapn := intuitivamente presentato come negativo arbitrariamente piccolo.

B35 b.09 Una successione-Q $\langle n\in\mathbb{N} :| \ a_n\rangle$ si dice che diverge a $+\infty$ sse per qualunque numero razionale M (ippag) si trova un $N_M\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n > N_M \ : \ a_n > M$.

In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Una successione-Q $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si dice che diverge a $-\infty$ sse per qualunque numero razionale M (ipnag) si trova un $N_M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N_M \ : \ a_n < M$. In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to -\infty \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Una successione-Q $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si dice che diverge a $+\infty$ sse per qualunque numero razionale M (ipnag) si trova un $N_M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N_M \ : \ |a_n| < M$, ovvero $a_n \in (-\infty :: -M) \dot\cup (M :: +\infty)$.
In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Si osserva che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ sse $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Evidentemente $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Più in generale per ogni $k = 1, 2, 3, 4, ...$ si ha $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$.
Infatti per $n = 2, 3, 4, ...$ $n^2 > n$ e $n^{k+1} > n^k$ e questo garantisce la divergenza annunciata.

Riprendiamo brevemente i ruoli dei suggerimenti "(ippag)" nelle precedenti definizioni. Per il numero M che si vuole arbitrario risulta più interessante pensarlo arbitrariamente grande, in quanto passando a un intero inferiore la proprietà richiesta sarebbe soddisfatta a fortiori.

B35 b.10 Una successione-Q si dice **successione-Q unilimite-Q** o successione regolare sse è convergente a un limite razionale finito, oppure diverge a $-\infty$, oppure diverge a $+\infty$.
Una successione-Q che possiede più limiti razionali si dice **successione-Q multilimite-Q**, **successione oscillante** o successione irregolare.
Tra queste si collocano le successioni che divergono a ∞ ma non divergono a $+\infty$ e non divergono a $-\infty$.
Si ha per esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-n)^3 - 4n^2}{4n^2 - 7n^2 + 7} = \infty \ .$$

e l'argomento del limite si può considerare una successione multilimite.

Chiaramente i quattro insiemi delle successioni-Q convergenti-Q, divergenti a $-\infty$, divergenti a $+\infty$ e multilimite sono insiemi disgiunti.

Incontreremo anche successioni-Q che si dimostrano non appartenere ad alcuno dei precedenti insiemi, cioè che non sono divergenti e non convergono ad alcun limite razionale.

Inoltre non va esclusa la possibilità di incontrare successioni-Q che non si sappiano attribuire a una precisa delle precedenti classi.

Si deve inoltre osservare che le caratteristiche di convergenza delle successioni-Q non cambiano quando si passa da una successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ ad una $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n + c \rangle$ i cui componenti siano aumentati di una costante c o a una $\langle n \in \mathbb{N} :| \ d\, a_n \rangle$ con d razionale positivo qualsiasi.

Inoltre le caratteristiche di convergenza non cambiano quando dalla successione o si elimina un insieme finito di componenti o anche un numero infinito di componenti lasciandone comunque un numero infinito.

B35 c. composizioni di successioni-Q e loro proprietà

B35 c.01 A questo punto si apre la problematica della determinazione dell'esistenza e della individuazione dei limiti delle successioni-Q.

Conviene segnalare che questa problematica troverà una collocazione più consona quando si introdurranno gli insiemi numerici che estendono $\mathbb{Q}$. Altre nozioni interessanti sulle successioni e i loro limiti saranno trattate ancora più in avanti avendo come componenti dei numeri complessi [I33] o delle funzioni [I35).

Per affrontare questi problemi si devono precisare e utilizzare vari criteri di portata generale.
Qui ci limitiamo alle successioni-Q e presentiamo solo alcuni di questi criteri senza insistere su tutti i dettagli delle loro dimostrazioni.

La trattazione dei limiti delle successioni sarà condotta in modo più efficace e completo sopra le successioni di numeri reali [I12] e in modo più generale per le successioni di elementi di spazi metrici [I32].

Tuttavia consideriamo opportuno esaminare con attenzione anche le successioni (e poi le serie) di numeri razionali, in quanto i relativi risultati verranno utilizzati per introdurre costruttivamente l'insieme dei numeri algebrici, e l'insieme più generale (ma più vago) dei numeri costruibili [B38], insiemi più ridotti dell'insieme dei numeri reali [B42] ma utilizzabili concretamente ed estesamente.

I numeri reali possono essere introdotti solo a un livello di maggiore astrazione basandosi su assiomi [B42]; questa impostazione assiomatica può essere giudicata troppo impegnativa e ostica da chi si interessa principalmente (o esclusivamente) delle applicazioni della matematica.

Va tuttavia segnalato che il procedimento assiomatico consente di effettuare dimostrazioni e costruzioni attraverso sviluppi formali più compatti e spesso più agevoli.
In effetti esso si può avvalere di nozioni più astratte e generali, in particolare di quelle sugli spazi metrici e sugli spazi topologici; queste nozioni inoltre facilitano successiie ampliamenti delle prospettive, ad esempio quelli riguardanti le serie nel campo complesso o le serie di funzioni.

Nella presente *esposizione* si è preferito, innanzi tutto, procedere con gradualità introducendo insiemi numerici via via più estesi e con maggiori possibilità di costruzioni concretamente utilizzabili. Inoltre si vogliono evidenziare i molti collegamenti e le molte differenze tra le esigenze e le pratiche del calcolo effettivo e le costruzioni formali di carattere logico-deduttivo.

Molte diffuse esposizioni si collocano tra il costruttivo e l'assiomatico, riuscendo ad essere meno estese della attuale, attraverso la introduzione dei numeri reali ricorrendo a successioni di razionali ma senza evidenziare questo accorgimento e senza soffermarsi sull'effettivo dualismo tra approccio costruttivo e approccio assiomatico.

Le esposizionoi del tipo accennato non sono incomplete in quanto le definizioni e le dimostrazioni complete relative a $\mathbb{Q}$, agli insiemi di numeri algebrici e agli insiemi di numeri costruibili si possono ricavare senza sostanziali difficoltà da quelle sui reali; esse si possono considerare piuttosto sbrigative.

B35 c.02 Consideriamo alcuni esempi.

Per ogni intero $k \geq 2$ si ha $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$. Infatti scelto un qualsiasi $M > 0$ (che conviene raffigurarsi molto grande), dato che $(n+1)^k - n^k > k\, n^{k-1}$, al crescere di n sicuramente n^k supera ogni razionale fissato M ∎

$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.
Infatti scelto un qualsiasi razionale $M > 0$ (ippag), dato che $3^{n+1} = 3\,3^n$ al crescere di n sicuramente 3^n supera ogni razionale fissato M ∎

Più in generale per ogni razionale $b > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.
Per ogni $b > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \log_2 n = \infty$. Infatti scelto un qualsiasi $M > 0$ (ippag) si ha $\log_b n > M$ per ogni $n > b^M$ ∎

$\lim_{n\to+\infty} n^{10} - 2^n = -\infty$

Altri esempi di successioni divergenti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3 - 2n - 7}{2n^2 + 5n - 11} = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{-n + 3}{2n^3 - 3n + 6} = -\infty \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-n)^3 - 4n^2}{4n^2 - 7n^2 + 7} = \infty \ .$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2 + 5n - 11} = +\infty \quad ,$$

In modo conciso una successione di razionali (e non solo) che tende a 0 si dice **successione infinitesima**.
È invece deprecabile chiamare *infinita* una successione-Q che tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

B35 c.03 Una successione-Q si dice **successione monotona crescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{Q} \rceil$.

Una successione-Q si dice **successione monotona decrescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{Q} \rceil$.

Una successione-Q si dice **monotona nondecrescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{Q} \rceil$.

Una successione reale si dice **monotona noncrescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{Q} \rceil$.

Evidentemente $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{Q} \rceil \subset \lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{Q} \rceil$ e $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{Q} \rceil \subset \lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{Q} \rceil$.
Inoltre $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{Q} \rceil$ e $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{Q} \rceil$ sono insiemi disgiunti, sono tali anche $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{Q} \rceil$ e $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{Q} \rceil$ e a fortiori sono disgiunti $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{Q} \rceil$ e $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{Q} \rceil$; accade poi che $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{Q} \rceil \cap \lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{Q} \rceil$ è l'insieme delle successioni costanti.

Spesso per le situazioni precedenti si usano termini un po' diversi e in disaccordo con quelli adottati; può essere di qualche utilità il seguente quadro di confronto tra gruppi di modi di dire.

termine adottato	*variante*	*variante*
monotona crescente	monotona strettamente crescente	monotona crescente in senso stretto
monotona decrescente	monotona strettamente crescente	monotona decrescente in senso stretto
monotona nondecrescente	monotona crescente	monotona crescente in senso lato
monotona noncrescente	monotona decrescente	monotona decrescente in senso lato

B35 c.04 Consideriamo una successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ e una successione di proprietà $\langle \mathcal{P}_n \rangle$ la n-esima delle quali può essere soddisfatta o meno da a_n, oppure dalla sottosuccessione $\langle i \in \mathbb{N} :| a_{n+i} \rangle$.

Una tale successione di proprietà si dice **proprietà definitivamente soddisfatta** sse si trova un intero naturale N tale per cui $\mathcal{P}_n$ è soddisfatta per ogni $n \geq N$. Per esempio per la $\langle n \in \mathbb{N} :| -1000 + n^2 \rangle$ è definitivamente soddisfatta la disuguaglianza $a_n > 0$; in tal caso si dice che la successione è definitivamente positiva o anche sbrigativamente che $\langle -1000 + n^2 \rangle_\mathbb{N}$ è definitivamente positiva.

Similmente si afferma che per qualsiasi K reale positivo la successione $\langle 2^{-n} \rangle_\mathbb{N}$ è definitivamente minore di 10^{-K}.

Inoltre si può affermare che $\langle n \in \mathbb{N} :|\ 10+(-2)^n \rangle = \langle 11, 8, 14, 2, 26, -22, 74, -118, 266, -502, ... \rangle$ è una successione definitivamente a segni alterni.

Con questa terminologia si possono presentare in forme più concise varie proprietà delle successioni. Per esempio la definizione b05 diventa
Una successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n \rangle \in \lceil\!\lceil\ \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{Q}\ \rceil\!\rceil$ è convergente sse esiste un $L \in \mathbb{Q}$ tale che, scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, si ha definitivamente $|L - a_n| < \epsilon$.

Risultano utili le varianti delle caratterizzazioni presentate in c03 nelle quali le disuguaglianze valgono solo per indici n superiori a un qualche valore N.
Per quanto detto sopra, in questi casi si parla, risp., di successioni definitivamente crescenti, definitivamente decrescenti, definitivamente nondecrescenti e definitivamente noncrescenti.

B35 c.05 Sulle successioni-Q (e su altre successioni) si possono effettuare composizioni che si possono considerare generalizzazioni delle operazioni numeriche.

Qui e più oltre consideriamo $n \in \mathbb{P}$, i razionali $\alpha^{(i)}$ per $i = 1, 2, ..., n$ e le seguenti successioni-Q $\mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n \rangle$, $\mathsf{b} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ b_n \rangle$, $\mathsf{c} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ c_n \rangle$ e $\mathsf{a}^{(i)} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n^{(i)} \rangle$ per $i = 1, 2, ..., n$.

Si dice **somma di due successioni** a e b la successione

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} := \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n + b_n \rangle .$$

Si dice **aumento di una successione** a di un razionale k la successione

$$\mathsf{a} + k := \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n + k \rangle .$$

Si dice **moltiplicazione di una successione** a per il razionale $\alpha \in \mathbb{Q}$ la successione

$$\alpha \cdot \mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :|\ \alpha \cdot a_n \rangle .$$

In particolare (caso in cui $\alpha = -1$) si dice **successione opposta** della successione a la successione-Q

$$-\mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :|\ -a_n \rangle .$$

Si dice **differenza tra due successioni** a e la b la successione

$$\mathsf{a} - \mathsf{b} := \mathsf{a} + (-\mathsf{b}) = \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n + b_n \rangle .$$

Si dice **combinazione lineare delle successioni** $\mathsf{a}^{(i)}$ con i coefficienti, risp., $\alpha^{(i)}$ per $i = 1, 2, ..., n$ la successione

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)} \cdot \mathsf{a}^{(i)} := \left\langle n \in \mathbb{N} :|\ \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)} \cdot a_n^{(i)} \right\rangle .$$

Si osserva che questa composizione comprende tutte le precedenti come casi particolari.

Si dice **prodotto** (di Hurwitz) delle successioni a e b la successione

$$\mathsf{a} \cdot_H \mathsf{b} := \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n \cdot b_n \rangle .$$

Se b non presenta alcun componente nullo, si dice **successione divisione (di Hurwitz)** della successione a per la b la successione

$$\mathsf{a}/_H \mathsf{b} := \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n / b_n \rangle .$$

Inoltre si possono definire in modi prevedibili le composizioni polinomiali e le composizioni razionali di più successioni combinate con opportuni coefficienti.

Per le composizioni introdotte si possono usare anche termini quali: somma componente per componente, moltiplicazione componente per componente, prodotto componente per componente e simili.

B35 c.06 Le operazioni e le composizioni introdotte per le successioni-Q si possono estendere, in gran parte, alle successioni di altri generi di oggetti (numeri costruibili, numeri reali, numeri complessi,

vettori, funzioni, ...) introdotti più avanti. Per questo motivo nel paragrafo precedente e nei successivi abbiamo trascurato di puntualizzare che si trattavano solo le successioni-Q e ci siamo presi la libertà di usare il più generico termine "successioni".

Per i sistemi di successioni e di composizioni che incontreremo si parla anche di algebre di successioni e si possono individuare loro proprietà tipicamente algebriche: vediamone alcune limitandoci agli enunciati e a formule che riguardano le successioni a, b e c.

La somma di successioni è una operazione associativa e commutativa:

$$\mathsf{a}+\mathsf{b} \;=\; \mathsf{b}+\mathsf{a} \qquad , \qquad (\mathsf{a}+\mathsf{b})+\mathsf{c} \;=\; \mathsf{a}+(\mathsf{b}+\mathsf{c}) \quad .$$

Il prodotto di Hurwitz di successioni è una operazione associativa e commutativa.

$$\mathsf{a}\cdot_H \mathsf{b} \;=\; \mathsf{b}\cdot_H \mathsf{a} \qquad , \qquad (\mathsf{a}\cdot_H \mathsf{b})\cdot_H \mathsf{c} \;=\; \mathsf{a}\cdot_H (\mathsf{b}\cdot_H \mathsf{c}) \quad .$$

Vale la distributività del prodotto per la somma:

$$(\mathsf{a}+\mathsf{b})\cdot_H \mathsf{c} \;=\; \mathsf{a}\cdot_H \mathsf{c}+\mathsf{b}\cdot_H \mathsf{c} \quad .$$

Queste proprietà si dimostrano senza difficoltà riconducendosi alle proprietà corrispondenti dei numeri componenti.

Eserc. Dimostrare associatività, commutatività e distributività per somma e prodotto di polinomi di successioni.

B35 c.07 Si hanno interessanti proprietà anche per la conservazione di proprietà di ordinamento e di convergenza per le composizioni di successioni. Come in c06 procediamo segnalando alcune proprietà senza dimostrarle e usando il termine generico "successioni".

La somma di due successioni crescenti è una successione crescente.
Simili proprietà di mantenimento valgono per due successioni decrescenti, per due nondecrescenti e per due noncrescenti.

La somma di una successione crescente e una successione nondecrescente è una successione crescente. Vale anche la proprietà duale-UD: la somma di una successione decrescente e di una noncrescente è una successione decrescente.

L'aumento di una costante di una successione non cambia le sue caratteristiche di crescenza-decrescenza.

Consideriamo le proprietà di convergenza riferendoci, come in c05, ai razionali $\alpha^{(i)}$ per $i = 1, 2, ..., n$ e alle successioni a, b, c e $\mathsf{a}^{(i)}$ per $i = 1, 2, ..., n$.

Se le successioni-Q a, b e $\mathsf{a}^{(i)}$ sono convergenti anche le loro somme, le loro differenze, i loro prodotti e le loro combinazioni lineari lo sono e per i limiti valgono le uguaglianze che seguono.

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha\, a_n+\beta\, b_n) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\alpha\, a_n+\lim_{n\to+\infty}\beta\, b_n \;;$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha\, a_n\cdot\beta\, b_n) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\alpha\, a_n \;\cdot\; \lim_{n\to+\infty}\beta\, b_n \;;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha^{(i)}\, a_n^{(i)}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha^{(i)}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n^{(i)}\right) \quad .$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e la successione b è limitata, allora sono divergenti a $+\infty$ anche la successione $\mathsf{a}+\mathsf{b}$ e le successioni $k\cdot\mathsf{a}$ per ogni $k\in\mathbb{Q}_+$, mentre evidentemente per ogni $-h$ razionale negativo la successione $-h\cdot\mathsf{a}$ diverge a $-\infty$.

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e la successione b è definitivamente positiva, allora è divergente a $+\infty$ anche la successione $\mathsf{a}\cdot\mathsf{b}$.

La somma, la differenza, il prodotto e ogni combinazione lineare di successioni infinitesime sono successioni infinitesime.

È importante osservare che la differenza di due successioni divergenti a $+\infty$ può essere sia divergente a $+\infty$, sia convergente, sia divergente a $-\infty$, e che il prodotto di una successione divergente a $+\infty$ per una infinitesima può essere sia infinitesima, sia convergente sia divergente a $+\infty$, sia divergente solo in modulo, sia indeterminata, sia convergente.

Delle decisioni in questi casi si possono ottenere solo con analisi specifiche; per queste attività si parla di analisi di **forme indeterminate**.

Queste analisi saranno riprese in seguito per riuscire ad ottenere risultati di notevole importanza.

B35 d. serie di razionali e loro somme

B35 d.01 Consideriamo una successione di numeri razionali

$$\mathsf{a} \;=\; \big\langle a_1, a_2, ..., a_n, ... \big\rangle \;=\; \big\langle n \in \mathbb{P} :| \; a_n \big\rangle \in \lceil\!\lceil \, \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{Q} \, \rceil\!\rceil \;; \tag{1}$$

definiamo come **successione delle somme parziali** associata alla a la successione di numeri razionali

$$\big\langle a_1 \,,\, a_1 + a_2 \,,\, a_1 + a_2 + a_3 \,,\, ... \,,\, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,,\, ... \big\rangle \;=\; \left\langle n \in \mathbb{P} \,\vdots \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right. \right\rangle \,. \tag{2}$$

Questa nuova successione tipicamente la denotiamo scrivendo

$$\mathsf{s} = \big\langle s_1, s_2, ..., s_n, \ldots \big\rangle \quad \text{dove} \quad s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i \;. \tag{3}$$

Inoltre per segnalare la dipendenza della s dalla a scriviamo

$$\mathsf{s} \;=\; \boldsymbol{Spsm}(\mathsf{a}) \;=\; \Big\langle n \in \mathbb{P} :| \; \boldsymbol{Spsm}_n(\mathsf{a}) \Big\rangle \,. \tag{4}$$

Per esempio per la successione dei reciproci degli interi positivi $\left\langle n \in \mathbb{P} \,\vdots \left| \dfrac{1}{n} \right. \right\rangle$ la successione delle somme parziali associata è la cosiddetta **successione dei numeri armonici**

$$\big\langle n \in \mathbb{P} :| \; H_n \big\rangle \;:=\; \left\langle n \in \mathbb{P} \,\vdots \left| \sum_{1=1}^{n} \frac{1}{i} \right. \right\rangle = \left\langle 1 \,,\, \frac{3}{2} \,,\, \frac{11}{6} \,,\, \frac{25}{12} \,,\, \frac{137}{60} \,,\, \frac{49}{20} \,,\, \frac{363}{140} \,,\, \ldots \right\rangle$$

la successione delle somme parziali della a potrebbe essere opportuno usare una scrittura come $\mathsf{s}(\mathsf{a})$ al fine di evidenziare le sua dipendenza dalla a.
Si osserva inoltre che la corrispondenza tra successioni e successioni delle loro somme parziali è biunivoca, ossia che la funzione $\boldsymbol{Spsm}$ è invertibile e precisamente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Spsm}(\mathsf{a}) \;&=\; \boldsymbol{Spsm}\big\langle n \in \mathbb{P} :| \; a_n \big\rangle \;= \big\langle n \in \mathbb{P} :| \; s_n \big\rangle \iff \\ &\qquad (\boldsymbol{Spsm^{-1}})(\mathsf{s}) \;= \big\langle s_1 \,,\, s_2 - s_1 \,,\, s_3 - s_2 \,,\, ... \,,\, s_n - s_{n-1} \,,\, \ldots \big\rangle \end{aligned} \;. \tag{6}$$

B35 d.02 Consideriamo il caso in cui la successione delle somme parziali $\big\langle n \in \mathbb{P} :| \; s_n \big\rangle$ sia convergente-Q e abbia come limite un numero razionale s, cioè sia $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s \in \mathbb{Q}$.
Per esprimere questa situazione ci serviremo delle due seguenti notazioni equivalenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; s \qquad \text{e} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \;=\; s \;. \tag{1}$$

Più formalmente introduciamo il tipo di entità chiamata **serie-Q convergente** definita come coppia $\big\langle \mathsf{a} \,,\, \boldsymbol{Spsm}(\mathsf{a}) \big\rangle$ permettendo che possa essere presentata più semplicemente da ciascuna delle due precedenti scritture.

Inoltre per il valore limite s adottiamo il termine **somma della serie convergente** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e il modo di dire

$$\text{“la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è una serie che converge ad } s\text{”} \;.$$

Inoltre le componenti a_n della successione da cui si è partiti le chiamiamo **addendi della serie**.
Occorre anche segnalare che di solito le a_n sono dette “termini della serie”; qui preferiamo il nome “addendi” per evitare confusione con il sostantivo spesso utilizzato nelle considerazioni terminologiche.

Similmente se la successione delle somme parziali s è divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$, oscillante oppure indeterminata, si usa parlare, risp., di serie divergente a $+\infty$, di serie divergente a $-\infty$, di serie oscillante oppure di serie indeterminata.

Si osserva che la terminologia delle serie discende dalla opportunità di presentare mediante frasi più scorrevoli fatti riguardanti i limiti di successioni le cui componenti sono convenientemente esprimibili come somme parziali, cioè fatti riguardanti i limiti di successioni alle quali è significativo attribuire la forma $\mathsf{d01}(2)$.

B35 d.03 La definizione delle serie come coppie di successioni strettamente collegate può essere accusata di portare una pesante ridondanza.
Essa tuttavia presenta il vantaggio di introdurre un termine e un tipo di entità in modo coerente con le definizioni che si cercano di adottare per tutte le definizioni di nozioni (termini o tipi di entità) delle quali facciamo uso.
Queste definizioni si sforzano di fare preciso riferimento ai ruoli che ogni nuova nozione può svolgere nelle attività di risoluzione di problemi. e nelle considerazioni di interesse generale che le riguardano.
In tal modo le varie nozioni possono essere utilizzate nelle argomentazioni avvalendosi dei vari accorgimenti linguistici che possono essere adottati grazie alla loro coerenza.
In particolare si riscontra che disporre del termine "serie" e delle locuzioni che lo riguardano porta non pochi vantaggi alla trattazione.

Aggiungiamo che, come le successioni-Q, anche le serie-Q posseggono varie generalizzazioni importanti (serie di numeri costruibili, di numeri reali, di numeri complessi, di vettori, di funzioni, ...) e che spesso le considerazioni sulle serie-Q si estendono senza difficoltà alle varianti più generali.

B35 d.04 Esaminiamo la **progressione geometrica** di ragione $q \in \mathbb{Q}$ $\mathsf{g}^{(q)}\mathbb{P} := \langle n \in \mathbb{P} :| \ q^{n-1} \rangle$ e le somme parziali associate $s_n := \boldsymbol{Spsm}\left(\mathsf{g}^{(q)}\mathbb{P}\right)_n = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

Se $q = 1$, $s_n = n$ e la corrispondente serie diverge a $+\infty$.

Se $q \neq 1$ si trova $s_n = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q}$;

se $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ e si ha la serie convergente $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$;

se $q > 1$, la serie è divergente a $+\infty$;

se $q < -1$, la serie è oscillante e divergente a ∞, ovvero la successione delle somme parziali ha $\mathsf{Limv}\langle s_{\mathbb{P}} \rangle = \{-\infty, +\infty\}$;

se $q = -1$, si ha la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ oscillante e indeterminata, in quanto $s_1 = s_3 = s_5 = \cdots = 1$, mentre $s_2 = s_4 = s_6 = \cdots = 0$; dunque $\mathsf{Limv}\langle s_{\mathbb{P}} \rangle = \{0, 1\}$.

B35 d.05 Esaminiamo la **serie armonica** $\mathsf{h}_{\mathbb{P}} := 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ e ricordiamo che essa ha come somme parziali i numeri armonici H_n [d01].

(1) Prop.: La serie armonica diverge a $+\infty$.

Dim.: Consideriamo la successione aventi come componenti

$$M_0 = 1 \ , \ M_1 = \frac{1}{2} \ , \ M_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ , \ M_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \ , \ \ldots \ , \ M_h = \frac{1}{2^{h-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^h} \ , \ \cdots \ .$$

Per ogni h intero positivo $M_h > 2^{h-1}\dfrac{1}{2^h} = \dfrac{1}{2}$; quindi la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| M_n \rangle$ è maggiorante della $\langle 1\,,\ 1/2\,,\ 1/2\,,\ ...\,,\ 1/2\,,\ ... \rangle$; la successione delle somme parziali evidentemente diverge a $+\infty$ e lo stesso deve accadere alla successione dei numeri armonici ∎

Consideriamo la **serie di Mengoli**

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots \ .$$

(2) Prop.: La serie di Mengoli è convergente e ha come somma 1.

Dim.: Per il suo termine n-esimo si ha $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$; quindi per la sua somma parziale n-esima

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Pertanto $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$, ovvero la serie converge a 1 ∎

B35 d.06 **(1) Prop.**: Il carattere di convergenza di una serie

$$\mathsf{S} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{s} \rangle = \Big\langle \big\langle a_0, a_1, ..., a_n, ... \big\rangle\ ,\ \big\langle s_0, s_1, ..., s_n, ... \big\rangle \Big\rangle$$

non cambia se si sopprime un insieme finito dei suoi addendi.

Dim.: La serie ottenuta trascurando i primi k addendi della S ha la forma

$$\Big\langle \big\langle a_k, a_{k_1}, ..., a_{n+k}, ... \big\rangle\ ,\ \big\langle s_k - K, s_{1+k} - K, ..., s_{n+k} - K, ... \big\rangle \Big\rangle\ ,$$

dove $K := \sum\limits_{i=0}^{k} a_i = \boldsymbol{Spsm}_k(\mathsf{a})$.

La nuova successione delle somme parziali si ottiene dalla s trascurando i suoi primi k addendi e sottraendo K a ciascuno dei rimanenti, cioè con due modifiche che non cambiano il suo carattere di convergenza ∎

Consideriamo una serie convergente $\mathsf{S} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{s} \rangle$ con $\mathsf{a} = \big\langle a_1, a_2, ..., a_n, ... \big\rangle$ e $\mathsf{s} = \big\langle s_1, s_2, ..., s_n, ... \big\rangle$ la cui somma denotiamo con s.

Per ogni $n \in \mathbb{P}$ si dice **resto n-esimo della serie** la quantità $R_n := s - s_n$. Tale resto è la somma della serie (convergente) ottenuta sopprimendo dalla data i suoi primi n addendi.

Il resto R_n si può considerare l'errore che si commette quando si approssima la somma della serie con la sua somma parziale n-esima.

Evidentemente $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = s - \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s - s = 0$.

B35 d.07 Si osserva che una serie può essere convergente solo se il suo termine n-esimo tende a 0 per n tendente a $+\infty$; questa situazione costituisce solo una condizione necessaria per la convergenza e che non sia una condizione sufficiente lo si ricava da controesempi come quello della serie armonica, serie il cui termine tende a 0 ma che ha carattere divergente.

Per n e p interi positivi, per la serie $\langle \mathsf{a}, \mathsf{s} \rangle$, denotiamo con $R_{n,p}$ la somma dei p addendi della serie che seguono l'n-esimo:

$$R_{n,p} := a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = s_{n+p} - s_n \ .$$

Per esempio per la serie di Mengoli si ha

$$R_{n,p} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\ldots\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{p}{(n+1)(n+p+1)}\ .$$

Per la serie geometrica si ha invece

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} q^i \ = \ q^n(1+q+\cdots+q^{p-1}) \ = \ \frac{q^n(1-q^p)}{1-q}\ .$$

B35 e. notazioni posizionali dei numeri razionali

B35 e.01 Ci proponiamo di introdurre per i numeri razionali notazioni posizionali in una determinata base B costituita da un intero maggiore o uguale a 2, notazioni che estendano quelle introdotte per i numeri interi.

Queste espressioni presentano il numero come somma di addendi della forma $c_k \cdot B^k$, dove k può assumere valori negativi. Dato che per i k negativi via via maggiori in valore assoluto si hanno potenze $B^k = \dfrac{1}{B^{|k|}}$ sempre più piccole e addendi $\dfrac{c_k}{B^{|k|}}$ sempre più ridotti, gli addendi relativi alle successive potenze negative consentono di avere indicazioni via via più precise del valore del numero in esame.

La determinazione delle notazioni posizionali riguarda principalmente i razionali positivi forniti da frazioni proprie. Infatti un generico numero razionale positivo r, se una delle sue forme frazionarie positive è $\dfrac{m}{k}$, si può scrivere $r = z + \dfrac{h}{k}$ con $h := m\%k$ e $z := m \div k$ intero naturale, mentre il generico razionale negativo si può scrivere in una forma $-r = -z - \dfrac{p}{q}$.
Il problema della scrittura posizionale dei numeri razionali si riduce quindi al problema della scrittura posizionale delle frazioni proprie.

Cominciamo dalle scritture decimali, quelle di maggiore interesse pratico; presteremo attenzione anche alle scritture binarie, anch'esse spesso utili e essenziali per la tecnologia dell'informazione e della comunicazione.

B35 e.02 Si dice **numero razionale con notazione decimale limitata**, o, in breve, **numero decimale limitato**, ogni numero razionale esprimibile nella forma

$$r \;=\; \lfloor r \rfloor + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} \;,$$

con k intero naturale. Se questo r è un razionale proprio $\lfloor r \rfloor = 0$ e può scrivere

$$r \;=\; \frac{c}{10^k} \quad \text{con} \quad c \;:=\; c_1\, 10^{k-1} + c_2\, 10^{k-2} + \cdots + c_k \;.$$

Riducendo all'essenziale questa espressione per c si ottiene la **notazione decimale per un razionale proprio**

$$\frac{n}{m} \;=\; 0.c_1c_2 \ldots c_k \;.$$

Due esempi di razionali propri con notazione decimale limitata sono

$$0.04 \;=\; \frac{4}{100} \;=\; \frac{1}{25} \qquad \text{e} \qquad 0.0625 \;=\; \frac{625}{10^4} \;=\; \frac{6}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} \;=\; \frac{5^4}{2^4\,5^4} \;=\; \frac{1}{16} \;.$$

B35 e.03 Prop. L'insieme dei numeri razionali positivi che posseggono notazione decimale limitata è costituito da tutti e soli i numeri la cui frazione ridotta ha la forma $\mathcal{F} = \dfrac{m}{2^h \cdot 5^k}$, per qualche $h, k \in \mathbb{N}$ e per qualche m non multiplo di 2 e di 5, ovvero coprimo con 2 e con 5.
Dim.: Se $r \in \mathbb{Q}_+$ possiede notazione decimale limitata si può esprimere come $\dfrac{n}{10^q}$ con q intero positivo, e questa frazione quando viene ridotta ai minimi termini presenta la forma $\mathcal{F}$.
Viceversa se r si può scrivere nella forma ridotta $\mathcal{F}$, quando $h \le k$ si può esprimere come $\dfrac{m \cdot 2^{k-h}}{10^k}$, mentre quando $h \ge k$ si può riscrivere come $m \cdot \dfrac{5^{h-k}}{10^h}$ ∎

Per esempio $\dfrac{131}{16 \cdot 5} \;=\; \dfrac{131 \cdot 125}{10\,000} \;=\; 1.6375$, mentre $\dfrac{187}{250} \;=\; \dfrac{187 \cdot 4}{1\,000} \;=\; 0.748$.

Le frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10 si dicono **frazioni decimali**; similmente le frazioni che hanno come denominatore una potenza di 2 si dicono **frazioni diadiche**.

B35 e.04 Dalle considerazioni precedenti si deduce che vi sono numeri razionali privi di scrittura decimale limitata, quelli nel cui denominatore compaiono come fattori numeri primi diversi da 2 e da 5. Uno di questi numeri è $1/3$ e per esso abbiamo

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}.$$

Qui abbiamo trovato la potenza negativa della base 10 immediatamente inferiore alla frazione da esprimere, cioè $1/10$, abbiamo individuato il massimo multiplo di questa potenza che sia inferiore alla frazione, abbiamo espresso la frazione come somma del massimo multiplo e della differenza a sua volta espressa come prodotto della detta potenza negativa e di una frazione che risulta coincidere con la frazione da esprimere.

Nella espressione trovata si sostituisce la frazione da esprimere con la stessa intera espressione e questa manovra si può ripetere.

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{3} .$$

Evidentemente queste trasformazioni possono essere portate avanti quanto si vuole in modo da trovare l'espressione di portata generale

$$\frac{1}{3} = \sum_{h=1}^{k} \frac{3}{10^h} + \frac{1}{10^k} \frac{1}{3} .$$

Seguendo lo stesso schema si trova

$$\frac{1}{11} = \frac{9}{100} + \frac{1}{11} - \frac{9}{100} = \frac{9}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{11} = \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{11} .$$

Questo consente di arrivate all'espressione

$$\frac{1}{11} = \sum_{h=1}^{k} \frac{9}{100^h} + \frac{1}{100^k} \cdot \frac{1}{11} ,$$

dove k può essere grande quanto si vuole e quindi si può ottenere un ultimo addendo che non è multiplo di una potenza negativa della base piccolo quanto si vuole.

Si pongono due problemi: il primo di interesse pratico riguarda la individuazione di una scrittura decimale che approssimi una frazione data fino a una predeterminata tolleranza, ad esempio fino alla decima cifra; il secondo di interesse più generale, si propone di individuare una procedura che consenta di portare avanti quanto si vuole la individuazione di una scrittura decimale per un numero razionale dato.

B35 e.05 Si voglia una approssimazione decimale di $r = \dfrac{12}{17}$ che differisca da r al più di 0.00001 e che denotiamo con ρ.
Per questo numero si prevede una notazione decimale della forma $\rho = 0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6$, in quanto questa forma garantisce che sia $r - 0.000001 \leq \rho \leq r + 0.000001$.

La notazione ricercata si ottiene cercando quoziente e resto della divisione tra gli interi positivi $\dfrac{12}{0.000001)} = 12\,000\,000$ e 17, problema che si risolve con l'algoritmo visto in B10d07.
In dettaglio si procede come segue.

$\dfrac{1\,200\,000}{17} = 705\,882 + \dfrac{6}{17}$ e quindi $\dfrac{12}{17} = 0.705\,882 + \epsilon$ con $|\epsilon| < 0.000001$.

Questo risultato si esprime anche scrivendo $\dfrac{12}{17} \approx 0.705882$, oppure $\dfrac{12}{17} = 0.705\,882\ldots$.

Queste notazioni esprimono somme di addendi della forma $\dfrac{c_k}{10^k}$.

Chiaramente questo modo di procedere è generalizzabile in un algoritmo che si può applicare a ogni frazione propria e anche a ogni altra frazione.
Inoltre esso si può estendere senza difficoltà alle notazioni in una qualsiasi base $B = 2, 3, 4, \ldots$.

Affrontiamo la costruzione delle notazioni decimali di alcuni numeri razionali unitali, ricordando quanto trovato per 1/3 e 1/11.
Calcoli simili, solo un po' più lunghi, portano alla

$$\frac{1}{7} = \sum_{h=1}^{k} \frac{142\,857}{1\,000\,000} + \frac{1}{10^{6k}} \cdot \frac{1}{7} \ .$$

Per questi numeri razionali unitali, della forma $1/n$, si trovano quindi espressioni approssimate che si possono avvicinare al numero dato quanto si vuole nelle quali compare una sequenza di cifre decimali che continua a ripresentarsi.

B35 e.06 Con una scrittura della forma $a.c_1c_2c_3c_1c_2c_3c_1c_2c_3\ldots = a.\overline{c_1c_2c_3}$ si rappresenta il numero razionale r fornito dalla seguente somma di serie:

$$r := a + \frac{c_1c_2c_3}{10^3} + \frac{c_1c_2c_3}{10^6} + \cdots = a + \frac{c_1c_2c_3}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right) ;$$

la serie data si riconduce alla serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{10^3}$ che converge a $1 - \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1000}{999}$ e quindi $r = a + \dfrac{c_1c_2c_3}{999}$.

Espressioni di questo tipo si possono trovare per tutte le frazioni proprie: per esempio

$$\frac{5}{11} = \frac{45}{100} + \frac{45}{10\,000} + \frac{45}{1\,000\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} \cdot \frac{5}{11} \qquad \frac{12}{13} = \frac{923\,076}{10^6} + \frac{923\,076}{10^{12}} + \frac{923\,076}{10^{18}} + \frac{1}{10^{18}} \cdot \frac{12}{13} \ .$$

Numeri come i precedenti si dicono numeri razionali a notazione decimale periodica o più in breve **numeri decimali periodici**.

Per i numeri precedenti si adottano scritture come

$$\frac{1}{3} = 0.333\overline{3} \qquad \frac{1}{11} = 0.09090\overline{909} \qquad \frac{5}{11} = 0.\overline{45} \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142\,857} \qquad \frac{12}{13} = 0.\overline{923\,076} \ .$$

Il numero di cifre che si ripetono illimitatamente si dice **periodo della notazione decimale**.
Esempi: 1/3 ha periodo 1, 1/11 e 5/11 hanno periodo 2, 1/7 e 12/13 hanno periodo 6.

B35 e.07 L'esame dell'algoritmo esemplificato in precedenza consente di dimostrare che un numero razionale unitale $\dfrac{1}{r}$ con r non esprimibile nella forma $2^h \cdot 5^k$, ovvero con $r \perp 2$ ed $r \perp 5$, è un numero periodico di periodo p tale che sia $10^{p-1} < r < 10^p$.

A questo punto si sente la necessità di due prodedimenti: uno per trasformare un numero frazionario in una sua scrittura decimale (o in una scrittura posizionale relativa ad una qualsiasi altra base $B = 2, 3, 4, \ldots$) che può essere una scrittura periodica e uno per trasformare una scrittura posizionale periodica in una espressione frazionaria.

Questa necessità è dovuta al fatto che per taluni scopi è preferibile servirsi di una frazione (sostanzialmente per calcoli manuali su frazioni relativamente semplici), mentre per altri scopi è preferibile disporre di una scrittura decimale o anche binaria (sostanzialmente quando si effettuano calcoli con strumenti automatici).

Il procedimento da frazione a scrittura periodica si ottiene estendendo il procedimento di divisione tra interi positivi [B10d07].
Per questo si considera la scrittura del denominatore d seguita da un punto decimale e da successivi zeri, scrittura che è lecito convenire che individui lo stesso numero d; si lascia invariato il denominatore e si procede a costruire una scrittura decimale per n/d.
Questa costruzione si sviluppa come per il quoziente della divisione tra interi; essa tuttavia non si ferma dopo aver trovato una citra per le unità ed avere individuato il resto, ma prosegue come prima trovando le successive cifre decimali. Questo processo, aut si interrompe trovando un resto 0 e quindi fornendo una scrittura decimale finita, aut procede individuando sempre nuovi resti, i quali devono essere compresi tra 1 e $d-1$.

Si ha quindi solo un numero finito di possibili resti; quindi proseguendo il processo si deve giungere a una ripetizione ciclica dei resti e quindi la notazione decimale (o posizionale) che si va cercando non può che essere una scrittura periodica.
Possiamo a questo punto affermare che ogni numero frazionale possiede una scrittura posizionale finita o illimitata periodica.

B35 e.08 Il processo che associa a una scrittura periodica una scrittura frazionaria può presentarsi più semplicemente mediante formule.
Alla scrittura decimale di partenza si può dare la forma generale

$$a_h...a_1\,.\,b_1...b_k\overline{c_1...c_m}\ ,$$

nella quale si può avere $h=1$ e $a_1=0$.

Ricordando il limite delle successioni geometriche con ragione di modulo positivo e minore di 1 [d03], si ottiene:

$$a_h...a_1\,.\,b_1...b_k\overline{c_1...c_m} \;=\; \frac{a_h...a_1\,.\,b_1...b_k}{10^k} \;+\; \frac{c_1...c_m}{10^{k+m}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^m}^{\,n}\right) \;=$$

$$\frac{a_h...a_1\,.\,b_1...b_k}{10^k} \;+\; \frac{c_1...c_m}{10^{k+m}}\;\frac{10^m}{10^m-1} \;=\; \frac{a_h...a_1\,.\,b_1...b_k}{10^k}\;\frac{c_1...c_m}{10^k(10^m-1)}\ .$$

Le espressioni trovate evidentemente conducono a una frazione; dunque ogni scrittura decimale periodica esprime un numero razionale.

Osserviamo anche che le costruzioni descritte possono essere effettuate servendosi di una base B qualsiasi.

Possiamo dunque concludere che l'insieme dei numeri razionali coincide con l'insieme dei numeri esprimibili con una scrittura posizionale finita o periodica, la scrittura finita riguardando tutte e sole le frazioni con denominatore della forma $2^s\ 5^t$ per qualsiasi s e t intero naturale.

B35 e.09 (1) Eserc. Trovare le sequenze $\langle h_0, h_1, ..., h_{p-1}\rangle$ e $\langle r_1, r_2, ..., r_p\rangle$ per i numeri forniti dalle frazioni 1/3, 1/5, 1/7 e 12/13 nelle basi 10, 2, 4 e 7.

(2) Eserc. Dimostrare che la frazione propria h/k possiede notazione limitata in base B sse k è sottomultiplo di qualche potenza della base B^p, cioè sse è esprimibile come prodotto di divisori di B.

B35 f. rappresentazione dei razionali con frazioni continue

B35 f.01 Cerchiamo ora un modo per esprimere i numeri razionali che non fa riferimento a una base particolare come le rappresentazioni posizionali e che consente di individuare ogni numero razionale effettuando un numero finito di operazioni di somma e di passaggio al reciproco sopra numeri interi.

Questa modalità di presentazione dei numeri razionali viene detta **rappresentazione con frazioni continue**. Essa viene definita per i soli razionali positivi, in quanto può essere estesa ai razionali i negativi con il semplice cambiamento di segno.

Essa si ottiene ancora applicando quante volte serve la decomposizione euclidea delle forme frazionarie ridotte positive che riscriviamo come

$$\frac{h}{k} \;=\; h \div k + \frac{h\%k}{k} \;=\; h \div k + \frac{1}{\frac{k}{h\%k}} \;.$$

Questa decomposizione ha il vantaggio di ricondurre la frazione di partenza ad un'altra avente un denominatore inferiore; infatti $h\%k < k$.

Se la seconda frazione ottenuta ha il numeratore, $h\%k$, maggiore di 1, le si può applicare la precedente formula di decomposizione ottenendo

$$\frac{h}{k} \;=\; h \div k \;+\; \frac{1}{\frac{k}{h\%k}} \;=\; h \div k + \frac{1}{k \div (h\%k) + \dfrac{1}{\frac{h\%k}{k\%(h\%k)}}} \;,$$

con $k\%(h\%k) < (h\%k)$. Se necessario, cioè se $k\%(h\%k) > 1$, si può proseguire con questo tipo di trasformazione ottenendo frazioni successive con denominatori sempre più piccoli.

Dato che con questi passi il denominatore delle nuove frazioni diventa via via più piccolo, questo procedimento deve terminare con una frazione apparente dopo un numero finito di passi. Si osservi che la costruzione della rappresentazione posizionale si serve di un solo denominatore (la base B) e può concludersi dopo un numero finito di passi con una espressione razionale finita, o proseguire con ripetizioni periodiche di una ben determinata sequenza di manovre.

B35 f.02 Consideriamo alcuni esempi

$$\frac{43}{5} \;=\; 8 + \frac{3}{5} \;=\; 8 + \frac{1}{\frac{5}{3}} \;=\; 8 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} \;=\; 8 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \;;$$

$$\begin{aligned} \frac{3796}{1387} \;&=\; 2 + \frac{1022}{1387} \;=\; 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{365}{1022}} \;=\; 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{292}{365}}} \\ &=\; 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{73}{292}}}} \;=\; 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} \;. \end{aligned}$$

Le espressioni che si trovano con questo procedimento sono dette **frazioni continue finite [semplici]**.

Nelle frazioni continue trovate si hanno sottoespressioni frazionarie con il numeratore uguale ad 1 e con il denominatore che inizia con un addendo intero positivo.
Le precedenti espressioni si possono individuare, risp., con le scritture $[_{cf}\ 8;1,1,2]$ e $[_{cf}\ 2;1,2,1,4]$.
Queste scritture si dicono **scritture sequenziali delle frazioni continue finite**; in generale assumono la forma $[_{cf}\ a_0;a_1,a_2,...,a_m]$.

In generale questa scrittura individua la frazione continua finita

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\quad\ddots\quad\cfrac{1}{a_m}}}}\ .$$

Per la frazione continua esprimente il razionale r, il primo intero è $a_0=\lfloor r\rfloor$ ed è negativo sse $r<0$; i successivi interi positivi costituiscono il primo addendo dei successivi denominatori della frazione continua. Questi numeri mancano sse r è intero. Si osserva che una scrittura della forma $[a_0;a_1,...,a_m,1]$ corrisponderebbe a una espressione avente come ultima frazione $\dfrac{1}{a_m+1/1}=\dfrac{1}{a_m+1}$.
Quindi si può affermare che $[_{cf}\ a_0;a_1,...,a_m,1]=[_{cf}\ a_0;a_1,...,a_m+1]$. Alternativamente ci si può limitare a scritture sequenziali per le quali l'ultima componente è un intero maggiore o uguale a 2.

Si osserva che tutti i passaggi che portano dalla forma frazionaria alla frazione continua, se si prendono in considerazione solo forme frazionarie ridotte sono biunivoci. Quindi il percorso costruttivo basato sugli interi positivi che da una forma frazionaria ridotta ha condotto alla corrispondente frazione continua si può percorrrere all'inverso attraverso i passaggi inversi dei precedenti univocamente determinati.

B35 f.03 A partire da una frazione continua finita, attraverso operazioni di somma e inversione di forme frazionarie si sa ottenere una frazione ridotta che esprime univocamente il numero razionale dato.

Per esempio si trova

$$[1;2,1,2,6]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{13}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{13}{19}}=\frac{70}{51}\ .$$

Quindi la corrispondenza tra numeri razionali e frazioni continue finite con l'ultimo denominatore maggiore o uguale a 2 è biunivoca.

B35 f.04 Eserc. Trovare le frazioni ridotte delle frazioni continue individuate dalle scritture sequenziali

$$[1;2,3,4,5]\quad,\quad[-2;2,3,4,5,6]\quad,\quad[0;2,4,6,8,10]\ .$$

B35 f.05 Sia le rappresentazioni posizionali (in particolare la decimale) che la rappresentazione con frazioni continue presentano vantaggi e svantaggi.

In genere si preferisce la decimale, in quanto consente di effettuare molto più facilmente operazioni come somme, differenze e confronti di valori: per esempio è banale stabilire quale di due notazioni posizionali rappresenta il razionale minore.
Inoltre la notazione decimale consente di rispondere facilmente quando si richiedono valutazioni approssimate di numeri razionali che possono riguardare tutti i gradi di precisione richiesti comunemente.

Va anche segnalato che questa facilità operativa si consegue anche quando si vogliono approssimare numeri definiti come radici quadrate di interi e di razionali o definiti con molti altri algoritmi costruttivi.

In effetti la tecnologia dei calcoli numerici si serve quasi esclusivamente di rappresentazioni binarie per le operazioni interne delle macchine e di visualizzazioni decimali dei risultati.

La rappresentazione con frazioni continue a sua volta viene preferita quando è opportuno ottenere risultati non legati a una base particolare: in effetti operando con frazioni continue si possono utilizzare frazioni con denominatori diversi che per determinati calcoli possono presentare vantaggi rispetto a quando si opera con un denominatore unico.

In effetti talora risulta utile esprimere un numero con una frazione con numeratore e denominatore piccoli e troncando una rappresentazione con frazione continua si ottiene una cosiddetta **migliore approssimazione razionale**.

B35 f.06 Un'altra rappresentazione dei numeri razionali positivi che presenta interesse è costituita dalla cosiddetta **decomposizione di Engel** o **decomposizione in frazioni egizie**. Essa ha la forma

$$r \;=\; \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1\,a_2} + \frac{1}{a_1\,a_2\,a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1\,a_2\,a_3\,\cdots\,a_k}\;,$$

ove $\langle a_1, a_2, ..., a_k \rangle$ è una sequenza nondecrescente di interi positivi.

Per esempio si trova $1.175 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1\cdot 6} + \dfrac{1}{1\cdot 6\cdot 120}$.

Questa rappresentazione finita è unica e si costruisce con la seguente sequenza di operazioni.

$$r_1 := r\;,\quad a_1 := \left\lceil \frac{1}{r_1} \right\rceil\;,\quad r_{i+1} \;:=\; r_i\,a_i - 1\;,\quad a_{i+1} := \left\lceil \frac{1}{r_{i+1}} \right\rceil \quad \text{per}\;\; i = 2, 3, ...\;.$$

I successivi r_i costituiscono una sequenza noncrescente e la sequenza delle operazioni deve terminare con un $r_{k+1} = 0$. La rappresentazione di Engel si può codificare con questa sequenza. La codifica di un razionale $r > 1$ inizia con $\lfloor r \rfloor$ repliche di 1.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php