1

Capitolo B31
oggetti geometrici lineari del piano sui razionali

Contenuti delle sezioni

a. rette ed equazioni nel piano-QQ p. 3
b. segmenti, semirette, orientazioni, angoli p. 8
c. vettori, traslazioni e vettori applicati p. 13
d. poligonali, poligoni-QQ orientati e loro aree sui razionali p. 17
e. trasformazioni lineari del piano-QQ p. 26
f. sistemi di due equazioni lineari sui razionali p. 28
g. gruppo dei movimenti rigidi nel piano-QQ p. 32

32 pagine

B31 0.01 In questo capitolo proseguiamo a introdurre le nozioni basilari della geometria analitica del piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ considerato come l'ambiente che amplia e arricchisce proficuamente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Il piano sui razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è un ambiente computazionale ancora piuttosto semplice e con una portata che presenta limiti già incontrati dai pitagorici e superati dai geometri greco-ellenistici e in particolare per opera di Eudosso, Euclide e Archimede.

Esso comunque consente di trovare formule utili per varie applicazioni, formule che si servono delle operazioni sui razionali introdotte in B20 e riesaminate in B30, operazioni che non richiedono di affrontare le impegnative nozioni infinitesimali.

I due maggiori strumenti che si precisano in queste pagine riguardano le aree di poligonali chiuse e poligoni, valutazioni che aprono lo studio delle misure, e le soluzioni dei sistemi di due equazioni lineari in due incognite, manovre che avviano all'algebra lineare.

Questi strumenti inoltre introducono le prime tecniche per i calcoli geometrici approssimati che attualmente vengono sistematicamente sviluppati dalla computer grafica.
Queste tecniche sono alla base di sistemi software che costituiscono prodotti industriali di importanza primaria in quanto su di essi si sviluppa la strumentazione che, a livello generale consente l'interazione tra uomo e macchina e a livello più operativo, permette di portare avanti costruzioni geometriche utili sia nella didattica delle scienze e delle tecnologie (calcolatrici tascabili, Cabri géomètre, Cinderella, ...) che nelle applicazioni avanzate e nella ricerca (Mathematica, Maple, pacchetti per calcoli settoriali, ...).

B31 0.02 Accennare a:
rette ed equazioni nel piano-QQ
segmenti, semirette, orientazioni, angoli
vettori, traslazioni e vettori applicati
poligonali, poligoni-QQ orientati e loro aree
trasformazioni lineari del piano-QQ e determinanti
sistemi di due equazioni lineari sui razionali
gruppo dei movimenti rigidi nel piano-QQ

B31 a. rette ed equazioni nel piano-QQ

B31 a.01 Ricordiamo che ogni coppia $P = \langle a, b\rangle$ fa parte di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, viene detta punto del piano sui razionali o **punto-QQ** e i due numeri che la compongono sono chiamati le **coordinate [cartesiane]** di tale punto; la prima coordinata a viene detta **ascissa** del punto P e la seconda coordinata b **ordinata** di P.

Spesso, come si è fatto per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, è utile considerare il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ come ripartito nelle seguenti 9 parti:

$\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$, **primo quadrante-QQ aperto**;
$\mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_+$, **secondo quadrante-QQ aperto**;
$\mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_-$, **terzo quadrante-QQ aperto**;
$\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_-$, **quarto quadrante-QQ aperto**;
$\{y \in \mathbb{Q}_+ :| \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse-QQ orizzontale positivo**;
$\{x \in \mathbb{Q}_+ :| \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse-QQ verticale positivo**;
$\{y \in \mathbb{Q}_- :| \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse-QQ orizzontale negativo**;
$\{x \in \mathbb{Q}_- :| \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse-QQ verticale negativo**;
$\mathbf{0}_2 \;=\; \{\langle 0, 0\rangle\}$, singoletto costituente l'origine.

Talora è comodo riferirsi ad alcune unioni di queste parti, quali:
$\mathbb{Q}_{0+} \times \mathbb{Q}_{0+}$, **primo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{Q}_{-0} \times \mathbb{Q}_{0+}$, **secondo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{Q}_{-0} \times \mathbb{Q}_{-0}$, **terzo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{Q}_{0+} \times \mathbb{Q}_{-0}$, **quarto quadrante [chiuso]**;
$\{y \in \mathbb{Q}_{0+} :| \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse orizzontale nonnegativo**;
$\{x \in \mathbb{Q}_{0+} :| \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse verticale nonnegativo**;
$\{y \in \mathbb{Q}_{-0} :| \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse orizzontale nonpositivo**;
$\{x \in \mathbb{Q}_{-0} :| \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse verticale nonpositivo**.

Inoltre spesso si fa riferimento a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{nz} \;:=\; QcQ \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$.

B31 a.02 Si definisce come **retta-QQ** ogni insieme di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ avente la forma

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \;\P\; \alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0\}$$

determinato da una qualsiasi terna di numeri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ e tali che $|\alpha| + |\beta| > 0$.

La retta precedente si può denotare con

$$\mathsf{Soln}_{QQ}\left[\, \alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0 \,\right] \;;$$

questa scrittura può leggersi

"insieme delle soluzioni $\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che soddisfano la richiesta $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$" .

Denotiamo con RtlinQQ l'insieme delle rette-QQ.

Nelle precedenti espressioni insiemistiche si dice che i simboli x e y svolgono il ruolo di variabili nell'insieme $\mathbb{Q}$, o che sono variabili che corrono in $\mathbb{Q}$, o, più in breve, che sono **variabili razionali**.
Questa precisazione su *variabilicomex* e y si può esprimersi con una notazione delle forma $x, y \in \mathsf{Vrb}(\mathbb{Q})$.

Su questa notazione occorre osservare che non si chiede che $\mathsf{Vrb}(\mathbb{Q})$ denoti un insieme riconducibile a quelli finora introdotti; non si intende affermare che ai simboli delle variabili possono essere sostituiti

tutti gli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$, ma solo che le entità che possono sostituire le variabili devono far parte di $\mathbb{Q}$.

In un contesto nel quale si può sottintendere che $x, y \in \mathbf{Vrb}(\mathbb{Q})$ il deponente del simbolo **Soln** si può trascurare.

B31 a.03 Le rette-QQ sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che estendono le rette-ZZ, insiemi che sono stati definiti mediante un'espressione della forma $\{\nu \in \mathbb{Z} :| \langle i, j\rangle + \nu \cdot \langle h, k\rangle\}$, per i, j, h, k interi arbitrari e $|h| \perp |k|$.
Questa retta si può denotare con $\mathsf{Rtlin}_{QQ}(i, j, h, k)$
Evidentemente ogni retta-ZZ è sottoinsieme proprio di una e una sola retta-QQ.

Mentre una retta-ZZ si può associare a una equazione della quale si cercano soluzioni costituite da coppie di interi, una retta-QQ si può associare ad una equazione per la quale si cercano soluzioni costituite da coppie di razionali.

L'equazione $\alpha\, x + \beta y + \gamma = 0$ si dice **equazione generale della retta**; essa si qualifica come **equazione polinomiale lineare** nelle due variabili x e y, in quanto l'espressione alla quale si impone di annullarsi è un polinomio di primo grado nelle variabili x e y, ovvero un polinomio lineare bivariato [B35].

Nella espressione $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$ ai simboli α, β e γ che denotano numeri razionali che possono scegliersi arbitrariamente si attribuisce il cosiddetto ruolo dei **parametri di una espressione**.

Si osserva che moltiplicando per un qualsiasi fattore razionale diverso da 0 f i coefficienti α, β e γ i punti della retta $\mathsf{Rtlin}\left[\, \alpha\, x + \beta\, y + \gamma \,\right]$ rimangono invariati.

In altre parole la terna di parametri di una retta $\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle$ sono definiti a meno di un fattore nonnullo.

B31 a.04 È utile distinguere varie classi di rette-QQ.

Le rette della forma $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{Q}$ si dicono **rette-QQ orizzontali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $\gamma = -y_0$.
Per asse-QQ Ox_{QQ} si intende la retta orizzontale $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = 0)$.

Le rette della forma $\mathbf{Soln}_{QQ}(x = x_0)$ con $x_0 \in \mathbb{Q}$ si dicono **rette-QQ verticali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\gamma = -x_0$.
Per asse-QQ Oy_{QQ} si intende la retta verticale $\mathbf{Soln}_{QQ}(x = 0)$.

La $\mathbf{Soln}(y = x)_{QQ}$ si dice **bisettrice-QQ del I quadrante**. Le rette della forma $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = x + y_0)$ si dicono **rette-QQ parallele alla bisettrice del I quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e $\gamma = y_0$.

La $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = -x)$ si dice **bisettrice-QQ del II quadrante**.
Le rette della forma $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = -x + y_0)$ si dicono **rette-QQ parallele alla bisettrice del II quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $\alpha = -1$, $\beta = -1$ e $\gamma = y_0$.

Tutte queste rette si tracciano facilmente sopra un foglio di carta millimetrata o quadrettata servendosi delle loro intersezioni con gli assi. Ciascuna di tali intersezioni si ottiene algebricmente tenendo conto congiuntamente dell'equazione della retta e di quella di un asse.

Per esempio l'intersezione della retta $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = x + y_0)$ con l'asse Ox è ottenuta imponendo $y = 0$ nella precedente equazione, e quindi è $\langle -y_0, 0\rangle$, mentre l'intersezione della $\mathbf{Soln}_{QQ}(y = x - y_0)$ con l'asse Oy si ottiene imponendo $x = 0$ nella precedente e quindi è $\langle 0, -y_0\rangle$.

B31 a.05 Nel seguito del capitolo ci riserviamo di trascurare il deponente $_{QQ}$ quqndo il contesto lo permette.

È immediato decidere se un punto $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ appartiene o meno ad una retta $\mathbf{Soln}(\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0)$: basta sostituire i valori $\overline{x}$ e $\overline{y}$ alle rispettive variabili nella espressione $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma$ e verificare se il valore ottenuto, $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \gamma$ vale zero.

Questo modo di procedere può essere generalizzato. Si considerano insiemi ambiente riferibili a una, a due o a più coordinate che denotiamo sinteticamente con $\mathbf{x}$: alcuni esempi sono $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Si individuano sottoinsiemi di tali ambienti mediante equazioni e relazioni rigurdanti le loro coordinate. Se denotiamo genericamente con $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ una di queste richieste, l'insieme dei sottoinsiemi che le soddisfano si può denotare con $\mathbf{Soln}(\mathcal{R}(\mathbf{x}))$; la decisione se un punto specifico le cui coordinate scriviamo $\overline{\mathbf{x}}$ appartenga o meno all'insieme S si riconduce a stabilire se è soddisfatta la richiesta $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{x}})$, cioè se vale la relazione $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{x}})$ ottenuta sostituendo $\mathbf{x}$ con $\overline{\mathbf{x}}$ nella $\mathcal{R}(\mathbf{x})$.

Le rette della forma $\mathbf{Soln}(\alpha\, x + \beta\, y = 0)$ sono tutte e sole le rette passanti per l'origine. Infatti è evidente che l'origine appartiene a tutte queste rette, mentre una retta della forma precedente deve passare per l'origine: infatti se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ si ha $\mathbf{Soln}(y = 0)$ cioè l'asse Ox, se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ si ha $\mathbf{Soln}(x = 0)$ cioè l'asse Oy, se $\alpha, \beta \neq 0$ si ha una retta che interseca sia l'asse Ox che l'asse Oy, cioè passa per l'origine.

L'insieme delle rette passanti per un punto P del piano si dicono costituire un **fascio di rette-QQ** del quale P si dice il **sostegno**.
Si può quindi dire che l'equazione precedente, al variare dei parametri, caratterizza il fascio di rette avente come sostegno l'origine: questo può denotarsi con $\{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} :|\ \mathbf{Soln}(\alpha\, x + \beta\, y = 0)\}$.

Conviene considerare anche fasci di rette-QQ parallele; in particolare fasci di rette-QQ parallele orizzontali e verticali.

B31 a.06 Per ogni numero razionale nonnullo r, le due rette fornite dalle equazioni $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$ e $r\, \alpha\, x + r\, \beta\, y + r\, \gamma = 0$ (con $\langle \alpha, \beta \rangle \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})_{nz}$) coincidono. Infatti la seconda si ottiene dalla prima moltiplicandone tutti gli addendi per r e la seconda dalla prima "moltiplicandola" per $1/r$. Quindi i tre parametri che caratterizzano un'equazione lineare in due variabili razionali non sono indipendenti, ma presentano una determinata ridondanza.

Le espressioni $\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0$ quindi possono essere considerate una famiglia indicizzata da $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})_{nz}$ di equazioni equivalenti.

Spesso conviene utilizzare delle varianti dell'equazione generale nelle quali si incontrano parametri indipendenti, ossia nonridondanti. Purtroppo queste equazioni non sono completamente equivalenti alla generale, in quanto non riescono a individuare alcune delle sue soluzioni.

B31 a.07 Consideriamo l'equazione $\alpha\, x + \beta y + \gamma = 0$ con $\beta \neq 0$, cioè l'equazione di una retta R che non è una parallela all'asse Oy. Essa si riscrive nella forma equivalente

$$y = mx + q \ , \tag{1}$$

nella quale compaiono solo i due parametri $m = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ e $q = -\dfrac{\gamma}{\beta}$. Essa è detta **equazione canonica della retta** R, m è chiamato il **coefficiente angolare dell'equazione** e q la sua **ordinata all'origine dell'equazione**.
Si osserva che m esprime la pendenza della R : si ha $m > 0$ sse la retta è crescente, cioè y cresce all'aumentare della ascissa dei suoi punti (e la crescita è tanto maggiore quanto più la R è inclinata); si ha $m = 0$ sse R è parallela alla Ox; si ha $m < 0$ sse la R è decrescente, cioè se y si abbassa all'aumentare della x (e la y è tanto inferiore quanto maggiore è la inclinazione verso il basso).

B31 a.08 Consideriamo la retta-QQ $\mathsf{R} := \mathbf{Soln}(\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0)$ per la quale tutti i tre parametri sono diversi da zero; si tratta dunque di una retta che non passa per l'origine e non è parallela ad alcuno degli assi. L'equazione si può mettere nella forma equivalente

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0 \ : \tag{1}$$

basta assumere $p := -\dfrac{\gamma}{\alpha}$ e $q := -\dfrac{\gamma}{\beta}$ (come per l'equazione canonica). La (1) è detta **equazione segmentaria della retta**; anche in questa equazione compaiono solo due parametri.

Si osserva che la retta R interseca l'asse Ox nel punto $\langle p, 0\rangle$ e l'asse Oy nel punto $\langle 0, q\rangle$; l'equazione segmentaria dunque è in grado di esprimere tutte le rette-QQ che presentano due diverse intersezioni con gli assi, ma non le altre rette, le quali costituiscono esattamente l'unione del fascio delle rette parallele all'asse delle x, del fascio delle rette parallele all'asse delle y e del fascio delle rette passanti per l'origine.

Segnaliamo esplicitamente anche le relazioni $p = \dfrac{q}{m}$ e $m = \dfrac{q}{p}$.

B31 a.09 Consideriamo i due punti-QQ diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$ e il duetto che costituiscono $D = \{A, B\}$. Si intuisce che per questi due punti passi una e una sola retta; esaminiamo la questione distinguendo le varie possibilità e cerchiamo una equazione di tale retta.

Se $x_A = x_B$ i due punti appartengono alla retta verticale $x = x_A$ e a nessun'altra.
In caso contrario cerchiamo rette nella forma canonica $y = mx + q$.
Devono valere le equazioni $y_A = m\, x_A + q$ e $y_B = m\, x_B + q$; sottraendo la prima dalla seconda si ricava $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$ e questa, per la supposta collocazione nonverticale dei punti, si può risolvere per ottenere univocamente $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Dalla prima equazione si ricava univocamente $q = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A = \dfrac{y_A\, x_B - x_A\, y_B}{x_B - x_A}$.

L'equazione cercata si può porre sotto una delle due forme equivalenti

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \qquad \text{e} \qquad y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \ . \tag{1}$$

Altre forme equivalenti sono

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \qquad \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{2}$$

e naturalmente quelle in cui si scambiano i ruoli i punti A e B e/o le coordinate x e y.

Può essere utile anche una forma più simmetrica rispetti allo scambio $\mathbf{[}x \longleftrightarrow y\mathbf{]}$ come la

$$(y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A) \ . \tag{3}$$

Si osserva che questa equazione rende conto anche del caso $x_A = x_B$. In effetti questa equazione è immediatamente riducibile alla forma

$$(y_B - y_A) \cdot x - (x_B - x_A) \cdot y + [y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)] \ , \tag{4}$$

cioè alla equazione generale relativa ad $\alpha = y_B - y_A$, $\beta = (x_B - x_A)$ e $\gamma = y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)$.

B31 a.10 È quindi lecito definire come **retta-QQ** determinata dal duetto di punti-QQ $\{A, B\}$ l'insieme dei punti-QQ

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\mathbb{?}\, (y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\}$$

Questo insieme, se si sottintende $x, y \in \mathbf{Vrb}(\mathbb{Q})$, si denota anche con

$$\overline{AB} \;:=\; \mathbf{Soln}\left((y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\right) \;. \tag{1}$$

B31 b. segmenti, semirette, orientazioni, angoli

B31 b.01 La funzione $\lceil\, \langle x,y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mapsto \langle x,0\rangle \,\rceil$ si dice **proiettore dei punti-QQ sull'asse** Ox e si denota con $\boldsymbol{Prj}_x$.

La funzione $\lceil\, \langle x,y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mapsto \langle 0,y\rangle \,\rceil$ si dice **proiettore dei punti-QQ sull'asse** Oy e si denota con $\boldsymbol{Prj}_y$.

Il punto-QQ $\langle x,0\rangle$ si dice **proiezione su** Ox di P; il punto-QQ $\langle 0,y\rangle$ si dice **proiezione su** Oy di P.

I due proiettori "cartesiani" introdotti si possono considerare funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q} \,\rceil$ non invertibili, e quindi endofunzioni di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Queste endofunzioni sono idempotenti: in effetti $\boldsymbol{Prj}_x$ ha come codominio Ox e questo è anche l'insieme dei suoi punti fissi; dualmente-xy Oy è il codominio e l'insieme dei punti fissi di $\boldsymbol{Prj}_y$.

B31 b.02 Consideriamo due punti-QQ diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$, la retta-QQ, unica, che li contiene $\mathsf{R} := \overline{AB}$ e il generico punto $P = \langle x,y\rangle \in \overline{AB}$.

Il proiettore $\boldsymbol{Prj}_x$ ristretto alla R, $\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}$, è una biiezione del genere $\lceil\, \mathsf{R} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathsf{Ox} \,\rceil$ sse la R non è verticale, cioè sse $x_A \neq x_B$.

Dualmente-xy $\boldsymbol{Prj}_y|_{\mathsf{R}} \in \lceil\, \mathsf{R} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathsf{Oy} \,\rceil$ sse la R non è orizzontale, cioè sse $y_A \neq y_B$.

Per le proiezioni dei punti A e B scriviamo $A_x := \langle x_A, 0\rangle$, $A_y := \langle 0, y_A\rangle$, $B_x := \langle x_B, 0\rangle$, $B_y := \langle 0, y_B\rangle$.

Supponiamo che $\overline{AB}$ non sia verticale e più particolarmente che sia $x_A < x_B$.

I due punti A_x e B_x ripartiscono l'asse Ox in 5 parti:

- l'intervallo illimitato a sinistra $(:: x_A)$;
- il singoletto $\{x_A\}$;
- l'intervallo aperto $(x_A :: x_B)$;
- il singoletto $\{x_B\}$;
- l'intervallo illimitato a destra $(x_B ::)$.

Una pentapartizione corrispondente viene determinata sulla $\overline{AB}$ dalla biiezione $\left(\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}\right)^{-1}$.

Le 5 parti che corrispondono alle suddette successive parti dell'asse Ox sono:

- $\left(\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}\right)^{-1}(:: x_A)$, chiamata **semiretta aperta con estremità** A ;
- il singoletto $\{A\}$;
- $\left(\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}\right)^{-1}(x_A :: x_B)$, chiamata **segmento aperto** e denotata con $\overline{AB}$;
- il singoletto $\{B\}$;
- $\left(\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}\right)^{-1}(x_B ::)$, chiamata **semiretta aperta** con estremo B .

Discorso simmetrico si può fare se $\overline{AB}$ non è orizzontale servendosi del proiettore $\boldsymbol{Prj}_y$.

Nel caso in cui la $\overline{AB}$ non è né verticale né orizzontale, l $\left(\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}\right)^{-1} \circ_{lr} \boldsymbol{Prj}_y$ pone in corrispondenza biunivoca Ox ed Oy.

In effetti, ricordando l'equazione canonica della $\overline{AB}$ in a10(1) si trova

$$(1) \qquad \left(\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathsf{R}}\right)^{-1} \circ_{lr} \boldsymbol{Prj}_y \;=\; \left\lceil\, x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x_A \,\right\rceil \;.$$

B31 b.03 Supponiamo ancora che sia $x_A \neq x_B$ e consideriamo la funzione

$$\sigma \;=\; \left\lceil\, t \in \mathbb{Q} \mapsto x_A + (x_B - x_A)\cdot t \,\right\rceil \;.$$

Questa è una trasformazione di $\mathbb{Q}$ in se stesso invertibile, cioè una permutazione dell'insieme dei numeri razionali; più precisamente è la permutazione di $\mathbb{Q}$ tale che $\sigma(0) = x_A$ ed $\sigma(1) = x_B$.

Si può interpretare la t come la grandezza tempo e la funzione $\sigma(t)$ come la posizione di un corpo puntiforme che si muove sull'asse Ox di moto uniforme, cioè a velocità costante; questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto $A_x = \langle x_A, 0\rangle$ e all'istante $t = 1$ nel punto $B_x = \langle x_B, 0\rangle$.

Chiaramente se $x_A < x_B$ il corpo puntiforme si muove sulla Ox da sinistra a destra: al procedere del tempo l'ascissa del corpuscolo aumenta. Se all'opposto $x_A > x_B$ il corpuscolo si muove da destra verso sinistra.

Questo modello cinematico si può applicare anche alla retta $\overline{AB}$ interpretando la funzione $\sigma(t)$ come l'andamento nel tempo della proiezione su Ox di un corpo puntiforme che si muove di moto uniforme sulla retta stessa.

Questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto A e nell'istante $t = 1$ nel punto B; per la sua ordinata, ovvero per la sua proiezione sulla Oy, dall'espressione della $\sigma(t)$ e dall'espressione della ordinata del punto P mediante la sua ascissa si ricava

$$y \;=\; \tau(t) \;:=\; y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \;=\; y_A + (y_B - y_A)\cdot t \;. \tag{1}$$

B31 b.04 Le due funzioni $\sigma(t)$ e $\tau(s)$ forniscono una descrizione cinematica della retta $\overline{AB}$ che spesso serve a rendere più intuitive le considerazioni geometriche su questa retta in relazione ai due assi di riferimento del piano razionale. Il corpo puntiforme potrebbe descriversi come la punta molto fine di una penna che traccia la retta su un foglio esteso quanto si vuole il quale ha come modello l'insieme $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Prescindendo dalla interpretazione della t come variabile temporale, le due espressioni che riscriviamo

$$\begin{cases} x \;=\; x_A + (x_B - x_A)\cdot t \\ y \;=\; y_A + (y_B - y_A)\cdot t \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in \mathbb{Q} \;. \tag{1}$$

possono comunque essere considerati strumenti formali che consentono di individuare i punti della retta passante per A e per B servendosi di una variabile $t \in \mathbf{Vrb}(\mathbb{Q})$. Queste sono dette **espressioni parametriche della retta** $\overline{AB}$.

Questa retta può anche essere individuata come sottoinsieme di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mediante l'espressione

$$\overline{AB} \;=\; \big\{t \in \mathbb{Q} :|\; \langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t \;,\; y_A + (y_B - y_A)\cdot t\rangle\big\} \;. \tag{2}$$

Sono opportune alcune osservazioni. La coppia delle espressioni risulta simmetrica rispetto allo scambio $[x \longleftrightarrow y]$, in accordo con la sostanziale equivalenza dei ruoli delle due coordinate nello studio delle rette di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Si nota anche che le espressioni parametriche valgono anche per rette orizzontali e verticali.

Inoltre si osserva che la descrizione cinematica, ovvero la descrizione della retta come di una linea ottenuta con un tracciamento materiale, porta ad attribuirle una orientazione, ovvero ad assegnare un ordinamento totale ai suoi punti derivante dall'ordinamento dell'insieme $\mathbb{Q}$ nel quale "corre" il parametro t. Questo corrisponde ad attribuire un ordine tra i punti A e B, cioè a considerare che A "venga prima" di B.

B31 b.05 Abbiamo visto che una coppia di punti diversi $\langle A, B\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ individua una retta-QQ e una sua biiezione con l'insieme ordinato $\mathbb{Q}$ resa disponibile da un sistema di equazioni parametriche. Una diversa coppia $\langle C, D\rangle$ di punti-QQ appartenenti alla stessa retta mediante il proprio sistema di equazioni parametriche individua la stessa retta, ma una diversa biiezione con $\mathbb{Q}$.

Le due coppie $\langle A, B\rangle$ e $\langle C, D\rangle$ si dicono compatibili sse $(x_B - x_A)\cdot(x_D - x_C) \geq 0$ e $(y_B - y_A)\cdot(y_D - y_C) \geq 0$, incompatibili in caso contrario.
La compatibilità corrisponde al fatto che percorrendo la retta in modo da incontrare prima A e poi B si incontra C prima di D (e viceversa). Si osserva che la compatibilità tra coppie di punti diversi su una retta-QQ è una equivalenza e che la coppia $\langle A, B\rangle$ e la sua riflessa $\langle B, A\rangle$ sono incompatibili.

Vi sono quindi due classi di coppie di punti diversi di una retta. Queste due classi sono dette **sensi di percorrenza della retta** e questi due sensi si dicono **sensi mutuamente opposti**.

Possiamo ora definire come **retta orientata** associata alla coppia $\langle A, B\rangle$ di punti diversi di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ la retta $\overline{AB}$ munita del senso di percorrenza secondo il quale il punto A si incontra prima di B. Questa retta orientata si denota con $\overrightarrow{AB}$. La retta orientata $\overrightarrow{BA}$ si dice **retta orientata opposta** della $\overrightarrow{AB}$.
A questo punto è opportuno associare la retta $\overline{AB}$ al duetto $\{A, B\}$ e osservare che $\overline{AB} = \overline{BA}$.

B31 b.06 Come a una retta sono associate due rette orientate opposte, così a ogni segmento aperto di una retta sono associati due segmenti orientati.

A questo proposito può essere utile individuare come segmento aperto associato al duetto $\{A, B\}$ con l'espressione parametrica ottenuta riducendo l'espressione b04(2):

$$\left\{\ t \in (0 :: 1)\ :|\ \left\langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t\ ,\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\right\rangle\ \right\}\ . \tag{1}$$

Similmente si definisce **segmento chiuso** associato ad $\{A, B\}$ il sottoinsieme della retta che amplia il precedente

$$\overline{AB}\ =\ \left\{t \in [0 :: 1] :|\ \left\langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t\ ,\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\right\rangle\right\}\ . \tag{2}$$

I punti A e B si dicono **estremità del segmento**.

Si dice **segmento orientato aperto** associato alla coppia $\langle A, B\rangle$ il segmento associato a questa coppia munito del senso di percorrenza da A a B.
Similmente si definisce il **segmento orientato chiuso** associato alla coppia $\langle A, B\rangle$: questa entità si denota con $\overrightarrow{AB}$.

Evidentemente i segmenti [orientati] aperti e chiusi definiti dallo stesso duetto [dalla stessa coppia] di punti-QQ si corrispondono biunivocamente.

Osserviamo che talora serve considerare anche i segmenti orientati chiusi della forma $\overrightarrow{AA}$, i cui corrispondenti aperti come insiemi coincidono tutti con $\emptyset$.

In gran parte delle considerazioni geometriche non si distingue tra le versioni aperte e le chiuse di queste entità. In seguito ci riferiremo preferibilmente ai segmenti chiusi e ai segmenti orientati chiusi che chiameremo semplicemente segmenti e segmenti orientati. Si potrebbero considerare anche segmenti aperti da una parte e chiusi dall'altra, ma raramente risultano utili.

Il punto A si dice **estremo iniziale del segmento orientato** aperto e del corrispondente chiuso; il punto B si dice **estremo finale del segmento orientato** aperto e del corrispondente chiuso.

B31 b.07 Tra due segmenti (chiusi) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ si possono definire varie relazioni.
Essi si dicono **segmenti disgiunti** sse non hanno punti in comune e si dicono **segmenti intersecantisi** in caso contrario.
Due segmenti intersecati più in particolare si dicono:

- **segmenti adiacenti-ee** sse hanno in comune uno e un solo punto che è estremità per entrambi;
- **segmenti adiacenti-ii** sse hanno in comune un solo punto diverso da A, B, C e D;

- **segmenti adiacenti-ei** sse hanno in comune un solo punto che può essere A o B;
- **segmenti adiacenti-ie** sse hanno in comune un solo punto che può essere C o D;
- **segmenti sovrapposti** sse hanno in comune almeno due punti, e quindi gli infiniti punti del segmento che ha tali punti come estremi (senza escludere che ne possano avere in comune altri).

Due segmenti si dicono **segmenti collineari** sse sono sottoinsiemi della stessa retta.
Tra i duetti di segmenti collineari vi sono i duetti di segmenti sovrapposti. Più completamente tra i duetti di segmenti collineari si distinguono i duetti di segmenti:

- **segmenti collineari disgiunti** (senza alcun punto-QQ in comune);
- **segmenti collineari adiacenti-ee** (con un solo punto-QQ in comune);
- **segmenti collineari sovrapposti** (con due e quindi infiniti punti-QQ in comune).

Se due segmenti sono sovrapposti possono essere:

- segmenti sovrapposti coincidenti;
- segmenti sovrapposti dotati di intersezione contenuta propriamente in entrambi (e in tal casoi due segmenti non sono confrontabili rispetto all'inclusione);
- segmenti sovrapposti l'uno sottoinsieme proprio dell'altro (cioè segmenti confrontabili per inclusione).

Se $\overline{AB} \subset \overline{CD}$ si distinguono il caso in cui non hanno estremi comuni dai casi nei quali hanno un solo estremo comune, casi nei quali sono aut adiacenti-ei, aut adiacenti-ie.

B31 b.08 Adottiamo la abbreviazione **segmento.or** per il termine "segmento orientato.

Per due segmenti.or (chiusi) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si possono riscontrare o meno tutte le relazioni che si possono riscontrare tra i due segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ che essi, risp., arricchiscono.

Inoltre se essi sono adiacenti-ee può accadere che:

aut $\overrightarrow{AB}$ è **segmento.or successivo** di $\overrightarrow{CD}$ sse $A = D$,

aut $\overrightarrow{CD}$ è segmento.or successivo di $\overrightarrow{AB}$ sse $B = C$,

aut sono **segmenti.or divergenti** sse $A = C$,

aut sono **segmenti.or convergenti** sse $B = D$.

In tutti i casi precedenti si distinguono quelli in cui i segmenti sono collineari dai casi nei quali non lo sono.

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono segmenti.or collineari (aut disgiunti, aut sovrapposti) possono essere:

aut **segmenti.or collineari concordi** sse le rette orientate individuate dai due segmenti coincidono,

aut **segmenti.or collineari discordi** sse tali rette sono l'una l'opposta dell'altra.

Due segmenti.or con i corrispondenti segmenti nonorientati coincidenti possono essere aut coincidenti, aut opposti.

B31 b.09 Un punto A appartenente a una retta la tripartisce in due semirette aperte e nel singoletto $\{A\}$; A si considera estremo di entrambe le semirette. Si dice **semiretta [chiusa]** l'unione di una semiretta aperta e della sua estremità'.
Una semiretta si può considerare come un segmento con un estremo posto all'infinito, oppure si può descrivere come un segmento avente un estremo che si allontana quanto si vuole dall'altro. È ragionevole attribuire per difetto a una semiretta l'orientazione indotta dal suo estremo al finito considerato come suo estremo iniziale.

Una semiretta si può dunque individuare con un punto che costituisce il suo estremo (al finito) e con un secondo punto che le appartiene. La semiretta avente come estremo $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e della quale fa parte come altro punto $B = \langle x_B, y_B \rangle$ si può denotare con $\overrightarrow{AB}$, notazione che è opportuno non confondere con quella esprimente il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$.

Questa semiretta si può individuare con l'espressione insiemistica dedotta da quella della retta $\overline{AB}$ trovata in b04

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \left\{ t \in \mathbb{Q}_{0+} \;:|\; \left\langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t \;,\; y_A + (y_B - y_A)\cdot t \right\rangle \right\} \;. \tag{1}$$

B31 b.10 Date due semirette si possono loro attribuire relazioni di mutua posizione simili a quelle che si possono riscontrare tra due segmenti orientati.

La relazione più feconda riguarda una coppia di semirette aventi in comune l'estremo (iniziale). Una terna della forma $\langle \overrightarrow{VA} \;,\; V \;,\; \overrightarrow{VB} \rangle$ si dice **angolo-QQ**; V si chiama **vertice dell'angolo**, $\overrightarrow{VA}$ **primo lato dell'angolo** e $\overrightarrow{VB}$ **secondo lato dell'angolo**.

La definizione data stabilisce un ordine preciso tra i due lati, cioè riguarda angoli orientati. I due angoli $\langle \overrightarrow{VA} \;,\; V \;,\; \overrightarrow{VB} \rangle$ e $\langle \overrightarrow{VB} \;,\; V \;,\; \overrightarrow{VA} \rangle$ si dicono **angoli opposti**.
Per molte considerazioni non occorre distinguere tra angoli opposti e si può parlare di angoli nonorientati.

Si dice **angolo-QQ piatto** un angolo della forma $\langle \overrightarrow{VA} \;,\; V \;,\; \overrightarrow{VB} \rangle$ con i due lati costituenti semirette collineari e divergenti.

B31 b.11 Le precedenti nozioni sono arricchimenti di nozioni omologhe introdotte in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Completando l'arricchimento si introdurranno in seguito le nozioni di angolo retto, angoli congruenti, angolo ottenibile con una rotazione di una semiretta e ampiezza di un tale angolo.

Prima di queste nozioni conviene riprendere le nozioni di traslazione, parallelismo e ortogonalità e successivamente introdurre le conseguenti nozioni di punti impropri e di rotazioni.

Per esempio due rette-QQ L ed M sono dette **rette-QQ parallele** sse si possono associare a due equazioni aventi le forme $p\,x + q\,y + m \;=\; 0$ e $p\,x + r\,q\,y + r m' \;\; 0$, con r razionale diverso da 0 (ed $m' \neq m$) .

B31 c. vettori, traslazioni e vettori applicati

B31 c.01 Ampliando quanto si è presentato per il piano combinatorio, introduciamo per gli elementi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ un linguaggio vettoriale e operazioni che facilitano lo sviluppo di procedimenti di calcolo per il piano razionale basati su considerazioni algebriche.

I punti-QQ sono in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati aventi come estremo iniziale l'origine; queste due entità possono essere identificate e inoltre il punto-QQ P può essere identificato con il segmento $\overrightarrow{OP}$. Ogni punto-QQ $P = \langle r, s\rangle$ si può chiamare **vettore-QQ** e questa entità può essere visualizzata con una freccia che inizia nell'origine $\langle 0, 0\rangle$ e termina in P.
I vettori-QQ spesso vengono identificati con lettere in grassetto come $\mathbf{v}$ o con simboli come $\mathbf{w}_{(1)}$, $\mathbf{u}_k$ o $\mathbf{E}$. In particolare l'origine $\langle 0, 0\rangle$ si può chiamare vettore nullo e si può denotare con $\overrightarrow{OO}$ o concisamente con $\mathbf{0}$.

B31 c.02 Consideriamo i vettori-QQ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ e numeri razionali a, b, c .

Si dice **somma dei vettori-QQ** il vettore-QQ $\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w} := \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle$.

Si dice **differenza dei vettori-QQ** il vettore-QQ $\mathbf{v} -^{ce} \mathbf{w} := \langle v_1 - w_1, v_2 + w_2\rangle$.

Si dice **moltiplicazione di un vettore-QQ per un razionale** $c \cdot^{ce} \mathbf{v} := \langle c \cdot v_1, c \cdot v_2\rangle$.

Il vettore $-^{ce}\mathbf{v} := \mathbf{0} -^{ce} \mathbf{v} = \langle -v_x, -v_y\rangle = -1 \cdot^{ce} \mathbf{v}$ si dice **opposto del vettore v**; il passaggio all'opposto $\lceil \mathbf{v} \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto -\mathbf{v} \rceil$ si può considerare un'operazione unaria sui vettori-QQ.

Osserviamo che il segno $-^{ce}$, come accade al segno $-$ applicato a numeri razionali e in vari altri contesti, viene usato sia per denotare un operatore unario (di passaggio all'opposto), sia per denotare un operatore binario.

Notiamo anche che con notazioni della forma ω^{ce}, dove ω denota un operatore binario o unario, abbiamo denotata la cosiddetta **estensione cartesiana** di tale operatore, cioè la sua applicazione componente per componente a operandi costituiti da sequenze di predeterminata lunghezza di entità più semplici.
Tuttavia di solito questa notazione viene semplificata trascurando gli esponenti ^{ce} e usando espressioni come $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $c \cdot \overrightarrow{OP}$ e $-\mathbf{H}$, in quanto le ambiguità si possono risolvere con il contesto.

I due vettori-QQ $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono **vettori proporzionali** sse si trova un $c \in \mathbb{Q}_{nz}$ tale che $\mathbf{v} = c \cdot \mathbf{w}$.

Evidentemente la proporzionalità è una relazione di equivalenza; si osserva che $\mathbf{0}$ costituisce da solo una classe di tale equivalenza; le altre classi di questa equivalenza sono costituiti dai vettori che come punti-QQ appartengono a una stessa retta-QQ per l'origine privata dello stesso punto $\langle 0, 0, \rangle$.
Una tale retta ridotta viene chiamata anche **raggio-QQ**.

B31 c.03 Ogni coppia di punti-QQ viene anche chiamata **vettore-QQ applicato**, o concisamente **vettore.a-QQ**

I vettori applicati sono evidentemente in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati (chiusi) e con l'insieme delle quaterne di numeri razionali, cioè con elementi di $\mathbb{Q}^{\times 4}$.
I segmenti orientati si possono considerare anche insiemi di punti individuati da equazioni lineari e muniti di un senso di percorrenza, mentre i vettori applicati sono definiti come entità cui possono essere applicate determinate operazioni.

In effetti tra segmenti orientati chiusi e vettori applicati (e quaterne di razionali) e si possono stabilire dei criptomorfismi e spesso queste nozioni, dato che sono contenutisticamente equivalenti, vengono identificate e rappresentate da scritture intercambiabili.

In particolare il vettore applicato $\langle P, Q\rangle$ si denota anche con $\overrightarrow{PQ}$

Un vettore applicato-QQ può essere sommato con un qualsiasi vettore-QQ. Si dice **somma dei vettori.a** $\langle P, Q\rangle \;=\; \Big\langle \big\langle x_P, y_P\big\rangle, \big\langle x_Q, y_Q\big\rangle \Big\rangle$ e $\mathsf{v} = \big\langle v_x, v_y\big\rangle$ il vettore

$$\langle P, Q\rangle + \mathsf{v} \;:= \big\langle P + \mathsf{v}, Q + \mathsf{v}\big\rangle \;=\; \Big\langle \big\langle x_P + v_x, y_P + v_y\big\rangle, \big\langle x_Q + v_x, y_Q + v_y\big\rangle \Big\rangle \,.$$

Contrariamente ai vettori, per i vettori applicati si definisce la somma solo se l'estremo finale del primo addendo coincide con l'estremo iniziale del secondo, ovvero se i due corrispondenti segmenti orientati costituiscono una coppia di segmenti orientati consecutivi [b08].
Precisamente si definisce come somma di due vettori applicati $\langle P, Q\rangle$ e $\langle Q, S\rangle$ il vettore applicato $\langle P, S\rangle$.

B31 c.04 Ci chiediamo ora se o quando si può definire convenientemente la differenza tra due vettori applicati.

Preliminarmente diciamo che due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono **segmenti orientati equipollenti** sse risultano coincidenti i due vettori associati $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}$, cioè sse $x_Q - x_P = x_S - x_R$ e $y_Q - y_P = y_S - y_R$.
Grazie alla equivalenza-eqp tra segmenti orientati e vettori applicati, la relazione di equipollenza risulta definita anche tra vettori applicati.

Chiaramente l'equipollenza è una relazione di equivalenza e si possono considerare le classi di equipollenza di segmenti orientati e di vettori applicati. La classe di equipollenza contenente $\overrightarrow{PQ}$ viene convenientemente caratterizzata dal vettore $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono due vettori applicati equipollenti, si definisce come loro **differenza tra i due vettori.a** il vettore.a $\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$; per l'equipollenza esso coincide con $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ}$.
Questo vettore può denotarsi semplicemente come differenza di vettori come $\overrightarrow{R - P}$ o come $\overrightarrow{S - Q}$.

B31 c.05 Se v denota un qualsiasi vettore-QQ, si dice **traslazione del piano razionale** di spostamento $\mathsf{v}$la la endofunzione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ della forma

$$\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}} \;:=\; \lceil\, P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto P + \mathsf{v} \,\rceil \,.$$

Si dimostra facilmente che questa applicazione è del genere $\lceil\, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\rceil$, cioè è una permutazione del piano razionale.
Il trasformato per la traslazione di spostamento v del punto P si denota con $\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}(P)$ o con $P{,}\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}$.
Per la composizione delle traslazioni, come per ogni prodotto di Peirce di trasformazioni, scriviamo

$$\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}} \circ \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{w}} \;=\; \lceil\, P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto (P{,}\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}){,}\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{w}} \,\rceil \;=\; \lceil\, P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{w}}(\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}(P)) \,\rceil \,.$$

Con argomentazioni del tutto simili a quelle usate per le traslazioni su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si dimostrano i fatti che seguono.

(1) $\quad (\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}})^{-\mathbf{1}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\,-\mathsf{v}}$;

(2) $\quad \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}} \circ \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{w}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}+\mathsf{w}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{w}} \circ \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}$;

(3) $\quad \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{0}} = \mathsf{Id}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$.

Queste uguaglianze, per quanto si è introdotto in B20f e per quanto si approfondisce in B41b01, dicono che le traslazioni su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ costituiscono un gruppo di trasformazioni; esso è detto **gruppo delle traslazioni del piano razionale**.

Si mostra facilmente che questo gruppo è isomorfo al gruppo dei vettori di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ munito dell'operazione di somma.

B31 c.06 Il risultato della somma di un vettore-QQ applicato con un vettore-QQ s può considerarsi il risultato dell'applicazione della trasformazione $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{s}}{}^{ce}$, estensione cartesiana all'insieme dei vettori-QQ applicati della traslazione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ relativa allo spostamento s. Anche per queste trasformazioni in genere si trascura di distinguerle dalle rispettive estensioni cartesiane e si può dire che le traslazioni costituiscono delle **azioni** sull'insieme dei vettori-QQ applicati.
Anche queste applicazioni costituiscono un gruppo di trasformazioni e valgono le uguaglianze presentate in c05 per le traslazioni considerate azioni su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Si osserva che ogni classe di equipollenza dei vettori applicati si può ottenere applicando le diverse traslazioni $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}$ a un unico vettore applicato: in altri termini, la classe di equipollenza di $\overrightarrow{PQ}$ si può esprimere come $\{\mathsf{v} \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} :| \ \overrightarrow{PQ} + \mathsf{v}\}$.

Inoltre la scelta dell'elemento rappresentativo di una classe si può effettuare senza alcun vincolo a priori e in luogo di $\overrightarrow{PQ}$ si potrebbe scegliere quello equipollente avente come estremo iniziale l'origine $\langle O, Q - P\rangle$.
Si osserva anche che le classi di equipollenza sono le orbite dell'insieme delle traslazioni agente sull'insieme dei vettori applicati.

B31 c.07 La addizione di vettori si ottiene con la regola del parallelogramma. Analogamente la sottrazione.

B31 c.08 Risulta spesso utile conoscere come si modificano i vari oggetti che si costruiscono su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ in conseguenza dell'applicazione delle trasformazion di determinati tipi, come le traslazioni, le omotetie, le riflessioni e le rotazioni.

Risulta particolarmente utile sapere che un certo tipo di trasformazioni applicato agli oggetti di un dato genere (rette, figure, configurazioni, ...) mantiene alcune loro caratteristiche; per varie attività risulta vantaggioso studiare le proprietà di alcuni oggetti che risultano particolarmente maneggevoli per estenderle successivamente agli altri oggetti dello ostesso genere, ma che possono essere analizzati direttamente con strumenti conoscitivi più dispendiosi, in particolare attraverso formule più elaborate, meno essenziali.

In genere le trasformazioni che mantengono più proprietà stabiliscono dei collegamenti tra gli oggetti accennati che possono contribuire a conoscerle meglio.

Le precedenti considerazioni hanno una portata del tutto generale e possono valere per ogni genere di trasformazioni (permutazioni, endofunzioni, proiezoni, ...), per ogni tipo di ambiente cui si applicano (struttura algebrica, spazio, famiglia di funzioni, ...) e per vari generi di proprietà che lasciano invariate o modificano in modi controllabili.

Occupiamoci ora alle traslazioni di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e in particolare delle proprietà invarianti per tutte queste trasformazioni o per loro insiemi significativi.

Consideriamo il vettore-QQ $\mathsf{v} = \langle v_x, v_y\rangle$, il corrispondente vettore applicato nell'origine $\overrightarrow{OP}$, la retta passante per O e P $\overline{OV}$ e la corrispondente traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}$.
Ricordiamo anch che alla $\overline{OP}$ si può dare la forma $\mathsf{Soln}(v_y \cdot x + v_x \cdot y = 0)$.

Tra le rette invarianti per la traslazione relativa allo spostamento v si trova sicuramente la $\overline{OP}$.
Questa è invariante anche per ogni traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{r\cdot\mathsf{v}}$, ove r è un qualsiasi razionale nonnullo e può essere posta nella forma $\{r \in \mathbb{Q} :| \ \langle r \cdot v_x \ , \ r \cdot v_y\rangle\}$.

L'insieme delle traslazioni della forma $\boldsymbol{Trsl}_{r\cdot\mathbf{v}}$ relative ai diversi $r \in \mathbb{Q}$ costituiscono un sottogruppo del gruppo delle traslazioni e precisamente il loro insieme può definirsi come il sottoinsieme delle traslazioni che lasciano invariata la $\overline{OP}$. Ogni altra retta-QQ invariante per $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{v}}$ si dice **retta parallela** alla $\overline{OP}$.

La parallela alla $\overline{OP}$ contenente il punto-QQ $Q = \langle x_Q, y_Q \rangle$ ha la forma $\{r \in \mathbb{Q} :| \ Q + r \cdot \mathbf{v}\}$; per essa si usa anche la equivalente forma concisa $Q + \mathbb{Q}\,\mathbf{v}$.

Una parallela $\mathcal{R}_1$ alla retta-QQ $\mathcal{R} := \overline{OP}$ diversa da quest'ultima non può avere punti in comune con essa: in caso contrario un punto comune può essere trasformato dalle traslazioni in un qualsiasi punto delle due rette che, contro quanto ipotizzato dovrebbero coincidere.

Per transitività anche due qualsiasi parallele alla $\overline{OP}$ aut coincidono, aut non hanno punti comuni.

Dunque il parallelismo con la retta $\overline{OP}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

si osserva che due rette-QQ si possono definire come parallele sse non hanno punti-QQ comuni.

B31 c.09 L'insieme delle rette-QQ passanti per un punto S si dicono costituire un **fascio di rette** e il punto comune, unico, si dice **sostegno del fascio**.
Si osserva che l'appartenenza a una retta del fascio avente come sostegno S è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{S\}$
Le varie rette per l'origine ovviamente non possono essere equivalenti per parallelismo, come pure due diverse rette di ogni fascio avente come soastegno un punto di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Le varie classi di parallelismo tra rette in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si dicono anche **direzioni delle rette razionali**.
Si può quindi affermare che due rette sono parallele sse hanno in comune solo la direzione.

Ogni direzione può chiamarsi anche **punto improprio del piano razionale**. In accordo con questa dizione si può dire che due rette parallele hanno in comune solo un punto improprio.

Questo punto improprio si può pensare come un punto all'infinito, raggiungibile percorrendo una delle rette parallele in modo da allontanarsi illimitatamente da un suo qualsiasi punto al finito.
Con questa terminologia una classe di rette parallele si può considerare un **fascio improprio**, cioè un fascio di rette avente come sostegno il loro comune punto improprio, ovvero avente in comune la direzione.

Collettivamente i punti di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e i punti impropri si dicono **punti del piano proiettivo razionale**; a loro volta i fasci di rette propri e impropri si dicono **fasci proiettivi di rette**.

B31 d. poligonali, poligoni orientati e loro aree sui razionali

B31 d.01 Consideriamo un intero positivo s e una sequenza di $s+1$ punti-PP $\sigma = \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s \rangle$.

Si dice **poligonale orientata** definita da σ la sequenza di s segmenti orientati consecutivi

$$\Pi \ := \ \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, ..., \overrightarrow{P_{s-1}P_s} \right\rangle \ .$$

Se $s = 1$ questa sequenza è costituita da un solo segmento orientato. $\overrightarrow{P_0P_0}$.

L'intero positivo s si dice **lunghezza della poligonale orientata**. I punti-QQ che sono estremi dei segmenti, sono detti **vertici della poligonale**. I segmenti orientati costituenti la poligonale Π si dicono anche **lati della poligonale** Π.

Per poligonale trasposta o **poligonale opposta** della precedente si intende la

$$\Pi^{\top} \ := \ \left\langle \overrightarrow{P_sP_{s-1}}, \overrightarrow{P_{s-1}P_{s-2}}, ..., \overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_1P_0} \right\rangle \ .,$$

L'estremo iniziale del primo segmento orientato si dice **vertice iniziale della poligonale** Π; l'estremo finale dell'ultimo segmento orientato si dice **vertice finale della poligonale** Π.

Se $s = 1$ la poligonale si riduce a un singoletto costituito da un segmento.

Una poligonale orientata si dice **poligonale ridondante** sse coincidono due successivi punti della sua sequenza di punti σ o due suoi successivi segmenti sono collineari. Equivalentemente si definisce degenere una poligonale che presenta segmenti puntiformi, oppure segmenti successivi sostituibili con la loro somma, oppure segmenti successivi sovrapposti.

Le poligonali degeneri, come molti altri tipi di configurazioni geometriche, hanno interesse in quanto ottenibili modificando in modo graduale (o "continuo") poligonali nondegeneri.

B31 d.02 Si dice **poligonale orientata chiusa** una poligonale orientata nella quale estremo iniziale e finale coincidono; la precedente Π è chiusa sse $P_0 = P_s$.
In una poligonale orientata chiusa si ha un vertice evidenziato, quello che riveste i ruoli di estremo iniziale e di estremo finale.

Si dice **poligono orientato** l'insieme delle poligonali orientate chiuse ottenibili l'una dall'altra per permutazione circolare dei vertici, cioè delle poligonali che differiscono solo per i diversi vertici evidenziati.
In modo più intuitivo si può dire che per poligono orientato si intende una poligonale chiusa per la quale si prescinde dal vertice iniziale e finale.

Il poligono orientato che si ottiene dalla poligonale orientata chiusa $\langle P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_0 \rangle$ si denota con $\langle_{cy} P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_0 \rangle$

Sono molte le considerazioni su poligonali orientate e su poligoni orientati nelle quali l'orientamento non ha peso. Per alleggerire i discorsi si introducono le corrispondenti entità nonorientate.

Si dice **poligonale [nonorientata]** l'insieme costituito da una poligonale orientata e dalla sua trasposta. In altre modo più intuitivo per poligonale si intende una poligonale orientata per la quale si rinuncia a distinguere l'estremo iniziale dall'estremo finale.

Si dice **poligono [nonorientato]** l'insieme costituito da un poligono orientato e dal suo opposto. In genere per un poligono [nonorientato] si usa la stessa notazione che si adotta per uno dei due corrispondenti orientati.

Una poligonale e un poligono nondegeneri possono presentare vertici (nonconsecuti) ripetuti e possono presentare spigoli non consecutivi con punti comuni. In questi casi si parla di **poligonale ripetitiva** e di **poligono ripetitivo**.

Si dice invece **poligonale semplice** una poligonale nondegenere e nonripetitiva e si dice **poligono semplice** un poligono nondegenere e nonripetitivo.

Un poligono semplice è caratterizzato da un intero positivo s che fornisce sia il numero dei suoi lati mutuamente distinti che il numero dei suoi vertici mutuamente distinti.

B31 d.03 Un poligono con un solo lato non può che essere costituito da un segmento puntiforme ed essere privo di interesse.
Un poligono di due lati si dice **digono**; esso deve avere la forma $\langle_{cy} \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QP} \rangle$. Quindi ogni digono è degenere ed equivale al segmento nonorientato $\overline{P\,Q}$ avente i suoi stessi estremi.

I poligoni con 3 lati si dicono **triangoli**, più raramente trigoni.
L'insieme dei triangoli lo denotiamo con **Trng**.

I triangoli degeneri come insiemi di punti equivalgono i segmenti.

Un triangolo semplice nonorientato si può individuare con il solo insieme dei tre vertici.
Una comoda notazione semplificata riguarda i particolari poligoni-ZZ che hanno come vertici punti-ZZ aventi coordinate facenti parte di $[0:9]$. Questi poligoni si possono individuare con la sequenza delle coppie di cifre decimali che individuano i loro vertici.

Tra i triangoli semplici si distinguono i **triangoli rettangoli**, triangoli che presentano un angolo retto. Un esempio è dato dal triangolo $\{\langle 1,1\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle -1,2\rangle\}$. L'insieme dei triangoli rettangoli lo denotiamo con **TrngRect**. Si definiscono inoltre i **triangoli ottusangoli** come i triangoli con un angolo ottuso; i **triangoli acutangoli**, triangoli con tutti gli angoli acuti, i **triangoli isosceli**, triangoli che presentano due lati con la stessa quadranza, ovvero con la stessa lunghezza.

I poligoni con 4 lati si dicono **quadrilateri** quelli con 5 lati si dicono **pentagoni**, con 6 lati **esagoni**, con 7 lati **ettagoni**, con 8 lati **ottagoni** e così via.

Per la terminologia usata internazionalmente per i poligoni con i diversi numeri di lati v. `Polygon (we)`.

B31 d.04 Si dicono **lati contigui di un poligono** due suoi lati con un vertice in comune.

I poligoni con 4 lati, i quadrilateri, son detti anche **quadrangoli**; l'insieme di tali figure si denota con Qdltr.

I lati di un quadrilatero si ripartiscono in due duetti di lati contigui (con due possibili ripartizioni), mentre presentano una sola ripartizione in due duetti di lati non contigui; per i lati di uno di questi duetti si parla di **lati opposti di un quadrilatero**; simili ripartizioni in duetti per i vertici e per gli angoli interni.

In generale per **diagonale di un poligono** si definisce ogni segmento che ha come estremi due vertici non contigui. Possiedono diagonali solo i poligoni con 4 o più vertici.

Evidentemente i quadrilateri semplici possiedono 2 diagonali, i pentagoni 5 e gli esagoni 9.
Un poligono semplice con n lati, ossia un n-agono, possiede $\dfrac{n(n-3)}{2}$ lati. Infatti il numero dei duetti dei suoi lati è $\dfrac{n(n-1)}{2}$ e di questi duetti n sono i lati del poligono.

B31 d.05 Un poligono nondegenere si dice **poligono intrecciato** sse due suoi lati non contigui hanno punti in comune, mentre si dice **poligono nonintrecciato** sse titti i duetti di suoi lati non contigui sono disgiunti. Il quadrilatero $\langle_{cy} 00, 10, 01, 11\rangle$ è intrecciato; sono intrecciati i due pentagoni $\langle_{cy} 01, 02, 10, 22, 21\rangle$ e $\langle_{cy} 10, 24, 30, 02, 42\rangle$; è intrecciato l'esagono $\langle_{cy} 00, 11, 20, 21, 10, 01\rangle$.

Un poligono nonintrecciato si dice **poligono convesso** sse nessuno dei segmenti che hanno i due estremi su due lati diversi tocca un altro punto della periferia; in caso contrario si parla di **poligono concavo**.

Tutti i triangoli sono convessi, mentre per ogni $n \geq 4$ si trovano poligoni di n lati concavi.

Un quadrilatero concavo è $\langle_{cy} 00, 30, 11, 03\rangle$; un pentagono concavo è $\langle_{cy} 00, 20, 22, 11, 02\rangle$.

Consideriamo un poligono orientato (nonintrecciato) e pensiamo ad un corpo mobile che percorre il suo perimetro secondo il suo verso, positivo o negativo.
Quando passa da un lato $\overrightarrow{AB}$ al successivo $\overrightarrow{BC}$ il mobile, detto in parole povere, deve curvare aut a sinistra aut a destra; detto in forma più operativa il mobile tocca aut punti (e in particolare C del semipiano di $\overrightarrow{AB}$ positivo aut punti del semipiano negativo.

Quando il mobile percorre l'intero perimetro del poligono orientato positivamente ed ha sempre curvato verso sinistra non si possono avere segmenti con i due estremi su lati diversi che intersecano altri lati e quindi il poligono è convesso.

In caso contrario si hanno due vertici successivi nei quali il mobile ha effettuato curve diverse. Supponiamo che abbia toccato i successivi vertici A, B, C e D compiendo una curva a sinistra in B e una curva a destra in D; in tal caso i segmenti con un estremo interno ad $\overrightarrow{AB}$ e uno interno a $\overrightarrow{CD}$ intersecano $\overrightarrow{BC}$ e quindi il poligono è concavo.

Simile conclusione stringente per percorsi con una curva a destra seguiti da una curva a sinistra. Per i poligoni orientati con verso negativo valgono argomentazioni che si possono ottenere dalle precedenti applicando una riflessione.

I vertici dei poligoni orientati con verso positivo che richiedono di curvare a destra e i vertici dei poligoni orientati negativamente che richiedono di curvare a sinistra si dicono **vertici di concavità del poligono** e il loro numero si dice **grado di concavità del poligono**.
Queste nozioni si trasferiscono ai corrispondenti poligoni privi di orientazione per semplice riduzione senza modifiche dei caratteri dei vertici e del grado di concavità.

Si hanno poligoni con alto grado di concavità: per esempio il poligono di 10 lati

$$\big\langle_{cy}(0,0),(1,1),(3,2),(6,3),(10,4),(14,3),(17,2),(19,1),(20,0),(10,11)\big\rangle$$

presenta 7 vertici di concavità e si possono precisare i dettagli di poligoni con n lati ed $n-3$ vertici di concavità.

B31 d.06 Consideriamo due triangoli orientati secondo lo stesso verso che denotiamo con $T = \overrightarrow{\triangle}(A, B, C)$ e $U = \overrightarrow{\triangle}(A, D, B)$ tali che l'intersezione delle relative regioni poligonali sia, esattamente, l'insieme dei punti che appartengono al segmento $\overline{AB}$, ovvero all'insieme dei punti costituenti il segmento orientato opposto $\overrightarrow{BA}$.

Si dice **unione disgiunta-mb di due triangoli**, di T e U, il quadrilatero orientato $\overrightarrow{ADBC}$; L'ottenimento di questo poligono orientato si denota con $T \dot\cup_{mb} U$.

Viceversa si dice che al quadrilatero orientato $\overrightarrow{ADBC}$ si può applicare la **ripartizione-mb mediante triangoli orientati** nel suo stesso verso T e U.

Le operazioni di unione disgiuta-mb e di ripartizione-mb si possono estendere a poligonali chiuse molto più generali. Vediamo una prima generalizzazione facile da visualizzare.

Consideriamo i due poligoni orientati nonintrecciati $\langle_{cy} A_1, A_2, ..., A_a, B_1, B_2, ..., B_b\rangle$ e $\langle_{cy} C_1, C_2..., C_c, A_a, ...A_1, A_1\rangle$ aventi in comune i punti della a poligonale $\langle A_1, A_2, ..., A_a\rangle$ e nessun'altro; essi si possono comporre con la unione disgiunta-mb per ottenere il poligono orientato nonintrecciato $\langle_{cy} B_1, ..., B_b, C_1, ..., C_c\rangle$.
Queste operazioni si possono definire anche quando le poligonali $\langle_{cy} B_1, B_2, ..., B_b\rangle$ e $\langle_{cy} C_1, C_2..., C_c\rangle$ sono intrecciate.

A questo punto conviene rimarcare che le nozioni di poligoni orientati positivamente o negativamente si possono definire anche a partire da poligonali orientate facenti parte dello spazio tridimensionale $\mathbb{Q}^{\times 3}$.

B31 d.07 Prop. 1 Ogni poligono orientato con n lati nonintrecciato si può ripartire-mb tra $n-2$ triangoli orientati aventi tutti la sua stessa orientazione.

Dim.: La possibilità è evidente per un quadrilatero convesso.
La possibilità è evidente anche per un quadrilatero concavo: esso presenta un solo vertice di non-convessità e viene ripartito-mb dal segmento tra vertice e tale punto e l'unico altro vertice non suo contiguo.

Risulta chiaro anche che ogni poligono convesso di n lati si può ripartire in $n-2$ triangoli facendo svolgere alle $n-2$ diagonali di uno qalsiasi dei suoi vertici i ruoli di lati orientati di due poligoni orientati disgiuni-mf.

Per un generico poligono di n lati nonconvesso si trova sicuramente un suo vertice di convessità tale che il segmento tra i due suoi contigui, A_+ e A_-; questo segmento consente di ripartire il poligono dato in un triangolo e in un poligono con un $n-1$ vertici; applicando ripetutamente questa ripartizione-mb si garantisce la ripartizione richiesta ∎

Per eseguire una ripartizione-mb in risposta a esigenze pratiche può risultare più conveniente procedere acora per gradi ma con un metodo diverso.
Tra i vertici di un poligono nonintrecciato sse ne trovano sicuramente due, A e B, lontani tra di loro e tali che il segmento $\overline{AB}$ fa parte della regione poligonale; la ripartizione-mb basata su questo segmento conduce a due poligoni con numeri di vertici sensibilmente inferiori ad n, entrambi ulteriormente ripartibili-mf; procedendo in questo modo potrebbe risultare più semplice ed efficiente.

Segnaliamo che più avanti generalizzeremo ulteriormente le ripartizioni-mb nelle cosiddette decomposizioni-mf.

Si dice insieme dei **punti interni di un poligono nonintrecciato** orientato $\boldsymbol{P}$ l'unione degli insiemi dei punti dei triangoli di una sua partizione-mb privata dei punti del suo perimetro. Tale insieme si denota con $\mathsf{Intrn}(\boldsymbol{P})$.

Si dice insieme dei punti interni di un poligono nonorientato nonintrecciato l'insieme dei punti interni di ciascuno dei suoi due poligoni orientati.

Prop. 2 Ogni poligono nonintrecciato tripartisce il piano tra punti interni, punti del suo perimetro e punti esterni ∎

A questo punto si può caratterizzare un poligono convesso anche con la proprietà che le rette che contengono i suoi lati non contengono alcuno dei suoi punti interni.
Si può invece caratterizzare un poligono concavo con la presenza di almeno due lati contigui tali che le rette che li prolungano contengono suoi punti interni.

B31 d.08 Consideriamo un triangolo; risulta che i suoi punti interni sono i punti interni ai segmenti che hanno come estremi due punti del suo perimetro appartenenti a lati diversi.
Questo triangolo tripartisce il piano tra l'insieme dei punti dei suoi tre lati (ossia del suo perimetro), l'insieme dei suoi punti interni e l'insieme dei punti rimanenti che sono detti **punti esterni** al triangolo.

Consideriamo un triangolo orientato $\overrightarrow{\triangle}(A,B,C)$; ciascuno dei suoi lati orientati individua una retta orientata: $\overrightarrow{AB}$ la $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{BC}$ la $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{CA}$ la $\overrightarrow{CA'}$.
Ciascuna di queste semirette tripartisce il piano tra l'insieme dei suoi punti, ' l'insieme dei punti nel semipiano alla sua sinistra e l'insieme dei punti costituenti il semipiano alla sua destra.

Quindi dal triangolo orientato discende una ripartizione del piano tra 8 parti: l'insieme dei punti interni, l'insieme dei punti del suo perimetro, l'insieme (III) dei punti a destra di AB e a sinistra dei due lati rimanenti, l'insieme (IV) dei punti a destra di BC e a sinistra dei due lati rimanenti, l'insieme (V) dei punti a destra di CA e a sinistra dei due lati rimanenti, l'insieme (VI) dei punti a sinistra di AB e a destra dei due lati rimanenti, l'insieme (VII) dei punti a sinistra di BC e a destra dei due lati rimanenti, l'insieme (VIII) dei punti a sinistra di cCA e a destra dei due lati rimanenti.

L'insieme dei punti del triangolo $T = \triangle A,B,C$ si può ottenere come intersezione dei semipiani chiusi positivi definiti, risp., dalle rette $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{BC'}$ e $\overrightarrow{CA'}$.

B31 d.09 Dato un insieme S di punti del piano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ si dice **chiusura convessa** di S, e si scrive **Cnvx**(S) il più ridotto insieme convesso di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che contiene S.

La chiusura convessa di in poligono convesso è lo stesso poligono.

Si ottiene la chiusura convessa di un poligono dotato di vertici di concavità procedendo a successive modifiche della poligonale, ciascuna delle quali riguarda una sua sottosequenza di vertici $\langle A, C_1, ..., C_h, B\rangle$ nella quale C_1,...,C_h sono consecutivi vertici di concavità, modifica consistente nel sostituire la sottosequenza con il solo lato orientato $\overrightarrow{AB}$.

Con una tale sostituzione si ottiene un poligono che contiene il precedente e presenta un numero strettamente inferiore di vertici di concavità. Quindi effettuando questa manovra di eliminazione dei vertici di concavità sui poligoni che si ottengono successivamente si giunge a un poligono convesso che contiene quello dato.
Si osserva infine che la regione poligonale ottenuta non può essere nè ridotta, nè ampliata.

Per operare su un un poligono $\boldsymbol{P}$ può risultare utile individuare qualche sottoinsieme della regione poligonale di $\boldsymbol{P}$ che goda di deteminate proprietà e sia massimale, nel senso di essere un insieme il più possibile esteso.

In particolare può essere utile un sottoinsieme di $\boldsymbol{P}$ costituito da tutti i punti che si possono collegare con ogni altro punto dello stesso $\boldsymbol{Q}$ con un segmento interno; questo sottoinsieme lo chiamiamo **nucleo-lineare del poligono $\boldsymbol{P}$**.

Per il poligono ambiente $\boldsymbol{P} = \langle_{cy}00\ 20\ 21\ 11\ 12\ 02\rangle$ si trova facilmente che il suo nucleo lineare è $\boldsymbol{P} = \overrightarrow{00,10,11,01}$.
Vicecersa per un poligono ambiente più "contorto" come $\langle_{cy}00,30,32,22,21,11,12,02\rangle$ il nucleo lineare è vuoto.

Aggiungiamo solo che la ricerca del nucleo lineare può essere tentata con successive riduzioni della regione poligonale consistenti nella eliminazione di sottoinsiemi di punti delimitati da segmenti interni appartenenti ai lati che hamnno come estremo un vertice di concavità. In particolare per $\boldsymbol{P} = \langle_{cy}00,4042,32,21,12,02\rangle$ si giunge al nucleo lineare $\langle_{cy}10,30,21\rangle$; e per $\boldsymbol{P} = \langle_{cy}00,20,31,40,50,51,42,53,55,35,24,15,05\rangle$ si trova $\langle_{cy}31,42,24,13\rangle$.

B31 d.10 Tra i quadrilateri convessi si distinguono quelli con due lati opposti paralleli chiamati **trapezi-QQ**; tra i trapezi si distinguono i **trapezi rettangoli** con due angoli contigui retti e i **trapezi isosceli** con due duetti di angoli contigui uguali; i trapezi rettangoli che sono anche isosceli hanno tutti i quattro angoli interni retti (e sono dei rettangoli).

Tra i quadrilateri si distinguono anche gli **aquiloni** (*kytes*), definiti come quadrilateri con due duetti di lati contigui aventi la stessa quadranza.
Vi sono aquiloni convessi e aquiloni concavi.
Le due diagonali di un aquilone sono segmenti ortogonali.

Si dicono **parallelogrammi** o anche romboidi i quadrilateri con i lati opposti paralleli; essi hanno i lati opposti con la stessa quadranza e sono particolari trapezi; le due diagonali di un parallelogramma si intersecano nel punto medio per entrambe.

I quadrilateri che sono parallelogrammi e aquiloni sono detti **rombi** (in inglese *diamonds*); essi hanno i quattro lati di uguale quadranza; le due diagonali di un rombo si intersecano nel loro punto medio e sono ortogonali.

Si definiscono **rettangoli** i quadrilateri con quattro angoli interni uguali (e retti); essi sono parallelogrammi particolari.

Si dicono **quadrati** i quadrilateri che sono sia rettangoli che rombi; essi hanno i lati della stessa quadranza e gli angoli interni retti; le loro diagonali si intersecano nei loro punti medi e formano 4 angoli retti. Tra i quadrati è talora utile distinguere quelli con due lati orizzontali e due lati verticali chiamati **rettangoli-hv** (come $\langle_{cy} 00, 01, 11, 10\rangle$) da quelli con due lati paralleli alla diagonale principale e due lati paralleli alla codiagonale (come $\langle_{cy} 40, 64, 26, 02\rangle$), detti **rettangoli-dd**.

B31 d.11 Chiamiamo **regione poligonale** di un poligono nonintrecciato il sottoinsieme di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ottenuto dall'unione dei punti del suo perimetro e dei suoi punti interni.

La regione poligonale del poligono Ψ si denota con $\mathsf{RegPlgn}(\Psi)$; L'insieme dei suoi punti interni con $\mathsf{Intpt}(\Psi)$; evidentemente $\mathsf{Intpt}(\Psi) = \mathsf{Intpt}(\mathsf{RegPlgn}(\Psi))$.

Dato un poligono orientato nonintrecciato, possono darsi due situazioni: rispetto a un dispositivo mobile che percorre il suo cammino perimetrale, i punti interni aut si trovano sempre alla sinistra aut sempre alla destra. Nel primo caso la regione si dice **regione positiva**, nel secondo **regione negativa**.

Per esempio la regione delimitata dal rettangolo orientato $\langle_{cy} 00, 30, 32, 02\rangle$ è positiva, mentre la regione delimitata dal triangolo $\langle_{cy} 00, 22, 40\rangle$ è negativa.

Un poligono nonintrecciato con regione positiva si dice avere **perimetro antiorario**, mentre a un poligono nonintrecciato con regione negativa si attribuisce **perimetro orario**.

Si dice **chiusura convessa** di un insieme di punti-QQ $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'insieme ottenuto ampliando S con tutti i punti dei segmenti aventi come estremi due punti di S o degli insiemi ottenuti ripetendo questo processo. Questo sovrainsieme di S si denota con $\mathsf{Cnvx}(S)$.

Si dice **chiusura affine** di un insieme di punti $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'insieme ottenuto ampliando S con tutti i punti delle rette passanti per due punti di S. Questo sovrainsieme di S si denota con $\mathsf{Affcl}(S)$.

La chiusura affine di un duetto di punti $\langle P, Q\rangle$ è la retta passante per tali punti; essa è ottenibile come chiusura affine di ogni suo sottoinsieme con due o più punti e in particolare $\mathsf{Affcl} P, Q = \mathsf{Affcl}(\overline{PQ})$.
La retta chiusura affine di un segmento è quindi la retta che prolunga (illimitatamente) il segmento.

Un'altra caratterizzazione dei poligoni nonintrecciati concavi e dei convessi riguarda il fatto che un poligono nonintrecciato Π è convesso sse $\mathbf{Cnvx}(\Pi) = \mathbf{RegPlgn}(\Pi)$, mentre è un poligono concavo sse $\mathbf{Cnvx}(\Pi) \supset \mathbf{RegPlgn}(\Pi)$.

I vertici di un poligono concavo Π che sono estremi di due lati, ossia che contengono punti di $\mathbf{Intpt}(\Pi)$, sono punti interni della chiusura convessa $\mathbf{Cnvx}(\Pi)$.
Questi punti corrispondono ad angoli interni concavi e si dicon **vertici di concavità del poligono**. Un poligono nonintrecciato è concavo sse possiede almeno un vertice di concavità.

La chiusura convessa di un poligono concavo Π porta alla regione poligonale di un poligono convesso Π' ottenuto da Π sostituendo i lati con estremi che sono vertici di concavità con segmenti aventi come estremi vertici di nonconcavità.

B31 d.12 Ogni regione poligonale si può decomporre in regioni poligonali convesse.
Per esempio la regione del quadrilatero concavo $\langle_{cy} 00, 30, 11, 03\rangle$ è data dall'unione della regione delimitata dal triangolo $\langle_{cy} 00, 30, 11\rangle$ con la regione delimitata dal triangolo $\langle_{cy} 00, 11, 02\rangle$.

In generale questa decomposizione porta a regioni dello stesso segno di quella decomposta, ovvero a poligonali dello stesso verso della iniziale. Essa inoltre si ottiene con successive decomposizioni in ciascuna delle quali si abbassa il numero dei vertici di concavità.

Consideriamo la poligonale chiusa

$$\Pi \;:=\; \left\langle_{cy} \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, ..., \overrightarrow{P_{s-1}P_0}\right\rangle$$

e supponiamo che P_0 sia un suo vertice di concavità tale che il suo vertice successivo, P_1, non lo sia. Accade quindi che il segmento $\overline{P_0P_1}$ sia sottoinsieme di $\mathbf{RegPlgn}(\Pi)$. Di conseguenza il triangolo

$$\Pi \;:=\; \left\langle_{cy} \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_0}\right\rangle$$

e il poligono definito dalla poligonale chiusa

$$\Pi \;:=\; \left\langle_{cy} \overrightarrow{P_0P_k}, \overrightarrow{P_kP_{k+1}}, ..., \overrightarrow{P_{s-1}P_0}\right\rangle$$

hanno lo stesso verso del poligono da decomporre e l'unione delle corrispondenti regioni poligonali è $\mathbf{RegPlgn}(\Pi)$.
Con questa manovra un poligono con s lati viene decomposto in uno di 3 lati e uno di $s-1$; in effetti si sono usati due nuovi segmenti orientati, $\overrightarrow{P_kP_0}$ e $\overrightarrow{P_0P_k}$, l'uno opposto dell'altro.
Questa decomposizione può essere ripetuta fino a ottenere un certo numero di triangoli e un poligono convesso.

B31 d.13 Ogni regione poligonale nonintrecciata si può dunque decomporre-mb in triangoli orientati tutti dello stesso segno della originale.
Le regioni triangolari quindi svolgono un ruolo basilare tra le regioni poligonali.

B31 d.14 Una decomposizione più complessa che ancora porta a triangoli si può effettuare anche per poligoni orientati intrecciati.

Innanzi tutto una poligonale intrecciata può essere ricondotta a una poligonale dello stesso genere che attraversa se stessa solo in punti che sono suoi vertici.
Infatti quando un segmento orientato tocca un vertice V si può sostituire con due segmenti orientati collineari che hanno V come vertice comune; inoltre quando due segmenti orientati della poligonale data si intersecano occorre sostituire ciascuno di essi con due segmenti orientati collineari attraverso l'inserimento di un nuovo vertice nel punto di intersezione.

Nella poligonale così ottenuta si individuano sottopoligonali chiuse più corte ciascuna delle quali presenta meno autoattraversamenti. Quindi la poligonale data può essere decomposta come insieme di queste poligonali, ossia può essere sostituita da una cosiddetta **multipolinomiale orientata**.
In generale però tra le regioni piane delimitate dalla multipoligonale nonorientata definita di segmenti periferici (segmenti non racchiusi da altre poligonali nonorientate) se ne possono trovare alcune racchiuse in più poligonali orientate chiuse e altre non racchiuse da alcuna poligonale orientata chiusa.

Questo processo di individuazione di poligonali orientate con meno autoattraversamenti può essere proseguito fino a che si ha solo un insieme di poligonali nonintrecciate.
Conviene segnalare che si possono avere poligoni orientati con orientazione oraria e antioraria, poligoni orientati ripetuti e poligoni contenuti in altre regioni poligonali. Queste possono essere sottoposte al procedimento di triangolarizzazione precedente.
Quindi la poligonale intrecciata di partenza può essere sostituita da poligonali triangolari, le quali possono avere versi opposti e avere estenzioni molto diverse.

La situazione più semplice di questo genere riguarda la poligonale chiusa intrecciata ‘$\langle_{cy} 00, 22, 02, 20\rangle$. Per non avere più punti di attraversamento che non siano vertici si inserisce il vertice 11 e si ha la poligonale chiusa $\langle_{cy} 00, 11, 22, 02, 11, 20\rangle$.
In questa si individua la sottopoligonale chiusa che delimita una regione esterna $\langle_{cy} 00, 11, 20\rangle$; questa ha verso orario e la poligonale rimanente non presenta autoattraversamenti.

La nozione di multipoligonale conviene estenderla facendole comprendere più poligonali anche con regioni associate che non hanno punti-QQ in comune o come si può dire più **poligonali distanti**.
A questo proposito osserviamo che due poligonali distanti si possono connettere aggiungendo due segmenti orientati opposti che abbiano come estremità un vertice dell'una e un vertice dell'altra, operazione più chiara se i due vertici sono poco distanti e se il relativo segmento non tocca altri lati delle due poligonali in causa.

B31 d.15 Procediamo ora ad assegnare a ogni regione poligonale relativa a una poligonale nonintrecciata Π un valore razionale positivo o negativo che rende conto dalla sua estensione, che chiamiamo **area della poligonale** e che denotiamo con $\boldsymbol{Area}(\Pi)$.

All'area si chiede

(a) di essere invariante per traslazione, rotazione e simmetria centrale;

(b) di cambiare di segno per una riflessione;

(c) di essere additiva;

(d) si chiede che per rettangoli-hv con vertici interi dia il numero di quadrati di lato 1 che li ricoprono (in modo da essere coerente con l'area degli insiemi di caselle-ZZ.

Per una tale valutazione si trova che

— deve essere nulla per le poligonali costituite da un cammino-QQ e dal suo opposto;

— una dilatazione per un fattore f per le lunghezze porti a un fattore f^2 per le aree.

Innanzi tutto si definisce l'area delle regioni rettangolari-hv positive, delimitate da un rettangolo con lati orizzontali e verticali orientato in senso antiorario.

$$\boldsymbol{Area}\Big\langle \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_2\rangle \Big\rangle \;:=\; (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\ .$$

Questa è in accordo con invarianza per traslazione, rotazione e simmetria centrale.

Successivamente si definisce l'area di un triangolo rettangolo-hv positivo, triangolo con un cateto orizzontale e uno verticale. Ad esso si attribuisce un'area che è la metà del rettangolo-hv antiorario che lo contiene. Questo è in accordo con la proprietà di additività.

Si definisce poi l'area di un qualsiasi triangolo considerando che può considerarsi parte assieme a tre triangoli-hv di un rettangol-hv e tenendo conto della additività.

Attraverso la triangolarizzazione delle regioni delimitate da poligonali nonintrecciate si ricavano le aree per tutti i poligoni orientati antiorari.
Ai poligoni orientati negativi va assegnata l'area del poligono opposto cambiata di segno.

Si può quindi assegnare un'area a ogni multipoligonale ottenendola grazie alla additività dalle aree dei poligoni nonintrecciati ottenuti dalla sua decomposizione-mf.

B31 e. trasformazioni lineari del piano-QQ

B31 e.01 Le nozioni su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ introdotte nel precedente capitolo B30 e nell'attuale consentono di estendere all'insieme numerico $\mathbb{Q}$ e al piano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ la trattazione delle trasformazioni lineari e delle matrici 2×2 sopra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ svolta in B22f.

Diciamo **trasformazione-QQ lineare** di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ogni funzione del genere $T\in\left\lceil\,\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\longmapsto\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\,\right\rceil$ tale che

$$\forall\ \mathsf{v},\mathsf{w}\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\ \ :\ \ T(\alpha\,\mathsf{v}+\beta\,\mathsf{w})=\alpha\,T(\mathsf{v})+\beta\,T(\mathsf{w})\ . \tag{1}$$

Anche le trasformazioni-QQ lineari sono interamente individuate mediante la conoscenza delle immagini dei due vettori costituenti la base canonica di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ $\mathfrak{b}:=\langle\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2\rangle$, con $\mathsf{e}_x=\mathsf{e}_1:=\langle 1,0\rangle$ ed $\mathsf{e}_y=\mathsf{e}_2:=\langle 0,1\rangle$, grazie alla relazione

$$T_{\mathfrak{b}}\big\langle v_1,v_2\big\rangle\ =\ v_1\,T(\mathsf{e}_1)+v_2\,T(\mathsf{e}_2)\ . \tag{1}$$

Come si è già visto per $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, conviene anche per $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che i vettori siano rappresentati da matrici 2×1 e che le trasformazioni lineari siano rappresentati da matrici 2×2.

Si ritrovano quindi le seguenti relazioni, valide per ogni $\mathsf{v}=\big\langle v_1,v_2\big\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e ogni $T\in\mathbf{Lintr}_{QQ}$.

$$\mathsf{v}_{\mathfrak{b}}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\ . \tag{2}$$

$$T_{\langle\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2\rangle}=T_{\mathfrak{b}}\ :=\ \begin{bmatrix}T_{1,1}&T_{1,2}\\T_{2,1}&T_{2,2}\end{bmatrix}\ , \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}T_{1,1}&T_{1,2}\\T_{2,1}&T_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{1,1}\cdot v_1+T_{1,2}\cdot v_2\\T_{2,1}\cdot v_1+T_{2,2}\cdot v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{1,1}\\T_{2,1}\end{bmatrix}\,v_1+\begin{bmatrix}T_{1,2}\\T_{2,2}\end{bmatrix}\,v_2\quad . \tag{4}$$

$$T_{\mathfrak{b}}=\begin{bmatrix}\mathsf{e}_1\cdot T(\mathsf{e}_1)&\mathsf{e}_1\cdot T(\mathsf{e}_2)\\\mathsf{e}_2\cdot T(\mathsf{e}_1)&\mathsf{e}_2\cdot T(\mathsf{e}_2)\end{bmatrix}\ , \tag{5}$$

B31 e.02 Ricordando B22f04, risulta evidente che anche delle trasformazioni lineari-QQ si possono considerare le combinazioni lineari

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\ ,\ T,U\in\mathbf{Lintr}_{QQ}\ \ :\ \ \alpha\,T+\beta\,U\ :=\ \left\lceil\,\mathsf{v}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mapsto\alpha\,T(\mathsf{v})+\beta\,U(\mathsf{v})\,\right\rceil\ . \tag{1}$$

Inoltre ogni trasformazione lineare-QQ si può esprimere come combinazione lineare delle 4 matrici-ZZ 2×2 di base [B22f04(3)), combinazione con i coefficienti razionali.

Anche le trasformazioni lineari-QQ si possono esprimere utilmente servendosi di proiettori.

B31 e.03 Rileggendo B22f06 e B22f07, risulta evidente come si possa definire il prodotto righe per colonne delle matrici 2×2 su $\mathbb{Q}$, che tale prodotto sia associativo e distributivo rispetto alla somma di matrici e che esso in genere non sia commutativo.

Utilizzando le stesse notazioni si giunge alle seguenti formule

$$\mathsf{T}\text{-}\mathsf{U}\ :=\ \begin{bmatrix}T_{1,1}\,U_{1,1}+T_{1,2}\,U_{2,1}&T_{1,1}\,U_{1,2}+T_{1,2}\,U_{2,2}\\T_{2,1}\,U_{1,1}+T_{2,2}\,U_{2,1}&T_{2,1}\,U_{1,2}+T_{2,2}\,U_{2,2}\end{bmatrix}\ . \tag{1}$$

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\ \ :\ \ (\alpha\,\mathsf{T}+\beta\,\mathsf{U})\text{-}\mathsf{V}=\alpha\,\mathsf{T}\cdot\mathsf{V}+\beta\,\mathsf{U}\text{-}\mathsf{V}\ . \tag{2}$$

Anche per elaborare le matrici sui razionali possono servire le matrici sugli interi introdotte in B22f08 e B22f09:

$$(3) \quad \mathbf{0}_{2,2} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{1}_{2,2} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Prj}_{1\mathfrak{b}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Prj}_{2\mathfrak{b}} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

B31 e.04 La casistica delle matrici 2×2 sugli interi conviene ampliarla per le matrici sui razionali e a questo proposito risulta comodo riprendere B22f10.

Evidentemente l'insieme delle matrici diagonali sugli interi si amplia con le matrici ottenute moltiplicando per un razionale la matrice unità e si può scrivere

$$\{\alpha \in \mathbb{Q} :| \ \alpha \, \mathbf{1}_{2,2}\} \ .$$

Le matrici sui razionali proporzionali alla matrice unità diverse dalla $\mathbf{0}_{2,2}$, ossia le matrici della forma $f \, \mathbf{1}_{2,2}$ con $f \in \mathbb{Q}_{nz}$, esprimono le omotetie di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con centro nell'origine, generalizzazioni delle matrici introdotte in B22???. Anche il razionale f si dice **fattore dell'omotetia**.

Si mostra facilmente che tali trasformazioni lineari costituiscono un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{Q}_{nz:mg}$.
In particolare si ha la simmetria centrale del piano-QQ, omotetia relativa al fattore -1.

Tra le matrici diagonali si notano quelle che definiscono le omotetie nelle direzioni orizzontale e verticale

$$\begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} .$$

Riprendendo B22f11, B22f12 e B22f13, si giunge facilmente ad ampliare mediante i numeri razionali insiemi di trasformazioni lineari come le glissazioni e le rotazioni.

B31 e.05 Si dimostra che le due rette-QQ L ed M sono parallele sse si trova un $\langle p, q\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $L +^{ce} \langle p, q\rangle = M$.
In particolare L ed M sono rette orizzontali parallele sse si trova $q \in \mathbb{Q}$ tale che $L +^{ce} \langle 0, q\rangle = M$ e sono rette verticali parallele sse si trova $p \in \mathbb{Q}$ tale che $L +^{ce} \langle p, 0\rangle = M$.
Rileviamo che si possono avere due costruzioni che conducono a due rette che si rivelano coincidenti: per trattare una tale situazione è utile considerare le due costruzioni come costruzioni di un duetto di rappresentazioni di rette parallele.
Questo consente di chiarire facilmente che il parallelismo tra rette-QQ costituisce una relazione di equivalenza tra tali oggetti geometrici.

B31 f. sistemi di due equazioni lineari sui razionali

B31 f.01 Abbiamo visto che un'equazione lineare in due incognite sui razionali, cioè una relazione della forma $a\,x + b\,y = c$, se $a^2 + b^2 > 0$ individua una retta in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, mentre se $a = b = 0$ è inutile, in quanto se $c \neq 0$ esprime una assurdità, mentre se $c = 0$ asserisce che $0 = 0$, cioè esprime una banalità.

Si dice **sistema di 2 equazioni lineari in 2 incognite sui razionali** o **sistema 2 per 2 di equazioni lineari sui razionali** in sigla **SELQ2** , la relazione tra le variabili x e y su $\mathbb{Q}$ esprimibile nella forma

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2 \end{cases} \qquad \text{con} \quad a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Q} \ \text{ e } \ {a_1}^2 + {b_1}^2, {a_2}^2 + {b_2}^2 > 0 \text{ ‘}$$

da intendersi come condizioni per la significatività delle equazioni $a_1\,x + b_1\,y = c_1$ e $a_2\,x + b_2\,y = c_2$. L"insieme dei suddetti sistemi lineari si può denotare con LESysQQ.

Si dice **soluzione del sistema 2 per 2 di equazioni lineari** precedente una coppia di razionali $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che sostituendo nel sistema (1) $\overline{x}$ alla x e $\overline{y}$ alla y le due equazioni esprimono due identità.

B31 f.02 L'interpretazione geometrica delle possibili soluzioni di un SELQ2 è semplice e utile: dato che ciascuna delle due equazioni individua una retta-QQ, una soluzione del sistema, se esiste, esprime un punto-QQ che appartiene a entrambe le rette.

È quindi evidente che ci possiamo aspettare tre situazioni.

(a) Le due rette non sono parallele e presentano un solo punto in comune; in questo caso il SELQ2 si dice **sistema determinato**.
(b) le due rette sono parallele e diverse e quindi non presentano alcun punto in comune; in questo caso si parla di **sistema impossibile**.
(c) le due rette coincidono e quindi ciascuno dei loro punti-QQ fornisce una soluzione; in questo caso il SELQ2 si dice **sistema indeterminato**.

B31 f.03 Affrontiamo dunque il problema di come individuare la possibile soluzione dei sistemi f01(1), lasciando per il solo ultimo paragrafo il caso in cui $c_1 = c_2 = 0$.
Avvertiamo che in seguito useremo il termine "possibile soluzione" per evitare di distinguere i casi di soluzione unica, di nessuna soluzione o di infinite soluzioni costituenti una retta.

Si tratta di tenere sotto controllo un insieme di equazioni caratterizzate da 6 parametri. Tra questi si possono individuare varie trasformazioni del SELQ2 che lasciano invariata la soluzione, cioè delle simmetrie del sistema.

In particolare scambiando l'ordine delle equazioni non cambia la soluzione; inoltre moltiplicando per un qualsiasi fattore $q \in \mathbb{Q}_{nz}$ i tre parametri a_1, b_1 e c_1 non cambia la retta individuata e quindi non cambia la soluzione; di conseguenza non cambia la soluzione anche moltiplicando per un qualsiasi $q \in \mathbb{Q}_{nz}$ i tre parametri a_2, b_2 e c_2.

Osserviamo anche che se si scambiano i ruoli delle variabili x e y si passa da una coppia di rette alla coppia delle rette ottenibili per riflessione rispetto alla diagonale principale del piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
In ogni caso l'insieme dei SELQ2 è piuttosto articolato e il problema posto richiede delle attenzioni.

Tuttavia come vedremo il controllo dei SELQ2 si riesce ad effettuare in modo del tutto soddisfacente: individueremo un procedimento che a partire da una qualsiasi scelta dei 6 parametri, ossia per qualunque SELQ2, sa stabilire se ci troviamo di fronte a un sistema (a) determinato, (b) impossibile o (c) indeterminato e nel caso (a) trova la soluzione come funzione dei 6 parametri e nel caso (c) trova

una espressione della retta basata sui 6 parametri. Vedremo in seguito come questo procedimento si può generalizzare in due direzioni, ossia estendendo l'insieme numerico $\mathbb{Q}$ (ai numeri reali e ai numeri complessi) e trattando sistemi di più equazioni in più incognite.

B31 f.04 Un SELQ2 particolarmente semplice è quello con $b_1 = 0$ (e quindi $a_1 \neq 0$) e con $a_2 = 0$ (e quindi $b_2 \neq 0$); la simmetria delle due equazioni non rende necessario soffermarsi sul caso $b_2 = a_1 = 0$. Nel suddetto caso la soluzione è immediata: $\overline{x} = c_1/a_1$ e $\overline{y} = c_2/b_2$. Geometricamente si ha la soluzione come intersezione di una retta verticale con una orizzontale.

Altri SELQ2 molto semplici sono quelli nei quali $a_1 = a_2 = 0$ e quindi $b_1, b_2 \neq 0$. In questi casi le rette delle due equazioni sono verticali, la $y = c_1/b_1$ e la $y = c_2/b_2$; esse coincidono sse $c_1\, b_2 - c_2\, b_1 = 0$ e il sistema è indeterminato; se viceversa $c_1\, b_2 \neq c_2\, b_1$ le rette sono diverse e il sistema è impossibile, non ha alcuna soluzione.

Simmetricamente se $b_1 = b_2 = 0$ il SELQ2 esprime due rette orizzontali che possono coincidere o meno.

Altri casi trattabili direttamente sono quelli nei quali uno solo dei coefficienti è uguale a zero.
Per fissare senza rinunciare alla sostanziale generalità supponiamo sia $a_1 = 0$, gli altri casi essendo riducibili ad esso senza difficoltà.

La prima equazione equivale alla $y = c_1/b_1$, cioè fornisce una retta orizzontale e si tratta di trovare la sua intersezione con la retta $a_2\, x + b_2\, y = c_2$. Per questo basta sostituire la variabile y nell'altra equazione con il valore c_1/b_1, ottenere la $a_2\, x + b_2\, c_1/b_1 = c_2$, osservare che questa equivale alla $x = \dfrac{c_2\, b_1 - b_2\, c_1}{b_1\, a_2}$ e concludere che il sistema è determinato.

B31 f.05 Illustriamo ora alcuni procedimenti applicabili in generale. Va detto che si tratta di procedimenti in tutto equivalenti, ottenibili l'uno dall'altro con biiezioni tra raggruppamenti intercambiabili di parametri.

Il **metodo della sostituzione** si sviluppa con i seguenti passi.

[1] Da una delle due equazioni, diciamo dalla prima equazione, si ricava un'espressione per una incognita, diciamo la prima, in funzione dell'altra.
[2] Nella'altra equazione, seconda equazione, si sostituisce la prima incognita con l'espressione in funzione della seconda.
[3] Si cerca di risolvere la seconda equazione nella seconda incognita.
[4] Si sostituisce con il valore auspicabilmente trovato in [3] nell'espressione trovata in [1] per la prima incognita rimasta da determinare.

B31 f.06 Vediamo ora i passi nei quali si sviluppa il **metodo del confronto**.

[1] Da ciascuna delle due equazioni si ricava una espressione per una incognita, che assume il ruolo della dipendente, in funzione dell'altra.
[2] Si uguagliano le due espressioni ottenute ottenendo un'equazione lineare nell'incognita diversa dalla dipendente.
[3] Si cerca di risolvere l'equazione nell'incognita diversa dalla dipendente.
[4] Si sostituisce il valore auspicabilmente trovato in [3] in una delle due espressioni trovate in [1].
[5] Si risolve l'equazione trovata in [4] trovando il valore per l'incognita dipendente.

B31 f.07 Il **metodo di riduzione** si svolge con i seguenti passi.

[1] Si moltiplica per un fattore nonnullo una delle due equazioni o, equivalentemente, si moltiplicano entrambe per fattori nonnulli diversi al fine di ottenere che una delle due variabili compaia nelle due equazioni con coefficienti uguali od opposti.
[2] Se i due coefficienti sono uguali si sottraggono membro a membro le due equazioni, se sono opposti si sommano; in entrambi i casi si ottiene un'equazione lineare in una sola incognita.
[3] Si risolve, se possibile, la suddetta equazione.
[4a] Si sostituisce il valore trovato in una delle due equazioni date per trovare il valore dell'altra incognita.

In alternativa si effettuano i passi [1], [2] e [3] per giungere a un'equazione nella sola incognita rimanente e risolverla.

B31 f.08 Un procedimento applicabile a ogni SELQ2 e in grado di condurre a espressioni esplicite chiaramente interpretabili per le soluzioni è stato introdotto intorno al 1750 da Gabriel Cramer .

Le formule che ottiene si servono della nozione di determinante, entità che in questo capitolo viene vista come funzione dei 4 numeri razionali componenti di una matrice 2×2.

Partiamo ancora dal SELQ2 nella forma data in f01 che trascriviamo

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2 \end{cases} . \tag{1}$$

Combinando linearmente queste due equazioni si deriva il sistema che segue:

$$\begin{cases} (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,x \;=\; b_2\,c_1 - b_1\,c_2 \\ (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,y \;=\; a_1\,c_2 - a_2\,c_1 \end{cases} . \tag{2}$$

La sua prima equazione si ottiene moltiplicando per b_2 la prima equazione di (1) e la seconda per $-b_1$ e sommando le equazioni così ottenute. Analogamente la seconda equazione di (2) si ottiene come somma dell'equazione ottenuta moltiplicando per $-a_2$ la prima equazione di (1) e per a_1 la seconda.

B31 f.09 Osserviamo che il sistema f08(1), che denotiamo con S, si può riscrivere servendosi di matrici:

$$\mathsf{S}_{\mathfrak{V}} \;:=\; \left\lceil \; \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \; \right\rceil . \tag{1}$$

Inoltre, se si introducono i seguenti determinanti di matrici 2×2,

$$\Delta(\mathsf{S}) \;:=\; \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_x(\mathsf{S}) \;:=\; \det \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_y(\mathsf{S}) \;:=\; \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} , \tag{2}$$

la (1) si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} . \tag{3}$$

Il determinante $\Delta(\mathsf{S})$ viene detto **determinante principale del sistema di equazioni** (SELQ2) (1).

Si osserva poi che i determinanti $\Delta_x(\mathsf{S})$ e $\Delta_y(\mathsf{S})$ si possono considerare varianti del precedente ottenute sostituendo, risp., la prima e la seconda colonna della matrice delle equazioni del sistema con la colonna dei suoi termini noti.

B31 f.10 Per la soluzione di S si devono distinguere i due casi: [A] $\Delta \neq 0$ e [B] $\Delta = 0$.

Nel caso [A] da f09(3) si ottengono subito le espressioni della soluzione del sistema dato

$$x \;=\; \frac{\Delta_x}{\Delta} \;=\; \frac{c_1\,b_2 - c_2\,b_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} \qquad , \qquad y \;=\; \frac{\Delta_y}{\Delta} \;=\; \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} . \tag{1}$$

Queste sono chiamate **formule di Cramer per il sistema** (SELQ2) f08 (1). Esse sono conseguenza di f08(1): ogni soluzione di tale sistema deve essere soluzione di f09(3). Le formule di Cramer garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione di f08(1) nel caso sia $a_1\,b_2 \neq a_2\,b_1$.

Nel caso [B], $\Delta = 0$, si possono presentare due sottocasi: [B1] uno almeno dei determinanti Δ_x e Δ_y non è nullo, oppure [B2] $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$.

Nel caso [B1] una almeno delle uguaglianze f09(3) è impossibile e questo equivale a dire che tale sistema non possiede soluzioni e quindi che anche il SELQ2 in esame non possiede soluzioni, in quanto implica f09(3).

Nel caso [B2] il sistema in esame possiede infinite soluzioni. Infatti la $\Delta = a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0$ equivale alla $a_1\,b_2 = a_2\,b_1$, la $\Delta_x = 0$ equivale alla $c_1\,b_2 = c_2\,b_1$ e la $\Delta_y = 0$ equivale alla $a_1\,c_2 = a_2\,c_1$. Queste tre relazioni dicono che le due equazioni del sistema sono equivalenti; entrambe individuano una sola retta-QQ, rappresentabile indifferentemente come $a_1\,x + b_1\,y = c_1$ o come $a_2\,x + b_2\,y = c_2$.

Segnaliamo che le relazioni precedenti si presentano anche scrivendo

$$\text{(2)} \qquad \Big|'' \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \,''\Big| \ .$$

Le specifiche parentesi introdotte in questa formula hanno lo scopo di delimitare **relazioni di proporzionalità**, relazioni per le quali si intende prescindere dal caso nel quale i tre denominatori sono nulli (si osserva che se è nullo uno dei tre, devono essere nulli anche gli altri due).
Questa notazione sarà utilizzata ampiamente in G36b08.

B31 f.11 Il complesso delle conclusioni alle quali si è giunti conviene sia visto anche attraverso l'interpretazione geometrica del determinante vista in B24d, per le matrici 2×2 su $\mathbb{Z}$, conclusioni chiaramente estendibili all'insieme delle matrici 2×2 su $\mathbb{Q}$, insieme molto più comprensivo e facile da utilizzare.

Se il determinante del sistema Δ è diverso da 0 il parallelogramma trasformato del quadrato elementare di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nondegenera in un segmento e la trasformazione lineare f08(1) è biiettiva, ossia invertibile.

Dato il punto-QQ $\langle c_1, c_2 \rangle$ si individua univocamente il punto-QQ $\langle x, y \rangle$ dal quale esso è stato trasformato dalla matrice del sistema.

Viceversa se il determinante Δ è nullo, le due rette individuate dalle due equazioni del sistema sono parallele, in taluni casi essendo diverse [B1], in altri coincidenti [B2].

Si osserva che dal sistema **S** di f08(2), con semplici manipolazioni, si ricava il sistema

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,(a_1\,x + b_1\,y) = (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,c_1 \\ (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,(a_2\,x + b_2\,y) = (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,c_2 \end{cases} ,$$

il quale, se $\Delta = a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \neq 0$, implica il sistema f08(1); in questo caso quindi i due sistemi sono equivalenti.

B31 f.12 Si è trovato che in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ due rette-QQ non parallele hanno sempre uno e un solo punto in comune, cosa che in genere non accade in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Infatti per individuare tale punto devono essere soddisfatte entrambe le equazioni delle rette, cioè si deve trovare una loro soluzione e una sola. Il punto intersezione si trova facilmente, cioè si trovano facilmente espressioni razionali per le sue coordinate: sono le formule di Cramer f10(1).

Dunque nel piano razionale trovano piena soluzione i sistemi di due equazioni lineari in due incognite con coefficienti razionali.

Questo fatto sarà generalizzato al caso di sistemi di n equazioni lineari in n incognite reali e costituisce una proprietà che procura elevata importanza computazionale ai numeri razionali e alle relative operazioni.

B31 f.13 Si può infine considerare il caso in cui $c_1 = c_2 = 0$, caso chiamato del **sistema lineare omogeneo 2 per 2** . (o 2×2) Tale sistema ovviamente ammette la soluzione $\langle 0, 0 \rangle$, quella che viene chiamata "soluzione banale".

Nel caso sia $\Delta \neq 0$ il sistema omogeneo non ammette alcuna soluzione diversa dalla banale. Se invece $\Delta = 0$ il sistema ammette un'infinità di soluzioni. dunque il sistema omogeneo 2×2 ammette soluzioni non banali sse il suo determinante principale è nullo.

B31 g. gruppo dei movimenti rigidi nel piano-QQ

B31 g.01 Data una retta-QQ R e un punto-QQ $P = \langle x_P, y_P \rangle$ esterno a essa, si trova una retta-QQ P passante per P e ortogonale a R.
Si trova poi il punto intersezione $H := \mathsf{R} \cap \mathsf{P}$ H, punto chiamato proiezione ortogonale di P su R.
H è il punto di R che tra tutti i punti della R rispetto al punto P presenta la minima quadranza.

B31 g.02 Sulla retta-QQ P, più precisamente sulla semiretta appartenente a P con vertice in H e che non contiene P si trova il punto P' tale che $\mathsf{Qdr}(H, P') = \mathsf{Qdr}(H, P)$. Esso si dice **riflesso del punto** P **rispetto alla retta** R.

La trasformazione che a ogni punto-QQ associa il suo riflesso si dice **riflessione rispetto alla retta** R e si denota con $\mathsf{Mirr}_{QQ}[\mathsf{R}]$.

Evidentemente questa endofunzione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è una permutazione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e più precisamente è una involuzione; infatti il riflesso di P' è il punto riflesso di P.
I suoi punti fissi sono i punti di R.

B31 g.03 Il prodotto di composizione di due riflessioni-QQ rispetto a due rette-QQ parallele è una traslazione-QQ.

Il prodotto di composizione di due riflessioni-QQ rispetto a due rette-QQ non parallele è una rotazione-QQ avente il centro nel punto di intersezione delle due rette.

B31 g.04 Le traslazioni-QQ, le rotazioni-QQ e le riflessioni-QQ non cambiano la quadranza tra due punti-QQ. Esse generano un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di QcQ chiamato **gruppo dei movimenti rigidi del piano-QQ**.

Sia le traslazioni-QQ, che le rotazioni-QQ e le riflessioni-QQ sono tre sottogruppi del gruppo dei movimenti rigidi; essi si possono chiamare sottogruppi delle trasformazioni rigide fondamentali,

In effetti ogni movimento rigido si può esprimere significativamente come prodotto di trasformazioni rigide fondamentali.

B31 g.05 I movimenti rigidi-QQ sono trasformazioni-QQ lineari, in quanto sono trasformazioni lineari le trasformazioni fondamentali, cioè le traslazioni-QQ, le rotazioni-QQ e le riflessioni-QQ.

È utile distinguere i movimenti rigidi positivi dai negativi: i primi sono esprimibili come prodotti di traslazioni e rotazioni, i secondi sono esprimibili come prodotti di trasformazioni fondamentali comprendenti almeno un numero dispari di riflessioni.
I più semplici movimenti rigidi negativi sono le riflessioni.

Conviene segnalare esplicitamente che i movimenti rigidi non esauriscono le trasformazioni lineari: tra le trasformazioni lineari che non sono movimenti rigidi vi sono le omotetie, le rotoomotetie e le glissazioni.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php