1

Capitolo B30
insieme dei razionali e piano sui razionali

Contenuti delle sezioni

48 pagine

B300.01 Nelle prime sezioni del presente capitolo si riprende l'esame sistematico dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali definito come estensione dell'insieme degli interi attraverso una interpretazione delle frazioni con la geometria del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che porta a una interessante rappresentazione degli elementi di $\mathbb{Q}$ mediante direzioni nello stesso $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Successivamente si introduce il piano dei punti a coordinate razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ed entro di esso si definiscono varie nozioni della tradizione del calcolo vettoriale.
Dall'esame di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e dalla sua visualizzazione si ricavano vari spunti sulle possibilità operative dei numeri razionali e sulla loro portata in quanto strumenti per la soluzione di problemi quantitativi.

Si riprendono poi le terne pitagoriche e si interpretano considerano le loro due prime componenti come lunghezze dei cateti dei cosiddetti triangoli pitagorici e ci si avvale della possibilità di assegnare ai punti-QQ pitagorici coordinate polari razionali e di associarli a rotodilatazioni per sviluppare proprietà della geometria di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e delle stesse terne pitagoriche.

Si affronta in tal modo la introduzione in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ delle circonferenze, degli angoli, delle rotazioni e delle funzioni trigonometriche, oggetti che si rivelano strumenti di calcolo di notevole portata e che aprono la possibilità di gestire misure di precisione illimitatamente elevata con le quali ci si può ripromettere di affrontare una vasta gamma di calcoli approssimati.

B30 a. insieme delle coppie di razionali

B30a.01 Riprendiamo gli insiemi ricorsivi, insiemi che possono essere rappresentati da una lista illimitata generata da una MSPGI seguendo un ordinamento algoritmico [B18b] e per la quale quindi si può risolvere il problema dell'appartenenza [B18e].

La presentazione di un insieme ricorsivo mediante una MSPGI che lo genera ha il vantaggio di avere a disposizione uno strumento utilizzabile per varie costruzioni sui suoi elementi.
Risulta quindi significativo qualificare gli insiemi ricorsivi come **insiemi generabili-iop**, ossia come insiemi generabili da una determinata procedura illimitatamente produttiva in grado di generare secondo un ordine noto e senza ripetizioni le stringhe che rappresentano i suoi elementi.

Per molte argomentazioni risulta utile la possibilità di ricavare dalla procedura generatrice per ogni stringa di un insieme ricorsivo l'intero progressivo che esprime la fase temporale nella qualè stato generato.

Oltre a $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, troveremo facilmente molti altri utili insiemi ricorsivi, ad esempio l'insieme delle terne pitagoriche, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

B30a.02 Si osserva che noti due insiemi generabile-iop mediante le MSPGI che li generano, si individuano facilmente una MSPGI che genera la loro unione e una seconda MSPGI in grado di generare il loro prodotto cartesiano. In particolare sono generabili-iop $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{P}$.
Inoltre è generabile-iop ogni insieme ottenibile da un insieme generabile-iop mediante l'eliminazione dei suoi elementi che posseggono una caratteristica algoritmicamente decidibile.

Chiamiamo **insieme dei numeri razionali positivi** e denotiamo con $\mathbb{Q}_+$ l'insieme delle coppie di interi positivi coprimi

$$\mathbb{Q}_+ \ := \ \{d, n \in \mathbb{P} \;⁆\; d \perp n \;:|\; \langle d, n \rangle\} \ .$$

(1) Prop.: L'insieme $\mathbb{Q}_+$ è generabile-iop.

Dim.: Una MSPGI che genera le coppie costituenti $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ procede a visitare diagonalmente questo prodotto cartesiano.
Occorre anche controllare per ogni coppia generata $\langle d, n \rangle$ se sia $d \perp n$, caratteristica algoritmicamente decidibile, ad esempio mediante il calcolo del massimo comun divisore di d e n.
La MSPGI richiesta dopo ciascuna fase di generazione di una coppia $\langle d, n \rangle$ deve effettuare la sua emissione solo se la sua coprimalità risulta soddisfatta ▮

Chiamiamo **insieme dei numeri razionali negativi**, e denotiamo con $\mathbb{Q}_-$,

$$\mathbb{Q}_- \ := \ \{d, n \in \mathbb{P} \;⁆\; d \perp n \;:|\; \langle -d, n \rangle\} \ .$$

Diciamo opposto del numero razionale $\langle d, n \rangle$ il razionale $\langle d, -n \rangle$. Quindi $\mathbb{Q}\_$ si può chiamare insieme degli opposti dei numeri razionali positivi.

Chiamiamo **insieme dei numeri razionali** $\mathbb{Q} \ := \ \mathbb{Q}_- \,\dot{\cup}\, \{0\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{Q}_+$.

(2) Prop.: L'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ è generabile-iop.

Dim.: Una MSPGI in grado garantire l'asserto inizia generando in numero 0 e successivamente si serve della macchina utilizzata per (1) e dopo che essa ha individuato una coppia $\langle d, n \rangle$ di positivi coprimi si incarica di emettere questa coppia e la coppia $\langle d, -n \rangle$ che esprime il numero suo opposto ▮

Risultano utili anche le notazioni $\mathbb{Q}_{0+} := \{0\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_{-0} := \mathbb{Q}_- \,\dot{\cup}\, \{0\}$ e $\mathbb{Q}_{nz} := \mathbb{Q}_- \,\dot{\cup}\, \mathbb{Q}_+$.

Al numero 0 possiamo associare tutte le coppie $\langle d,0\rangle$ con $d \in \mathbb{R}_{nz}$; A ciascuna coppia $\langle d,n\rangle \in \mathbb{Q}_+$ associamo la scrittura $\dfrac{n}{d}$ e a ogni numero razionale negativo $\langle d,-n\rangle$ associamo la scrittura $\dfrac{-n}{d}$; Le precedenti scritture le chiamiamo **forme frazionarie** rappresentanti i numeri razionali.

B30a.03 È opportuno presentare i numeri razionali come componenti della cosiddetta **retta razionale**, modello visuale assai vantaggioso.

Per ottenere questo modello riprendiamo il modello del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e mettiamo e fuoco la retta-ZZ verticale $[x=1]$.

Si individuano poi le rette-ZZ passanti per l'origine e qualcuno dei punti $\langle d,n\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{N}$, ossia le rette-ZZ $\overline{\langle 0,0\rangle,\langle d,n\rangle}_Z$.
Evidentemente due di queste rette-ZZ $\overline{\mathbf{0},\langle d,n\rangle}_Z$ e $\overline{\mathbf{0},\langle c,m\rangle}_Z$ coincidono sse si trovano due interi diversi da 0 h e k per i quali $h\,\langle d,n\rangle \;=\; k\,\langle c,m\rangle$.
A ciascuna di queste ben determinate rette-ZZ $\overline{\mathbf{0},\langle d,n\rangle}_Z$ si può associare il punto ad ordinata razionale della $[x=1]$ che si può denotare con $\left\langle 1,\dfrac{n}{d}\right\rangle$.
Si ha anche la possibilità di scegliere n e d coprimi, ossia chiedere che sia $|n|\perp d$.
Ogni forma frazionaria $\dfrac{n}{d}$ si può usare come rappresentante del numero razionale introdotto come retta $\overline{\mathbf{0},\langle d,n\rangle}_Z$.
Nel modello osservabile di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ se d ed $|n|$ sono piuttosto piccoli è facile e significativo individuare il punto fisico corrispondente a $\dfrac{n}{d}$ sulla retta fisica corrispondente alla retta formale $[x=1]$.

L'insieme (verticale) dei punti $\left\langle 1,\dfrac{n}{d}d\right\rangle$ lo caratterizziamo ancora con la scrittura $[x=1]$, lo consideriamo strettamente simile (useremo il termine isomorfo) a $\mathbb{Q}$ e lo qualifichiamo come retta di componenti razionali o, in breve, come **retta-QQ**.

Sulla retta-QQ $[x=1]$ i numeri si dispongono in modo che il loro valore cresce al crescere della ordinata in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
Questa retta-QQ va anche vista come sovrainsieme della retta-ZZ e quindi in essa si riconoscono i numeri interi come casi particolari di numeri razionali.

La retta-QQ $[x=1]$ si può trasformare biunivocamente con la riflessione rispetto alla diagonale $[y=x]$ nella retta-QQ individuata da $[y=1]$ e attraverso traslazioni negli assi verticale $[x=0$ e orizzontale $[y=0]$.
A partire dai due assi si giunge al modello fisico $[y=0]\times[x=0]$ del cosiddetto **piano sui razionali** o **piano-QQ** per il quale usiamo la notazione $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.
In questo piano si riconoscono le varie rette-QQ passanti per l'origine

$$\left\{q\in\mathbb{P} :\mid \left\langle q,\frac{n}{d}\,q\right\rangle\right\} \;=\; \left[y=\frac{n}{d}\,x\right] ,$$

per ogni $\dfrac{n}{d}\in\mathbb{Q}$, nonché le rette-QQ più generali ottenibili dalle precedenti per traslazione-QQ

$$\left\{q\in\mathbb{P} :\mid \left\langle q,\frac{n}{d}\,q+t\right\rangle\right\} \;=\; \left[y=\frac{n}{d}\,x+t\right] ,$$

per ogni $t\in\mathbb{Q}$.
Queste rette-QQ sono evidentemente sovrainsiemi delle rette-ZZ fornite da espressioni formalmente uguali.

In gran parte delle considerazioni coinvolgenti numeri razionali si possono identificare tali numeri con le loro forme frazionarie, ridotte o nonridotte, e con i punti del modello osservabile della retta razionale e del piano sui razionali.

Tali identificazioni consentono di scegliere i termini, i giri di frase o le immagini che risultano più convenienti nelle varie circostanze espositive.

B30a.04 Riprendiamo le definizioni delle operazioni numeriche sui numeri razionali e le loro proprietà viste in precedenza, e procediamo a presentare altre proprietà di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Si definisce **distanza tra due punti razionali** r ed s il numero razionale nonnegativo espresso da

(1) $$\mathrm{dist}_1(r,s) \;:=\; |r-s| \;.$$

Si tratta di una funzione del genere $\lceil \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longleftrightarrow \triangleright \mathbb{Q}_{0+} \rceil$ che possiede le proprietà che seguono.

(a) Simmetria: $\forall r,s \in \mathbb{Q} \;:\; \mathrm{dist}_1(r,s) = \mathrm{dist}_1(s,r)$.

(b) Positività definita: $\forall r,s \in \mathbb{Q} \;:\; \mathrm{dist}_1(r,s) = 0 \iff r = s$.

(c) Disuguaglianza triangolare: $\forall r,s,t \in \mathbb{Q} \;:\; \mathrm{dist}_1(r,t) \leq \mathrm{dist}_1(r,s) + \mathrm{dist}_1(s,t)$.

Segnaliamo che queste rendono l'uso attuale del termine distanza coerente con la definizione generale della funzione distanza. Come conseguenza vedremo che l'insieme dei razionali costituisce un esempio di spazio metrico.

Si usa dire che la retta razionale ha la caratteristica della densità; vediamo l'equivalente formale di questa affermazione intuitiva.

(2) Prop.: (**proprietà di densità di** $\mathbb{Q}$)
Siano dati un qualsiasi razionale r e un razionale positivo ϵ; si trova sempre, cioè per quanto piccolo sia tale ϵ, un razionale s che dista da r meno di ϵ.
Dim.: Basta assumere $s := r - \dfrac{\epsilon}{2}$ oppure $s := r + \dfrac{\epsilon}{2}$ ∎
La proprietà di densità dei razionali si esprime anche dicendo che la retta dei razionali, in quanto particolare spazio metrico, costituisce un **insieme denso** di punti.

B30a.05 L'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto alla somma, alla differenza, ovvero al passaggio all'opposto, al prodotto e al passaggio al reciproco (qualora si escluda il reciproco di 0).
Inoltre $\mathbb{Q}$ è dotato di un ordine totale che amplia l'ordine totale '$\leq$" degli interi e che possiamo denotare con lo stesso simbolo.

Questa relazione è facilmente decidibile con considerazioni su numeri interi.
Infatti se si devono confrontare due razionali a/b e c/d diversi tra di loro,
- se uno è 0 decide il segno dell'altro;
- se hanno segno diverso il negativo è minore del positivo;
- se sono entrambi positivi si ha $a/b < c/d$ sse $a \cdot d < b \cdot c$,
- se sono entrambi negativi, supposto che sia $b, d < 0$, si ha ancora $a/b < c/d$ sse $a \cdot d < b \cdot c$.

Si trova inoltre che le operazioni di somma, differenza, prodotto per una costante numerica e divisione per un razionale diverso da 0 o conservano la relazione d'ordine o la modificano nella opposta.
Quindi la relazione $\leq$, che si rivela assai utile, risulta effettivamente maneggevole.

B30a.06 Ricordiamo che con **ordine totale sequenziale** intendiamo una relazione d'ordine $\preceq$ tale che:
- è noto l'elemento primo (o minimo) del suo terreno, ossia l'elemento inferiore di tutti i rimanenti;
- preso un qualsiasi elemento a del suo terreno, è possibile individuare un altro elemento b che costituisce il suo successivo; per questo scriviamo $b = \boldsymbol{succ}(a)$ servendoci della cosiddetta **funzione successore**, identificabile con la trasposta privata dell'uguaglianza della relazione $\preceq$.

Dato un insieme può essere utile riuscire ad effettuare una sua **sequenzializzazione**, cioè riuscire a dotarlo di ordine totale sequenziale, ovvero riuscire a individuare un suo primo elemento e una sua funzione successore.

Evidentemente a tutti gli insiemi generati-iop si può attribuire un ordine totale sequenziale, quello ottenibile con lo stesso processo di generazione illimitata progressiva; lo stesso accade agli insiemi per i quali si conosce una biiezione con l'insieme $\mathbb{N}$ o con un qualsiasi altro insieme generabile-iop.

(1) Prop.: L'ordine "$\leq$" tra i numeri razionali non è un ordine sequenziale.

Dim.: Argomentiamo per assurdo: se per un qualsiasi $r \in \mathbb{Q}$ si proponesse come suo successore un razionale s maggiore di r, si avrebbe $r < \dfrac{r+s}{2} < s$, contro la pretesa di individuare un unico successore di r ▮

B30a.07 È invece un ordine sequenziale l'ordinamento di $\mathbb{Q}$ derivante dal procedimento per la progressiva generazione dei razionali; questa relazione d'ordine la chiamiamo **ordinamento diagonale di Cantor** e proponiamo di denotarla con $\preceq_{Cntr}$.

Si tratta quindi di precisare un procedimento per generare-iop tutti i numeri razionali secondo $\preceq_{Cntr}$.

Il procedimento si sviluppa in una successione di fasi che contrassegnamo con $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
Generato $\langle 0, 0\rangle$ nella fase 0, ciascuna delle successive fasi j procede a esaminare le coppie $\langle d, n\rangle$ con $|n| + d = j$; all'interno della fase j si esaminano le coppie $\langle j + 1 - i, i\rangle$ per $d = 1, 2, ..., j$ e per ciascuna coppia si aggiungono alla lista dei razionali $-\dfrac{d}{j+1-d}$ e $\dfrac{d}{j+1-d}$ sse d e $j + 1 - d$ sono coprimi, ossia sse $\mathrm{MCD}(d, j + 1 - d) = 1$.

In tal modo si procede a generare la lista

$$0, -1, 1, -2, 2, -1/2, 1/2, -3, 3, -1/3, 1/3, -4, 4, -3/2, 3/2, -2/3, 2/3, -1/4, 1/4, -5, 5, \ \ldots$$

Aggiungiamo un cenno alla **relazione di interposizione** (in inglese betweeness), relazione fondamentale per l'assiomatizzazone della geometria euclidea.
Si tratta in generale di una relazione ternaria *inPos* che riguarda solo terne $\langle a, b, c\rangle$ di oggetti mutuamente diversi che si interpretano dicendo che b è interposto secondo *inPos* tra a e c.
La relazione è tale che $\langle a, b, c\rangle \in inPos$ equivale alla $\langle c, b, a\rangle \in inPos$, mentre implica $\langle b, a, c\rangle, \langle b, c, a\rangle, \langle a, c, b\rangle, \langle c, a, b\rangle \notin inPos$.

In $\mathbb{Q}$ la interposizione è tale che dati due a e c razionali qualsiasi con $a < b$ ogni b tale che $a < b < c$ risulta interposto tra a e c.

B30a.08 Prendiamo in esame il processo di confronto tra i valori due numeri razionali e la sua visualizzazione nel piano-ZZ.

Per questo conviene rappresentare ogni numero diverso da 0 con una frazione avente il denominatore positivo e associando a $\dfrac{y}{x}$ il punto $\langle x, y\rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{Z}_{nz}$.

Più in dettaglio ci poniamo il problema di decidere, dati due razionali mediante due frazioni con denominatore positivo non necessariamente ridotte $r = \dfrac{a}{b}$ ed $s = \dfrac{c}{d}$, quale vale dei tre enunciati incompatibili $r < s$, $r = s$ e $r > s$.

La decisione si ottiene sostituendo ciascuna delle due frazioni con la equivalente avente come denominatore $b\,d$ (potrebbe servire anche il denominatore $m := \mathrm{mcm}(b, d)$) e procedendo a confrontare i due

numeratori:
$$\frac{a}{b}\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}\frac{c}{d}\iff\frac{a\,d}{b\,d}\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}\frac{b\,c}{b\,d}\iff a\,d\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}b\,c\ .$$

Questa scelta tricotomica si visualizza nel semipiano $\mathbb{P}\times\mathbb{Z}$ come confronto tra i punti $\langle b\,d, a\,d\rangle$ e $\langle b\,d, b\,c\rangle$, confronto di immediata evidenza in quanto i due punti appartengono alla stessa retta verticale $x = b\,d$.

Questa situazione è coerente con la associazione tra ogni numero razionale r espresso da $\dfrac{y}{x}$ con $x \in \mathbb{P}$ e $y \in \mathbb{Z}$ e la pendenza r attribuita alla retta-ZZ passante per l'origine e per $\langle x, y\rangle$ (e quindi passante per tutti i punti-ZZ $\langle z\,x, z\,y\rangle$ corrispondenti ai vari interi $z \in \mathbb{Z}$.

Va ricordato che si attribuisce pendenza positiva alle rette-ZZ che spostandoci da sinistra a destra salgono, ossia presentano ordinate via via maggiori, mentre si assegna pendenza negativa a quelle che scendono.

B30a.09 A questo punto è opportuno inserire un riferimento alla nozione astratta e generale di campo, osia di un genere di strutture algebriche [B41]

Useremo il termine "campo" per qualificare un insieme di entità F, il terreno del campo, munito di due operazioni che chiamiamo genericamente "somma" e "prodotto" e che qui denotiamo con $\oplus$ e $\otimes$ le quali godono di proprietà espresse mediante uguaglianze nelle quali intervengono elementi di F generici, due elementi di F particolari ($\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$) e le operazioni passaggio all'inverso per la somma e passaggio all'inverso (o reciproco) per il prodotto.

Queste uguaglianze sono in grado di esprimere le proprietà che abbiamo trovate per i numeri razionali e saranno esaminate più estesamente in B41d.

Il fatto che sopra gli elementi di un campo si apre la possibilità di effettuare operazioni come quelle eseguibili sui razionali implica, come vedremo, che su tali oggetti si apre la possibilità di basare elaborazioni di elevata utilità; questo fatto lo esprimiamo attribuendo agli elementi del terreno di ogni campo una elevata "potenziale valenza numerica, ovvero computazionale".

B30a.10 Come le operazioni sui gruppi astratti, anche le operazioni su un campo astratto sono caratterizzate solo da proprietà richieste (assiomi), prescindendo del tutto da come possano essere costruiti l'insieme terreno e le elaborazioni per le esecuzioni delle operazioni.

Come per tutte le specie di strutture algebriche, anche la possibilità di trattare una struttura astratta della specie campo comporta vantaggi molto rilevanti per l'organizzazione complessiva delle conoscenze matematiche, cioè per la presentazione che aspira di essere sistematica di fatti formali da mettere a disposizione per ulteriori sviluppi sia di interesse generale che di interesse per specifiche applicazioni.

Come per i gruppi e per altre specie di strutture, anche per i campi attraverso deduzioni che si basano solo sulle proprietà formali, cioè su enunciati derivabili logicamente dagli assiomi della specie, si possono ottenere risultati validi per una grande varietà di strutture concrete, cioè di strutture individuate con costruzioni specifiche riconducibili ad **ambienti fondamentali** (come $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e loro composizioni).

Inoltre su molte strutture astratte si individuano, spesso con relativa facilità, algoritmi e metodi di calcolo che si rivelano di grande utilità per ampie categorie di applicazioni nell'ambito delle quali corrispondenti procedimenti specifici non sarebbe stato agevole individuare.

A questo punto le conclusioni precedenti sopra le operazioni di somma e prodotto tra numeri razionali, sopra le rispettive operazioni inverse e sopra il fatto che esse rispettano l'ordinamento $\leq$, si possono riesprimere concisamente (algebricamente) affermando che l'insieme dei numeri razionali è un campo numerabile, totalmente ordinato e denso.

B30 b. piani su reciproci di interi maggiori di 1

B30b.01 Nella definizione del modello osservabile del piano sugli interi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in B20b02 si è utilizzata una unità di misura per le lunghezze alla cui scelta non è stato posto alcun vincolo.
Conviene tuttavia raccomandare cautela sugli ordini di grandezza delle unità di misura dei modelli osservabili: è opporuno che riguardino lunghezze comprensibili per l'intuizione comune, grosso modo tra i decimi di millimetro e le migliaia di chilometri.

È comunque ragionevole che due gruppi di agenti motivati da esigenze applicative diverse facciano riferimento a modelli basati su unità di misure diverse per gli oggetti osservabili che rappresentano i numeri $q \in \mathbb{Q}$.

Si considerino per esempio un disegnatore incaricato di produrre mappe topografiche e un altro incaricato di disegni tecnici; entrambi usano una carta millimetrata, ma ad esempio il primo utilizza una scala $1:50\,000$, e il secondo fa riferimento a una scala 1:50.

I due modelli osservabili corrispondono alla stessa entità formale $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; mentre i modelli osservabili devono tener conto di esigenze specifiche, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ deve essere in grado di sostenere le esposizioni di sviluppi conoscitivi di ampio raggio.

Confrontiamo in particolare due modelli $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_d$ relativi a due unità delle lunghezze u e $d \cdot u$ con d intero maggiore di 1 (si pensi in particolare a $d = 2$, 10, 1000 e 10^9).

La loro equivalenza sul piano formale è assicurata dall'esistenza di una corrispondenza biunivoca di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la sua parte fornita dalla dilatazione di rapporto d

$$(1) \qquad \boldsymbol{Dil}_d := \left\lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle d\cdot i, d\cdot j\rangle \right\rceil \in \left\lceil \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \right\rceil .$$

Dal confronto tra $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_d$ si evidenzia che il secondo può presentare situazioni più ricche di particolari, mentre il primo può fornire visioni più semplici e di più facile uso, preferibili per chi deve impostare linee solo strategiche, interessate ad affrontare intere problematiche a grandi linee.

B30b.02 La influenza che può avere la scelta della unità di misura sui modelli di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ va esaminata con attenzione soprattutto in relazione al passaggio da un modello $\mathcal{M}_1$ a un modello più aperto ai dettagli $\mathcal{M}_d$, con d maggiore di 1, anche molto maggiore.

Quando si vogliono controllare meglio le simmetrie per riflessioni-ZZK è opportuno fare ricorso a $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$; questo equivale a passare al modello con l'unità di misura dimezzata e trasformare definizioni e conclusioni ottenute in $\mathcal{M}_1$ allr equivalenti in $\mathcal{M}_2$.
La trattazione delle traslazioni richiede di considerare a nuove rette di riferimento, anche per trattare i punti centro di rotazioni-ZZR; se si devono trattare le riflessioni-ZZK rispetto a queste rette risulta necessario adottare come unità di misura un quarto dell originaria; queste richieste nella dirazione della maggiore precisione non hanno limite.

In effetti vedremo molte attività che richiedono di passare a modelli osservabili nei quali un segmento fisico $\overline{\mathsf{0}, \mathsf{e}_x}$ va associato a un nuovo intervallo formale $[\langle 0,0\rangle >, \langle d,0\rangle]$ deve essere effettuato ripetutamente.

La sostanziale equivalenza per le questioni computazionali tra modelli con unità diverse (ridotte a un sottomultiplo o dilatate a un multiplo) si estende per transitività alla equivalenza tra coppie di modelli che si servono di unità di misura che stanno tra di loro in un qualsivogla rapporto razionale $\dfrac{n}{d}$:

$$\mathcal{M}_1 \text{ equivale a } \mathcal{M}_{\frac{1}{d}} \text{ ed } \mathcal{M}_1 \text{ equivale a } \mathcal{M}_n \text{ implicano che } \mathcal{M}_1 \text{ equivale a } \mathcal{M}_{n/d}\ .$$

.

Si riscontra che la possibilità di fare riferimento intercambiabilmente a modelli del piano-ZZ (e in seguito al piano-QQ e altro) basati su diverse unità di misura in linea di principio non presenta difficoltà e questo rende assai versatili le costruzioni formali che si servono di tali modelli.

Aggiungiamo anche che per varie applicazioni possono essere convenienti modelli osservabili che si servono di due diverse unità di misura, una per i segmenti orizzontali l'altra per i verticali; questi modelli si concretizzano in grafici che riguardano una grande varietà di applicazioni: sostanzialmente illustrano relazioni tra due grandezze di generi diversi come tempo e spostamenti, investimenti e produzioni, ...).
Segnaliamo anche che molte applicazioni si avvalgono di grafici con una o due scale logaritmiche o espnenziali. Qui tuttavia procediamo con modelli costruiti con una sola unità e segnaliamo che sono chiamati **modelli di piano monometrici**.

B30b.03 Un modello $\mathcal{M}_1$ riferito a un $\mathcal{M}_d$ con $d = 2, 3, 4, ...$ può considerarsi come la rappresentazione delle coppie di razionali della forma $\left\langle \frac{m}{d}, \frac{n}{d} \right\rangle$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.
L'insieme di tali coppie viene significativamente denotato con $\frac{1}{d}\mathbb{Z} \times \frac{1}{d}\mathbb{Z}$.

Vediamo come si può riferire a essi l'equivalenza di equiinclinazione tra vettori-QQ e tra **vettori.a-QQ**, ossia tra vettori-QQ applicati.

Consideriamo i vettori-QQ $P_1 = \langle 10, 15\rangle$ e $P_2 = \langle 14, 21\rangle$ (detti anche o coppie-QQ o vettori-QQ); dato che $10 \cdot 21 = 15 \cdot 14$, si tratta di vettori-QQ equiinclinati.
Segnati i due punti-QQ su un modello-o $\mathcal{M}_1$ si può verificare che sono sono allineati con l'origine servendoci di righelli accurati o di fasci luminosi ben collimati, ossia con un procedimento analogico.

In tal modo facciamo riferimento al cosiddetto **modello-o** del cosiddetti spazio ordinario, l'ambiente nel quale abbiamo tradizionalmente convenuto di essere immersi.lo spazio nel quale percepiamo di essere immersi
Quindi segnamo $\langle 10, 15\rangle$ su un modello $\mathcal{M}_7$ e $\langle 14, 21\rangle$ su un $\mathcal{M}_5$; sovrapponiamo poi $\mathcal{M}_5$ ed $\mathcal{M}_7$ ad $\mathcal{M}_1$ e vediamo che i due punti vengono a sovrapporsi con il punto $\langle 70, 105\rangle$ su $\mathcal{M}_1$, come richiesto dalla relazione di equiinclinazione $10 \cdot 21 = 15 \cdot 14 = 210$.

Si osserva che l'equivalenza per equiinclinazione è stata trasformata in coincidenza attraverso l'applicazione di due opportune omotetie.

L'allineamento con l'origine riconosciuto con osservazioni empiriche non va considerato come una dimostrazione, ma come un riscontro della validità dei modelli basati su prodotti cartesiani per la rappresentazione di una parte dello spazio fisico, più particolarmente con una parte di un piano.

Per collegarci alla fisica del tomo P, segnaliamo che questa validità è ragionevolmente accettabile quando si trattano fenomeni e misurazioni che si svolgono in regioni spaziali caratterizzate da distanze sotto le astronomiche e dettagli che non vanno al di sotto delle miscoscopiche.

Questi modelli "subastronomici e sovramolecolari" basati sulle esperienze comuni si rivelano invece inadeguati per trattare fenomeni cosmologici che richiedono la `teoria della relatività (wi)` e fenomeni molecolari che si devono spiegare con `teorie quantistiche (wi)`.

B30b.04 Abbiamo visto in a07 che due numeri razionali forniti da frazioni aventi lo stesso denominatore d si possono utilmente visualizzare come punti della retta $x = d$ di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Più in generale consideriamo un problema concreto che si può risolvere mediante un algoritmo che affronta la generica istanza individuata dalla lista di numeri razionali (dati) $\langle r_1, r_2, ..., r_h \rangle$ servendosi di una sequenza finita di passi esecutivi che richiedono operazioni razionali e confronti tra razionali.

Procedendo con l'esecuzione in genere si devono introdurre numeri razionali ausiliari con nuovi denominatori, ottenibili canonicamente dalla funzione MCD; alla conclusione si ottengono risultati numerici razionali che si possono esprimere mediante alcune frazioni con un unico denominatore comune d:

$$\frac{n_1}{d} \;,\; \frac{n_2}{d} \;,\; ..., \;\frac{n_k}{d} \;.$$

Questi numeri si possono rappresentare in modo chiaro con i punti della retta-ZZ $y = d$ aventi come ascisse n_1, n_2, ..., n_k.

Quindi ogni istanza di un problema risolvibile con un complesso finito di operazioni razionali porta a risultati esprimibili nel piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

B30b.05 Per avere chiarire la portata delle elaborazioni effettive sopra accennate conviene ricordare che esse possono usare concretamente solo modelli-o di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aventi estensioni limitate.

Per tenere sotto controllo i modelli ai quali riferire i calcoli con i numeri razionali conviene riferirsi a qualche loro valutazione numerica.

Può essere interessante un modello osservabile che consente di trattare solo numeri razionali che in modulo non superano un intero positivo N, valore che diciamo "misura di estensione" e che sono rappresentabili mediante frazioni il cui denominatore in modulo non supera un intero positivo d, valore che chiamiamo "misura di precisione".

Per molti lavori tecnici si usano fogli di carta millimetrata. Questi costituiscono realizzazioni materiali di un modello con ha come misura di precisione 1 mm e che pone in evidenza i quadrati aventi vertici le cui coordinate sono multipli di 1 cm; si può ragionevolmente immaginre un foglio quadrato avente come misura di estensione 28 cm.

Maggiori esigenze applicative potrebbero essere soddisfatte passando a un foglio di carta millimetrata più esteso e/o con una griglia quadrata più fitta.

B30b.06 Queste maggiori prestazioni si possono ottenere più agevolmente con fogli digitali virtuali visualizzabili tramite finestre che presentano sue zone rettangolari limitate.

Ricordiamo che oggi disponiamo di una grande varietà di dispositivi portatili e non (telefoni smart, navigatori satellitari, e-books, videogiochi tascabili, televisori, pannelli di controllo di macchinari, ...) i cui scermi si possono pensare come visualizzazioni di porzioni rettangolari di un modello del piano-ZZ o del piano-QQ e che possono essere sottoposte facilmente ad operazioni di scorrimento e di cambiamento di risoluzione (ossia di modifica della unità per le lunghezze).

Questi schermi consentono di presentare e gestire mappe topografiche, fotografie, grafici statistici, schemi dotati di scritte esplicative e tanto altr; questi schermi sono dunque in grado di fornire una enorme varietà di informazioni visuali.

Per completezza occorre segnalare che questi schermi consentono operazioni non inquadrabili in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ io in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Possono gestire pixels colorati, sovrapposizione di più griglie virtuali variamente trasparenti, aggiunte di scritte esplicative, immagini in movimento e sonorizzate; inoltre consentono di servirsi di programmi con una quantità di prestazioni.

Dal punto di vista della comprensione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, le sopra ricordate possibilità intendono segnalare la enorme varietà delle applicazioni che su queste nozioni formali e modellistiche si basano.

In particolare conviene osservare che strutture come $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ consentono di trattare grandi flussi cognitivi con conseguenze decisionali e operative di importanza culturale ed economica.

B30b.07 Riprendiamo la quasi equivalenza computazionale tra $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e ZcZ, o più precisamente la loro equivalenza limitata alle elaborazioni finitarie (come vedremo non estendibili alle elaborazioni potenzialmente illimitate).

Consideriamo il calcolo di una espressione $\mathcal{E}$ razionale riguardante operandi razionali, ossia operazioni somma, cambiamento di segno, prodotto e passaggio al reciproco, su numeri razionali.
Osserviamo che se in una espressione compare una sottrazione la si può sostituire con una somma e un cambiamento di segno.
Inoltre se in una espressione compaiono divisioni si può modificare l'intera espressione riducendo ogni divisione a una moltiplicazione per reciproci di quanto espressioni a denominatore.

Il calcolo del valore di $\mathcal{E}$ si può ridurre alla individuazione del massimo comun divisore m dei denominatori degli operandi, alla moltiplicazione per m di tutti gli operandi, al calcolo mediante interi dell'espressione modificata e alla trasformazione con una divisione per una potenza di m di ogni intero risultante intero.

La interpretazione visuale di questi processi corrisponde a dilatazioni di rappresentazioni su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nelle corrispondenti rappresentazioni su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nella esecuzione di operazioni su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e nella riduzione degli interi risultanti su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Questa equivalenza riguarda in particolare la soluzione di un sistema di due equazioni lineari in due incognite che corrisponde alla ricerca del punto-QQ nel quale si intersecano due rette-QQ, che abbiamo visto riconducibile alla ricerca in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di un punto-ZZ intersezione di due rette-RR.

B30 c. piano sui razionali

B30c.01 aspettarsi che possano risultare utili le sequenze di tali oggetti.

Qui ci limitiamo ad operare in due dimensioni e quindi ci limitiamo ad esaminare le più semplici tra le sequenze di razionali, le coppie di numeri razionali e il loro insieme, il quadrato cartesiano

(1) $$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ := \ \{r, s \in \mathbb{Q} :| \ \langle r, s \rangle\} \ .$$

Questo ampliamento di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ può essere visualizzato utilmente con modalità che estendono quelle adottate per descrivere l'insieme delle coppie di numeri interi.
Questo giustifica il fatto di utilizzare per $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ anche i termini **piano sui razionali**, piano razionale e il piùconciso **piano-QQ**.

Più in generale useremo l'aggettivo sincopato "-QQ" per caratterizzare molte altre configurazioni individuate nell'ambiente $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, come punti-QQ, segmenti-QQ, vettori-QQ, rette-QQ, poligonali-QQ, poligoni-QQ, figure-QQ (necessariamente piane), ...

Dal punto di vista delle esecuzioni di calcoli sui numeri razionali finalizzati alla soluzione di una certa gamma 'a di problemi applicativi il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ va accostato ai modelli di piani su reciproci di interi che estendono i modelli di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ visti in b03.

Come si è visto la soluzione di ogni istanza di un problema specifico risolubile elaborando numeri razionali si può collocare significativamente in un modello-o di piano-QQ.

Quando invece si vogliono presentare considerazioni generali, se si proseguisse a fare riferimento a questi modelli (che spesso sono piuttosto realistici) si rischia di dover presentare discorsi prolissi e faticosi da interpretare, simili ai discorsi riguardanti numeri interi che si fossero riferiti solo a insiemi finiti di interi via via più estesi e che sono stati evitati ricorrendo ad ambienti numerabili come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Anche per molti calcoli con numeri razionali conviene servirsi di un ambiente costituito da una infinità numerabile di elementi, le coppie di numeri razionali, ossia di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Un tale ambiente sul piano pratico si può considerare come un anticipo di ulteriori modelli che si renderanno opportuni per necessari risolvere effettivamente nuovi problemi.

B30c.02 Per le nozioni riguardanti $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ conviene servirsi di termini e notazioni vettoriali che estendono quelli adottati per il piano-ZZ, ambiente del quale il piano-QQ è una evidente generalizzazione.

È opportuno anticipare che questa estensione di termini e notazioni verrà effettuata anche con altre generalizzazioni di ambienti e in particolare con la introduzione del piano sui numeri algebrici, di quello sui numeri costruibili, di quelle sui numeri reali, su quelli dei numeri complessi e sugli spazi multidimensionali sui citati insiemi numerici.

Innanzi tutto gli elementi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, i punti-QQ, vengono chiamati anche **vettori-QQ** e ciascuno dei $P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ può venire raffigurato con una freccia che va dall'origine del piano, $\langle 0, 0 \rangle$ allo stesso P.

L'addizione, la differenza e la combinazione lineare di due vettori-QQ, e in particolare il passaggio all'opposto di un vettore-QQ, si definiscono come estensioni cartesiane delle operazioni omologhe per numeri razionali.

(1) $$\forall\, \mathbf{r} = \big\langle r_1, r_2 \big\rangle \ , \ \mathbf{s} = \big\langle s_1, s_2 \big\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \quad : \quad \begin{aligned} \mathbf{r} + \mathbf{s} \ &:= \big\langle r_1 + s_1, r_2 + s_2 \big\rangle \ , \\ -\mathbf{r} \ &:= \big\langle -r_1, -r_2 \big\rangle \ , \\ \mathbf{r} - \mathbf{s} \ &:= \ \mathbf{r} + (-\mathbf{s}) \ = \big\langle r_1 - s_1, r_2 - s_2 \big\rangle \ , \\ \alpha\, \mathbf{r} + \beta\, \mathbf{s} \ &:= \big\langle \alpha\, r_1 + \beta\, s_1, \alpha\, r_2 + \beta\, s_2 \big\rangle \ . \end{aligned}$$

Due vettori-QQ $\mathsf{r} = \langle r_1, r_2 \rangle$ ed $\mathsf{s} = \langle s_1, s_2 \rangle$ si dicono **vettori-QQ proporzionali** sse si trova un $\alpha \in \mathbb{Q}$ tale che $\langle r_1, r_2 \rangle = \alpha \langle s_1, s_2 \rangle$.
Essi si possono anche chiamare vettori-QQ equiorientati e la proporzionalità tra vettori-QQ si può considerare un ampliamento della relazione di equiorientazione entro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\searrow$ $\boldsymbol{AE}_{incl}$ introdotta in b02.

Si dice **vettore.a-QQ** una coppia di vettori-QQ; questo tipo di entità generalizza il tipo dei vettori.a-ZZ. I vettori.a-QQ della forma $\langle \langle 0, 0 \rangle \ , \ \langle a, b \rangle \rangle$ si possono identificare (ossia considerare equivalenti cognitivamente) con i vettori-QQ della forma $\langle a, b \rangle$ e ogni vettore.a-QQ $\langle \langle a, b \rangle \ , \ \langle c, d \rangle \rangle$ si può considerare ottenuto applicando la traslazione-QQ $\boldsymbol{Trsl}[\langle a, b \rangle]$ al vettore.a-QQ $\langle \langle 0, 0 \rangle \ , \ \langle c-a, d-b \rangle \rangle$ o anche al vettore-QQ $\langle c-a, d-b \rangle$.
Due vettori.a-QQ si dicono **vettori equiorientati** sse si possono considerare ottenuti per traslazione-QQ da due vettori-QQ proporzionali.
Due vettori.a-QQ si dicono **vettori equiinclinati** sse si possono considerare ottenuti per traslazione-QQ da due vettori-QQ equiinclinati.
Anche queste relazioni di equiorientazione e di equiinclinazione che coinvolgono sia vettori.a-QQ che vettori-QQ, sono relazioni di equivale e la denotiamo, risp., con $\boldsymbol{AE}_{ornt}$ e con $\boldsymbol{AE}_{incl}$

B30c.03 Al piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si estende, mediante il semplice ampliamento dell'insieme di appartenenza degli operandi, anche la definizione di **prodotto scalare** introdotta per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ [B24e01] ponendo

(1) $$\forall \mathsf{r} = \langle r_1, r_2 \rangle \ , \ \mathsf{s} = \langle s_1, s_2 \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ \vdots \ \mathsf{r} \cdot \mathsf{s} \ := \ r_1\, s_1 + r_2\, s_2 \ .$$

Dalla espressione che lo definisce, come per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si verifica che il prodotto scalare è una funzione bivariata del genere $\lceil \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q} \rceil$, simmetrica nei suoi due argomenti e bilineare, cioè lineare in entrambi i suoi argomenti.

Si osserva che il suo codominio è l'intero $\mathbb{Q}$: infatti per qualsiasi $q \in \mathbb{Q}$ si ha $\langle 1, 0 \rangle \cdot \langle q, r \rangle = q$.
Quindi il prodotto scalare su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è una funzione del genere $\lceil \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longmapsto\!\triangleright \mathbb{Q} \rceil$.

Il prodotto scalare di un vettore-QQ $\mathsf{q} = \langle q_1, q_2 \rangle$ per se stesso, come in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, viene chiamato **quadranza** di tale vettore e per tale funzione si ha l'espressione

(2) $$\mathsf{Qdr}(\mathsf{q}) \ := \ {q_1}^2 + {q_2}^2 \ .$$

Come vedremo la quadranza di un vettore-QQ q viene detta anche o **norma al quadrato** di q e viene denotata anche con $||\mathsf{q}||^2$.

Alcuni esempi: $\mathsf{Qdr}\left\langle -5, \frac{-1}{4} \right\rangle = 25 + \frac{1}{16} = \frac{4001}{16}$, $\mathsf{Qdr}\left\langle \frac{3}{2}, \frac{-1}{3} \right\rangle = \frac{9}{4} + \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$.

Per le espressioni precedenti abbiamo adottato la abbreviazione $\mathsf{Qdr}\langle r, s \rangle \ := \ \mathsf{Qdr}(\langle r, s \rangle)$.

I vettori-QQ con quadranza uguale a 1 sono detti **versori-QQ**.

B30c.04 Si estendeo da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ anche la nozione di vettore applicato definendo **vettore-QQ applicato** una qualsiasi coppia di vettori-QQ (o di punti-QQ); queste entità sono dette anche segmenti-QQ orientati.
Il segmento orientato $\langle P, Q \rangle$ si denota anche con $\overrightarrow{PQ}$.

Accanto alla nozione di segmento-QQ orientato si considera quella di segmento-QQ (nonorientato): per segmento-QQ relativo ai punti-QQ P e Q si intende il duetto $\{P, Q\}$. Esso in molti contesti si può denotare concisamente con PQ .
Evidentemente a un segmento-QQ corrispondono due segmenti-QQ orientati: a $PQ(= QP)$ corrispondono $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$.

La quadranza si definisce anche per i segmenti-QQ orientati e per i segmenti-QQ applicati:

(1) $$\forall\langle P,Q\rangle \;:=\; \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle \;:=\; \Big\langle\langle p_1,p_2\rangle,\langle q_1,p_2\rangle\Big\rangle \in (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\times(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \;\vdots\; \mathsf{Qdr}(PQ) \;:=\; \mathsf{Qdr}(\overrightarrow{PQ}) \;:=\; \mathsf{Qdr}(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = (q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2 \;.$$

Si constata che tra due vettori-QQ $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ nonnulli sussiste la relazione $\mathbf{p}=k\,\mathbf{q}$ (e quindi che essi sono proporzionali) sse $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \;=\; k\,\mathsf{Qdr}(\mathbf{q})$.

Due vettori-QQ $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ nonnulli si dicono **vettori-QQ ortogonali** sse $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=0$.

Come per i vettori-ZZ, per segnlare che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono vettori-QQ ortogonali, si scrive $\mathbf{p}\perp\mathbf{q}$.

La relazione di ortogonalità è chiaramente simmetrica, antiriflessiva e non necessariamente transitiva anche per i vettori di $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})_{nz}$.

Sono esempi di duetti di vettori-QQ ortogonali $\big\{\langle 5/2,1\rangle,\langle -2,5\rangle\big\}$ e $\big\{\langle -3.5,4.5\rangle,\langle -0.9,-0.7\rangle\big\}$.
L'insieme dei vettori-QQ ortogonali ad $\langle a,b\rangle$ è evidentemente $\big\{k\in\mathbb{Z}_{nz} \;:|\; \langle k\,b,-k\,a\rangle\big\}$.

B30c.05 Si dice **traslazione-QQ** associata allo spostamento determinato dal vettore-QQ $\mathbf{s}=\big\langle s_x,s_y\big\rangle$ la trasformazione

(1) $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{s}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}[\mathbf{s}] \;:=\; \lceil P \;=\big\langle p_x,p_y\big\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \;\#\; \big\langle p_x+s_x, p_y+s_y\big\rangle \rceil \;=\; \lceil P\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \;\#\; P+\mathbf{s}\rceil$.

Si trova facilmemte che $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{0}}$ è l'identità $\mathsf{Id}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$, che $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{s}}\circ\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{t}} = \boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{s}+\mathbf{t}} = \boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{t}}\circ\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{s}}$, e che $(\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{s}})^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{Trsl}_{-\mathbf{s}}$.

Questi enunciati consentono di affermare che le traslazioni-QQ costituiscono sottogruppo abeliano [B41b02] del gruppo simmetrico di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Dato che ogni vettore $\mathbf{s}=\big\langle s_x,s_y\big\rangle$, servendosi dei versori $\mathbf{e}_x:=\langle 1,0\rangle$ ed $\mathbf{e}_y:=\langle 0,1\rangle$ si può decomporre come $\mathbf{s}=s_x\,\mathbf{e}_x+s_y\,\mathbf{e}_y$, ogni traslazione-QQ si può ottenere componendo una traslazione secondo uno spostamento orizzontale con una secondo uno spostamento orizzontale:

(2) $$\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{s}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}\big\langle s_x\,\mathbf{e}_x, s_y\,\mathbf{e}_y\big\rangle \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{s_x\,\mathbf{e}_x}\circ\boldsymbol{Trsl}_{s_y\,\mathbf{e}_y} \;.$$

B30c.06 Si dice **omotetia-QQ** di fattore $\lambda\in\mathbb{Q}_{nz}$ e centro nell'origine la trasformazione

(1) $$\boldsymbol{Hmtt}[\lambda,\mathbf{0}] \;:=\; \Big\lceil\; \mathbf{p}=:\big\langle p_x,p_y\big\rangle \;\#\; \big\langle\lambda\,p_x,\lambda\,p_y\big\rangle =: \lambda\,\mathbf{p} \;\Big\rceil \;.$$

Si trova facilmente che $\boldsymbol{Hmtt}[1,\mathbf{0}]$ è l'identità $\mathsf{Id}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$, che

$$\forall\lambda,\rho\in\mathbb{Q}_{nz} \;\vdots\; \boldsymbol{Hmtt}[\lambda,\mathbf{0}]\circ\boldsymbol{Hmtt}[\rho,\mathbf{0}] = \boldsymbol{Hmtt}[\rho\cdot\lambda,\mathbf{0}] = \boldsymbol{Hmtt}[\rho,\mathbf{0}]\circ\boldsymbol{Hmtt}[\lambda,\mathbf{0}] \;.$$

e che $(\boldsymbol{Hmtt}[\lambda,\mathbf{0}])^{-\mathbf{1}} \;=\; -\boldsymbol{Hmtt}[-\lambda,\mathbf{0}]^{-\mathbf{1}}$.

Queste affermazioni consentono di affermare che le omotetie-QQ con centro nell'origine sono permutazioni di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$; più precisamente esse costituiscono un sottogruppo abeliano [B41b02] del gruppo simmetrico di QcQ.

Nel seguito il termine omotetia-QQ con centro nell'origine viene abbreviato con **omotetia-QQc0**.

Le omotetie-QQc0 com fattore maggiore di 1 sono dette **dilatazioni-QQ** e il loro insieme è un'estensione dell'insieme delle dilatazioni-ZZ $\boldsymbol{Dil}_Z Z$. Le omotetie-QQc0 com fattore maggiore di 0 e minore di 1 sono dette **contrazioni-QQ**. L'omotetia $\boldsymbol{Hmtt}[-1,\mathbf{0}]$ coincide con la simmetria centrale di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Possono essere utili anche le estensioni booleane delle permutazioni di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e in particolare delle traslazioni-QQ e delle omotetie-QQ con centro nell'origine; sono interessanti i loro effetti sulle configurazioni geometriche esprimibili come complessi di punti-QQ etichettati, ossia come funzioni del genere $\lceil\,\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\longrightarrow\mathcal{L}\,\rceil$.

Nel seguito in genere adotteremo la semplificazione consistente nell'usare le notazioni della forma $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{V}}$ e $\boldsymbol{Hmtt}_{\lambda}$ anche per denotare le traslazioni e le dilatazioni di insiemi di punti-QQ.

B30 d. oggetti lineari del piano sui razionali

B30d.01 Si definisce **retta-QQ** passante per l'origine ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ avente la forma

$$\{\lambda \in \mathbb{Q} :| \langle \lambda\, v_x, \lambda\, v_y\rangle\} \text{ equivalente alla } \{\lambda \in \mathbb{Q} :| \lambda\, \mathbf{v}\},$$

dove $\mathbf{v}$ è un punto-QQ arbitrario diverso da $\mathbf{0}$.

La precedente retta-QQ si può individuare con la notazione $\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\mathbf{v}]$, con notazioni equivalenti come $\mathsf{Rtlin}[0,0;v_x,v_y]$ e $\mathsf{Rtlin}_{\mathbf{0};\mathbf{v}}$ o anche con la notazione $ds\left[y=\frac{v_y}{v_x}\,x\right]$.

Evidentemente le rette-QQ per l'origine sono trasformate in se da ciascuna delle omotetie-QQc0; questo si esprime anche dicendo che le rette-QQ per l'origine sono **insiemi stabili** per le omotetie-QQc0.

Questo dice anche che per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}_{nz}$ la retta $\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\mathbf{v}]$ coincide con la $\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\lambda\,\mathbf{v}]$ e quindi che nella notazione $\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\mathbf{v}]$ non è essenziale $\mathbf{v}$ ma la sua inclinazione.

Consideriamo un punto-QQ $\mathbf{r}=\langle x,y\rangle$ diverso da $\mathbf{0}$ da pensare variabile, ossia esprimente un punto mobile, sulla retta-QQ $\mathsf{Rtlin}[0,0;v_x,v_y]$.
Esso si può esprimere anche con la notazione

(1) $$\mathbf{r} \;=\; \{\lambda \in \mathbb{Q}_{nz} :| \langle \lambda\, v_x, \lambda\, v_y\rangle\}\ .$$

Se $v_x \neq 0$, ovvero $x \neq 0$, (1) equivale a $\dfrac{y}{x}=\dfrac{v_y}{v_x}$, mentre se $v_y \neq 0$, ovvero $y \neq 0$, (1) equivale a $\dfrac{x}{y}=\dfrac{v_x}{v_y}$.
In ogni caso si ha

(2) $$\langle x,y\rangle \in \mathsf{Rtlin}[0,0;v_x,v_y] \iff v_y\,x - v_x\,y \;=\; 0\ .$$

Possiamo quindi affermare che le rette-QQ passanti per l'origine sono tutti e soli i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ i cui punti $\langle x,y\rangle$ soddisfano una equazione della forma $\alpha\,x+\beta\,y=0$ per qualche $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$.
Per denotare tale retta quando si può assumere implicitamente che x e y siano variabili in $\mathbb{Q}$ usiamo anche la notazione $\mathsf{Rtlin}[\alpha\,x+\beta\,y=0]$ o la notazione più concisa $[\,\alpha\,x+\beta\,y=0\,]$.

B30d.02 Si definiscein generale **retta-QQ** ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ottenibile applicando una traslazione a una retta-QQ per l'origine.

Per la retta-QQ ottenuta applicando la traslazione di spostamento $\mathbf{s}$ alla retta-QQ per l'origine $\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\mathbf{v}]$ usiamo la notazione

$$\mathsf{Rtlin}[\mathbf{s};\mathbf{v}] \;:=\; \boldsymbol{Trsl}[\mathbf{s}]\,(\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\mathbf{v}])\ .$$

Osserviamo che ogni traslazione mantiene l'inclinazione dei segmenti: un segmento $P\,Q$ ha inclinazione $\big\langle x_Q-x_P, y_q-y_P\big\rangle$ e quando viene trasformato in $\overline{P+\mathbf{s}\;Q+\mathbf{s}}$ ha l'inclinazione espressa da

$$\big\langle x_Q+s_x-(x_P+s_x)\ ,\ y_q+s_y-(y_P+s_y)\big\rangle \;=\big\langle x_Q-x_P\ ,\ y_q-y_P\big\rangle\ .$$

Consideriamo in particolare la retta-QQ $\mathcal{R}'$ ottenuta applicando la traslazione orizzontale $\mathcal{T} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{v_x\,\mathbf{e}_x}$ alla retta $\mathcal{R}:=\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\langle h,k\rangle]$.
Se la $\mathcal{R}$ è l'asse $\mathsf{Ox}=[y=0]$, applicando Tcl si ottiene la stessa Ox.
Se invece $k\neq 0$ $\mathcal{R}'$ interseca l'asse Ox nel punto $\big\langle v_x,0\big\rangle$ e mantiene la sua inclinazione.

Consideriamo in modo simile la retta-QQ $\mathcal{R}''$ ottenuta applicando la traslazione verticale $\boldsymbol{Trsl}_{v_y\,\mathbf{e}_y}$ alla retta $\mathcal{R}:=\mathsf{Rtlin}[\mathbf{0};\langle h,k\rangle]$.
Se la $\mathcal{R}$ è l'asse Oy, cioè la $[\,x=0\,]$, si ottiene per $\mathcal{R}''$ la stessa Oy.

Se invece $h \neq 0$ $\mathcal{R}''$ interseca la Oy nel punto $\langle 0, v_y \rangle$ e mantiene la sua inclinazione.

B30d.03 Consideriamo la retta-QQ $\mathcal{S}$ ottenuta aplicando la generica traslazione $\boldsymbol{Trsl}[s_x\,\mathsf{e}_x + s_y\,\mathsf{e}_y]$ alla retta $\mathcal{R} := \mathsf{Rtlin}[\mathbf{0}; \langle h, k\rangle]$.

La $\mathcal{S}$ ha la stessa inclinazione $\dfrac{k}{h}$ della $\mathcal{R}$ e quindi si può identificare come l'insieme dei punti $\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che soddisfa l'equazione $k(x - s_x) + h(y - s_y) = 0$.

Dunque una retta-QQ è un insieme di punti $\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ della forma

$$\big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \;\mathbb{]}\; p\,x + q\,y + m = 0\big\} \ ,$$

dove p, q ed m sono numeri razionali arbitrari, condizionati solo dalla relazione $p^2 + q^2 > 0$, ovvero da ciascuna delle relazioni equivalenti $|p| + |q| > 0$, $p \neq 0 \vee q \neq 0$ e $p\,q \neq 0$.

In altri termini le rette-QQ sono gli insiemi di punti-QQ $\langle x, y\rangle$ che soddisfano una equazione lineare in due incognite con soluzioni in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

La precedente retta, sottintendendo che appartiene a $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, si può individuare con la notazione $\mathsf{Rtlin}[p\,x + q\,y + m = 0]$.

Essa si può anche individuare utilizzando la notazione di portata generale per gli insiemi di soluzioni di date equazioni come $\mathsf{Soln}_{QQ}(p\,x+q\,y+m = 0)$. In contesti nei quali risulta implicito che x e y denotano variabili che "corrono" in $\mathbb{Q}$, la retta $\mathsf{Rtlin}[p, q, m)$ viene anche individuata in forma abbreviata dalla espressione $[\,p\,x + q\,y + m = 0\,]$.

Conviene tenere presente che la retta $\mathsf{Rtlin}[p\,x + q\,y + m = 0]$ per ogni $r \in \mathbb{Q}_{nz}$ coincide con la retta $\mathsf{Rtlin}[r\,p\,x + r\,q\,y + r\,m = 0]$; in altre parole i parametri p, q e m che caratterizzano una retta-QQ sono definiti a meno di un comune fattore nonnullo.

Quanto sopra è in accordo con il fatto che ogni retta-ZZ è un sottoinsieme proprio di una retta-QQ.

Più precisamente si constata che ogni retta-QQ costituisce un sovrainsieme proprio di una e una sola retta-ZZ.

B30d.04 Torniamo ad esaminare gli effetti delle omotetie sul piano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Innanzitutto definiamo le più generali omotetie-QQ con centro in in arbitario $\mathsf{c} = \langle c_x, c_y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ come omotetia ottenibile dalla omotetia-QQc0 trasferita dall'origine in P e più precisamente come la trasformazione

$$(1) \qquad \boldsymbol{Hmtt}[h, \mathsf{c}] \;:=\; \boldsymbol{Trsl}[-\mathsf{c}] \circ_{lr} \boldsymbol{Hmtt}[h, \mathbf{0}] \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}[\mathsf{c}/h] \ .$$

Si segnala anche che le omotetie-QQc0 trasformano rette-QQ in rette-QQ.
La cosa è ovvia per le rette passanti per il centro dell'omotetia.
Per le altre basta calcolare come cambia la retta $\mathsf{Rtlin}[p\,x + q\,y + m = 0]$ quando si sottopone $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ alla omotetia-QQc0 $\boldsymbol{Hmtt}[h, \mathbf{0}]$.

$$\boldsymbol{Hmtt}[h, \mathbf{0}]\,(\mathsf{Rtlin}[p\,x + q\,y + m = 0]) \;=\; \mathsf{Rtlin}[p\,h\,x + q\,h\,y + m = 0] \ .$$

Per concludere basta osservare che tutte le tre trasformazioni della decomposizione (1) della generica omotetia-QQ (1) trasformano rette-QQ in rette-QQ.

B30d.05 Talora è utile considerare l'insieme $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ripartito in 9 parti (generalizzando elementarmente quello che si è visto per $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

origine $\{\langle 0, 0\rangle\}$,

semiasse orizzontale positivo $\{x \in \mathbb{Q}_+ \;:|\; \langle x, 0\rangle\} \;=\; \mathbb{Q}_+\mathsf{e}_x$

semiasse orizzontale negativo $\{x \in \mathbb{Q}_+ :| \langle -x, 0\rangle\} \; = \; \mathbb{Q}_- \mathbf{e}_y$

semiasse verticale positivo $\{y \in \mathbb{Q}_+ :| \langle 0, y\rangle\} \; = \; \mathbb{Q}_+ \mathbf{e}_y$

semiasse verticale negativo $\{y \in \mathbb{Q}_+ :| \langle 0, -y\rangle\} \; = \; \mathbb{Q}_- \mathbf{e}_y$

primo quadrante nonorlato $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$

secondo quadrante nonorlato $\mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_+$

terzo quadrante nonorlato $\mathbb{Q}_- \times \mathbb{Q}_-$

quarto quadrante nonorlato $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_-$

B30d.06 Altri raggruppamenti di oggetti che si collocano in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che si rivelano utili sono i cosiddetti **fasci di rette**.

Le rette-QQ della forma $\mathsf{Rtlin}[p\,x + q\,y = 0]$ sono esattamente (tutte e sole) le rette-QQ che passano per l'origine $\langle 0, 0\rangle$; il loro insieme viene detto **fascio** delle rette-QQ passanti per l'origine.

Si dice **retta-QQ orizzontale** ogni retta della forma $\left[\, q\,y + m = 0 \,\right]$, con $q \neq 0$, ovvero da una retta caratterizzata da un'equazione della forma $y = \overline{y}$ con $\overline{y} := \dfrac{-m}{q} \in \mathbb{Q}$.
Il loro insieme viene detto fascio delle rette-QQ orizzontali.

L'asse-QQ orizzontale, che qui denotiamo con Ox, è caratterizzata dalla relazione $y = 0$ e fa parte delle rette-QQ orizzontali.

Si dice **retta-QQ verticale** ogni retta della forma $\left[\, p\,x + m = 0 \,\right]$ con $p \neq 0$, ovvero da una retta caratterizzata da un'equazione della forma $x = \overline{x}$ con $\overline{x} := \dfrac{-m}{p} \in \mathbb{Q}$.
Il loro insieme viene detto fascio delle rette-QQ verticali.
L'asse-QQ verticale, che qui denotiamo con Oy, è caratterizzata dalla relazione $x = 0$ e fa parte delle rette-QQ verticali.

Per ogni $\langle h, k\rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ l'insieme delle rette-QQ aventi la stessa inclinazione $\dfrac{k}{h}$ si dicono costituire un ulteriore fascio di rette-QQ che viene caratterizzato dalla coppia $\langle h, k\rangle$.

Le traslazioni-QQ trasformano fasci di rette-QQ in fasci di rette-QQ; infatti esse non cambiano l'inclinazione delle rette e trasformano un punto in comune tra due rette in un punto in comune tra le corrispondenti rette trasformate.

Si può affermare che i fasci di rette sono gli insiemi di tutte e sole le rette-QQ che hanno un (solo) punto in comune, punto al finito o all'infinito, dove con la locuzione "avere in comune un punto all'infinito" equivale alla "avere in comune l'inclinazione" .

B30d.07 Consideriamo la retta-QQ generica $[p\,x + q\,y + m = 0]$.
Essa interseca l'asse Ox QUANDO $p\,x = -m$, cioè nel punto $\left\langle -\dfrac{m}{p}, 0\right\rangle$, e interseca l'asse Oy quando $p\,x = -m$ cioè nel punto $\left\langle -\dfrac{m}{q}, 0\right\rangle$.

Due rette-QQ L ed M si dicono **rette-QQ parallele** sse si possono caratterizzare con due equazioni aventi le forme $p\,x + q\,y + m = 0$ e $p\,x + q\,y + m' = 0$.

Per enunciare che L ed M sono due rette parallele scriviamo $L /\!/ M$.

Osserviamo che si possono incontrare due costruzioni che conducono a due espressioni di rette che si rivelano coincidenti: il duetto di tali espressioni conviene sia considerato come un caso particolare di duetto di rette parallele.

Tutte le rette-QQ orizzontali, essendo caratterizzate da equazioni della forma $y = \overline{y}$ e $y = \overline{y}'$, sono rette mutuamente parallele.
Tutte le rette-QQ verticali, essendo caratterizzate da equazioni della forma $x = \overline{x}$ e $x = \overline{x}'$, sono mutuamente parallele.

(1) Prop.: Il parallelismo tra rette-QQ costituisce una relazione di equivalenza tra le rette-QQ.

Dim.: La riflessività non è in contrasto con la definizione e si può assumere. La simmetria segue dal fatto che nella definizione le due rette sono scambiabili. La transitività discende dalla transitività dell'uguaglianza applicata alle equazioni che garantiscono il parallelismo ▮

Si constata inoltre che se due rette-ZZ sono parallele in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sono parallele in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ anche le due rette-QQ che, risp., le contengono. Dunque il parallelismo in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è una relazione che amplia il parallelismo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Evidentemente la classe di parallelismo delle rette-QQ orizzontali è individuabile con l'espressione $\big\{\overline{y} \in \mathbb{Q} :|\ \big[\, y = \overline{y} \,\big] \big\}$, mentre la classe di parallelismo delle rette-QQ orizzontali è esprimibile scrivendo $\big\{\overline{y} \in \mathbb{Q} :|\ \big[\, x = \overline{x} \,\big] \big\}$.
In altre parole le rette-QQ orizzontali sono le rette caratterizzat da equazioni della forma $y = \overline{y}$, mentre le rette-QQ verticali sono le rette caratterizzate da equazioni della forma $x = \overline{x}$.

B30d.08 A ogni punto-QQ $P = \langle a/b, c/d \rangle$ si può associare il punto-ZZ

$$\boldsymbol{ZP}(P) \ := \big\langle d\,a/M, b\,c/M \big\rangle \text{ con } M := \text{MCD}(b, d) \ .$$

Evidentemente la funzione $\boldsymbol{ZP}$ appartiene a $\big\lceil\, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\big\rceil$.

Ad ogni retta-QQ $\mathcal{R} = \big[\, p/h\, x + q/k\, y + r/l = 0 \,\big]$ si associa facilmente la retta-ZZ

$$\boldsymbol{ZR}(\mathcal{R}) \ := \ \big[\, p\,k\,l\,x + q\,h\,l\,y + r\,h\,k = 0 \,\big] \ .$$

Evidentemente $\boldsymbol{ZR} \in \big\lceil\, \mathsf{Rtlin}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \longmapsto \mathsf{Rtlin}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \,\big\rceil$.

Ogni retta-QQ $\mathcal{R}$ contiene propriamente la retta-ZZ $\boldsymbol{ZR}(\mathcal{R})$.
Quindi la funzione $\boldsymbol{ZR}$ trasforma due rette-QQ incidenti in due rette-ZZ incidenti, in particolare trasforma due rette-QQ passanti per l'origine in due rette-ZZ per l'origine, due rette-QQ parallele in due rette-ZZ parallele; quindi essa induce una trasformazione dei fasci di rette-QQ in fasci di rette-ZZ.

B30d.09 **(1) Prop.**: Consideriamo due rette-QQ $\mathsf{L} = \big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ¶\ p\,x + q\,y + r = 0\big\}$ ed $\mathsf{M} = \big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ¶\ s\,x + t\,y + u = 0\big\}$.
$\mathsf{L} /\!\!/ \mathsf{M} \iff \big\lceil$ si trova un $\langle h, k\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $\mathsf{L} +^{be} \langle h, k\rangle = \mathsf{M} \big\rceil$.

Dim.: "$\Longrightarrow$": $L /\!\!/ M$ implica $p = s$ e $q = t$ e quindi $\mathsf{M} = \big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ¶\ p\,x + q\,y + t = 0\big\}$;
scegliamo ad arbitrio $\big\langle x_L, y_L \big\rangle \in \mathsf{L}$ e $\big\langle x_M, y_M \big\rangle \in \mathsf{M}$ e poniamo $h := x_L - x_M$ e $k := y_L - y_M$;

$$\begin{aligned}\mathsf{M} &= \big\{\langle x + h, y + k\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ¶\ p\,(x + h) + q(y + k) + t = 0\big\} \\ &= \big\{\langle x, y\rangle + \langle h, k\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ¶\ p\,x + q\,y + (p\,h + q\,k + t) = 0\big\} \\ &= \big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ¶\ p\,x + q\,y + (p\,h + q\,k + t) = 0\big\} \ + \ ^{be}\langle h, k\rangle\end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$": Sia $\langle h, k\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $\mathsf{M} = \mathsf{L} +^{be} \langle h, k\rangle$;
scegliamo ad arbitrio $\big\langle x_L, y_L \big\rangle \in \mathsf{L}$ e poniamo $\big\langle x_M, y_M \big\rangle =: \big\langle x_L, y_L \big\rangle + \langle h, k\rangle$;
questo punto-QQ per l'ipotesi appartiene a M e quindi $s\,x_M + t\,y_M + u = 0$ ▮

(2) Prop.: Consideriamo due punti-QQ $P = \big\langle x_P, y_P \big\rangle$ e $Q = \big\langle x_Q, y_Q \big\rangle$ diversi, ovvero consideriamo un segmento-QQ $\overline{PQ}$ non ridotto a un solo punto; esiste una sola retta-QQ che li contiene.

Dim.: Se $x_P = x_Q$ la retta cercata è la $\big[\, x = x_P \,\big]$. Se $y_P = y_Q$ la retta cercata è la $\big[\, y = y_P \,\big]$.

Se altrimenti consideriamo $h := x_Q - x_P$ e $k := y_Q - y_P$; la retta cercata deve cpoincidere con l'insieme

$$\left\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \;\P\; \frac{y-y_P}{y_Q-y_P} = \frac{x-x_P}{x_Q-x_P}\right\} \;=\; [\,k\,x - h\,y + (h\,y_P - h\,x_P) = 0\,] \;\blacksquare$$

Ogni insieme finito di rette-QQ si può collocare in un piano della forma $\dfrac{1}{d}\mathbb{Z}\times\dfrac{1}{d}\mathbb{Z}$ con d ottenuto come minimo comune multiplo dei denominatori dei coefficienti delle equazioni delle rette date.
Quindi ogni insieme finito di rette-QQ si riconduce a un insieme di rette-ZZ mediante una semplice omotetia del piano precedente della forma $\boldsymbol{Hmtt}[d,P]$ che lo trasforma nell'insieme costituente il piano-ZZ.

Conviene segnalare esplicitamente che questi generi di rette sono assai utili nella pratica della computer grafica.

B30d.10 Riteniamo opportuno anticipare alcuni sviluppi che presenteremo nel capitolo B32.

Per trattare le rette-QQ conviene servirsi delle matrici di profilo 2×2 aventi le entrate in $\mathbb{Q}$, cioè le matrici costituenti l'insieme $\mathsf{Mat}_{2,\mathbb{Q}}$. Queste matrici sono associate biunivocamente alle trasformazioni lineari omogenee di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, trasformazioni che lasciano fissa l'origine.

Con queste matrici e con i loro determinanti si possono esprimere vantaggiosamente molte proprietà delle figure-QQ e in particolare le relazioni di parallelismo e di ortogonalità.

Si trova che in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ due rette-QQ non parallele hanno sempre uno e un solo punto in comune, cosa che può non accadere a due rette-ZZ.
Infatti per individuare tale punto devono essere soddisfatte entrambe le equazioni delle rette, cioè si deve trovare una soluzione e una sola.
Il punto si trova facilmente, cioè si trovano facilmente espressioni razionali per le sue coordinate.
Dunque nel piano razionale trovano piena soluzione i sistemi di due equazioni lineari in due incognite con coefficienti razionali.
Va segnalato che questa proprietà si può generalizzare a tutti i sistemi di n equazioni lineari in n incognite; tale proprietà procura una elevata importanza computazionale ai numeri razionali e agli spazi sui razionali.

B30d.11 Per effettuare molti calcoli di interesse pratico sui razionali risulta conveniente usare notazioni decimali, notazioni binarie e, raramente, notazioni posizionali in altra base.
Questo equivale ad approssimare $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ con l'unione degli spazi $\dfrac{\mathbb{Z}}{r}\times\dfrac{\mathbb{Z}}{r}$ per i diversi r interi positivi (V. d14).

Il piano $\dfrac{\mathbb{Z}}{r}\times\dfrac{\mathbb{Z}}{r}$ si può pensare ottenuto da $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ per semplice cambiamento di unità di misura.

In questo ambiente per r opportuno si possono avere figure discrete in grado di presentare in modo accettabile molte figure piane della geometria euclidea.

Un segmento di retta è rappresentato da una sequenza di caselle-ZZ ottenibili ciascuna dalla precedente con uno dei passi-ZZk. Queste sono le entità fondamentali per la geometria degli schermi digitali.

Va osservato che queste rappresentazioni possono avere buoni effetti realistici, anche per il fatto che il processo di visione umana è discreto, essendo finita la griglia di cellule a bastoncello della retina che effettua la trasformazione dei segnali luminosi che hanno attraversata la pupilla in segnali elettrochimici per il nervo ottico.

È rilevante il fatto che queste nozioni fossero note e chiare già agli scienziati greco-ellenistici.

B30d.12 Con $\mathbb{Q}$ e con il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si riescono a trattare le grandezze fisiche, in particolare le lunghezze, e si riescono a rappresentare svariate figure geometriche con una precisione che può essere sufficiente per molte applicazioni pratiche, comprese quelle della meccanica e dell'ottica di precisione.

A questo punto ci si chiede se $\mathbb{Q}$ e le strutture costruite su tale insieme (oltre a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si possono considerare potenze cartesiane della forma $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \mathbb{Q}$ e combinazioni di queste con strutture finite) consentano di gestire quantitativamente tutte le entità che possono essere di interesse computazionale diretto o indiretto, a cominciare dalle figure geometriche come i poligoni regolari o le curve e dai fenomeni continui studiati nella fisica e nell'ingegneria.

La risposta è negativa e questo aveva messo in crisi il circolo dei seguaci di Pitagora già nel VI secolo avanti Cristo.

Un problema come quello del calcolo della radice di un numero intero come 2 non può condurre a un numero razionale, ma chiede di introdurre nuovi numeri (i numeri algebrici e successivamente gli irrazionali costruibili, i numeri reali, i numeri complessi, ...) e congiuntamente nuovi ambienti e nuove procedure per le attività computazionali.

Questi ambienti via via più estesi è opportuno che siano considerati come strumenti che consentono di ampliare sempre di più le possibilità di risolvere problemi precisamente definiti.

Segnaliamo anche che la limitazione deinmeri razionali, esprimibile con affermazioni come e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ si collega a varie difficoltà che si incontrano in alcune costruzioni su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, come la definizione di cerchio e circonferenza, l'adozione di una distanza euclidea, la misura delle ampiezze angolari e il loro utilizzo nei calcoli, la definizione delle aree di quasi tutte le figure piane di uso pratico, l'intersezione di due curve.

B30d.13 Riprendiamo la biiezione tra i numeri razionali esprimibili come $r = n/d$ e le rette-QQ passanti per l'origine date da espressioni della forma $L = \left[\, y = \dfrac{n}{d}\, x \,\right]$.

I punti di ciascuna di queste rette L privata dell'origine sono in biiezione con le frazioni che possono rappresentare il numero definito dalla $r = n/d$ con $d \in \mathbb{P}$, con $n \in \mathbb{Z}$ e $|n| \perp d$; queste frazioni sono individuate dalle varie espressioni qn/qd al variare di q in $\mathbb{Q}_{nz}$.

Al maggior valore di r corrisponde una maggiore pendenza della retta L.

Tra le frazioni che rappresentano un $r \in \mathbb{Q}$ si trovano quelle con d positivo, corrispondenti a punti in $\mathbb{P} \times \mathbb{Z}$, e la frazione ridotta, individuabile con operazioni numeriche ma poco evidente sul modello visuale.

Della somma di due razionali si individua facilmente il punto sulla $[y = r]$ relativo all'ascissa somma delle due ascisse.
Si individuano facilmente anche il valore medio di due numeri come punto medio tra i due punti sulla $y = r$ e il valore opposto come punto riflesso rispetto all'asse orizzontale del punto che rappreasenta il numero dato sulla $[y = r]$.

Non è invece immediato individuare un punto riguardante il prodotto di due razionali.

B30d.14 Il piano-QQ si può considerare l'estensione generabile-iop del piano-ZZ.
Più precisamente esso può essere definito come la chiusura per combinazione lineare-Z dell'unione dei piani dei punti la cui coordinate sono i multipli di $\dfrac{1}{d}$:

(1) $$\bigcup_{d=2,3,\ldots} \frac{1}{d}\mathbb{Z} \times \frac{1}{d}\mathbb{Z} \; .$$

Si osserva che il precedente insieme si può ridurre all'unione disgiunta sull'insieme dei numeri primi degli insiemi $\frac{1}{p}\mathbb{Z}$ con p corrente sull'insieme dei numeri primi PRM.

In termini pratici, abbiamo visto che un problema computazionale specifico concernente numeri razionali si può trattare in un piano $\frac{1}{d}\mathbb{Z} \times \frac{1}{d}\mathbb{Z}$ relativo a una adeguata unità di misura $\frac{1}{d}$, con d opportuno multiplo del minimo comune multiplo dei denominatori dei numeri razionali da elaborare.

Conviene inoltre osservare che la soluzione di una istanza di problema razionale si può effettuare coinvolgendo un sottoinsieme finito di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Occorre anche segnalare che il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, numerabile, si rivela l'ambiente più conveniente ai fini espositivi quando si introducono sistematicamente vari problemi concernenti numeri razionali, senza limitarsi alle singole istanze di problema.

B30d.15 Nell'ambiente $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si possono presentare visivamente molte situazioni computazionali riconducibili a procedimenti generali e si possono introdurre varie nozioni geometriche bidimensionali in termini piuttosto concreti, pur con le limitazioni sostanziali, già ben chiare all'ambiente scientifico di Euclide, dovute alle limitazioni degli strumenti materiali con i quali si vorrebbero trattare le figure continue.

Il piano dei razionali, in particolare, costituisce l'ambiente più semplice nel quale si può introdurre una disciplina importante come l'algebra lineare.
Questa fornisce una strumentazione computazionale chiaramente definita ed efficace per la soluzione di problemi pratici significativi e di conseguenza sul piano didattico costituisce un argomento facile da motivare.
Inoltre la sua introduzione non impone di preoccuparsi delle difficoltà derivate dalle richieste di effettuare calcoli approssimati.

Qui si è scelto di introdurre l'algebra lineare [B31] servendosi solo dei numeri razionali, cioè senza richiedere oggetti più impegnativi come i numeri reali e i numeri complessi costruibili. La trattazione dei calcoli con questi numeri viene quindi posticipata [B42, B50]

Occorre anche precisare che i primi elementi dell'algebra lineare vengono introdotti in due dimensioni, cioè nel piano dei razionali, per avvantaggiarsi della possibilità di appoggiarsi su immagini bidimensionali piuttosto semplici.

Si considera inoltre che l'algebra lineare in due dimensioni sui razionali, può accompagnarsi a semplici considerazioni su simmetrie e gruppi per introdurre in modo motivato le economie derivanti dalle simmetrie, di riprendere le prime nozioni sulle strutture di gruppo, campo e spazio vettoriale e di svolgere semplici considerazioni di geometria computazionale.

B30d.16 L'insieme $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, come $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, è un insieme generabile-iop, cioè ottenibile da una procedura generatrice che procede illimitatamente e progressivamente.

Questa proprietà discende dal fatto che il quadrato cartesiano $S \times S$ di ogni insieme S generabile-ip è generabile-iop. Una procedura generatrice-iop di $S \times S$ si ottiene organizzando una visita diagonale illimitata delle sue coppie che la procedura generatrice di S consente di porre in biiezione con gli elementi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Per completezza presentiamo anche una procedura progressivamente generativa (ripetitiva) di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che chiameremo $\mathcal{Q}_2$, pensando che possa aiutare a capire come insiemi finiti di punti-QQ possono essere utilizzati in concrete attività computazionali.

Il procedimento $\mathcal{Q}_2$ si può rappresentare come la visita in successione dei punti dell'insieme di terne di interi $\langle 0,0,1\rangle \dot\cup \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{P}$, alla cui generica terna $\langle n_x, n_y, d\rangle$ assegnamo il ruolo di rappresentante del punto-QQ $\left\langle \frac{n_x}{d}, \frac{n_y}{d}\right\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

$\mathcal{Q}_2$ inizia generando l'origine $\langle 0,0\rangle$ di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e prosegue con la organizzazione di quattro annidamenti di reiterazioni via via meno comprensive che hanno il compito di visitare ed eventualmente emettere le frazioni $\frac{n}{d}$ per $d\in\mathbb{P}$ ed $n\in\mathbb{Z}_{nz}$.

La reiterazione più comprensiva riguarda i successivi interi positivi $d = 1,2,3,...$ che svolgono il ruolo dei candidati denominatori.

In ogni fase F_d relativa a un nuovo denominatore d si procede a completare la visita dell'insieme di terne

$$K_d := \{\langle n_1, n_2, c\rangle :|\ c = 1,2,...,d\ ,\ n_1 = -d, -d+1, ..., 0, 1, ..., d-1, d\ ,\ n_2 = 0,1,2,...,d\}.$$

Questo K_d è un cuboide discreto i cui punti individuano i punti-QQ che rappresentano frazioni della forme $\left\langle \frac{\pm n_1}{d}, \frac{|n_2|}{d}\right\rangle$, quelle con i segni opposti individuando frazioni equivalenti.

La fase F_d effettua la visita di $K_d \setminus K_{d-1}$, insieme che si può descrivere come una sorta di involucro superiore e laterale di K_d e si effettua con corse realizzabili senza difficoltà con una reiterazione primaria sulle quattro facce di K_d relative a $c = d$, $n_1 = \pm d$ e $n_2 = d$ e con due reiterazioni subordinate che consentono di visitare ciascuna di queste facce.

Si constata che questa procedura $\mathcal{Q}_2$ consente di visitare tutte le forme frazionarie che forniscono le coppie di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$; si osserva inoltre che la terna $\langle n_1, n_2, d\rangle$ viene visitata nella fase $F_{\max(n_1,n_2,d)}$ e che vengono generati sia un elemento di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che il suo opposto.

Dopo aver individuata una nuova terna $\langle n_1, n_2, d\rangle$ $\mathcal{Q}_2$ deve decidere se rappresenta una coppia di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ non ancora generata (cioè visitata ed emessa), fatto che si verifica sse nessuna delle due forme $\frac{|n_1|}{d}$ e $\frac{|n_2|}{d}$ è riducibile. Dunque si ha l'emissione, cioè la generazione, di ogni nuova forma visitata sse essa è costituita da due forme irriducibili.

B30d.17 Illustriamo ora, facendo riferimento alla procedura precedente, come la generazione di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ da utilizzare in un procedimento risolutivo in un primo momento si possa far agire fino a uno stadio capace di soddisfare esigenze computazionali di un primo livello e in momenti successivi si possa far proseguire per soddisfare richieste di livelli superiori, ossia richieste riguardanti una maggiore precisione (ossia la disponibilità di razionali con denominatore maggiore) e/o una estensione maggiore (cioè la possibilità di trattare numeri di maggiore valore assoluto).

Supponiamo che in un primo momento di una attività di calcolo debbano essere disponibili punti-QQ che garantiscano una precisione determinata da un parametro di tolleranza lineare $\epsilon\in\mathbb{Q}_+$ e la possibilità di trattare numeri con valori assoluti che possono raggiungere il valore razionale positivo N che è ragionevole supporre maggiore di 1.

Posto $\overline{d} := \left\lceil \frac{N}{\epsilon}\right\rceil$, per disporre di un ambiente nel quale le esigenze di calcolo sono soddisfatte risulta necessario procedere con la generazione di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ fino alla fase $F_{\overline{d}}$.

In successivi stadi della accennata attività di calcolo ci si aspetta che vengano avanzate maggiori richieste di precisione e di estensione.

Questa crescita di esigenze si riscontra effettivamente nella crescita nel tempo di moltissime attività computazionali (scientifiche, tecnologiche, produttive, gestionali, ...).

Per far fronte alle richieste di ogni nuovo stadio evolutivo i nuovi valori dei parametri i ϵ ed N per la procedura $\mathcal{Q}_2$ vanno precisati secondo gli stessi criteri visti in c03.

B30 e. terne e rotodilatazioni pitagoriche

B30e.01 Ricordiamo [B25e01] che si dice **terna pitagorica** una terna crescente di interi positivi $\langle a, b, c\rangle$ con $1 < a < b < c$ tale che $a^2 + b^2 = c^2$.

Se $\langle a, b, c\rangle$ è una terna pitagorica e d un intero maggiore o uguale a 2, evidentemente anche $\langle d\,a, d\,b, d\,c\rangle$ lo è.
Una terna pitagorica $\langle a, b, c\rangle$ si dice **terna pitagorica primitiva** sse i suoi componenti non hanno un divisore comune maggiore di 1, cioè sse $\mathrm{MCD}(a, b, c) = 1$.

Evidentemente le terne primitive sono le più interessanti, in quanto ogni terna nonprimitiva può ridursi facilmente a una primitiva dividendone i componenti per il loro massimo comun denominatore; quindi dalle conoscenze sulle terne primitive si possono ricavare agevolmente conoscenze sulle terne nonprimitive.

Denotiamo con **PtgrTr** l'insieme delle terne pitagoriche e con **PtgrTrPr** il suo sottoinsieme proprio costituito dalle terne pitagoriche primitive.

B30e.02 Si individua facilmente una procedura che consente di procedere alla generazione di tutte le terne pitagoriche.

Essa consiste in una reiterazione illimitata riguardante i successivi valori della componente maggiore $c = 5, 6, 7, ...$
Per ciascuna delle fasi riguardanti un valore di c si organizza una reiterazione della forma $b = c - 1, c - 2, ..., 3$ in ciascuna fase della quale si constata se $c^2 - b^2$ è un intero al quadrato, cioè se $c^2 - b^2 \in \mathbb{N}_{sq}$.

Si osserva che la procedura precedente è una procedura di visita ingenua, ovvero è una procedura definita prendendo in considerazione solo la definizione degli oggetti da visitare, senza avere eeffettuata alcuna analisi delle caratteristiche di questi oggetti e delle relazioni che li collegano. È quindi alto il rischio che si tratti di una procedura inefficiente.

Si pone comunque il dilemma se **PtgrTr** sia finito o numerabile.

Munendo la suddetta procedura di un opportuno selettore si può procedere anche alla costruzione dell'elenco delle terne pitagoriche primitive.

Disponendo di una estesa lista di terne pitagoriche primitive e di una estesa lista di numeri primi si può procedere a costruire un elenco ordinato delle terne pitagoriche generiche.

B30e.03 Le terne di interi che stiamo esaminando sono chiamate pitagoriche a causa della osservazione che segue e che chiamiamo **osservazione babilonese-pitagorica**.

Consideriamo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il triangolo rettangolo avente come vertici $A = \langle 0, 0\rangle$, $C = \langle b, 0\rangle$ e $B = \langle b, a\rangle$, cioè avente un cateto orizzontale di lunghezza b e uno verticale di lunghezza a.
Se si riporta la distanza c tra A e B misurata con un regolo (asta di un materiale rigido, ossia tale che per esso si sia verificata con cura la nondeformabilità) su una retta-ZZ orizzontale o verticale, si osserva che vale l'uguaglianza $c^2 = a^2 + b^2$.

Questa osservazione apre la possibilità di assumere come modello per lo spazio fisico nel quale siamo collocati uno spazio (euclideo) che amplia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (e quindi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) nel quale si definiscono triangoli rettangoli e lunghezze di segmenti in modo tale che per le lunghezze dei cateti a e b e la lunghezza$c$ dell'ipotenusa valga la **uguaglianza di Pitagora** $a^2 + b^2 = c^2$.

Segnaliamo che nella teoria formale della `geometria euclidea (wi)`, l'uguaglianza di Pitagora viene dimostrata a partire dagli assiomi e assume lo status di **teorema di Pitagora**.

La validità empirica dell'osservazione babilonese-pitagorica si riscontra con ottima approssimazione per i fenomeni con i quali ci si confronta quotidianamente.

Essa invece si mostra insufficiente quando si cercano spiegazioni di alcuni fenomeni astronomici nei quali intervengono distanze molto grandi, velocità che si avvicinano a quella della luce e corpi celesti di massa molto elevata.

Per spiegarli si rende necessario sostituire la geometria euclidea con teorie geometriche sensibilmente più complesse, che sono qualificate come noneuclidee, le quali consentano di trattare la dipendenza dal riferimento delle durate e la curvatura dello spazio [`Geometria non euclidea (wi)`, `Relatività generale (wi)`].

Altri fenomeni che mettono in crisi il modello euclideo riguardano oggetti molto piccoli, atomi e particelle subatomiche [P70].

B30e.04 Diciamo **punti-ZZ pitagorici primari** i punti del semiasse $\mathbf{e}_x\,\mathbb{P}$ e i punti-ZZ avente come coordinate due interi costituenti il secondo e il primo componente di una terna pitagorica, cioè i punti $\langle b, a\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tali che sia $\langle a, b, c\rangle \in \mathsf{PtgrTr}$.
I punti pitagorici primari si trovano all'interno del semiquadrante-ZZ ENE, detto anche I ottante di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, ossia all'interno dell'angolo-ZZK delimitato dal semiasse delle ascisse positive e dalla semiretta diagonale $\{n \in \mathbb{N} :| \langle n, n\rangle\}$.

//input p B30e04

Diciamo **punto-ZZ pitagorico** ogni punto-ZZ ottenibile da un punto-ZZ pitagorico primario applicando le seguenti operazioni: scambio delle coordinate (cioè riflessione rispetto alla diagonale principale $\left[\, y = x \,\right]_{ZZ}$) e riflessione rispetto a Ox_Z, riflessione rispetto a Oy_Z.

Denotiamo con **PtgrPtZZ** l'insieme dei punti-ZZ pitagorici. I punti-ZZ pitagorici non appartenenti agli assi, cioè non aventi componenti nulle, si dicono **punti-ZZ pitagorici propri**.

Tra le coppie di punti-ZZ, cioè tra i segmenti-ZZ orientati, si distinguono dalle rimanenti le coppie la cui quadranza appartiene a $\mathbb{N}_{sq}$; tali coppie si dicono **segmenti.or pitagorici**.
Impoverendo queste definizioni tra i duetti di punti-ZZ si distinguono quelli la cui quadranza appartiene a $\mathbb{N}_{sq}$ e che vengono detti **segmenti pitagorici**.
Se $\overrightarrow{PQ} = \langle P, Q\rangle$ è un segmento.or pitagorico, si definisce come **distanza euclidea** tra i punti P e Q l'intero radice quadrata della quadranza

(1) $$\mathrm{dist}_2(P, Q) \;:=\; \sqrt{\mathsf{Qdr}(P, Q)}\ .$$

Questo intero si dice **lunghezza del segmento-ZZ** $\{P, Q\}$ e viene attribuito come lunghezza anche al corrispondente segmento nonorientato $\overline{PQ} = \overline{QP}$. Questo numero si denota anche con $|PQ|$ ed evidentemente coincide con $|QP|$.

Ai rimanenti segmenti-ZZ non è possibile attribuire una lunghezza espressa da un numero naturale (e, come vedremo, nemmeno espressa da un numero razionale positivo) il cui quadrato fornisca una quadranza razionale positiva.
La prevedibile utilità computazionale di queste lunghezze rende quindi necessario introdurre altre entità numeriche che consentano di utilizzarle.

Hanno come quadranza un elemento di $\mathbb{N}_{sq}$ tutti i segmenti-ZZ che hanno come estremità l'origine $\langle 0, 0\rangle$ e un punto-ZZ pitagorico. A ogni altro segmento-ZZ avente come estremità l'origine non è possibile attribuire una lunghezza intera il cui quadrato fornisca la quadranza.

Si dimostra facilmente che i segmenti-ZZ orientati aventi quadranza in $\mathbb{N}_{sq}$ sono esattamente i segmenti che possono essere ottenuti per traslazione da un segmento avente come estremità' l'origine e un punto-ZZ pitagorico.

B30e.05 Ogni terna pitagorica $\langle a, b, c\rangle$ si può visualizzare nel I quadrante di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ arricchendo la figura che contiene il triangolo $\langle A, B, C\rangle$ con i punti $D := \langle c, 0\rangle$, $E := \langle b, b\rangle$, $F := \langle 0, b\rangle$, $G := \langle 0, c\rangle$, $H := \langle c + b, b\rangle$, $I := \langle c + b, c\rangle$, $J := \langle c, b\rangle$, $L := \langle c, c\rangle$.

//input pB30d05

Il precedente schema visivo dice che l'area del rettangolo $FHIG$ è uguale all'area dell'esagono non-convesso $FECDLG$, fatto geometrico che rispecchia l'uguaglianza equivalente alla definizione della terna

$$a^2 \; = \; (c - b) \cdot (c + b) \; .$$

Questa equazione consente una chiara classificazione delle terne pitagoriche in base alla parità delle componenti.
Se $c - b$ è pari (come $c + b$) deve essere pari anche a; se $c - b$ è dispari (come $c + b$) deve essere dispari anche a; si osserva anche che se fossero dispari sia $a =: 2h + 1$ che $b =: 2k + 1$, dovrebbe essere $a^2 + b^2 = 4(h^2 + h + k^2 + k) + 2$, numero non divisibile per 4 e quindi nonquadrato di intero pari.

Si hanno dunque tre tipi di terne pitagoriche:

- **terne-oeo** con a dispari, b pari e c dispari come $\langle 3, 4, 5\rangle$;
- **terne-eoo** con a pari, b dispari e c dispari come $\langle 8, 15, 17\rangle$;
- **terne-eee** con a pari, b pari e c pari come $\langle 6, 8, 10\rangle$.

Questi insiemi di terne li denotiamo, risp., con PtgrTr_{oeo}, con PtgrTr_{eoo} e con PtgrTr_{eee}. I primi due insiemi contengono solo terne primitive, in quanto numeri pari e dispari devono avere massimo comun denominatore uguale a 1; il terzo insieme solo terne nonprimitive.

B30e.06 La classificazione in d05 suggerisce anche di cercare terne pitagoriche ripartendone l'insieme secondi i diversi valori di $c - b$.
Se $c - b = 1$ abbiamo terne primitive appartenenti a PtgrTr_{oeo}; si tratta di trovare interi b per i quali si possa scrivere $2b + 1 = a^2$; posto $a =: 2q + 1$, si ottiene $2b + 1 = 4q^2 + 4q + 1$, cioè $b = 2q(q + 1)$; questa richiesta e la conseguente $a^2 + b^2 = 4q^4 + 8q^3 + 8q^2 + 4q + 1$ porta alla successione di terne pitagoriche della forma $\big\langle 2q + 1, 2q(q + 1), 2q(q + 1) + 1\big\rangle$ per $q = 1, 2, 3, ...$, terne evidentemente primitive:

$\langle 3, 4, 5\rangle$, $\langle 5, 12, 13\rangle$, $\langle 7, 24, 25\rangle$, $\langle 9, 40, 41\rangle$, $\langle 11, 60, 61\rangle$, $\langle 13, 84, 85\rangle$, $\langle 15, 112, 113\rangle$, $\langle 17, 114, 115\rangle$, ...

Questa successione garantisce che le terne pitagoriche primitive costituiscono un insieme infinito numerabile.

B30e.07 Risulta interessante applicare alle terne pitagoriche le rotodilatazioni-ZZ [B22g] definite mediante coppie pitagoriche, trasformazioni che chiamiamo **rotodilatazioni pitagoriche**.

(1) Prop.: Se si applica una rotodilatazione pitagorica al vettore colonna di una coppia pitagorica si ottiene il vettore colonna di un'altra coppia pitagorica.

Dim.: Consideriamo i due vettori-ZZ pitagorici $\langle b, a\rangle$ e $\langle e, d\rangle$ (per i quali si assume che sia $a < b$ e $d < e$) e i due interi positivi $c := \sqrt{a^2 + b^2}$ ed $f := \sqrt{d^2 + e^2}$.
Applicando la rotodilatazione $\boldsymbol{RotDil}_{\langle b,a\rangle}$ associata alla $\langle b, a\rangle$ alla $\langle e, d\rangle^\top$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\,e - a\,d \\ a\,e + b\,d \end{bmatrix}$$

Basta poi verificare quanto segue:

$$(b\,e - a\,d)^2 + (a\,e + b\,d)^2 = b^2\,e^2 + a^2\,d^2 + a^2\,e^2 + b^2\,d^2 = (b^2 + a^2)(d^2 + e^2) = (c\,f)^2 \quad \blacksquare$$

Se $\langle b, a\rangle$ è un punto-ZZ pitagorico, chiamato c l'intero positivo tale che $b^2 + a^2 = c^2$, si può affermare che la rotodilatazione $\boldsymbol{RotDil}_{\langle b,a\rangle}$ trasforma i segmenti-ZZ pitagorici in altri segmenti-ZZ pitagorici, (i soli segmenti-ZZ dotati di una lunghezza intera) e moltiplica per c la loro lunghezza.

Questo c si può chiamare **fattore di dilatazione lineare** della rotodilatazione.

B30e.08 **Prop.** La composizione di due rotodilatazioni pitagoriche è una rotodilatazione pitagorica e questa operazione binaria è commutativa.

Dim.: Basta osservare che per due coppie pitagoriche qualsiasi $\langle b, a\rangle$ e $\langle e, d\rangle$

(1) $$\begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} e & -d \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\,e - a\,d & -b\,d - a\,e \\ a\,e + b\,d & -a\,d + b\,e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & -d \\ d & e \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix}$$

e ricordare che $\langle b\,e - a\,d, a\,e + b\,d\rangle$ è un punto-ZZ pitagorico $\blacksquare$

Definiamo **prodotto complesso di due punti-QQ** $\langle a, b\rangle$ e $\langle d, e\rangle$ il punto-QQ $\langle be - ad, ae + bd\rangle$.
Come vedremo [B50] questa operazione binaria commutativa su elementi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è una restrizione di una operazione di grande importanza per l'analisi matematica, il prodotto di numeri complessi.

La proposizione precedente dice che il prodotto complesso di due vettori -ZZ pitagorici è un'operazione binaria commutativa sull'insieme dei vettori-ZZ pitagorici.

Come vedremo [B41] in termini algebrici i vettori-QQ muniti del prodotto complesso si possono qualificare come un semigruppo abeliano; dunque i vettori-ZZ pitagorici costituiscono un suo sottosemigruppo.

B30e.09 Talora il prodotto di due vettori-ZZ pitagorici può condurre a vettori con una componente nulla, questo nel caso $be - ad = 0$ oppure nel caso $ae + bd = 0$. Questo accade per esempio quando $a = e = 0$, quando $b = d = 0$, quando $a = d = 0$, quando $b = e = 0$ e quando si moltiplicano due punti-ZZ simmetrici rispetto all'asse orizzontale, cioè quando $\langle e, d\rangle = \langle b, -a\rangle$ (cosa analoga accade al prodotto di due numeri complessi mutuamente coniugati).

Il prodotto pitagorico consente comunque di ampliare la collezione delle terne pitagoriche note.

In particolare servono le potenze delle trasformazioni-QQ pitagoriche, fornite dalle espressioni in h14 .

Si osserva che le diverse potenze delle rotodilatazioni pitagoriche proprie sono tutte proprie e diverse tra di loro.

B30e.10 Tutte le terne pitagoriche sono ottenibili dal metodo che segue, noto come **formula di Euclide**.
Consideriamo due interi positivi m ed n tali che $0 < n < m$ e introduciamo gli interi positivi

$$\alpha_{m,n} := m^2 - n^2 \ , \ \beta_{m,n} := 2\,m\,n \ , \ \gamma_{m,n} := m^2 + n^2 \ .$$

Introduciamo anche la funzione $\boldsymbol{EPt}$ (abbreviazione di Euclid Pythagorean triple) e scriviamo

$$\boldsymbol{EPt}(m, n) := \big\langle \alpha_{m,n}, \beta_{m,n}, \gamma_{m,n} \big\rangle = \big\langle m^2 - n^2 \ , \ 2\,m\,n \ , \ m^2 + n^2 \big\rangle \ .$$

Si constata facilmente che la terna $\boldsymbol{EPt}(m,n)$ è una terna pitagorica.

Si dimostra poi abbastanza facilmente che la terna $\boldsymbol{EPt}(m,n)$ è primitiva sse $m \perp n$ e m ed n non sono entrambi dispari.

Inoltre è chiaro che se m e n sono dispari $\boldsymbol{EPt}(m,n)$ è una terna di tre interi pari e quindi è una terna pitagorica nonprimitiva.

La formula di Euclide genera tutte le terne pitagoriche primitive, ma non tutte le terne pitagoriche; per esempio $\langle 9, 12, 15 \rangle$ non fa parte dell'insieme di terne $\mathsf{dom}(\boldsymbol{EPt})$.

Evidentemente la totalità delle terne pitagoriche si può ottenere dalla seguente generalizzazione della formula di Euclide

$$a_{m,n,k} \ := \ k(m^2 - n^2) \ \ , \ \ b_{m,n,k} \ := \ k(2\,m\,n) \ \ , \ \ c_{m,n,k} \ := \ k(m^2 + n^2) \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

B30 f. punti-QQ pitagorici

B30f.01 Ci proponiamo qui di estendere all'ambiente $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ le nozioni di punto pitagorico e di terna pitagorica introdotte per l'ambiente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in B25e e riprese nella sezione precedente.

Cominciamo con il ricordare [B21f01] la notazione $\mathbb{ZZ}pr$ per identificare l'insieme dei vettori-ZZ primitivi, coppie $\langle h, k\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz}$ con $|h|$ e $|k|$ coprimi e le sue varianti

$$\mathbb{ZP}pr := (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \cap \mathbb{ZZ}pr \ \text{ e } \ \mathbb{PP}pr := (\mathbb{P} \times \mathbb{P}) \cap \mathbb{ZZ}pr \ .$$

Introduciamo anche la notazione $\mathbb{Q}_{sq}$ per identificare l'insieme dei quadrati dei numeri razionali positivi, cioè poniamo $\mathbb{Q}_{sq} := \left\{ \frac{h}{k} \in \mathbb{Q}_+ \,\vdots\!\!\Big|\, \frac{h^2}{k^2} \right\}$.

Chiaramente $\mathbb{Q}_{sq} = \{q \in \mathbb{Q}_+ :|\ q^2\}$ e il prodotto di due numeri in $\mathbb{Q}_{sq}$ appartiene anch'esso a $\mathbb{Q}_{sq}$.

Diciamo **terna pitagorica-ZZP** ogni terna $\langle a, b, c\rangle \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})_{nz} \times \mathbb{P}$ tale che $a^2 + b^2 = c^2 \in \mathbb{Q}_{sq}$ e denotiamo con **PtgrZZP** il loro insieme.

Si osserva che tale insieme si ripartisce nei seguenti 12 insiemi di terne:

- $\{b \in \mathbb{P} :|\ \langle 0, b, b\rangle\}$, $\{b \in \mathbb{P} :|\ \langle 0, -b, b\rangle\}$, $\{a \in \mathbb{P} :|\ \langle a, 0, a\rangle\}$, $\{a \in \mathbb{P} :|\ \langle -a, 0, a\rangle\}$;
- insieme delle terne pitagoriche **PtgrTr** $:= \left\{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{P}^{\times 3} \ ] \ a < b < c \ \wedge \ a^2 + b^2 = c^2\right\}$;
- insieme ottenuto dal precedente per scambio delle prime due componenti delle terne, ovvero mediante riflessione rispetto alla diagonale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- sei insiemi ottenuti dai due precedenti: 2 ottenuti cambiando il segno delle prime componenti delle terne, 2 cambiando il segno delle seconde componenti, 2 cambiando di segno alle prime e alle seconde componenti.

B30f.02 Si dicono **punti-QQ pitagorici** i punti $\langle a, b\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tali che sia $a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}_{sq}$.
Denotiamo con **PtgrQQ** l'insieme dei punti pitagorici-QQ, ossia poniamo

$$\textsf{PtgrQQ} \ := \ \left\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ ] \ a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}_{sq}\right\} \ .$$

Si dice **circonferenza-QQ basica** l'insieme di punti-QQ $\{\langle a, b\rangle \in \textsf{PtgrQQ} \ ] \ a^2 + b^2 = 1\}$, cioè l'insieme dei punti-QQ pitagorici aventi quadranza rispetto all'origine pari a 1.

Denotiamo tale sottoinsieme dl piano-QQ con ***CircfQQbas*** .

Esempi di punti di ***CircfQQbas*** sono $\left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, $\left\langle \frac{-5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$, $\left\langle \frac{8}{17}, \frac{-15}{17} \right\rangle$ e $\left\langle \frac{-20}{29}, \frac{-21}{29} \right\rangle$

(1) Prop.: L'insieme dei versori-QQ coincide con ***CircfQQbas***.

Dim.: I punti-QQ di ***CircfQQbas***, avendo quadranza pari ad 1, sono le estremità dei versori-QQ diverse dall'estremità fornita dall'origine.
Viceversa ogni vettore-QQ con quadranza pari ad 1 deve avere la forma $\left\langle \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d} \right\rangle$ con ${n_1}^2 + {n_2}^2 = d^2$ e quindi deve appartenere a ***CircfQQbas*** ▮

Per le terne $\langle n_1, n_2, d\rangle$ si possono avere i seguenti casi.

Può essere $n_1 = 0$ e quindi $n_2 = \pm d$; per dualità-xy può essere $n_2 = 0$ e di conseguenza $n_1 = \pm d$.

Si può avere $|n_1| < |n_2|$ e allora $\langle |n_1|, |n_2|, d\rangle$ è una terna pitagorica primaria propria.

Può essere $|n_2| < |n_1|$ e allora $\langle |n_2|, |n_1|, d\rangle \in$ **PtgrTr**.

I casi precedenti sono gli unici possibili.

Tutte le terne pitagoriche-ZZ ottenibili dall'insieme dei punti-QQ pitagorici ***CircfQQbas*** sono terne pitagoriche-ZZ primitive.

B30f.03 L'insieme delle semirette-QQ con estremità nell'origine e aperte è costituito da:
- la semiretta orizzontale $\{\overline{x} \in \mathbb{Q}_+ :| \langle\overline{x}, 0\rangle\}$, (semiasse-QQE, orizzontale verso destra),
- la semiretta orizzontale $\{\overline{x} \in \mathbb{Q}_+ :| \langle-\overline{x}, 0\rangle\}$, (semiasse-QQW, orizzontale verso sinistra),
- la semiretta verticale $\{\overline{y} \in \mathbb{Q}_+ :| \langle 0, \overline{y}\rangle\}$ (semiasse-QQN, verticale verso l'alto),
- la semiretta verticale della forma $\{\overline{y} \in \mathbb{Q}_+ :| \langle 0, -\overline{y}\rangle\}$ (semiasse-QQS, verticale verso il basso),
- la famiglia indicizzata dalle terne $\big\langle n_1, n_2, d\big\rangle$ con $\big\langle |n_1|, |n_2|, d\big\rangle \in$ **PtgrTrPr** oppure con $\big\langle |n_2|, |n_1|, d\big\rangle \in$ **PtgrTrPr** formata dalle semirette esprimibili come

$$(1) \qquad \boldsymbol{S}_{n_1,n_2,d} := \left\{\langle h,k\rangle \in (\mathbb{P}\times\mathbb{P}) \;\Big|\; \left\langle \frac{h}{k}\frac{n_1}{d}, \frac{h}{k}\frac{n_2}{d}\right\rangle\right\} .$$

Se in particolare $\big\langle n_1, n_2, d\big\rangle$ è una terna pitagorica-ZZZ la corrispondente semiretta $\boldsymbol{S}_{n_1,n_2,d}$ è chiamata **semiretta-QQ pitagorica**.

Chiaramente ogni semiretta pitagorica interseca ***CircfQQbas*** in uno e un solo punto-QQ.

Abbiamo quindi una biiezione controllabile algoritmicamente (e facilmente) tra i due insiemi generabili-iop costituiti, risp., dalle semirette pitagoriche e dai versori pitagorici.

(1) Prop.: $\forall\langle p,q\rangle \in$ ***CircfQQbas*** , $\langle h,k\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{nz}$: $\dfrac{h}{k}\langle p,q\rangle = \left\langle \dfrac{h}{k}p, \dfrac{h}{k}q\right\rangle$ è un punto-QQ pitagorico.

Dim.: Basta constatare che $\left(\dfrac{h}{k}\right)^2 p^2 + \left(\dfrac{h}{k}\right)^2 q^2 = \left(\dfrac{h}{k}\right)^2 (p^2+q^2) = \left(\dfrac{h}{k}\right)^2 \in \mathbb{Q}_{sq}$ ∎

B30f.04 Per ogni $\dfrac{h}{k} \in \mathbb{Q}_+$ l'insieme dei punti-QQ $\langle x,y\rangle$ tali che $x^2+y^2 = \dfrac{h^2}{k^2}$ si dice **circonferenza-QQ** avente come centro l'origine e come raggio $\dfrac{h}{k}$. Tale insieme si denota con $\mathsf{CircfQQ}_{\mathbf{0},h/k}$; chiaramente ***CircfQQbas*** $= \mathsf{CircfQQ}_{\mathbf{0},1}$.

Più in generale si definisce **circonferenza-QQ** avente il centro in un generico punto $C = \langle\overline{x},\overline{y}\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e come raggio un generico numero razionale $\dfrac{h}{k} \in \mathbb{Q}_+$ l'insieme dei punti-QQ $P = \langle x,y\rangle$ tali che

$$(x-\overline{x})^2 + (y-\overline{y})^2 = \left(\frac{h}{k}\right)^2 .$$

Questa circonferenza si denota con $\mathsf{CircfQQ}_{\langle\overline{x},\overline{y}\rangle,h/k}$.

La circonferenza-QQ $\mathsf{CircfQQ}_{\mathbf{0},h/k}$ avente centro nell'origine e raggio $\dfrac{h}{k} \in \mathbb{Q}_+$ si può ottenere applicando a ***CircfQQbas*** l'omotetia con centro nell'origine e fattore $\dfrac{h}{k}$.

La generica circonferenza-QQ con centro in $C = \langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ e raggio $\dfrac{h}{k} \in \mathbb{Q}_+$ si può ottenere applicando a $\mathsf{CircfQQ}_{\mathbf{0},h/k}$ la traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\langle\overline{x},\overline{y}\rangle}$.

B30f.05 Ad ogni terna pitagorica $\langle a,b,c\rangle$ e quindi a ogni versore $\left\langle \dfrac{b}{c}, \dfrac{a}{c}\right\rangle \in$ ***CircfQQbas*** risultano associate biunivocamente le matrici

$$\begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2;\mathbb{Z}} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} \frac{b}{c} & -\frac{a}{c} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \end{bmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2;\mathbb{Q}} .$$

Abbiamo osservato che la prima matrice trasforma il versore $\mathsf{e}_x = \langle 1,0\rangle$ nel vettore-ZZ $\langle b,a\rangle$ e il versore $\mathsf{e}_y = \langle 0,1\rangle$ nel vettore-ZZ $\langle -a,b\rangle$; inoltre, essendo una rappresentazione di una trasformazione lineare, trasforma $\langle 1,1\rangle = \mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y$ nel vettore-ZZ $\langle b-a, a+b\rangle$.

Ricordiamo [B21i01] la **casella di base** bx_0, configurazione il cui perimetro orientato positivamente è $\left\langle \mathbf{0}, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,1\rangle \right\rangle_{cy}$
La matrice precedente trasforma bx_0 nel quadrato avente i vertici in $\mathbf{0}$, $\langle b,a\rangle$, $\langle b-a, a+b\rangle$ e $\langle -a,b\rangle$, quadrato orientato positivamente che si può evidentemente individuare con il suo cosiddetto "vettore applicato caratterizzante" $\left\langle \mathbf{0}, \langle b,a\rangle \right\rangle$.
//input pB30f05
Si nota che la quadranza di ciascuno dei lati del quadrato risultato è pari a c^2.

La prima matrice quindi rappresenta una rotodilatazione-ZZ con centro nell'origine e fattore di dilatazione $c > 0$ e si scrive

(1) $$\boldsymbol{RotDil}_{\langle b,a\rangle} := \begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix} .$$

La seconda matrice trasforma il versore $\mathsf{e}_x = \langle 1,0\rangle$ nel versore-QQ $\left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right\rangle$, il versore $\mathsf{e}_y = \langle 0,1\rangle$ nel versore-QQ $\left\langle \frac{-a}{c}, \frac{b}{c} \right\rangle$ e la casella $\mathsf{bSq} = \mathsf{q}_{bas}$ nel quadrato orientato positivamente ottenibile dal vettore applicato $\left\langle \mathbf{0}, \left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right\rangle \right\rangle$.
Quindi la seconda matrice rappresenta una trasformazione che lascia invariata l'origine $\mathbf{0}$, l'orientamento dei quadrati e la quadranza dei loro lati e quindi, per linearità, la quadranza di tutti i segmenti-QQ. Questa seconda matrice viene detta **matrice della rotazione-QQ** associata alla $\langle a,b,c\rangle \in \mathsf{PtgrTr}$ con centro nell'origine; si può quindi scrivere

(2) $$\boldsymbol{RotPtgr}_{\langle a,b,c\rangle} := \begin{bmatrix} \frac{b}{c} & -\frac{a}{c} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \end{bmatrix} .$$

B30f.06 Si è trovato in d08 che il prodotto di due matrici-ZZ pitagoriche fornisce un'altra matrice-ZZ pitagorica.

Da questa proprietà di conservazione si ricava direttamente il mantenimento del carattere pitagorico per il prodotto di due matrici-QQ pitagoriche: infatti l'uguaglianza d08(1) resta valida quando si moltiplicano i suoi due membri per un prodotto di due numeri razionali diversi da 0. In altre parole nella citata uguaglianza si può supporre che $\langle b,a\rangle$ e $\langle e,d\rangle$ siano due punti pitagorici-QQ.

Ricordiamo anche che la matrice prodotto di due matrici di rotazione-QQ è anch'essa una matrice di rotazione-QQ. Questo è in accordo con il fatto che si tratta di trasformazioni che sono caratterizzate dal lasciare invariato il centro di rotazione (quelle basilari in particolare lasciano invariata l'origine $\mathbf{0}$), l'orientamento dei quadrati e le quadranze dei segmenti.

A ciascuna $\langle a,b,c\rangle \in \mathsf{PtgrTr}$ con $a \geq 0$, e di conseguenza a ciascun versore $\mathsf{u} := \left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right\rangle \in \boldsymbol{CircfQQbas}$ con la seconda componente nonnegativa, si associa un cosiddetto **angolo-QQ convesso**, angolo determinato dal vertice $\mathbf{0}$ e dalle semirette corrispondenti, risp., al versore-QQ $\langle 1,0\rangle$ e al versore $\mathsf{u} := \left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right\rangle$.
Una tale entità la individuiamo con la scrittura $\angle(\mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{u})$. Dato che essa viene individuata dal punto pitagorico $\langle b,a\rangle$ è sensato individuarla anche con la notazione $\angle_{\langle b,a\rangle}$.
Osserviamo esplicitamente che questi angoli sono in biiezione con le terne pitagoriche.

La precedente nozione di angolo-QQ con vertice nell'origine, lato appartenente all'asse Ox_Q e convesso (e senza segno) intendiamo estenderla sensibilmente.

La prima estensione si ottiene applicando ad $\angle(\mathbf{e}_x, \mathbf{0}, \mathbf{u})$ la rotazione pitagorica $\boldsymbol{RotPtgr}_{\langle d,e,f\rangle}$ per avere l'angolo-QQ senza segno convesso con vertice nell'origine $\angle\langle \mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle$, con $\mathbf{u} := \dfrac{e}{f}$ e $vSd := \dfrac{d}{f}$.
Si osserva che questo angolo è tale che $\mathbf{v}$ si trova nel semipiano-QQ positivo di $\mathbf{u}$, insieme di punti-QQ che appartengono alla retta-or comprendente $\mathbf{u}$ e che sono visti alla sua sinistra da un mobile che si sposta sulla retta concordemente alla sua orientazione.
Denotiamo la suddetta retta-or con $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ e il suddetto semipiano-QQ con $\mathsf{Semipl}(\mathbf{u})$; questo semipiano lo denotiamo anche con $\mathsf{Semipl}(\mathsf{R})$, quando si definisce $\mathsf{R} := \overrightarrow{\mathbf{v}}$, ovvero quando R denota la semiretta $\overrightarrow{\mathbf{u}}$.

La seconda estensione riguarda gli angoli-QQ convessi e senza segno, ma con il vertice in un qualsiasi punto $V \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e si ottiene applicando a uno dei precedenti angoli delle traslazioni in modo da avere

$$\begin{array}{l} \forall V \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ , \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathsf{CircfQQ}_{C,1} \ : \\ \qquad \angle(\mathbf{u}', C, \mathbf{v}') \ := \ \boldsymbol{Trsl}_C\,(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{v})) \quad \text{con} \quad \mathbf{u}' := \mathbf{u} + C \ , \mathbf{v}' := \mathbf{v} + C \end{array} . \tag{1}$$

Abbiamo definito angoli-QQ convessi senza segno servendoci di coppie di versori; tuttavia ciascuno di questi angoli può essere individuato sostituendo ciascuno dei suoi due versori $\mathbf{u}$ con un vettore-QQ $\alpha\,\mathbf{u}$, ove il fattore α è un qualsiasi elemento di $\mathbb{Q}_+$ o anche con la semiretta-QQ $\{\alpha \in \mathbb{Q}_+ :|\ \alpha\,\mathbf{u}\}$.

B30 **g. angoli nel piano-QQ**

B30g.01 Similmente a quanto si è fatto per gli angoli-ZZK, procediamo alla definizione degli angoli-QQ per gradi riprendendo le prime definizioni nel paragrafo precedenti.

Finora sono stati introdotto gli angoli-QQ senza segno convessi cominciando con quelli con il vertice nell'origine e aventi come primo lato la semiretta $\mathsf{Ox}_{Q,0+} = \mathbb{Q}_{0+} \cdot \mathbf{e}_x$ visualizzata come semiretta che inizia nell'origine e si rivolge verso Est.

Definiamo più in generale angolo-QQ senza segno, più in breve **angolo-QQus** una entità individuato da una scrittura della forma $\angle\big\langle \mathsf{U}, V, \mathsf{V}\big\rangle$ con V punto-QQ chiamato vertice di $\hat{\alpha}$, U e V semirette-QQ con il vertice in V chiamate lati di $\hat{\alpha}$, identificatore introdotto per abbreviare il nostro angolo.
Questo si può descrivere come insieme costituito dai punti-QQ toccati da una semiretta mobile che ruota in verso antiorario intorno al vertice portandosi dalla posizione della semiretta U a quella della V.

Per individuare il generico angolo-QQus $\angle\big\langle \mathsf{U}, V, \mathsf{V}\big\rangle$ si può utilizzare anche il duetto di rette orientate che estendono le semirette costituenti i lati, oppure due segmenti orientati che fanno parte di tali rette, oppure il vertice e due punti appartenenti alle suddette semirette, ossia a una terna della forma $\langle P, V, Q\rangle$ con $P \in \mathsf{U}$ e $Q \in \mathsf{V}$.

Siamo quindi in grado di trattare angoli identificati da una espressione della forma $\angle\big\langle \mathbf{u}, V, \mathbf{v}\big\rangle$, dove sia $\mathbf{u}$ che $\mathbf{v}$ possono denotare una semiretta-QQ, un suo punto diverso dal vertice, una retta.or-QQ o un vettore.a-QQ.
Se $\mathbf{u}$ denota un vettore-QQ useremo la notazione $\vec{\mathbf{u}}$ per denotare la semiretta-QQ che ha come estremità la prima estremità di $\mathbf{u}$ e la notazione $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ per denotare la retta.or-QQ che estende $\mathbf{U}$.

Dato che un vettore.a-QQ $\mathbf{u}$ si può esprimere con le sue estremità con una scrittura della forma $\overrightarrow{VP}$, siamo in grado di individuare un angolo-QQus anche con scritture della forma $\angle\langle P, V, Q\rangle$ nella quale P, V e Q sono punti-QQ arbitrari ma mutuamente diversi.

Abbiamo quindi 16 forme per esprimere un angolo-QQus che potremmo distinguere con sigle come svs, rvr, ava, pvp, pva e simili.

Per precisare l'insieme di punti-QQ costituente un angolo-QQ.us serve estendere la notazione riguardante i semipiani-QQ, ossia i semipiani determinati dalle rette.or-QQ.

Consideriamo per questo un vettore.a-QQa $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$; esso determina la semiretta-QQ $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{PQ}$, la retta.or-QQ $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{PQ}$ e il corrispondente semipiano-QQ positivo che possiamo denotare con $\mathsf{Semipl}(\mathbf{u})$, con $\mathsf{Semipl}(\overrightarrow{\mathbf{u}})$ o con $\mathsf{Semipl}(\overrightarrow{PQ})$.
Questo sottoinsieme di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ intendiamo che contenga anche i punti-QQ appartenenti alle semirette-QQ che costituiscono i suoi lati; questa caratteristica la esprimiamo dicendo che si tratta di un insieme di punti orlato.
Il semipiano-QQ che comprende i punti della retta.or $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ e i punti-QQ sulla destra di un mobile che percorre tale retta costituiscono il semipiano-QQ positivo della retta.or-QQ opposta della $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, cioè della retta.or-QQ $\overrightarrow{-\mathbf{u}}$

L'insieme dei punti costituente l'angolo espresso da $\angle\big\langle \mathbf{a}, V, \mathbf{b}\big\rangle$, con $\mathbf{a} = \overrightarrow{VA}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{VB}$ è l'insieme esprimibile come $\mathsf{Semipl}(\mathbf{a}) \cap \mathsf{Semipl}(-\mathbf{b})$ o come $\mathsf{Semipl}(\overrightarrow{VA}) \cap \mathsf{Semipl}(\overrightarrow{BV})$.

B30g.02 Prima di esaminare alcuni angoli-QQus particolari, introduciamo i sottoinsiemi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ convessi.

Un $S \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si dice **sottoinsieme convesso-QQ** sse dati due suoi punti qualsiasi A e B tutti i punti-QQ del segmento $\overline{AB}$ appartengono ad S.

Ovviamente ogni retta-QQ, ogni semiretta-QQ, ogni segmento-QQ e ogni sempiano di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sono insiemi convessi.
Si dimostra senza difficoltà che ogni intersezione di sottoinsiemi-QQ è convesso e quindi che ogni insieme intersezione di semipiani-QQ è un insieme convesso.

Si osserva che i punti-QQ P appartenenti a un segmento-QQ $\overline{AB}$ si possono considerare vettori-QQ combinazioni lineari dei due vettori $\overrightarrow{\mathbf{0}, A}$ e $\overrightarrow{\mathbf{0}, B}$.

Ogni rotazione-QQ con centro nell'origine si può esprimere come trasformazione lineare dei vettori che compongono $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; quindi ciascuna di queste rotazioni trasforma rette-QQ in rette-QQ.

Evidentemente anche ogni traslazione-QQ e ogni riflessione-QQ e ogni omotetia-QQ trasforma le rette-QQ in rette-QQ.
Dunque tutte le composizioni di traslazioni-QQ, riflessioni-Q, omotetie-QQ e rotazioni-QQ trasformano le rette-QQ in rette-QQ e quindi i segmenti-QQ in segmenti-QQ e le semirette-QQ in semirette-QQ; inoltre trasformano insiemi-QQ convessi in insiemi-QQ convess, angoli-QQus in angoli-QQus, angoli-QQus convessi in angoli-QQus convessi e angoli-QQus nonconvessi in angoli-QQus nonconvessi.

B30g.03 Chiamiamo **angoli-QQus basici** gli angoli-QQ con vertice nell'origine e primo lato fornito dal semiasse $\mathsf{Ox}_{Q,0+}$, ossia angoli-QQus determinati o da espressioni della forma $\angle\left\langle \mathsf{Ox}_{0+}, \mathbf{0}, \mathsf{W}\right\rangle$ con W esprimente una semiretta-QQ o una informazione in grado di determinare una tale semiretta.

Tra questi angoli-QQus serve distinguere i convessi dai nonconvessi.

Prop. Consideriamo un angolo-QQus basico $\hat{\alpha} := \angle\left\langle \mathsf{Ox}_{0+}, \mathbf{0}, \langle e, f\rangle\right\rangle$.
$\hat{\alpha}$ è convesso $\iff$ $f \in \mathbb{Q}_{0+}$. **Dim.**: '$\Longrightarrow$": $\hat{\alpha}$ è l'intersezione dei due semipiani-QQ $\mathsf{Semipl}(\mathsf{e}_x)$ e $\mathsf{Semipl}(\overrightarrow{\langle e, f\rangle, \mathbf{0}})$.
"$\Longleftarrow$": Dimostriamo che $f < 0$ comporta la nonconvessità di $\hat{\alpha}$. Se $e > 0$ il segmento $\overline{\langle e, f\rangle, \langle 2e, 0\rangle}$ ha tutti i punti diversi dagli estremi estranei ad $\hat{\alpha}$; se $e < 0$ il segmento $\overline{\langle e, f\rangle, \langle |e|, 0\rangle}$ ha tutti i punti diversi dagli estremi estranei ad $\hat{\alpha}$ ▮

Consideriamo l'angolo-QQ $\angle\left\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_y\right\rangle = \angle\left\langle \langle 1, 0\rangle, \mathbf{0}, \langle 0, 1\rangle\right\rangle$.
Questo angolo si dice angolo-QQus basico retto; in generale diciamo **angoli-QQus retti** tutti gli angoli-QQus ottenibili dal precedente applicando traslazioni-QQ e rotazioni-QQ. Evidentemente tutti questi angoli sono convessi.

Si definiscono come **angoli-QQus basici acuti**, gli angoli-QQus basici contenuti strettamente nell'angolo-QQus retto basico e diciamo **angoli-QQus acuti** tutti gli angoli-QQus ottenibili dai precedenti mediante l'applicazione di traslazioni-QQ e rotazioni-QQ.

Si definisce come **angolo-QQus basico piatto** l'angolo-QQus $\angle\left\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathsf{e}_x\right\rangle$, ossia il semipiano-QQ $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_{0+}$.
Definiamo in generale **angolo-QQus piatto** ogni angolo-QQus ottenibile applicando al precedente una traslazione-QQ e una rotazione-QQ, ossia un qualsiasi semipiano-QQ munito di un suo punto con il ruolo di vertice, oncora una semiretta.or-QQ munita di un suo punto con il ruolo di vertice.

Si definiscono come **angoli-QQus basici ottusi**, gli angoli basici contenuti strettamente nell'angolo piatto basico e contenenti strettamente l'angolo retto basico; in generale diciamo **angolo-QQus ottuso** ogni angolo-QQus ottenibile da un angolo basico ottuso applicandogli traslazioni-QQ e rotazioni-QQ.

Anche questi angoli sono da considerare angoli-QQus convessi.

Definiamo angolo-QQus basico nullo l'angolo $\angle\left\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_x\right\rangle$, ossia l'insieme dei punti $\mathbb{Q}_+ \, \mathsf{e}_x$, ossia il semi-asse $\mathsf{Ox}_{Q,0+}$.

Definiamo infine angolo-QQus nullo ogni angolo-QQ ottenibile applicando all'angolo-QQus nullo basico traslazioni-QQ e rotazioni-QQ, ossia ogni semiretta-QQ.

B30g.04 Ampliamo la definizione degli angoli-QQus basici come insiemi di punti-QQ individuati da una espressione $\angle\big\langle \mathsf{Ox}_{Q,0+}, \mathbf{0}, \mathbf{b}\big\rangle$, dove $\mathbf{b}$ denota un qualsiasi vettore-QQ nonnullo, diverso da $\mathbf{0}$.
Per descrivere meglio l'insieme di punti-QQ corrispondente a questo angolo occorre riprendere la nozione di circonferenza-QQ basica [f.02].
Se A e B sono due punti della circonferenza $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{CircfQQbas}$ per arco senza segno di CBi delimitato da A e B si intende l'insieme dei punti-QQ toccati da un mobile che si muove su $\boldsymbol{C}$ da A a B secondo il verso positivo, cioè antiorario.
Tale insieme lo denotiamo con $ARCus_{\boldsymbol{C}}(AB)$

Tra gli insiemi corrispondenti agli angoli-QQus basici la relazione *subseteq* induce un ordinamento totale che denotiamo con $\preceq_{amp}$ e che diciamo precedenza per ampiezza angolare.
Questa relazione si estende a tutti gli angoli-QQus con la richiesta che se per due angoli basici $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ si ha ampl$(\hat{\alpha}) \preceq_{amp}$ ampl$(\hat{\beta})$ per ogni $\hat{A} equiTraRot \hat{\alpha}$ e $\hat{B} equiTraRot \hat{\beta}$ si ha $\hat{A} \preceq_{amp} \hat{B}$, dove equiTraRot denota la equivalenza che collega due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ottenibili l'uno dall'altro applicando una traslazione e una rotazione. In altre parole si richiede il mantenimento della relazione $\preceq_{amp}$ per applicazione alle circonferenze-QQ di traslazioni-QQ e di rotazioni-QQ.

Abbiamo quindi che ogni angolo-QQus nullo precede (per ampiezza angolare) ogni angolo acuto, che gli angoli acuti precedono ogni angolo retto, che questi precedono tutti gli angoli ottusi, che questi precedono tutti gli angoli piatti e che questi (cioè tutti gli angoli convessi) precedono gli angoli-QQus rimanenti, cioè tutti gli angolo-QQus nonconvessi.

A questo punto si sente la necessità di disporre di una misura numerica che rispetti e rappresenti al meglio l'ordinamento $\preceq_{amp}$.
Una prima idea sarebbe quella di utilizzare la lunghezza degli archi sulle circonferenze-QQ di raggio 1, ma si trova che queste non si possono definire mediante numeri razionali.

B30g.05 Diciamo coppia di angoli-QQus successivi due angoli che presentano lo stesso vertice e con il secondo lato del primo angolo coincidente con il primo lato del secondo. Si tratta quindi di due angoli che si possono individuare con scritture come $\angle\big\langle A, V, B\big\rangle$ e $\angle\big\langle B, V, C\big\rangle$.
Si definisce come somma di due angoli successivi $\hat{\alpha} = \angle\big\langle A, V, B\big\rangle$ e $\hat{\beta} = \angle\big\langle B, V, C\big\rangle$ e si denota con $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ l'angolo $\angle\big\langle A, V, C\big\rangle$, ossia l'angolo avente lo stesso vertice dei due angoli sommandi, avente come primo lato il primo lato del primo angolo sommando e avente come secondo lato il secondo lato del secondo angolo sommando.
Evidentemente l'insieme-QQ $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ corrisponde all'unione dei due insiemi-QQ $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.

Si osserva che sommare un angolo nullo a ogni altro angol-QQus riproduce quest'ultimo, che sommare due angoli-QQus acuti porta a un altro angolo convesso, che la somma di due angoli retti è un angolo piatto e che la somma di due angoli convessi può essere un angolo nonconvesso.

Si ha anche che la somma di due angoli-QQus qualsiasi può non condurre a un altro angolo-QQus.
Questo accade ad esempio se si cerca di sommare $\hat{\alpha} := \angle\big\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathbf{e}_y\big\rangle$ con $\hat{\beta} := \angle\big\langle -\mathbf{e}_y, \mathbf{0}, \mathbf{e}_y\big\rangle$.

Se il risultato di questa operazione fosse un senplice insieme sarebbe lo stesso $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ indistinguibile da altre somme di angolo-QQus come $\angle\big\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathbf{e}_y\big\rangle + \hat{\gamma}$ dove $\hat{\gamma} = \angle\big\langle -\mathbf{e}_y, \mathbf{0}, \mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\big\rangle$.

Non si perde informazione se si arricchisce l'interpretazione degli angoli-QQus come insiemi-QQ stabilendo che si trattano angoli-QQus come rappresentanti di alcuni multiinsiemi con terreno $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e con molteplicità che possono assumere come valori gli interi naturali.

Con questa interpretazione $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ fornisce il multiinsieme che attribuisce ai punti-QQ di $\angle\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_y\rangle$ la molteplicità 2 e agli altri punti molteplicità 1; $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}$ fornisce invece il multiinsieme che attribuisce ai punti-QQ di $\angle\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_x+\mathsf{e}_y\rangle$ la molteplicità 2 e agli altri punti molteplicità 1.

Quindi se si vuole definire la somma di due angoli-QQus come operazione effettuabile su tutte le coppie di angoli-QQus si rende necessaria l'interpretazione degli angoli come multiinsiemi.

B30g.06 Un evidente arricchimento per le prestazioni degli angoli si ottiene definendo come **angolo-QQus opposto** di $\hat{\alpha} = \angle\langle \mathsf{U}, V, \mathsf{W}\rangle$ e denotandolo con $-\hat{\alpha} := \angle\langle \mathsf{W}, V, \mathsf{U}\rangle$, cioè con la notazione con i lati scambiati e chiedendo che fornisca il multiinsieme con le molteplicità opposte a quelle fornite da $\hat{\alpha}$.

Questo angolo si può interpretare visivamente come ottenuto facendo ruotare in verso orario, negativo, una semiretta mobile intorno al vertice dell'angolo dalla posizione del secondo lato a quella del primo.

Abbiamo quindi un nuovo genere di entità matematica che chiamiamo **angolo-QQ** che può essere definito da un primo lato costituito da una semiretta con estremo nel vertice, da un vertice V, e da una rotazione-QQ con centro in V che può svilupparsi aut nel verso positivo aut nel negativo, che può compiere più giri completi intorno al centro e che fornisce il multiinsieme con terreno contenuto in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che a ogni punto-QQ assegna cla molteplicità che in valore assoluto esprime in numero di volte che è stato toccato dalla semiretta mobile e che ha valore positivo se è stato toccato dalla semiretta in rotazione antioraria, valore negativo se toccato dalla semiretta in rotazione oraria.

Ogni angolo con segno con il vertice in V è associato a una rotazione-QQ con centro in V, quella che porta dal primo al secondo lato, eventualmente avendolo superato più volte.

Si può estendere la somma di una coppia di angoli-QQ con lo stesso vertice e lati consecutivi (con secondo lato del primo angolo coincidente con il primo del secondo angolo), anche se i due angoli hanno verso opposto. Nel caso di primo angolo positivo e secondo negativo e di ampiezze contenute, si giunge ad un insieme ottenibile come eliminazione dell'uno dall'altro.
Si può inoltre definire la differenza di due angoli-QQ $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ con lo stesso vertice e consecutivi come

$$\hat{\alpha}-\hat{\beta} \;:=\; \hat{\alpha}+(-\hat{\beta})\ .$$

Si osserva anche che le riflessioni-QQ trasformano gli angoli positivi in angoli-QQ negativi e viceversa e scambiano le rotazioni-QQ antiorarie con le orarie.
Le traslazioni-QQ e le rotazioni-QQ mantengono invece la somma degli angoli-QQ e il segno di ciascuno di questi angoli.

A questo punto risulta che la somma e la differenza degli angoli-QQ con segno sono operazioni piuttosto versatili.

Si rafforza quindi la opportunità di definire algoritmi numerici per efficaci elaborazioni degli angoli-QQ e delle corrispondenti rotazioni-QQ.

B30g.07 Consideriamo due versori-QQ a e d, ovvero due punti-QQ pitagorici appartenenti alla circonferenza-QQ basica che scriviamo $\mathsf{a} = \left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c}\right\rangle$ con $c>0$ e $a^2+b^2=c^2$, e $\mathsf{d} = \left\langle \frac{e}{f}, \frac{d}{f}\right\rangle$ con $f>0$ e $d^2+e^2=f^2$.
Consideriamo anche i corrispondenti angoli basici $\hat{\alpha} := \angle\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{a}\rangle$ e $\hat{\delta} := \angle\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{d}\rangle$
e le relative matrici 2×2 sui razionali

$$\mathsf{M}_{\hat\alpha} := \begin{bmatrix} \dfrac{b}{c} & -\frac{a}{c} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \end{bmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2;\mathbb{Q}} \quad \text{e} \quad \mathsf{M}_{\hat\delta} := \begin{bmatrix} \dfrac{e}{f} & -\frac{d}{f} \\ \frac{d}{f} & \frac{e}{f} \end{bmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2;\mathbb{Q}} \ .$$

Per semplicità espositiva inizialmente pensiamo che i due punti e i relativi angoli basici siano interni primo quadrante-QQ, ossia che sia $0 < b, a, e, d < 1$.
In forza di f05(2), $\mathsf{M}_{\hat\alpha}$ è la matrice della rotazione associata all'angolo $\hat\alpha$ e $\mathsf{M}_{\hat\delta}$ è la matrice della rotazione associata all'angolo $\hat\delta$; inoltre sappiamo che i due prodotti delle due matrici portano alla stessa matrice di rotazione pitagorica che corrisponde alla somma di $\hat\alpha$ con l'angolo suo successivo $\mathsf{M}_{\hat\alpha}\hat\delta$ e alla somma di $\hat\delta$ con l'angolo suo successivo $\mathsf{M}_{\hat\alpha}\hat\alpha$. ?

Quindi abbiamo algoritmi per la costruzione effettiva degli angoli-QQus definiti come somma di angoli-QQus noti, almeno quando i due angoli sono acuti; ma questa possibilità vale per tuti gli angoli-QQus.

Consideriamo intanto che la somma di un angolo retto con il suo ruotato di un angolo retto è un angolo piatto e che la possibilità di servirsi di operazioni matriciali si estende a tutti gli angoli-QQus basici per la associatività e la commutatività delle matrici degli angoli-QQ.
L'ampliamento ad angoli basici possibilmente negativi si ottiene applicando riglessioni rispetto all'asse Ox.
L'ampliamento a tutti gli angoli-QQus con vertice nell'origine si ottiene applicando la rotazione che porta i due angoli sommandi ad avere $\mathbf{e}_x$ come primo lato e di applicare la rotazione inversa di quella applicata ad $\hat\alpha$ all'angolo somma ottenuto.
L'ampliamento alla somma di due angoli-QQus con vertice V diverso da $\mathbf{0}$ si ottiene applicando la traslazione che porta V in $\mathbf{0}$ seguita dalla rotazione con centro in $\mathbf{0}$ e infine applicando la traslazione che porta $\mathbf{0}$ in V.

Possiamo quindi affermare che si può ottenere con ben definite operazioni su matrici di numeri razionali 'angolo-QQus somma di due qualsiasi angoli-QQ e in particolare l'ampiezza di un angolo ottenuto sommando due angoli dalle ampiezze note. Questo vale anche per angoli-QQus da trattare come multiinsiemi.

B30g.08 Una seconda manipolazione ottenibile facilmente riguarda la decomposizione di un angolo $\hat\alpha$ in due angoli successivi la cui somma sia lo stesso $\hat\alpha$.

Consideriamo per questo un angolo basico convesso inferiore all'angolo-QQus piatto $\hat\alpha = \angle\langle\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{d}\rangle$: si dice **semiretta bisettrice** dell'angolo $\hat\alpha$ la semiretta-QQ espressa da $(\mathbf{a}+\mathbf{d})\cdot\mathbb{Q}_{0+}$. Si dice **coppia di angoli dimezzati** di $\hat\alpha$ la coppia $\Big\langle \angle\langle\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{a}+\mathbf{d}\rangle\ ,\ \angle\langle\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{0},\mathbf{b}\rangle\Big\rangle$.

Per effettuare il dimezzamento degli altri angoli-QQus occorre procedere gradualmente in modo da mantenere piccole le modifiche della bisettrice in conseguenza di piccole variazioni del secondo lato.
Per ora conviene limitarsi agli angoli-QQus basici convessi o anche ai soli angoli-QQus basici acuti.

Consideriamo per primo il dimezzamento dell'angoloQQus basico retto $\langle\mathbf{e}_x,\mathbf{0},\mathbf{e}_y\rangle$ si ottengono i due angoli-QQus semiretti basici $\langle\mathbf{e}_x,\mathbf{0},\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\rangle$ e $\langle\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y,\mathbf{0},\mathbf{e}_y\rangle$, i quali ovviamente costituiscono una coppia di angoli consecutivi.

Questo processo di dimezzamento di un qualsiasi angolo-QQus basico acuto si può reiterare a volontà e si possono individuare effettivamente i sottomultipli di un tale angolo-QQus relativi a fattori multipli di potenze negative di 2.
Con l'operazione di somma di angoli si possono individuare concretamente i vari multipli dei sudddetti sottomultipli.

Osserviamo che non si è parlato di decomposizione di un angolo-QQus in tre parti o in un altro numero di parti che non sia potenza di 2.

A questo punto si rafforza l'aspirazione di potere esprimere numericamente l'ampiezza degli angoli-QQus in modo da poter porre in relazione ampiezze multiple e ampiezze sottomultiple (per ora limitate ai sottomultipli per potenze di 2).

B30g.09 Più precisamente è ragionevole aspirare a una definizione di una funzione ampiezza numerica ampl da applicare ai vari angoli-QQ che si possono individuare effettivamente la quale sia invariante per traslazioni e rotazioni e per la quale accada che la somma sia due angoli porti a un angolo-QQ avente come ampiezza la somma algebrica delle ampiezze degli angoli sommandi.

Questa proprietà viene chiamata **additività dell'ampiezza** degli angoli-QQ e comporta la richiesta che l'ampiezza degli angoli ottenuti per dimezzamento sia la metà dell'ampiezza dell'angolo dimezzato.

Si cerca quindi una funzione ampiezza che goda della proprietà di additività esprimibile con l'uguaglianza $\text{ampl}(\hat{\alpha}+\hat{\beta}) \;=\; \text{ampl}(\hat{\alpha})+\text{ampl}(\hat{\beta})$.

Un primo tentativo di carattere euristico, e quindi un po' provvisorio, consiste nell'assegnare agli angoli-QQus ampiezze numeriche positive fornite da misure numeriche esprimibili come multipli e sottomultipli di una unità di misura convenzionale.

Per questa unità di misura prendiamo in considerazione due scelte il radiante e il grado; inizialmente, disponendo solo del campo dei numeri razionali, le introduciamo come unità convenzionali definendole non direttamente, ma attraverso loro multiplie sottomultipli e richiedendo la additività e le sue conseguenze.
Questa potrà essere definita soddisfacentemente solo quando si disporrà del campo dei numeri reali costruibili, una fondamentale estensione del campo dei razionali e quando si potrà riferire alla lunghezza della circonferenza ***CircfQQbas***, misura che richiede il processo di passaggio al limite.

B30g.10 Cominciamo con l'assegnare agli angoli piatti le due ampiezze di π radianti e di 180°, che richiediamo essere equivalenti; per π intendiamo un valore numerico (costante) la cui precisazione procrastiniamo e al quale diamo solo valutazioni approssimate utili per singole attività pratiche, come le seguenti molto utili nel passato:

$$3.14,\ 3{,}14159,\ \frac{22}{7} = 3,1428...,\ \frac{355}{113} = 3,14i5929...\ .$$

Di conseguenza abbiamo i fattori di proporzionalità

$$\frac{\text{radiante}}{\text{grado}} \;=\; \frac{180}{\pi} \;\approx\; 57,2958 = x \quad , \quad \frac{\pi}{180} \;\approx\; 0,0175 \quad .$$

Possiamo subito affermare che gli angoli retti presentano l'ampiezza di $90^\circ \;=\; \frac{\pi}{2}$, gli angoli giro l'ampiezza di $360^\circ = 2\,\pi$; ovviamente gli angoli nulli hanno l'ampiezza di 0°.

Altri angoli utili sono gli angoli-QQ semiretti ai quali assegnamo l'ampiezza di $45^\circ = \pi/4$: sono tali l'angolo basico $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y$ il suo riflesso rispetto alla diagonale $[y = x]$ $\angle\big\langle \mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y, \mathbf{0}, \mathsf{e}_y$.

Chiaramente gli angoli-QQus acuti hanno ampiezze ϕ con $0^\circ < \phi < 90^\circ$ e gli ottusi hanno ampiezze ϕ con $90^\circ < \phi < 180^\circ$.

B30g.11 Procediamo alla introduzione di angoli-QQ più generali degli angoli-QQus introdotti finora. Questa generalizzazione parte da una interpretazione cinematica del generico angolo-QQus basico $\hat{\alpha} \;=\; \angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{b}\big\rangle$ inteso come insieme dei punti-QQ toccati da una semiretta-QQ mobile che viene fatta ruotare tenendo fissa la sua estremità in $\mathbf{0}$ a partire dalla posizione iniziale costituita dal semiasse

orizzontale $\mathsf{e}_x \cdot \mathbb{Q}_{0+}$ per una ampiezza angolare $\mathrm{ampl}(\hat{\alpha})$ e quindi fino a raggiungere la semiretta-QQ $\mathsf{b} \cdot \mathbb{Q}_{0+}$.
Questa interpretazione viene motivata facendo riferimento alle applicazioni del modello osservabile di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con la opportunità di trattare rotazioni del piano con la semiretta mobile che effettua più di un giro nel verso positivo e che potrebbe muoversi anche nel verso opposto, cioè nel verso orario.

Per questa generalizzazione si deve estendere il dominio della funzione ampiezza ampl chiedendo che possa assumere qualsiasi valore razionale, non solo i valori in $[0° :: 360°] = [0 :: 2\pi]$.

Definiamo quindi come **angolo-QQ [con segno] basico** una entità $\hat{\theta}$ determinata dal vertice $\mathbf{0}$, dalla semiretta-QQ $\mathsf{e}_x \cdot \mathbb{Q}_{0+}$ (semiasse Ox_{Q+}) e da una ampiezza $\mathrm{ampl}(\hat{\theta}) \in \mathbb{Q}$, entità che fornisce un multiinsieme con molteplicità in $\mathbb{Z}$.

Se $\mathrm{ampl}(\hat{\theta}) \in [0 :: 2\pi]$ l'angolo (con segno) si può identificare con un angolo senza segno. Se $\mathrm{ampl}(\hat{\theta}) \in [2\pi, t\,2\pi + \phi]$ con $t \in \mathbb{P}$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ si ha il multiinsieme con i punti-QQ con argomento minore o uguale e ϕ aventi molteplicità $t+1$ e i rimanenti con molteplicità t.

Se $\mathrm{ampl}(\hat{\theta}) < 0$ abbiamo un multiinsieme con valori opposti all'angolo con coordinata angolare $|\mathrm{ampl}(tet)|$.

Possiamo quindi affermare che per gli angoli con segno e vertice nell'origine

$$\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathrm{ampl}(\theta)\big\rangle \;=\; -\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathrm{ampl}(\theta)\big\rangle \;.$$

Abbiamo anche che ogni riflessione-QQ trasforma un angolo con segno $\hat{\theta}$ nell'angolo opposto $-\hat{\theta}$.

Definiamo infine come angolo-QQ con segno ogni angolo-QQ con segno ottenibile da un angolo con lato iniziale Ox_{0+} applicandogli una traslazione-QQ e una rotazione-QQ.

B30g.12 Si trova senza difficoltà che ogni riflessione-QQ trasforma un angolo nel suo opposto, che in modo simile a quello adottato per gli angoli-QQus, si può definire la somma di due angoli con segno senza restrizioni, nonchè i loro multipli i loro sottomultipli relativi a fattori potenze negative di 2 e mantenendo l'additività dell'ampiezza.

Questi angoli consentono di definire le rotazioni intorno all'origine per dati angoli convessi, cioè per angoli con ampiezze α tali che $0° = |\alpha| < 180°$.

Applicando queste rotazioni si ottiene la totalità degli angoli-QQ convessi con segno e vertice nell'origine.

La totalità degli angoli-QQ convessi si ottiene applicando ai precedenti le varie traslazioni

$$\boldsymbol{Trsl}[s_x\,\mathsf{e}_x + s_y\,\mathsf{e}_y] = \boldsymbol{Trsl}[\mathsf{s}]$$

.

Ciascuno di questi angoli $\hat{\alpha}$ è individuabile con un vertice $V \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ un primo lato e una ampiezza α tale che $-180° = -2\pi < \alpha < 180° = 2\pi$.

Gli angoli-QQ convessi positivi si possono identificare con i multiinsiemi dei punti-QQ che i loro lati delimitano

A questo punto si definisce la somma o giustapposizione tra due angoli-QQ convessi $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ aventi in comune il vertice e il secondo lato del primo coincidente con il primo lato del secondo: questa entità è l'angolo con vertice V delimitato dal primo lato di $\hat{\alpha}$ e dal secondo lato di $\hat{\beta}$ al quale si attribuisce ampiezza $\mathrm{ampl}(\hat{\alpha}) + \mathrm{ampl}(\beta)$.

La totalità degli angoli-QQ con segno si definisce come l'insieme degli angoli con segno ottenibile sommando angoli-QQ con segno convessi.

Ciascuno degli angoli-QQ si può identificare con la semiretta costituente il suo primo lato e la sua ampiezza misurabile in gradi o in multipli di π.

Si osserva che dalla semiretta e dalla ampiezza è deducibile le semiretta costituente il secondo lato, mentre dalle due semirette si può ricavare solo la ampiezza a meno di un multiplo intero di $360° = 2\,\pi$.

A questo punto si può definire angolo-QQ piatto ogni angolo-QQ avente come ampiezza un multiplo dispari di π e si può definire angolo-QQ giro ogni angolo-QQ avente come ampiezza un multiplo pari di π.

B30g.13 Ci proponiamo ora di migliorare la valutazione della ampiezza angolare di un angolo-QQ che denotiamo con ampl($\hat{\phi}$) o, concisamente, con ϕ, e che ha esteso la valutazione omonima introdotta in B22c per tutti i multipli degli angoli di 45°.

Questo miglioramento deve tenere conto del fatto che a gran parte degli angoli-QQ definiti da vettori.a-QQ (e in particolare all'angolo basico di 45°) non è possibile associare un punto della circonferenza-QQ basica, ovvero una terna pitagorica.

Ci limiteremo invece a definire alcune funzioni che associano alle ampiezze angolari degli angoli-QQ valori razionali, funzioni che consentono di effettuare calcoli molto importanti concernenti la geometria del piano-QQ e in particolare calcoli sulle rotazioni in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Queste funzioni le diciamo **funzioni trigonometriche sui razionali**; esse si rivelano di notevole utilità pratica e i calcoli che esse consentono costituiscono la cosiddetta **trigonometria sui razionali**.

Un valore numerico potremo assegnarlo alle ampiezze degli angoli-ZZ ottenuti dagli angoli piatti e dalle operazioni di dimezzamento e di somma di angoli.
Agli angoli rimanenti e in particolare agli angoli pitagorici, cioè gli angoli associati a terne pitagoriche primitive, non si riesce di assegnare una ampiezza che sia esprimibile come ricavabile da π o da 180° mediante dimezzamenti e somme di angoli.
A questi angoli si riuscirà ad assegnare una ampiezza solo quando si disporrà dei numeri reali costruibili o dei numeri reali definiti assiomaticamente [B47], ossia quando si potrà disporre del processo di passaggio al limite.

Le funzioni trigonometriche eazionali ci proponiamo di definirle in modo che i loro valori rimangano invariati quando gli angoli loro argomenti sono sottoposti a traslazioni e rotazionie in modo che sia possibile collegare con semplici calcoli i valori che esse assumono quando gli angoli loro argomenti vengono riflessi, sommati, dimezzati o frazionati.
Questi requisiti, come vedremo, saranno mantenuti quando si generalizzano angoli e funzioni trigonometriche a loro versioni trattabili con operazioni di passaggio al limite, ovvero con generalizzazioni al continuo; in tal modo potranno costituire strumenti computazionali efficienti e versatili.

B30 h. funzioni trigonometriche sui razionali

B30h.01 Per ora procediamo a definire funzioni della ampiezza angolare utilizzabili per varie costruzioni razionali, ossia costruzioni che si servono di multipli razionali di π.

Consideriamo l'angolo-QQ $\hat{\phi} = \angle(\mathbf{e}_x, \mathbf{0}, \mathbf{u})$ con $\mathbf{u} = \langle \frac{b}{c} \, , \, \frac{a}{c} \rangle$ per $\langle a, b\rangle$ generico punto-QQ.

L'ampiezza di questo angolo la denotiamo anche con $angamp_{\langle b,a\rangle}$.

Definiamo le seguenti funzioni che hanno per dominio l'insieme delle ampiezze angolari relative agli angoli-QQ e che hanno il codominio in $\mathbb{Q}$:

(1) $$\sin(angamp_{b,a}) := \frac{a}{c} \quad , \quad \cos(angamp_{b,a}) := \frac{b}{c} \quad , \quad \tan(angamp_{b,a}) := \frac{a}{b} \, .$$

Su queste funzioni si possono fare varie facili osservazioni.

Il valore della funzione seno, $\sin \phi$, cresce da 0 a 1 al crescere di ϕ da $0°$ a $90°$, ampiezza che assegnamo a ogni angolo retto, angolo che presenta due lati ortogonali.
Il suo valore viceversa decresce da 1 a 0 con il crescere di ϕ dall'ampiezza $90°$ all'ampiezza $180°$, l'ampiezza che si assegna all'angolo piatto, l'angolo definito da due semirette opposte. Si ha inoltre che $\sin(180° - \phi) = \sin \phi$.

La funzione coseno, $\cos \phi$, decresce da 1 a 0 al crescere di ϕ da $0°$ a $90°$ e decresce da 0 a -1 con il crescere di ϕ da $90°$ a $180°$. si ha inoltre che $\cos(180° - \phi) = -\cos \phi$.

La funzione tangente, $\tan \phi$, risulta definita solo per $b \neq 0$, cioè per ϕ diverso da un multiplo dispari di $90°$, e dalla definizione seguente

(2) $$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \, .$$

Quindi la funzione cresce da 0 illimitatamente per ϕ che cresce da $0°$ a $90°$ e cresce da valori illimitatamente negativi fino allo 0 per ϕ che cresce da $90°$ a $180°$.

B30h.02 Chiamiamo **inclinazione** della terna pitagorica-ZZP $\langle a, b, c\rangle$ la coppia $\langle a, b\rangle$; diciamo poi insieme delle inclinazioni pitagoriche primitive l'insieme di tali numeri razionali e denotiamolo con **PtgrInclPrmt**.

Diciamo inoltre insieme delle inclinazioni pitagoriche *tout court* l'insieme che denotiamo con **PtgrIncl** ottenuto dal precedente aggiungendogli quelli ottenuti per passaggio al reciproco e successivamente quelli ottenuti trasformando nell'opposto o il primo membro a, o il secondo b, o entrambi.

Dalla definizione e dalla osservazione in f01 che non può essere $a = b$ si ricava che le inclinazioni pitagoriche primarie sono numeri razionali compresi tra 0 e 1 estremi esclusi: **PtgrInclPrmt** $\subseteq (0 :: 1)$.

Si trovano molti altri razionali compresi tra 0 e 1 che non sono inclinazioni pitagoriche primarie.
In particolare non vi è alcuna inclinazione pitagorica della forma $\frac{1}{q}$ per $q \in \mathbb{P}$, in quanto per questi q si ha $q^2 + 1 \notin \mathbb{P}_{sq}$; inoltre non vi è alcuna inclinazione pitagorica della forma $\frac{2}{q}$ per $q \in \mathbb{P}$, in quanto per ogni q intero positivo $q^2 + 4 \notin \mathbb{P}_{sq}$.

In generale non sono inclinazioni pitagoriche le frazioni $\frac{h}{k}$ con $h^2 + k^2 \notin \mathbb{P}_{sq}$.

Accade anche che è vuota l'intersezione di ***CircfQQbas*** con la diagonale di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $[y = y]$.

Per descrivere queste carenze si dice anche che l'ambiente numerico-geometrico $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ è un **ambiente noncontinuo**.

B30h.03 Alle inclinazioni pitagoriche appartengono invece i razionali della forma $\dfrac{2q+1}{2q(q+1)}$ per ogni $q = 1, 2, 3, \ldots$.

Esaminiamo i valori che assume questa espressione.

Innanzi tutto si constata che per ogni $q \in \mathbb{P}$ si ha $\dfrac{2q+1}{2q(q+1)} < \dfrac{1}{q}$, in quanto $2q + 1 < 2q + 2$; inoltre al crescere di q i suoi valori decrescono, in quanto $\dfrac{2q+1}{2q(q+1)} > \dfrac{2q+3}{2(q+1)(q+2)}$, disuguaglianza che equivale alla $(2q + 1)2(q + 2) > q(2q + 3)$, cioè alla $(2q + 4)(2q + 1) > (2q + 3)q$.

Più in dettaglio abbiamo i seguenti valori

$$\left\lceil\, q\in\mathbb{Q} \Vdash \frac{2q+1}{2q(q+1)} \,\right\rceil \;=\; \downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 100 & \cdots & 1000 & \cdots \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{12} & \frac{7}{24} & \frac{9}{40} & \frac{11}{60} & \cdots & \frac{201}{20200} & \cdots & \frac{2001}{2002000} & \cdots \end{matrix}\downarrow .$$

Questo suggerisce che si trovino sia razionali pitagorici che razionali non pitagorici piccoli quanto si vuole. In effetti, scelto arbitrariamente un ϵ razionale positivo (anche molto piccolo), considerando un $q > \dfrac{1}{\epsilon}$, si ha un razionale pitagorico della forma $\dfrac{2q+1}{2q(q+1)}$ inferiore a un razionale non pitagorico $\dfrac{1}{q}$ a sua volta inferiore ad ϵ.

Vi sono dunque angoli con valori delle funzioni seno e tangente piccoli quanto si vuole; in parole più semplici diciamo che vi sono angoli con ampiezze piccole quanto si vuole e ancor più sbrigativamente diciamo che vi sono angoli piccoli quanto si vuole.

B30h.04 Consideriamo ancora il triangolo rettangolo-QQ

(1) $$\mathsf{T}_q \;:=\; \langle A, B, C\rangle \;:=\; \big\langle \mathbf{0}\ ,\ \langle 2q(q+1), 0\rangle\ ,\ \langle 2q(q+1), 2q+1\rangle\big\rangle$$

le lunghezze dei cui lati scriviamo $a := 2q + 1$, $b := 2q(q + 1)$ e $c := b + 1 = 2q(q + 1) + 1$.

Consideriamo l'ulteriore punto $D = \langle 2q(q + 1) + 1, 0\rangle$ e il triangolo $\langle C, D, B\rangle$ retto in C e il cui cateto CD ha lunghezza 1 (come da richiesta iniziale).

Per la quadranza della sua ipotenusa abbiamo

(2) $$\mathsf{Qdr}(B, D) \;=\; \mathsf{Qdr}(B, C) + \mathsf{Qdr}(C, D) \;=\; (2q + 1)^2 + 1 .$$

Consideriamo anche i punti su ***CircfQQbas***

$$B' \;:=\; \overline{AB} \cap \boldsymbol{CircfQQbas} \;=\; \left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right\rangle \quad \text{e} \quad D' \;:=\; \overline{AD} \cap \boldsymbol{CircfQQbas} \;=\; \langle 1, 0\rangle ,$$

nonché il triangolo $\langle A, D', B'\rangle = \boldsymbol{Hmtt}_{1/c}\langle A, C, B\rangle$.

Per la quadranza del lato con i vertici in ***CircfQQbas*** abbiamo

(3) $$Q_q \;:=\; \mathsf{Qdr}(D', B') \;=\; \frac{\mathsf{Qdr}(B, D)}{\mathsf{Qdr}(B, A)} \;=\; \frac{(2q + 1)^2 + 1}{(2q(q + 1) + 1)^2} .$$

Abbiamo quindi una funzione di $q \in \mathbb{P}$ i cui primi valori sono $\dfrac{10}{49}, \dfrac{26}{169}, \dfrac{50}{625}$ e $\dfrac{82}{1681}$ la quale, evidentemente, al crescere di q decresce e assume valori piccoli quanto si vuole.

Più precisamente fissiamo arbitrariamente un $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (piccolo quanto si vuole) e troviamo un $\overline{q}$ tale che per ogni $q \geq \overline{q}$ sia $Q_q < \epsilon$. Per questo basta osservare che

$$\forall q \in \mathbb{P} \;:\; \frac{(2q + 1)^2 + 1}{(2q(q + 1) + 1)^2} < \frac{(2q + 2)^2}{(2q(q + 1))^2} = \frac{1}{q^2}$$

e che per ogni q tale che $q^2 > \dfrac{1}{\epsilon}$ si ha $Q_q < \epsilon$.

Queste considerazioni dicono che sulla circonferenza ***CircfQQbas*** si trovano punti-QQ vicini quanto si vuole al punto $\langle 1, 0\rangle$.

Dato che nel prossimo paragrafo ritroviamo che la quadranza è invariante per rotazione, possiamo affermare che per ogni punto della circonferenza ***CircfQQbas*** si trovano altri punti della stessa circonferenza che gli sono vicini quanto si vuole.

B30h.05 Introduciamo ora la nozione di densità per i sottoinsiemi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ in modo che risulti un ampliamento di quella introdotta per il semplice $\mathbb{Q}$.

Per ogni punto $C = \langle x_C, y_C\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ si dice **disco aperto** in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ di centro in C e raggio ϵ l'insieme dei punti $P = \langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tali che $\mathsf{Qdr}(C, P) < \epsilon^2$.

Si dice invece **disco chiuso** in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ di centro in C e raggio ϵ l'insieme dei punti $P = \langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tali che $\mathsf{Qdr}(C, P) \le \epsilon^2$.

Questi insiemi li denotiamo, risp., con $\mathsf{ball}(C, \epsilon)$ e con $\overline{\mathsf{ball}}(C, \epsilon)$.

Un insieme $S \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si dice **insieme denso** in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sse per ogni $P = \langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (anche se molto piccolo) si trova un altro $Q \in S$ che appartiene a $\mathsf{ball}(P, \epsilon)$, ovvero sse si trova $Q \in \big(S \cap \mathsf{ball}(P, \epsilon)] \setminus \{P\}$.

(1) Prop.: Un insieme $S \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sse' per og $P = \langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e per ogni $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ (anche se molto piccolo) si trova una successione nonripetitiva di punti-QQ $\big\langle Q_1, Q_2, Q_3, ...\big\rangle$ che appartengono a $[S\ \cap \mathsf{ball}(P, \epsilon)] \setminus \{P\}$.

Dim.: Dimostriamo che dalla definizione segue la proprietà.
Dalla definizione segue che per ogni $\epsilon_1 \in \mathbb{Q}_+$ si trova $Q_1 \in \big(S\ \cap \mathsf{ball}(P, \epsilon_1)\big) \setminus \{P\}$.
Assumiamo $\epsilon_2 \in \mathbb{Q}_+$ tale che ${\epsilon_2}^2 = \mathsf{Qdr}(P, Q_1)$.
Dalla definizione segue che si trova $Q_2 \in \big([S\ \cap \mathsf{ball}(P, \epsilon_2)\big) \setminus \{P\}$.
Questo processo può proseguire illimitatamente e la successione $\big\langle Q_1, Q_2, Q_3, ...\big\rangle$ è quella cercata.

È inoltre evidente che la proprietà dell'enunciato implica le definizione che la precede ▮

B30h.06 La proprietà trovata in f07 si esprime anche dicendo che la circonferenza ***CircfQQbas*** è un **insieme di punti denso** in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Accade però, un po' paradossalmente, che sono vuote le intersezioni di questa circonferenza con rette-QQ come le bisettrici-QQD1 e -QQD2 e più in generale le rette-QQ caratterizzate dalle equazioni $y = \pm \dfrac{1}{q} x$.

Questa situazione si esprime dicendo che la circonferenza ***CircfQQbas*** è un insieme di punti-QQ denso ma noncontinuo.

Chiaramente la non disponibilità di punti intersezione come i precedenti costituisce una debolezza per le attività computazionali costruttive e per l'assetto dell'apparato matematico-informatico.
In particolare rende non facilmente distinguibili i punti-QQ interni alla circonferenza basica (e ad ogni altra circonferenza-QQ) dai punti-QQ a essa esterni.
Per supplire a questa inefficacia si rende opportuna l'introduzione di insiemi numerici più comprensivi di $\mathbb{Q}$ [B37, B38]; questa prospettiva conduce ai numeri algebrici, ai reali costruttivi e ai numeri reali definiti da assiomi [B42].

Osserviamo che non si possono individuare come punti-QQ molte altre intersezioni di circonferenze-QQ con rette-QQ e altre circonferenze-QQ che sarebbero utili per molte costruzioni della geometria piana euclidea, anche nella geometria elementare, in particolare per costruire bisettrici e vari poligoni regolari.

Per esempio le due circonferenze $\mathsf{CircfQQ}_{\langle 0,0\rangle,1}$ e $\mathsf{CircfQQ}_{\langle 1,0\rangle,1}$ non si intersecano in alcun punto-QQ, mancanza che rende impossibile collocare i triangoli regolari in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$; i mpossibilità simile sitrova per i pentagoni regolari.

B30h.07 Consideriamo il punto $P=\langle x,y\rangle$, la terna pitagorica $\langle a,b,c\rangle$, la corrispondente ampiezza angolare $\alpha := angamp_{\langle b,a\rangle}$ e i valori del suo coseno $C := \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ e del suo seno $S := \sin\alpha = \dfrac{a}{c}$.

L'effetto su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ della rotazione di centro $\mathbf{0}$ di ampiezza angolare α è dato da

$$(1)\quad \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha}(P) \;=\; \frac{1}{c}\begin{bmatrix} b & -a\\ a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S\\ S & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\cdot x - S\cdot y\\ S\cdot x + C\cdot y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y\\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y\end{bmatrix}\ .$$

(2) Prop.: In $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ la quadranza è invariante per le rotazioni.

Dim.: Consideriamo anche $Q=\langle x_Q,y_Q\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e poniamo $\Delta x := x-x_Q$ e $\Delta y := y-y_Q$ in modo da avere la quadranza $\mathsf{Qdr}(P,Q)=\Delta x^2+\Delta y^2$.

Per la quadranza dei due punti trasformati dalla generica rotazione con centro nell'origine $\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha}$ si trova

$$\begin{aligned}\mathsf{Qdr}\left(\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha}(P),\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha}(Q)\right) &= (C\,x - S\,y - C\,x_Q + S\,y_Q)^2 + (S\,x + C\,y - S\,x_Q - C\,y_Q)^2\\ &= (C\,\Delta x - S\,\Delta y)^2 + (S\,\Delta x + C\,\Delta y)^2\\ &= (C^2+S^2)\Delta x^2 + (S^2+C^2)\Delta y^2 - 2\,C\,S\,\Delta x\,\Delta y + 2\,S\,C\,\Delta x\,\Delta y\\ &= \Delta x^2+\Delta y^2 = \mathsf{Qdr}(P,Q)\ \blacksquare\end{aligned}$$

Gli effetti di una rotazione con centro generico si ottengono facendo intervenire, oltre alla rotazione di centro nell'origine, due traslazioni opposte.
Quindi l'invarianza della quadranza è garantita per tutte le rotazioni-QQ.

Dopo aver introdotte e precisate le riflessioni rispetto a rette-QQ troveremo che in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ la quadranza è invariante anche per le riflessioni e quindi è invariante per tutti i movimenti rigidi.

B30h.08 Riprendiamo per generalizzarle le definizioni delle funzioni trigonometriche date in h01(1).

Le funzioni che intendiamo definire si possono considerare funzioni i cui domini sono costituiti dagli stessi angoli-QQ, o dalle ampiezze di tali angoli-QQ.
Talora possono risultare convenienti discorsi nei quali le funzioni trigonometriche sono descritte come funzioni degli archi con segno della circonferenza-QQ basica, ovvero dagli angoli-QQ pitagorici con segno; occorre però segnalare che questa descrizione è restrittiva, in quanto si considarano solo i versori-QQ pitagorici, mentre spesso interessano gli argomenti dati da vettori-QQ nonpitagorici.
Il codominio delle funzioni trigonometriche non può che essere $\mathbb{Q}$.

Per queste funzioni chiediamo innanzi tutto che siano invarianti per traslazioni-QQ e rotazioni-QQ e che cambino di segno in seguito di riflessioni-QQ.

Di conseguenza è possibile ridurre i loro domini: basta definire i valori che esse assumono per gli angoli con vertice nell'origine e primo lato dato dal semiasse-QQE $\mathsf{Ox}_{0+} \;=\; \{q\in\mathbb{Q} :|\ \langle q,0\rangle\}$.

Come secondo lato si può avere ogni semiretta-QQ $\mathbf{w}\mathbb{Q}_{0+}$ ottenibile sottoponendo il suddetto semiasse a una rotazione-QQ con centro nell'origine, cioè a una rotazione-QQ che potrebbe essere arbitraria, ma che per semplcità ora limitiamo alle ampiezze angolari tra 0° e 360° oppure tra −180° e 180°.

Ciascuna delle funzioni trigonometriche-QQ generali si può considerare dipendente da un percorso su ***CircfQQbas*** che inizia in e_x e si conclude in un versore che possiamo individuare scrivendo $\mathbf{w}_{\hat\alpha}$.

Esse si possono considerare dipendenti dal solo dal punto di arrivo del percorso, cioè dal versore del suo secondo lato.
Esse infatti sono funzioni periodiche dell'ampiezza angolare con periodo 360° e quindi esse sono determinate dai valori che assumono in intervalli di ampiezze come quello compreso tra 0° e 360° oppure nell'intervallo delle ampiezze comprese tra −180° e 180°.

Definiamo dunque le tre funzioni dell'ampiezza α attribuibile a tutti gli angoli $\hat\alpha$ costituenti un'orbita del gruppo delle rototraslazioni-QQ servendoci delle coordinate b ed a del vettore-QQ $\mathbf{w}_{\hat\alpha}$ che in particolare può consistere in un versore in ***CircfQQbas***; la suddetta ampiezza α si può quindi individuare anche con la notazione $\alpha_{b,a}$.

(1) $$\sin(\alpha_{b,a}) \ := \ \frac{a}{c} \qquad , \qquad \cos(\alpha_{b,a}) \ := \ \frac{b}{c} \qquad , \qquad \tan(\alpha_{b,a}) \ := \ \frac{a}{b} \ .$$

B30h.09 Dall'esame dei valori assunti dalle funzioni trigonometriche nei punti di ***CircfQQbas*** si ricavano facilmente varie loro proprietà di simmetria.
Qui presentiamo solo quelle concernenti seno e coseno, lasciando al lettore le uguaglianze concernenti la funzione tangente, esprimibile come rapporto tra seno e coseno, ma sottoposta alla limitazione $b \neq 0$.
Va inoltre segnalato che le proprietà delle funzioni trogonometriche saranno ampiamente presentate quando queste funzioni verranno arricchite in modo da poter avere come argomenti i numeri reali o complessi.

La richiesta di periodicità si esprime con le uguaglianze

(1) $$\forall n \in \mathbb{Z} \ \vdots \ \ \sin(\alpha + n\,360°) \ = \ \sin(\alpha) \quad , \quad \cos(\alpha + n\,360°) \ = \ \cos(\alpha) \ .$$

La riflessione del piano-QQ rispetto all'asse orizzontale cambia il triangolo rettangolo orientato $\Big\langle_{cy} \mathbf{0}, \langle b, 0\rangle, \langle b, a\rangle \Big\rangle$ nel triangolo $\Big\langle_{cy} \mathbf{0}, \langle b, 0\rangle, \langle b, -a\rangle \Big\rangle$ avente l'orientazione opposta e cambia $\mathbf{w}_{\hat\alpha} = \big\langle w_x, w_y \big\rangle$ in $\big\langle w_x, -w_y \big\rangle$.

//input pB30h02

Questo equivale a trasformare b in $-b$ e α in $-\alpha$ o equivalentemente α in in $180° - \alpha$, ossia cambia il segno di a_α, ma lascia invariato b_α; quindi cambia il segno del seno e lascia invariato il coseno:

(2) $$\sin(-\alpha) \ = \ -\sin(\alpha) \qquad , \qquad \cos(-\alpha) \ = \ \cos(\alpha) \ .$$

La riflessione rispetto all'asse Oy equivale a trasformare α in $180° - \alpha$, cambia $\mathbf{w}_{\hat\alpha} = \big\langle w_x, w_y \big\rangle$ in $laa - u_x, u_y \big\rangle$ cambia il segno di b_α ma lascia invariato a_α; quindi cambia il segno del coseno e lascia invariato il seno.

(3) $$\sin(180° - \alpha) \ = \ \sin(\alpha) \qquad , \qquad \cos(180° - \alpha) \ = \ -\cos(\alpha) \ .$$

//input pB30h02B

La riflessione rispetto alla diagonale $[y = x]$ equivale a trasformare α in $90° - \alpha$, scambia a e b e quindi scambia seno e coseno.

(4) $$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha) \quad , \quad \cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha) \; .$$

//input pB30h02C

La rotazione di 90° trasforma il vettore $\mathsf{w}_{\hat{\alpha}} = w_x\mathsf{e}_x + w_y\mathsf{u}_y$ nel vettore $-w_y\mathsf{e}_x + w_x\mathsf{u}_y$ e quindi la funzione seno nella funzione coseno e la funzione coseno nell'opposta della funzione seno.

(5) $$\sin(\alpha + 90°) \;=\; \cos(\alpha) \quad , \quad \cos(\alpha + 90°) \;=\; -\sin(\alpha) \; .$$

//input pB30g02D

La rotazione di 180° trasforma il vettore $\langle b, a\rangle$ nel suo opposto $\langle -b, -a\rangle$ e quindi cambia di segno sia alla funzione seno che alla funzione coseno.

(6) $$\sin(\alpha + 180°) \;=\; -\sin(\alpha) \quad , \quad \cos(\alpha + 180°) \;=\; -\cos(\alpha) \; .$$

B30h.10 Altre uguaglianze trigonometriche importanti perché direttamente utili e per le loro molte conseguenze sono le cosiddette formule di addizione, formule che consentono di esprimere il seno e il coseno di angoli ottenuti sommando due angoli dati mediante seno e coseno degli angolisommandi.

Queste formule si possono ricavare in modo prevedibile dalla espressione della composizione di due rotazioni-QQ, ottenibile a sua volta dalla composizione di due rotodilatazioni [f07(1)) e dall'effetto della rotazione sopra un punto [h02].

Consideriamo due punti-QQ (non necessariamente pitagorici) $B = \langle b, a\rangle$ ed $E = \langle e, d\rangle$ e da questi ricaviamo l'intero positivo $c^2 = b^2 + a^2$ e l'intero positivo $f^2 = e^2 + d^2$; nel caso Di B ed E appartenenti a ***CircfQQbas*** possiamo più tranquillamente fare riferimento agli interi positivi c ed f e ai versori $\mathsf{c} := \left\langle \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right\rangle$ e $\mathsf{f} := \left\langle \frac{e}{f}, \frac{d}{f} \right\rangle$ e alle relative ampiezze α e δ.
In ogni caso possiamo utilizzare gli angoli-QQ $\hat{\alpha} := \angle(\mathsf{e}_x, \mathbf{0}, B)$ e $\hat{\delta} := \angle(\mathsf{e}_x, \mathbf{0}, E)$, nonché il seno e il coseno delle loro ampiezze.
Sia inoltre $\mathsf{g} := \boldsymbol{RotDil}_{\mathbf{0},\hat{\alpha}}(\mathsf{f})$; l'angolo $\angle(\mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{g})$ è la somma di $\hat{\alpha}$ e $\hat{\delta}$.
L'ampiezza del precedente angolo si può scrivere $\alpha + \beta$.

//input pB30g03

Per la composizione delle rotazioni relative alle ampiezze α e δ nel caso di angoli-QQ pitagorici, in forza di h01(1) si ha

(1) $$\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha+\delta} \;=\; \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha} \circ \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\delta} \;=\; \frac{1}{c}\begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix} + \frac{1}{f}\begin{bmatrix} e & -d \\ d & e \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{c\,f}\begin{bmatrix} b\,e - a\,d & -a\,e - b\,d \\ a\,e + b\,d & b\,e - a\,d \end{bmatrix}$$

Ora si osserva che

$$\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\alpha+\delta} \;=\; \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\delta) & -\sin(\alpha+\delta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\delta) \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\frac{b\,e - a\,d}{c\,f} = \cos(\alpha)\,\cos(\delta) - \sin(\alpha)\,\sin(\delta) \qquad \text{e} \qquad \frac{a\,e + b\,d}{c\,f} = \sin(\alpha)\,\cos(\delta) + \cos(\alpha)\sin(\delta)\ .$$

Da qui si ottengono le **formule trigonometriche di addizione**

(2) $\sin(\alpha+\delta) \;=\; \sin(\alpha)\,\cos(\delta) + \cos(\alpha)\,\sin(\delta)$ e $\cos(\alpha+\delta) \;=\; \cos(\alpha)\,\cos(\delta) - \sin(\alpha)\,\sin(\delta)$.

Queste formule si possono visualizzare in figure come la precedente, chiare soprattutto nel caso di angoli contenuti nel solo primo quadrante.

Nel caso generale di angoli-QQ si segue un procedimento poco diverso. Invece della (1) si utilizzano le corrispondenti rotodilatazioni, si ottiene la matrice sugli interi della rotodilatazione composta e infine la si normalizza nella matrice di rotazione sui razionali sua proporzionale.

B30h.11 Dalle formule di addizione e dalle uguaglianze di simmetria f02(2) si ricavano le **formule trigonometriche di sottrazione**:

(1) $\sin(\alpha-\delta) \;=\; \sin(\alpha)\,\cos(\delta) - \cos(\alpha)\,\sin(\delta)$ e $\cos(\alpha-\delta) \;=\; \cos(\alpha)\,\cos(\delta) + \sin(\alpha)\,\sin(\delta)$.

Ponendo nelle formule di addizione $\delta = \alpha$ si ottengono le **formule trigonometriche di duplicazione**:

(2) $\sin(2\,\alpha) \;=\; 2\,\sin(\alpha)\,\cos(\alpha)$, $\cos(2\,\alpha) \;=\; \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = 2\cos(\alpha)^2 - 1 \;=\; 1 - 2\sin(\alpha)^2$.

Applicando le formule di addizione al caso $\delta = 2\,\alpha$ si ottengono le formule trigonometriche di triplicazione come le seguenti

(3) $\sin(3\,\alpha) \;=\; 3\,\cos^2\alpha\,\sin\alpha - \sin^3\alpha$, $\cos(3\,\alpha) \;=\; 3\,\cos^3\alpha 3\,\sin^2\alpha\,\cos\alpha$.

Molte altre formule trigonometriche, formule che riguardano anche la funzione tangente e alcune altre funzioni derivabili da seno e coseno, si trovano in `Trigonometric identities` `(we)`.
Va tuttavia segnalato che una buona parte di queste formule è disponibile in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, in particolare le formule contenenti radici quadrate e quelle riguardanti ampiezze angolari come 30°, 45°, 60° e 72°.

Conviene anche osservare che le complicazioni verbali collegate alla ridotta capacità di esprimere rotazioni mediante numeri razionali si aggiungono ai motivi che spingono a richiedere ampliamenti del campo dei numeri razionali.

B30h.12 Conviene osservare che il dominio e il codominio della funzione seno e quello della funzione coseno coincidono tra di loro, grazie alla relazione $\sin(\alpha + \pi/2) \;=\; \cos(\alpha)$.
Il codominio comune nel caso pitagorico è un sottoinsieme proprio dell'intervallo $[-1 :: 1]$.
In particolare tutti i razionali della forma $1/n$ con $n = 2, 3, ...$ si trovano in $[-1 :: 1] \setminus \mathsf{C}$.
Più in generale in $[-1 :: 1] \setminus \mathsf{C}$ si trovano tutti i razionali $\dfrac{h}{k}$ con modulo minore di 1 per i quali $h^2 + k^2$ non è il quadrato di un numero intero [f05].
Conviene anche segnalare che C è un insieme denso nell'intervallo $[-1 :: 1]$; questo fatto discende dalla proprietà di densità di ***CircfQQbas*** [f09].

Osserviamo anche che ogni punto-QQ si può approssimare quanto si vuole con punti-QQ pitagorici.

Ricordiamo anche che attraverso le traslazioni-QQ si possono trasformare i vettori-QQ in tutti i vettori.a-QQ.
Quindi possiamo affermare che qualsiasi segmento in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ si può approssimare con un segmento i cui estremi sono punti-QQ pitagorici.