1

Capitolo B24

piano sugli interi: cammini, circuiti, aree

Contenuti delle sezioni

23 pagine

B240.01 Con questo capitolo si conclude l'introduzione delle nozioni geometriche alle quali si riesce a dare una impostazione costruttiva in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e che abbiamo assunto come basilari.

Si inizia introducendo i cammini e i circuiti-ZZ e le loro aree e si prosegue trattando i multicircuiti-ZZ (cioè le collezioni di circuiti aventi come vertici punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) con le relative collezioni di aree e la loro area totale. Le nozioni di area qui esaminate estendono significativamente quella definita per gli insiemi di caselle-ZZ;

In tal modo si ottiene un primo tipo di misura per figure geometriche che troveremo far parte di una gamma molto più ampia di valutazioni per configurazioni geometriche che si collocano in ambienti notevolmente più ricchi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (spazi sui razionali, spazi sui reali, spazi sui complessi, spazi di funzioni, ...).

Introdotto il determinante per matrici 2×2, si riesce a interpretare tale funzione di quattro variabili come area di un parallelogramma e si è in grado di dimostrare il teorema di Pitagora per triangoli rettangoli con vertici in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Questo consente di determinare costruttivamente l'area di molte figure-ZZ e di attribuire un'area costruibile a tutti i multicircuiti-ZZ. Si può inoltre associare a ogni punto-ZZ una rotodilatazione ed introdurre un prodotto tra punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, operazione binaria che sarà possibile estendere naturalmente al prodotto tra numeri complessi.

B24 a. cammini-ZZ, circuiti-ZZ e poligoni-ZZ

B24a.01 Ci proponiamo qui di introdurre le nozioni di cammino, percorso, circuito e multicircuito su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come configurazioni che possano essere costituite da segmenti-ZZ o da vettori applicati-ZZ di ogni tipo, non solo dei tipi caratterizzati dalla specificazione "-ZZK".

Con i circuiti si introducono in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i poligoni iniziando con la loro versione orientata. Con queste nozioni ci prepariamo ad attribuire a ogni circuito e, più in generale, a ogni multicircuito un'area dotata di segno.
Dei poligoni con pochi lati viene data una casistica abbastanza estesa.

In tal modo si rendono disponibili strumenti per misurare configurazioni costruite su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di portata ben più ampia di quella disponibile per le figure che sono costruite servendosi solo di segmenti-ZZK e di caselle-ZZ.

B24a.02 Sia s un intero naturale; diciamo **cammino-ZZ** una sequenza di punti-ZZ $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s \rangle$ nella quale non compaiono due punti-ZZ successivi coincidenti.
s viene detto **lunghezza-arc** del cammino-ZZ.
Denotiamo con **PathZZ** l'insieme dei cammini-ZZ e con **PathZZ**$_s$ l'insieme dei cammini-ZZ di lunghezza-arc s.

I cammini di lunghezza-arc 0 si possono identificare con i punti-ZZ, mentre i cammini di lunghezza-arc 1 equivalgono ai vettori-ZZ applicati.

L'insieme dei cammini-ZZ evidentemente è un rilevante ampliamento dell'insieme dei cammini-ZZR e anche dell'insieme dei cammini-ZZK: quindi **PathZZK** $\subset$ **PathZZ**.
Un esempio di elemento di **PathZZ** $\setminus$ **PathZZK** è $\Big\langle \langle 0,0 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 2,1 \rangle laaa$.

Estendendo la terminologia dei cammini-ZZR, i punti-ZZ di un cammino-ZZ si dicono **vertici** del cammino, le coppie di vertici consecutivi si dicono **archi** del cammino, il primo vertice della sequenza si dice estremità iniziale del cammino e l'ultimo si dice estremità finale.

La lunghezza-arc di un cammino-ZZ non è che il numero dei suoi archi.
Si osserva che la lunghezza-arc è una funzione del genere $\lceil$ **PathZZ**$\longmapsto \mathbb{N} \rceil$ decisamente noninvertibile che consente di esprimere con numeri naturali il fatto che i cammini-ZZ siano più o meno estesi.

La lunghezza-arc dei cammini-ZZ è una delle tante funzioni chiamate **valutazioni** che a una struttura D piuttosto articolata associano un semplice oggetto numerico con la caratteristica di non cambiare o di subire semplici modifiche inconseguenza della applicazione a D di trasformazioni appartenenti a insiemi numerosi e importanti.

B24a.03 Si dice **prefisso di cammino-ZZ** di un cammino-ZZ Γ un cammino ottenuto da Γ eliminanado alcuni suoi archi finali. Si dice **suffisso di cammino-ZZ** di un cammino-ZZ Γ un cammino ottenuto da Γ eliminanado alcuni suoi archi iniziali. Si dice **infisso di cammino-ZZ** di un cammino-ZZ Γ un cammino ottenuto da Γ eliminanado alcuni suoi archi iniziali e alcuni dei suoi archi finali. Evidentemente i prefissi diun cammino-ZZ e i suoi suffissi sono anche suoi infissi.
È prevedibile cosa si intende per prefissi propri, suffissi propri e infissi propri di un cammino-ZZ.

Si dice **cammino-ZZ di indecisione** un cammino-ZZ della forma

$$\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{k-1}, P_k, P_{k-1}, ..., P_2, P_1, P_0 \rangle \ .$$

Un cammino-ZZ che presenta qualche infisssodi indecisione, ovvero qualche infisso costituente un cammino-ZZ di indecisione lo chiamiamo **cammino-ZZ indeciso**.

Tra gli infissi di indecisione di un cammino-ZZ i più significativo sono quelli di lunghezza massimale, non contenuti in un altro infisso di indecisione.
Ogni cammino indeciso può essere sostituito senza difficoltà da un suo cosiddetto **cammino-ZZ equivalente deciso** ottenuto sostituendo ciascuno dei suoi infissi di indecisione con il suo nodo estremità.

Chiaramente una tale riduzione semplificazione non riduce la capacità ti tenere collegati i suoi nodi.
I cammini-ZZ decisi appaiono come i più efficaci, ma vedremo che può risultare utile aggiungere a un cammino-ZZ come infisso qualche cammino di indecisione.

B24a.04 Dato un cammino-ZZ Chiamiamo **infittimento di un cammino-ZZ** Γ la sua modifica consistente nel sostituire ogni arco che tocca vertici allineati con le sue estremità con la sequenza degli archi consistenti in vettori.a-ZZ primitivi; il cammino-ZZ che si ottiene in tal modo lo chiamiamo **cammino-ZZ infittito**.

Chiamiamo invece diradamento di un cammino-ZZ (nonridondante) Γ la sostituzione di ciascuna sottosequenza di archi successivi che riguardano vertici allineati con un solo arco che più esteso; il cammino-ZZ che si ottiene in tal modo si dice **cammino-ZZ diradato** di Γ.

Si osserva che in un cammino-ZZ fitto per ogni coppia di vertici successivi $\langle P_{i-1}, P_i \rangle =: a_i$ caratterizzati dalle differenze di coordinate $x_i - x_{i-1}$ e $y_i - y_{i-1}$ può accadere che

aut $x_i =_{i-1}$ e $y_i = y_{i-1} \pm 1$, ossia a_i orizzontale;

aut $y_i = y_{i-1}$ ed $x_i = x_{i-1} \pm 1$, ossia $a_i$verticale; aut $|x_i - x_{i-1}|$ e $|y_i - y_{i-1}|$ sono interi coprimi, cioè non hanno divisori comuni maggiori di 1, ossia s_i è un vettore.a primitivo.

In altre parole un cammino-ZZ è fitto sse tutti i suoi archi sono vettori.a primitivi, ovvero sse ogni segmento orientato che costituisce un suo arco tocca solo due punti-ZZ, le sue estremità.

Ad ogni cammino-ZZ Γ si associa facilmente il cammino-ZZ fitto il cui insieme di vertici coincide con l'insieme di tutti i punti-ZZ toccati dai suoi archi.

//input pB24

B24a.05 Chiaramente due cammini-ZZ hanno associato lo stesso cammino diradato sse hanno associato lo stesso cammino infittito.
Si individua quindi una relazione di equivalenza tra canmmini-ZZ definibile come l'avere in comune il cammino ridotto diradato, oppure nell'avere in comune il cammino esteso infittito. Questa equivalenza la chiamiamo **equiraggiungimento**
Ciascuna delle corrispondenti classi di equivalenza è rappresentabile dalla sequenze di punti-ZZ che sono i successivi vertici del cammino-ZZ diradato.

B24a.06 Un cammino-ZZ si dice **cammino-ZZ iniettivo sui vertici** o **cammino-ZZ hamiltoniano** sse il suo equivalente diradato (nonridondante e nonindeciso) non presenta alcun vertice ripetuto, con la sola possibile eccezione della coincidenza tra vertice iniziale e vertice finale. In caso contrario si parla di **cammino-ZZ ripetitivo sui vertici**

Un cammino-ZZ si dice **cammino-ZZ iniettivo sugli archi** o **cammino-ZZ euleriano** sse non presenta alcun arco che coincide con un altro suo arco o con il riflesso di un altro suo arco.
Un cammino-ZZ che presenta due archi coincidenti o mutuamente riflessi si dice **cammino-ZZ ripetitivo sugli archi**.

Si osserva che i cammini ripetitivi sugli archi sono ripetitivi sui vertici, mentre si individuano facilmente cammini ripetitivi sui vertici ed iniettivi sugli archi.

B24a.07 Un cammino-ZZ si dice **cammino-ZZ chiuso** o **circuito-ZZ puntato** sse il suo primo vertice coincide con il suo ultimo.

Due circuiti-ZZ puntati si dicono **circuiti-ZZ ciclicamente equivalenti** sse le relative sequenze di vertici private dell'ultimo si ottengono l'una dall'altra con una permutazione circolare.
Chiaramente questa relazione è un'equivalenza e diciamo **circuito-ZZ** ogni classe di equivalenza ciclica di circuiti-ZZ puntati.

Consideriamo un circuito-ZZ puntato $\gamma = \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}, P_0 \rangle$ ed il circuito-ZZ $\overline{\gamma}$ del quale γ fa parte. La scritture $\langle_{cy} P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1} \rangle$ costituisce una delle s cosiddette **rappresentazioni cicliche** di $\overline{\gamma}$.

//input pB24a06

Denoteremo con ***CirctZZ*** l'insieme dei circuiti-ZZ.

Dato che ogni cammino-ZZ è individuato da una sequenza finita di elementi di un insieme numerabile e sequenziabile, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si ottiene senza difficoltà che l'insieme **PathZZ** è numerabile e che a fortiori è numerabile il suo sottoinsieme ***CirctZZ*** .
Tra i circuiti-ZZ si distinguono quelli iniettivi sui vertici, o **circuiti-ZZ hamiltoniani**, e quelli iniettivi sugli archi, o **circuiti-ZZ euleriani**.

B24a.08 Si dice **cammino-ZZ riflesso di un cammino** $\gamma = \langle P_0, , P_1, P_2, ..., P_{s-1}, P_s \rangle \in$ **PathZZ** il cammino

$$\langle P_s, P_{s-1}, ..., P_2, P_1, P_0 \rangle \ .$$

Tale cammino lo denotatiamo con $(-1) \odot \gamma$, oppure con $\ominus\gamma$.

Diciamo inoltre **circuito-ZZ riflesso di un circuito-ZZ** γ il circuito costituito dalla collezione dei riflessi dei circuiti puntati costituenti γ.
Per denotare il cammino-ZZ riflesso del cammino-ZZ γ scriveremo ancora $(-1) \odot \gamma$, oppure $\ominus\gamma$.
Per ogni $k \in \mathbb{P}$ il circuito-ZZ ottenuto percorrendo k volte il circuito-ZZ Δ si denota con $k \cdot \Delta$, mentre il circuito-ZZ ottenuto percorrendo k volte il circuito $\ominus\Delta$ si denota con $k \odot (\ominus\Delta)$ o con le scritture equivalenti $\ominus k \odot \Delta$ e $(-k) \odot \Delta$.
Se poniamo $0 \odot \Delta := \not{\mu}$ assegnamo un significato alla notazione $z \odot \Delta$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

A questo punto è naturale generalizzare la nozione di percorso-ZZR con quella di **percorso-ZZ**, definendo questo formalmente come duetto costituito da un cammino-ZZ e dal suo riflesso.
Un duetto costituito da un circuito-ZZ e dal suo riflesso verrà detto **circuito-ZZ nonorientato** o concisamente **circuito.no-ZZ**.

Consideriamo una coppia di cammini-ZZ $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ tali che il vertice terminale del primo coincida con l'iniziale del secondo; ricorrendo ai vertici scriviamo $\Gamma = \langle P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s \rangle$ e $\Delta = \langle P_s, P_{s+1}, ..., P_{t-1}, P_t \rangle$.

Si dice **cammino giustapposizione**, o **cammino somma** dei cammini-ZZ Γ e Δ il cammino-ZZ

$$\langle P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s, P_{s+1}, ..., P_{t-1}, P_t \rangle \ .$$

Questa costruzione si può denotare con $\Gamma \shortmid \Delta$. o con $\Gamma \oplus \Delta$.
Essa costituisce una operazione binaria parziale nell'ambito dell'insieme dei cammini-ZZ **PathZZ**.

Nell'ambito delle notazioni precedenti P_s viene detto **vertice di connessione** della giustapposizione.

Presentando talune giustapposizioni di cammini spesso è opportuno segnalare esplicitamente il corrispondente vertice di connessione.

B24a.09 Riprendiamo la nozione di multiinsieme introdotta in B13d per estenderla e collegarla ai cammini-ZZ e ai percorsi-ZZ.

Consideriamo un cammino-ZZ Γ cammino-ZZ di lunghezza s che denotiamo $\langle_a a_{j_0}, a_{j_1}, .., a_{j_t}\rangle$. e che tocca gli spigoli s_i per $i = 1, 2, ..., r$.
Conveniamo che gli spigoli dedotti dagli archi di Γ siano numerati secondo l'ordine secondo il quale sono toccati per la prima volta e conveniamo che gli interi j_h individuano i successivi archi sono i suddetti progressivi degli spigoli.
È determinata la funzione che a ciascuno degli spigoli associa il numero di volte che è stato attraversato da Γ, in in senso o nell'opposto.
Questa funzione a valori interi positivi la chiamiamo **multiinsieme del cammino-ZZ** Γ e i valori che assume la diciamo **molteplicità degli spigoli del cammino-ZZ**.

Evidentemente i multiinsiemi con tutte le molteplicità uguali a 1 caratterizzano i cammini-ZZ che non presentano ripetizioni degli spigoli toccati; tra questi si trovano in particolare i cammini-ZZ iniettivi sui vertici.
Si osserva anche ce se Γ è un circuito-ZZ, per ogni $k \in \mathbb{P}$ il multiinsieme di $k \odot \Gamma$ presenta le molteplicità ottenute moltiplicando per k le molteplicitd̀i Γ..

La caratterizzazione dei cammini-ZZ costituita dai corrispondeni multiinsiemi perde molte caratteristiche dei cammini e si trovano facilmente multiinsiemi ciascuno dei quali corrispondente a estesi insiemi di cammini-ZZ.

Si constata anche che il multiinsieme associato è invariante rispetto a tutti i movimenti rigidi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (traslazioni, rotazioni, riflessioni) e a tutte le rotodilatazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Quindi ci si può limitare a considerare i cammini con vertice iniziale nell'origine.

B24 b. tipi di circuiti-ZZ

B24b.01 La giustapposizioni di un cammino $\gamma = \langle P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s$ con il suo riflesso porta al circuito-ZZ puntato

$$\gamma \oplus (-1) \cdot \gamma = \langle P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s, P_{s-1}, ..., P_1, P_0\rangle \ .$$

Questa sequenza di punti-ZZ individua il circuito-ZZ he viene fornito anche dall'espressione come

$$(-1) \cdot \gamma \oplus \gamma \ = \ \left\langle_{cy} P_s, P_{s-1}, ..., P_1, P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s\right\rangle \ .$$

I circuiti di questo tipo sono i i cammini-ZZ di indecisione e detti anche circuiti-ZZ palindromi.

Una tale configurazione discreta può essere individuata da varie scritture, tra le quali:

$$\left\langle_{cy} P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s, P_{s-1}, ..., P_1\right\rangle \ \text{ e } \ \left\langle_{cy} P_s, P_{s-1}, ..., P_1, P_0, P_1, ..., P_{s-1}\right\rangle \ .$$

Più concisamente un circuito-ZZ palindromo viene denotato da una scrittura come $\gamma \ominus \gamma$.

I circuiti palindromi che più interessano sono derivabili dai cammini $\Gamma = \langle P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s$ hamiltoniani. In particolare si hanno i circuiti palindromi di lunghezza-arc 2, cioè costituiti da un vettore-ZZ applicato e dal suo opposto, cioè circuiti-ZZ-or della forma $\left\langle_{cy} P_0, P_1\right\rangle$, dove $P_0, P_1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $P_0 \neq P_1$.

B24b.02 Consideriamo ora due circuiti-ZZ che hanno un unico vertice in comune che scriviamo $\Gamma = \left\langle_{cy} P_0, P_1, ..., P_{s-1}, P_s\right\rangle$ e $\Delta = \left\langle_{cy} Q_0, Q_1, ..., Q_{t-1}, Q_t\right\rangle$ con $P_i = Q_j$.
Di essi si può definire il **circuito somma** che, servendoci delle cosiddette convenzioni modulari $P_h = P_{h+s}$ e $Q_k = Q_{k+t}$, scriviamo

$$\Gamma \oplus \Delta \ = \ \left\langle_{cy} P_{i+1}, ..., P_s, P_0, ..., P_i = Q_j, ..., Q_t, Q_0, ..., Q_{j-1}\right\rangle \ .$$

Si osserva che la somma di circuiti-ZZ con uno e un solo vertice comune è una composizione commutativa: $\Gamma \oplus \Delta \ = \ \Delta \oplus \Gamma$.

Inoltre la somma di tre circuiti-ZZ che due a due hanno un solo vertice comune è una composizione associativa

$$(\Gamma \oplus \Delta) \oplus \Psi \ = \ \Gamma \oplus (\Delta \oplus \Psi) \ =: \ \Gamma \oplus \Delta \oplus \Psi \ .$$

Invece la somma di due circuiti che hanno due o più vertici in comune fornisce più circuiti-ZZ.
Sommando $\langle_{cy} A, B, C, D\rangle$ e $\langle_{cy} C, E, F, C, H, I\rangle$ si possono ottenere

$$\langle_{cy} C, D, A, B, C, E, F, C, H, I\rangle \ \text{ e } \ \langle_{cy} C, D, A, B, C, H, I, C, E, F\rangle \ .$$

Sommando $\langle_{cy} A, B, C, D, E\rangle$ con $\langle_{cy} C, F, G\rangle$ e $\langle_{cy} D, H, I\rangle$ si possono ottenere

$$\langle_{cy} C, D, A, B, C, E, F, C, H, I\rangle \ \text{ e } \ \langle_{cy} C, C, A, B, C, H, I, E, F\rangle \ .$$

Quando si rende necessario distinguerli, una scrittura semplice come la $\Gamma \oplus \Delta$ risulta insufficiente, ma servirebbero indicazioni dei successivi vertici di connessione che si incontrano in un circuito con un vertice privilegiato.

//input pB24b02

Al crescere del numero dei vertici in comune a due circuiti-ZZ da sommare cresce il numero di circuiti somma che si possono individuare.

Per determinare queste collezioni di circuiti-ZZ serve riferirsi a un multidigrafo euleriano che schematizza i circuiti che si vogliono comporre.

In un tale multidigrafo sono in evidenza i vertice in comune, ciascuno dei quali consente, almeno localmente, alternative per la individuazione di un circuito euleriano per la totalità dei nodi. Inoltre il multidigrafo presenta un arco in corrispondenza di ciascuno dei cammini che collegano due vertici in comune.

Per esempio per la composizione dei due cammini della figura precedente dal multigrafo presentato a destra si ricavano facilmente i due circuiti hamiltoniani $\langle_{cy} a, d, b, c\rangle$ e $\langle_{cy} a, c, b, d\rangle$.

B24b.03 Ovviamente ciascun vertice di un circuito-ZZ presenta un numero di archi entranti uguale al numero degli archi uscenti. Un circuito-ZZ è hamiltoniano sse in ciascuno dei suoi vertici entra un arco ed esce un arco, mentre è nonhamiltono se in qualcuno dei suoi vertici entrano ed escono due o più archi.

Consideriamo un circuito-ZZ nonhamiltoniano Δ ed attribuiamo a ciascuno dei suoi vertici e al circuito nel suo complesso un grado di nonhamiltonianità o **grado-nh**. A ciascuno dei vertici che presentano un solo arco entrante (ed un solo arco uscente) assegnamo il grado-nh 0; In generale a un vertice che presenta m archi entranti ed m archi uscenti assegnamo il grado-nh $m-1$.
Definiamo poi come grado-nh dell'intero circuito-ZZ la somma dei gradi-nh dei suoi vertici. Chiaramente un circuito-ZZ è hamiltoniano sse ha grado-nh uguale a 0, un circuito ha grado-nh uguale ad 1 sse presenta un solo vertice con due archi entranti (e due uscenti).

Osserviamo inoltre che due circuiti-ZZ di cui interessano le somme possono avere collocazioni relative piuttosto diverse e di conseguenza possono avere svariati circuiti somma.

B24b.04 Una manovra sui circuiti-ZZ che può considerarsi l'opposta della giustapposizione consiste nella decomposizione di un circuito nonhamiltoniano Γ che presenta grado-nh $\nu \in \mathbb{P}$ che conduce a un circuito hamiltoniano e a un circuito con grado-nh à $\nu - 1$ o $\nu - 2$.

Per questo basta osservare che partendo da un vertice qualsiasi V si riesce a individuare un sottocircuito hamiltoniano Δ procedendo ad aggiungere archi fino a ritornare a V con la sola precauzione dell'evitare di toccare più volte ogni suo vertice diverso da V.

Questo scopo si può ottenere facilmente: quando si sta ottenendo un cammino della forma $\big\langle V, V_1, ..., W, W_1, ..., W\big\rangle$ si ritorna a $\big\langle V, V_1, ..., W\big\rangle$ e si prosegue con un arco $\big\langle W, W'\big\rangle$ diverso da $\big\langle W, W_1\big\rangle$ che deve essere disponibile per l'uguaglianza tra grado entrante e grado uscente di W.

Il complesso di archi che fanno parte di $\Gamma \ominus \Delta$ deve individuare un circuito-ZZ il cui grado-nh è inferiore di 1 di quello di Γ.

Reiterando le manovre di decomposizione si riesce a decomporre il circuito dato in m sottocircuiti hamiltoniani con il ruolo dei circuiti addendi.

Va rilevato che anche queste manovre di decomposizione dei circuiti-ZZ nonhamiltoni non sono univoche, ma possono portare a diverse collezioni di circuiti. Per esempio il circuito presentato in a07 si può esprimere come $\langle a, c\rangle \oplus \langle d, b\rangle$ e come $\langle a, c\rangle \oplus \langle b, d\rangle$.

B24b.05 La poca definitezza delle composizioni e delle decomposizioni dei circuiti-ZZ induce a introdurre entità più elaborate dei circuiti-ZZ stessi.
Introduciamo per questo il termine **multicircuito-ZZ** definito come famiglia finita di circuiti-ZZ.
Diciamo inoltre **multicircuito-ZZ-or** un multicircuito con il dominio dotato di un ordinamento totale; In particolare servono i multicircuiti-ZZ-or aventi come dominio $\{1, 2, 3, ..., n\}$ per qualche $n \in \mathbb{P}$.

I circuiti-ZZ si possono considerare come i multicircuiti-ZZ più semplici.
Altri multicircuiti-ZZ particolari sono quelli tali che la somma dei circuiti fornisce un unico circuito-ZZ;

Multicircuiti particolari diversi dai precedenti sono qualli costituiti da circuiti senza vertici comuni, circuiti che possono essere hamiltoniani o nonhamiltoniani.

Chiaramente possiamo identificare la decomposizione di un circuito-ZZ nonhamiltoniano Psi nella somma di circuiti hamiltoniani come la trasformazione diΨ in un multicircuito costituito da più circuiti hamiltoniani.

Viene spontaneo interpretare un multicircuito-Z-or come rappresentazione della sequenza delle azioni materiali consistenti nel far percorrere da un certo mobile i circuiti che lo costituiscono; a questo proposito parliamo di **rappresentazione cinematica dei multicircuiti**. Secondo questa rappresentazione dei multicircuiti, i due multicircuiti visti nel paragrafo precedente non sono sostanzialmente diversi; diciamo che essi sono **circuiti-ZZ cinematicamente equivalenti**.
Di un multicircuito-ZZ possiamo anche considerare la rappresentazione cinematica che riguarda solo circuiti-ZZ hamiltoniani.

Dato che le definizioni consentono che un generico circuito-ZZ presenti vertici e archi ripetuti, si possono considerare circuiti e multicircuiti che presentano come componenti circuiti descrivibili cinematicamente come sottocircuiti formati da un circuito "percorso più volte".
Per ogni circuito-ZZ Γ e ogni numero $m \in \mathbb{Z}_{nz}$ si possono considerare i cosiddetti suoi multipli interi $m \cdot \Gamma$: il circuito corrispondente a un determinato m positivo si descrive come ottenuto percorrendo m volte Γ, il multiplo relativo ad un m negativo si considera ottenuto percorrendo $|m|$ volte $\ominus\Gamma$, cioè il circuito opposto a Γ.
Inoltre per taluni scopi può essere utile fare riferimento a $0 \cdot \Gamma$ come il circuito cinematicamente equivalente a $\Gamma \ominus \Gamma$ ottenibile percorrendo Γ e quindi il suo opposto, ma anche al suo opposto e ai rispettivi multipli.
Accanto al multicircuito $\{m \cdot \Gamma\}$ con m positivo potrà essere opportuno considerare i multicircuiti-ZZ della forma $\{a_1 \cdot \Gamma, a_2 \cdot \Gamma, ..., a_q \cdot \Gamma$ con $a_1 + a_2 + \cdots a_t = m$; questi multicircuiti sono caratterizzati da una partizione.i dell'intero m.

B24b.06 Dato che sia la composizione che la decomposizione di circuiti-ZZ possono condurre a risultati diversi, sia le operazioni del genere composizione che quelle del genere decomposizione possono essere viste come operazioni (binarie o unarie) concernenti multicircuiti-ZZ.
Queste operazioni non sono univoche, ma i diversi risultati ai quali conducono risultano cinematicamente equivalenti.
Viene quindi a delinearsi la opportunità formale di precisare una relazione di equivalenza cinematica di multicircuiti-ZZ tale che le relative composizioni e decomposizioni che possono condurre a differenti multicircuiti conducano a multicircuiti appartenenti alla stessa classe di equivalenza cinematica.
In tal modo le classi di equivalenza cinematica possono assumere il ruolo di operandi per operazioni binarie univoche e sempre definite, non parziali.

B24b.07 La relazione richiesta la diremo **equivalenza-Mcircyn**, dove Mcircyn si può leggere "cinematica su multicircuiti".
Essa si rivela pratica innanzi tutto in quanto, come vedremo, risulta possibile associare a tutti i multicircuiti di una classe-Mcircyn una unica misura, chiamata **area**, molto significativa e utile.

La relazione si vuole riflessiva e transitiva e si chiede soddisfi due richieste "di andamento contrapposto" concernenti ampliamenti della conoscenza di ogni classe, richieste che seguono il seguente schema: se si conosce un multicircuito appartenente ad una classe-Mcircyn che presenta uno o due circuiti opportuni, allora si possono aggiungere alla classe altri multicircuiti ottenibili senza difficoltà concettuali.

(1) La classe-Mcircyn che comprende un multicircuito M del quale fa parte un circuito decomponibile Δ deve comprendere tutti i multicircuiti ottenuti da M sostituendo Δ con due circuiti ottenibili effettuando una manovra di decomposizione.

(2) La classe-Mcircyn che comprende un multicircuito N del quale fanno parte due circuiti componibili Δ_1 e Δ_2 deve comprendere tutti i multicircuiti ottenuti da N sostituendo Δ_1 e Δ_2 con tutti i possibili circuiti somma di Δ_1 e Δ_2.

La prima delle operazioni di ampliamento della collezione dei multicircuiti noti di una classe la chiamiamo raggiungimento per decomposizione, la seconda raggiungimento per composizione.

La relazione-Mcircyn ora definita la denotiamo con $\sim_{Mcircyn}$. Essa, oltre che riflessiva e transitiva, evidentemente è simmetrica. Vogliamo tuttavia chiarire come la sua transitività sia garantita anche dalle due precedenti richieste.
Consideriamo le classi-Mcircyn $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$ ed $\boldsymbol{L}$ e supponiamo $\boldsymbol{H} \sim_{Mcircyn} \boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K} \sim_{Mcircyn} \boldsymbol{L}$. La prima relazione garantisce l'esistenza di una sequenza di raggiungimenti per decomposizione o per composizione che trasforma $\boldsymbol{H}$ in $\boldsymbol{K}$; la seconda garantisce l'esistenza di una sequenza di raggiungimenti per decomposizione o per composizione che trasforma $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{L}$.
Giustapponendo tali trasformazioni si ottiene una sequenza che consente di affermare $\boldsymbol{H} \sim_{McircC} \boldsymbol{L}$.

Si osserva che le trasformazioni per decomposizione e composizione si possono rappresentare con un grafo-no i cui nodi rappresentano multicircuiti e i cui spigoli collegano multicircuiti equivalenti.
Il multidigrafo dei multicircuiti è dunque costituito da sottodigrafi corrispondenti alle classi di equivalenza-Mcircyn.
Questi sottodigrafi sono tutti finiti e a partire da ciascun multicircuito sono algoritmicamente ottenibili tutti i suoi equivalenti.
Nella pratica tuttavia conviene trattare le classi-Mcircyn in modo intuitivo attraverso piccoli insiemi opportuni di loro rappresentanti.

B24b.08 Le classi-McircC sono in genere piuttosto estese e si presentano come ampiamente ridondanti: in genere sono costituite da molti multicircuiti ciascuno dei quali differisce poco da molti altri.
Può essere chiarificante descrivere le classi più semplici, quelle alle quali appartiene un multicircuito costituito da un solo circuito, classi che evidentemente sono caratterizzate da questo circuito e che possono chiamarsi **classi-Mcircyn monocircuito**.

Ciascuno dei multicircuiti costituiti da un solo circuito hamiltoniano da solo costituisce una classe-Mcircyn.
La classe di un multicircuito contenente un multiplo $m \cdot \Gamma$ per $m \in \mathbb{Z}_{nz}$ di un circuito hamiltoniano è costituita dai multicircuiti caratterizzabili con le partizioni.i di $|m|$ [b03].

Un circuito Γ caratterizzato da un solo vertice di grado 2 presenta due sottocircuiti che scriviamo Γ_1 e Γ_2; la sua classe è costituita da $\{\Gamma\}$ e da $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Il caso più semplice è fornito da un circuito palindromo della forma $\langle_{cy} P_1, P_2, P_3, P_2\rangle$; la sua classe-Mcircyn è costituita da

$$\{\langle_{cy} P_1, P_2, P_3, P_2\rangle\} \qquad \text{e} \qquad \{\langle_{cy} P_1, P_2\rangle, \langle_{cy} P_2, P_3\rangle\}$$

La classe monocircuito caratterizzate da un circuito palindromo $\langle_{cy} P_1, P_2, ..., P_t, ..., P_2\rangle$ con i vertici P_1, ..., P_t tutti diversi è costituita da multicircuiti caratterizzati dalle fattorizzazioni della sequenza degli archi della forma $\langle P_i, P_{i+1}\rangle$.

B24 c. tipi di poligoni-ZZ

B24c.01 Consideriamo due archi-ZZ $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$; si dice che sono intrecciati sse non hanno alcun punto-ZZ in comune e i vertici dell'uno si trovano in due diversi semipiani dell'altro. La relazione essere intrecciati tra gli archi-ZZ è evidentemente simmetrica e non transitiva e va considerata antiriflessiva.

Questa relazione si estende ai cammini-ZZ: due cammini-ZZ dicono intrecciati se posseggono due archi, uno ciascuno, che sono intrecciati.

Da questo segue una importante distinzione tra circuiti-ZZ: un circuito-ZZ è intrecciato sse possiede due sottocammini intrecciati tra di loro.

I circuiti nonintrecciati e i poligoni orientati che essi delimitano sono decisamente più semplici da studiare e più utilizzati e in questa sezione ne individuiamo alcuni tipi.

La maggiore distinzione tra i circuiti-ZZ è data dalla loro lunghezza, cioè dal numero dei loro vertici, uguale al numero dei loro archi.

B24c.02 Diciamo **rettangolo-ZZ-hv-or** un circuito-ZZ avente lunghezza-arc pari a 4 e costituito da spigoli orizzontali e verticali.
Esso ha la forma

$$\left\langle_{cy} \langle x, y\rangle, \langle x+h, y\rangle, \langle x+h, y+k\rangle, \langle x, y+k\rangle \right\rangle ,$$

con $x, y \in \mathbb{Z}$ e $h, k \in \mathbb{Z}_{nz}$ e si può denotare con $\mathsf{rctng}_{ZZ}(x, y, h, k)$.

Il rettangolo-ZZ-hv-or si dice di verso positivo o antiorario sse $h \cdot k > 0$, si dice di verso negativo o orario nel caso $h \cdot k < 0$.

Se R è un rettangolo-ZZ-hv-or positivo, $\ominus\mathsf{R}$ ha verso negativo e viceversa.

Un rettangolo-ZZ-hv-or $\mathsf{rctng}_{ZZ}(x, y, h, k)$ tale che $|h| = |k|$ si dice **quadrato-ZZ-hv-or**.
Se più in particolare $h = k = 1$ il rettangolo $\mathsf{rctng}_{ZZ}(x, y, h, k)$ si dice quadrato-ZZ-or elementare con vertice di riferimento in $\langle x, y\rangle$ e si denota con $sqe(x, y)$; si osserva che esso ha verso positivo.
Ancor più in particolare $sqe(0, 0)$ si dice **quadrato-ZZ-or basilare** e si denota con $sqeb$.

B24c.03 Tutti gli $sqe(x, y)$ si ottengono applicando traslazioni-ZZ a $sqeb$;
Tutti i rettangoli $\mathsf{rctng}_{ZZ}(0, 0, h, k)$con $h, k > 0$ (di verso positivo) si ottengono da $sqeb$ applicando le dilatazioni $\boldsymbol{Dil}_h(h)$ $\boldsymbol{Dil}_v(k)$.

Tutti i rettangoli $rctng_{ZZ}(x, y, h, k)$ con $h, k > 0$ si ottengono dai precedenti applicando loro traslazioni-ZZ.
In tal modo si ottengono tutti i rettangoli-ZZ-hv-or di verso positivo; tutti i rettangoli-ZZ-hv-or-ZZ di verso negativo si ottengono applicando $\ominus$ ai precedenti.
Dunque tutti i rettangoli-ZZ-hv-or si possono ottenere da $sqeb$ applicando dilatazioni-ZZ orizzontali e verticali, traslazioni-ZZ e inversione del verso.

B24c.04 Si dice triangolo-ZZ-or ogni circuito-ZZ avente lunghezza-arc uguale a 3.
Per un tale circuito $\left\langle_{cy} P_1, P_2, P_3 \right\rangle$ usiamo anche la notazione più espressiva $trngl_Z Z(P_1, P_2, P_3)$.
Evidentemente $\ominus trngl_Z Z(P_1, P_2, P_3) \;=\; trngl_Z Z(P_3, P_2, P_1)$.

Si dice triangolo-ZZ-hv-or rettangolo con vertice di riferimento in $\langle x, y\rangle$ e cateti aventi lunghezza h e k interi il circuito-ZZ

$$trngl_Z Z(x, y, h, k) \;:=\; \left\langle_{cy} \langle x, y\rangle, \langle x+h, y\rangle, \langle x+h, y+k\rangle \right\rangle .$$

Questo circuito ha verso positivo sse $h \cdot k > 0$, mentre $\ominus trngl_Z Z(x,y,h,k$ ha verso negativo; se invece $h = 0$ o $k = 0$ si dice circuito degenere.

In tale triangolo nondegenere i vettori.a orizzontale e verticale si dicono cateti-or e il vettore.a obliquo, cioè non vettore-ZZR, si dice ipotenusa-or.

Si dice triangolo-ZZ-hv-or rettangolo isoscele ogni $trngl_Z Z(x,y,h,k)$ con $|h| = |k|$. ...

Si dice **triangolo-ZZ-hd-or rettangolo isoscele** con ipotenusa $2\,s$, ove s è un intero nonnullo $^{\searrow}$ ogni circuito-ZZ della forma $\left\langle_{cy} \langle x,y\rangle, \langle x+2s,y\rangle, \langle x+s,y+t\rangle\right\rangle$ con $t = s$ oppure $t = -s$.
Si dice **triangolo-ZZ-vd-or rettangolo isoscele** con ipotenusa $2\,s$, ove s è un intero nonnullo $^{\searrow}$ ogni circuito-ZZ della forma $\left\langle_{cy} \langle x,y\rangle, \langle x,y+2\,s\rangle, \langle x+t,y+s\rangle\right\rangle$ con $t = s$ oppure $t = -s$.
Si vede che questi triangoli si ottengono accostando due triangoli-ZZ-hv-or in modo da avere due cateti allineati e due mutuamente riflessi.

Si dice triangolo-ZZ elementare con vertice di riferimento in $\langle x,y\rangle$ e si denota con $trzzel(x,y)$ il circuito-ZZ di verso positivo

$$trzzel(x,y) \;:=\; \left\langle_{cy} \langle x,y\rangle, \langle x+1,y\rangle, \langle x+1,y+1\rangle\right\rangle \;.$$

Si dice triangolo-ZZ basilare $trzzbas := trzzel(0,0)$

Evidentemente applicando a *trzzbas* traslazioni-ZZ e dilatazioni-ZZ si ottengono tutti i triangoli-ZZ-hv-or rettangoli isosceli e applicando a *trzzbas* traslazioni-ZZ, dilatazioni-ZZ-h e dilatazioni-ZZ-v si ottengono tutti i i triangoli-ZZ-hv-or rettangoli.

B24c.05 Si dice **quadrilatero-ZZ-or** ogni circuito-ZZ avente lunghezza-arc uguale a 4.
Per un tale circuito $\left\langle_{cy} P_1, P_2, P_3, P_4\right\rangle$ usiamo anche la notazione più espressiva $\mathsf{qdltr}_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Si dice **trapezio-ZZ-h-or** un quadrilatero $\mathsf{qdltr}_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$ tale che sono orizzontali e paralleli i vettori.a $\overrightarrow{P_1, P_2}$ e $\overrightarrow{P_4, P_3}$.

Si dice**trapezio-ZZ-v-or** un quadrilatero $\mathsf{qdltr}_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$ tale che sono verticali e paralleli i vettori.a $\overrightarrow{P_2, P_3}$ e $\overrightarrow{P_4, P_3}$
Si definiscono in modi prevedibili i trapezi-ZZ isosceli e i trapezi-ZZ rettangoli.

Si dice **parallelogramma-ZZ-or** un quadrilatero $\mathsf{qdltr}_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$ con i vettori.a $\overrightarrow{P_1, P_2}$ e $\overrightarrow{P_4, P_3}$ paralleli e i vettori.a $\overrightarrow{P_2, P_3}$ e $\overrightarrow{P_4, P_1}$ paralleli.

Si dice **rombo-ZZ-dd-or** un quadrilatero $\mathsf{qdltr}_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$ tale che i vettori.a $\overrightarrow{P_1, P_3}$ e $\overrightarrow{P_2, P_4}$ sono ortogonali e hanno un punto-ZZ come punto medio comune. ...

B24c.06 Si dice pentagono-ZZ-or ogni circuito-ZZ avente lunghezza-arc uguale a 5. Per un tale circuito $\left\langle_{cy} P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\right\rangle$ usiamo anche la notazione più espressiva $pntgn_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Si dice esagono-ZZ-or ogni circuito-ZZ avente lunghezza-arc uguale a 6.
Per un tale circuito $\left\langle_{cy} P_1, P_2, P_3, P_4\right\rangle$ usiamo anche la notazione più espressiva $\mathsf{qdltr}_Z Z(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Per ogni $n = 3, 4, 5, ...$ si dice poligono-ZZ-or di n vertici ogni circuito-Z avente lunghezza-arc uguale a n.
Evidentemente i poligoni-ZZ con 3, 4, 5 e 6 vertici sono, risp., i triangoli-ZZ, i qudrilateri, i pentagoni-ZZ e gli esagoni-ZZ.

Si distinguono i poligoni-ZZ intrecciati e i nonintrecciati, i convessi e i nonconvessi.

B24 **d. aree associate ai multicircuiti-ZZ**

B24d.01 Iniziamo ad associare a ciascuno dei vari circuiti-ZZ un'area, ossia una misura di carattere numerico dotata di segno, più precisamente un numero semiintero, che in conseguenza di alcuni tipi significativi di permutazioni dell'ambiente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (e quindi dei circuiti-ZZ) rimane invariata o cambia in modo algoritmicamente prevedibile.

Iniziamo con la definizione delle aree dei circuiti più semplici e delle semplici figure-ZZ che essi delimitano e imponiamo la loro invarianza rispetto alle traslazioni, alle rotazioni-ZZR e richiediamo il cambiamento di segno in conseguenza delle riflessioni-ZZK.
Due circuiti-ZZ Γ e Δ si dicono **circuiti-ZZ essenzialmente disgiunti** sse nessun vettore.a di ciascuno di essi risulta intrecciato con un vettore.a-ZZ dell'altro
Chiediamo anche l'additività delle aree per ogni duetto di circuiti-ZZ essenzialmente disgiunti.
Chiediamo infine che il circuito-ZZ basilare *sqeb* antiorario abbi area , ossia il numero delle caselle che esso delimita.

Da notare he tutte la precedenti richieste sono compatibili con le are degli insiemi di caselle delimitabili con multicircuiti-ZZ costituiti da circuiti-ZZ-hv positivi, misure evidentemente applicabili al conteggio di oggetti materiali rappresentati da caselle e quindi necessariamente invarianti.

Con le prime definizioni e le prime richieste di invarianza o di cambiamento di segno è possibile e facile ampliare l'insieme dei circuiti la cui area è determinata e nota; contemporaneamente l'area diventa una misura potenzialmente utile per le applicazioni (a cominciare da quelle ben tangibili che interessano muratori e falegnami) e possono essere definiti vari tipi di figure-ZZ che ostituiranno la base di una classificazione del variegato mondo delle configurazioni geometriche.

Successivamente si può procedere all'ampliamento sistematico dei circuiti-ZZ, delle loro aree e dei tipi delle figure-ZZ e inoltre si prepara l'estensione di tutte le nozioni introdotte agli ambienti più popolosi per i circuiti e per le misure (come piani sui razionali e piani sui reali costruibil e in seguito agli ambienti multidimensionali e ad ambienti più astratti.

B24d.02 Per denotare l'area associata a un multicircuito-ZZ m useremo la notazione $\boldsymbol{Area}(\mathsf{m})$.
Nel caso di circuito-ZZ $\gamma = \left\langle_{cy} A_1, A_2, ..., A_s \right\rangle$ ci serviamo anche della notazione scriviamo

$$\boldsymbol{Area}(P_1, P_2, ..., P_s) := \boldsymbol{Area}(\gamma)\ .$$

Abbiamo quindi

$$(1) \qquad \boldsymbol{Area}(\mathsf{bSq}) \ := \ \boldsymbol{Area}\left(\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 10,0\rangle\right) \ := \ +1$$

//input pB24d01

Si trovano 8 *sqe*, quadrati-ZZ elementari *sqe*, che hanno tra i vertici l'origine, 4 positivi e 4 negativi, i corrispondenti opposti; i primi 4 si ottengono da bSq per rotazioni di multipli di 90° con centro nell'origine e hanno area 1; gli altri 4 hanno area -1.
Per invarianza per traslazione tutti gli $sqe(x, y)$ positivi hanno area 1 e tutti gli *sqe* negativi hanno area -1.
Tutti i rettangoli-ZZ-hv $\mathsf{rctng}(x, y, h, k)$ positivi si possono decomporre in $h \cdot k$ *sqe* positivi che risultano mutuamente essenzialmente disgiunti. Quindi tutti i rettangoli-ZZ-hv positivi $\mathsf{rctng}(x, y, h, k)$ hanno area $h \cdot k$, mentre i negativi hanno area $-h \cdot k$.

I circuiti-ZZ palindromi orizzontali $\left\langle_{cy} \langle x,y\rangle, \langle x+h,y\rangle\right\rangle$ e i verticali $\left\langle_{cy} \langle x,y\rangle, \langle x,y+k\rangle\right\rangle$ si possono considerare rettangoli-ZZ-hv degeneri con il primo o il secondo parametro estensivo nullo e quindi aventi area 0.
Questo consente di considerare $\mathsf{rctng}(x,y,h,k) = \left\langle_{cy} A,B,C,D\right\rangle$ decomponibile nei due triangoli-ZZ-hv rettangoli $\left\langle_{cy} A,B,C\right\rangle$ e $\left\langle_{cy} A,C,D\right\rangle$; il secondo di questi è ottenibile dal primo applicandogli la traslazione $Trsl(\overrightarrow{C,A}$ e la rotazione di 180° intorno al punto-ZZ A.
Dunque i due triangoli rettangoli hanno area uguale, ossia $\dfrac{h \cdot k}{2}$, valore semiintero, ossia intero o semidispari.
In particolare ogni quadrato-ZZ elementare (positivo o negativo) si pu]'o considerare somma di due triangoli-ZZ-HV isosceli con cateti lunghi 1 e quindi ciascuno dei quattro triangoli-ZZ così ottenibili ha area 1/2; i corrispondenti 4 loro opposti hanno invece area $-1/2$.
Ogni triangolo-ZZ-dd-or rettangolo isoscele con cateto lungo h ha invece area h^2 se positivo, $-h^2$ se negativo.

Chiediamo l'invarianza dell'area per rotazioni-ZZR e abbiamo che hanno area 1 anche i circuiti e i quadrati così ottenuti

$$\boldsymbol{Area}(O,C,D,E) = \boldsymbol{Area}(O,E,F,G) = \boldsymbol{Area}(O,G,H,A) = 1$$

Chiediamo l'invarianza dell'area per traslazioni-ZZ

$$\forall \mathsf{s} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ , \ \forall \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{CirctZZ} \ \because \ \ \boldsymbol{Area}(\boldsymbol{C}) := \boldsymbol{Area}\,(\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{s}}(\boldsymbol{C}))$$

Questo implica che tutte le caselle delimitate da un cicuito antiorario hanno area 1.

Diciamo anche che questi circuiti sono **circuiti equiareali**, ossia circuiti equivalenti rispetto alla funzione ***Area***.

Chiediamo anche l'additività della funzione ***Area***, ossia che l'area di un multicircuito costituito da un qualsiasi numero positivo m di circuiti ottenuti per traslazione dal cicuito di bSq sia pari a m.
Questa richiesta rende la valutazione ***Area*** pienamente compatibile con quella fornita dal numero di caselle di una figura-ZZC.

B24d.03 Le richieste precedenti dicono che l'area del multicircuito costituito dal circuito di bSq e dal suo traslato per e_x vale 2.

Questo multicircuito per l'additività è equiareale con il circuito $\langle O,A,B,A,I,J,B,C\rangle$ e questo induce a chiedere che questo circuito indeciso sia equiareale con il corrispondente circuito nonindeciso $\langle O,A,I,J,B,C\rangle$.

L'invarianza dell'area per rotazione-ZZR e traslazione induce a chiedere che tutti i multicircuiti costituiti da segmenti-ZZR siano equiareali con i corrispondenti circuiti nonindecisi.

Si osserva che ogni riflessione-ZZK trasforma un circuito-ZZ in un circuito con l'area cambiata di segno.
Inoltre per l'additività il cambiamento di segno si ha anche in conseguenza di una riflessione-ZZK di ogni multicirciuto.
Abbiamo in particolare che la simmetria centrale rispetto ad un qualsiasi punto-ZZ $\langle a,b\rangle$ che faccia da centro lascia invariata l'area, in quanto ottenibile della riflessione rispetto alla retta $x=a$ orizzontale e dalla riflessione rispetto alla retta $y=b$verticale.

Una semplice casella considerata delimitata da un circuito percorso m volte nel verso antiorario ha area m, mentre un circuito che delimita una semplice casella girando intorno ad essa nel verso orario m volte ha area $-m$.

A questo punto abbiamo che ad ogni multicircuito costituito da segmenti-ZZR risulta associata l'area ottenuta sommando i contributi di ogni casella delimitata dal multicircuito; più precisamente il contributo di ogni casella e data dal numero di circuiti-ZZR hamiltoniani antiorari che la avvolgono meno il numero di circuiti-ZZR hamiltoniani orari che la avvolgono.

Consideriamo in particolare i rettangoli-ZZR-or.

Denotiamo il loro insieme Rctng_{ZZR} e denotiamo con $\mathsf{rctng}(A, B, C, D)$ o con l'equivalente $\mathsf{rctng}(A; C)$ il rettangolo-ZZR orientato i cui vertici successivi sono A, B, C e D, ossia il rettangolo-ZZR orientato definito da due suoi vertici opposti A e C.

Quanto sopra implica che per l'area di un triangolo rettangolo-ZZR orientato avente i vertici opposti in $A = \langle x_A, y_A \rangle$ si abbia

$$\boldsymbol{Area}(\mathsf{rctng}(A; C)) \;=\; (x_C - x_A)(y_C - y_A) \;.$$

Osserviamo esplicitamente che questa formula vale quale che sia la posizione relativa dei due vertici A e C e può fornire ogni valore di $\mathbb{Z}$.

//input pB24d02B

B24d.04 Estendiamo la funzione $\boldsymbol{Area}$ ai triangoli-ZZ e per questi introduciamo la funzione **area raddoppiata** che definiamo come $\boldsymbol{Darea} := 2 \cdot \boldsymbol{Area}$.

I più semplici triangoli-ZZ li troviamo nel quadrato basico delimitati dai vari circiuti-ZZK che non sono circuiti-ZZR e si ottengono “tagliando in due” il quadrato basico.
Abbiamo $\boldsymbol{Darea}(O, A, B) = 1$, per riflessione rispetto alla diagonale D1 che contiene OB abbiamo $\boldsymbol{Darea}(O, C, B) = -1$, per riflessione rispetto a $x = 1/2$ $\boldsymbol{Darea}(O, A, C) = -1$ e per la riflessa di questo rispetto $\boldsymbol{Darea}(A, B, C) = 1$.
Consideriamo il circuito triangolare $\mathsf{T} := \big\langle_{cy} \mathbf{0}, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle \big\rangle$ e il rettangolo $\big\langle_{cy} \mathbf{0}, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\langle 0, 1\rangle \big\rangle$ la cui area vale 2.
Esso è equivalente al circuito indeciso $\big\langle_{cy} \mathbf{0}, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \mathbf{0}, \langle 2, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle \big\rangle$ a sua volta equivalente alla somma di T e del circuito ottenuto ruotando T di mezzo giro con centro in $\langle 1, 1/2\rangle$ avente area uguale.
Di conseguenza $\boldsymbol{Area}(\mathsf{T}) = 1$ e si può affermare che per esprimere le aree dei triangoli-ZZR servono i numeri semiinteri.

Più in generale ogni triangolo-ZZ-hv ha la forma

$$\mathsf{trng}(A, B, C) \;=\; \Big\langle_{cy} \big\langle x_a, y_a \big\rangle, \big\langle x_b, y_b \big\rangle, \big\langle x_c, y_c \big\rangle \Big\rangle \;;$$

e quindi ha l'area data dalla metà dell'area del rettangolo-ZZR orientato $\mathsf{rctng}(A; C)$ i cui vertici opposti sono A e C e quindi

(1) $$\boldsymbol{Area}\big(\mathsf{trng}\big(\big\langle x_a, y_a \big\rangle, \big\langle x_c, y_a \big\rangle, \big\langle x_c, y_c \big\rangle\big) \;=\; (x_c - x_a)(y_c - y_a) \;.$$

In virtù dell'invarianza per traslazioni e rotazioni e del cambimento di segno per riflessioni la formula precedente vale per tutti i triangoli rettangoli-ZZR orientati, quali che siano le posizioni relative dei vertici estremi dell'ipotenusa A e C.

B24d.05 Il passo successivo consiste nel trovare una formula dell'area di un qualsiasi triangolo-ZZ orientato che ancora denotiamo con la notazione $\mathsf{T} := \mathsf{trng}_{ZZ}(A, B, C)$.

Al fine di visualizzare con semplicità le possibili situazioni cominciamo con il supporre che i tre vertici del triangolo appartengano al I quadrante, ossia abbiano entrambe le coordinate in $\mathbb{N}$.
Scegliamo inoltre di chiamare A il vertice con l'inclinazione minore, e C quello con l'inclinazione maggiore: abbiamo che B si trova nel semipiano positivo per la retta-ZZ-or orientata $\overrightarrow{OA}$ e nel semipiano negativo per la retta $\overrightarrow{OC}$.

Osserviamo che si danno due possibili tipi di collocazioni per B: nel semipiano positivo o nel semipiano negativo rispetto alla retta $\overrightarrow{AC}$. Nel primo caso T corrisponde a un circuito antiorario e a un'area positiva, nel secondo si ha un circuito orario e area negativa.
Osserviamo anche che abbiamo ignorato le situazioni nelle quali si riscontrano i cosiddetti **triangoli degeneri**, triangoli di area nulla riguardanti le configurazioni nelle quali sono allineati A con B e C, oppure O con A oppure B, O con B e C, che risultano circuiti-ZZ palindromi e qundi di area nulla.

Le aree dei triangoli $\mathsf{trng}(\mathbf{0}, A, B)$, $\mathsf{trng}(\mathbf{0}, B, C)$ e $\mathsf{trng}(\mathbf{0}, C, A)$ possono essere calcolate servendoci delle aree di rettangoli-ZZ e di triangoli-ZZR.

Abbiamo nel caso $x_a > x_b$ e $y_a < y_b$

$$\boldsymbol{Darea}(O, A, B) = 2x_a y_b - x_a y_a - x_b y_b - 2(x_a - x_b)(y_b - y_a) \;=\; x_a y_b - x_b y_a \;;$$

Nel caso invece sia $x_a < x_b$ e $y_a < y_b$

$$\boldsymbol{Darea}(O, A, B) = 2x_b y_b - (x_b - x_a)(y_b - y_a) - x_b y_b - 2y_a((x_b - x_a) \;=\; x_a y_b - x_b y_a \;.$$

Per $\boldsymbol{Darea}(O, B, C)$ e $\boldsymbol{Darea}(O, C, A)$ si ottengono espresssioni simili, ottenibili dalla precedente ruotando la terna $\langle A, B, C\rangle$.
Sommando i risultati otteniamo

(1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Darea}(A, B, C) \;&=\; \boldsymbol{Darea}(O, A, B) + \boldsymbol{Darea}(O, B, C) + \boldsymbol{Darea}(O, C, A) \\ &=\; (x_a\, y_b - x_b\, y_a) + (x_b\, y_c - x_c\, y_b) + (x_c\, y_a - x_a\, y_c)\end{aligned} \;.$$

//input pB24d04

B24d.06 La richiesta di invarianza per traslazioni e rotazioni e di cambiamento di segno in seguito a riflessioni rende l'espressione trovata valida per tutti i triangoli-ZZ.
La formula è applicabile anche ai triangoli degeneri per i quali trova aree pari a zero.

La formula è estendibile a tutti i poligoni orientati definiti da circuiti-ZZ.

Questa affermazione si chiarisce con una figura come la seguente

//input pB24d05

nella quale si intende che possa essere $k = 3, 4, ...$, per ogni $h = 0, 1, 2, ...k - 1$ si hanno i k punti $A_h = \langle x_h, y_h \rangle$ e si conviene che $A_k := A_0$.
Per l'area di ciascuno dei triangoli $\mathsf{trng}\,(O, A_h, A_{h+1})$ si applica una formula equivalente alla $\mathsf{d04}$ e sommando su h si trova la generalizzazione della $\mathsf{d04}(1)$

(1)
$$\boldsymbol{Darea}\big\langle_{cy} A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-2}, A_{k-1}\big\rangle \;=\; \sum_{h=0}^{k-1} (x_h\, y_{h+1} - x_{h+1}\, y_h) \;.$$

Si osserva che la formula si applica a tutte le figure-ZZ ottenute dalla precedente applicando traslazioni-ZZ, rotazioni-ZZR e ogni rotazione-ZZR di 90° con qualsiasi centro in $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.
Quindi essa vale per ogni poligono-ZZ orientato, anche per i degeneri, i nondiradati, gli indecisi e anche per ogni multipoligono-ZZ ossia per ogni multicircuito-ZZ, in forza della richiesta di additività.

B24d.07 La formula d05(1) si può riscrivere utilizzando determinanti di matrici-ZZ di profilo 2×2

(1) $$\boldsymbol{Area}\langle_{cy} A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-2}, A_{k-1}\rangle \;=\; \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{k-1}\begin{vmatrix} x_h & y_h \\ x_{h+1} & y_{h+1}\end{vmatrix}\;.$$

Ciascuna di queste matrici si ottiene sovrapponendo i vettori riga dei due vertici di un segmento-ZZ-or del circuito, ossia di un lato orientato del circuito che è il lato che non incide nell'origine di uno dei triangoli aventi un vertice nell'origine che hanno contribuito all'area complessiva.
È quindi naturale aspettarsi che ciascuna delle matrici in causa, che denotiamo con M_h, abbia una interessante interpretazione geometrica.

In effetti si osserva che ciascuna delle colonne della matrice M_h si può esprimere come prodotto

$$\begin{bmatrix} x_{h+1} & y_h \\ y_h & y_{h+1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x_{h+1} & y_h \\ y_h & y_{h+1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{h+1} \\ y_{h+1}\end{bmatrix}\;.$$

Quindi i due vettori che determinano M_h sono $\overrightarrow{O\,A_h}$ e $\overrightarrow{O\,A_{h+1}}$
Abbiamo dunque che la matrice M applicata all'intero quadrato basilare bSq lo trasforma nel poligono orientato $\langle_{cy} O, A_h, A_h + A_{h+1}, A_{h+1}\rangle$, un parallelogramma orientato la cui area è uguale a $\boldsymbol{Darea}(O, A_h, A_{h+1}$, il doppio dell'area del triangolo in esame.

Questa osservazione è coerente con il calcolo delle aree orientate che compaiono nella figura che segue:

//input pB24d06

Infatti nella figura si trovano due coppie di triangoli equiareali e due rettangoli equiareali per cui

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Area}(O, B, C, D) \\
&\quad= \boldsymbol{Area}(O, C_x, C, C_y) - \boldsymbol{Area}(O, B_x, B) - \boldsymbol{Area}(O, Dx, D) - 2\,\boldsymbol{Area}(B_x, C_x, B_y, B) \\
&\quad= (x_b + x_d)(y_b + y_d)) - x_b\,y_b - x_d\,y_d - 2\,x_d\,y_b \\
&\quad= x_b\,y_d - x_d\,y_b \;=\; \begin{vmatrix} x_b & x_d \\ y_b & y_d\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Questa permette di affermare che il determinante di una matrice-ZZ 2×2 è l'area de parallelepipedo ottenuto applicando la matrice a bSq.

B24d.08 Le valutazioni delle aree ottenute consentono di ottenere il teorema di Pitagora.

Teorema (**teorema di Pitagora per il piano-ZZ**) La somma delle quadranze dei cateti di un triangolo rettangolo-ZZ è uguale alla quadranza della sua ipotenusa.

Dim.: Consideriamo triangolo rettangolo-ZZ $\mathsf{T} := \mathsf{trng}(A, C, B)$ retto nel vertice C con i cateti aventi come lunghezze $a = |BC|$ e $b = |AC|$ con a e b interi positivi arbitrari. Questo triangoo possiamo considerarlo nonorientato.
Per facilitare l'argomentazione facciamo riferimento alla figura che segue nella quale abbiamo $A = \langle a, 0\rangle$, $B = \langle a + b, a\rangle$ e $C = \langle a + b, 0\rangle$.

Ci proponiamo di stabilire

(1) $\mathsf{Qdr}(A,C)+\mathsf{Qdr}(C,B)=\mathsf{Qdr}(A,B)$ ovvero $|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2$.

Per questo basta valutare le aree dei quadrati e dei triangoli raffigurati:

$\boldsymbol{Area}(O,C,D,F) = 4\,\boldsymbol{Area}(O,A,G)+\boldsymbol{Area}(A,B,E,G) \implies (a+b)^2 = 2a\,b+\mathsf{Qdr}(A,B) \iff \mathsf{Qdr}(A,B)=a^2+b^2$.

L'uguaglianza è dimostrata per il triangolo T e l'invarianza delle aree consente di affermarla per tutti i triangoli rettangoli-ZZ ▮

B24 m. invarianze e variazioni dovute a movimenti rigidi

B24m.01 In modo del tutto generico consideriamo un insieme S esprimibile in termini geometrici o attraverso metafore fisiche, ossia mediante un qualche modello fisico; per tale insieme useremo il termine "spazio" da intendere in una accezione anche questa del tutto generica.

Una qualsiasi trasformazione biiettiva entro tale insieme $\mathsf{T} \in \mathsf{Perm}_{\mathsf{S}}$ si può considerare da due punti di vista complementari che chiamiamo, risp., attivo e passivo.

Secondo il **punto di vista attivo** la trasformazione si descrive come un'azione che opera sulle entità collocate in S considerate come oggetti mobili ciascuno dei quali prima della azione occupa una determinata posizione iniziale e che la T sposta in una nuova posizione.

Secondo il **punto di vista passivo** S viene pensato come una intelaiatura che prima della trasformazione organizza in un certo modo i suoi elementi da considerare oggetti dotati di una individualità immutabile e l'azione di T come la modifica della intelaiatura in modo che essa fornisca nuove identificazioni per le posizioni nelle quali percepisce le entità immutabili.

Scambiare i punti di vista attivo e passivo equivale a passare dal vedere la T come un complesso di spostamenti degli oggetti in S al vedere la permutazione inversa T^{-1} agire sul sistema di riferimento. Questi due punti di vista chiediamo di considerarli sostanzialmente equivalenti.

B24m.02 Vediamo alcuni esempi nell'ambito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- La traslazione di 5 passi verso l'alto $\boldsymbol{Trsl}_{\langle 0,5\rangle}$, intesa in senso attivo trasforma un vettore applicato come $\overrightarrow{\mathbf{0}, \langle 1,2\rangle}$ nel vettore applicato $\overrightarrow{\langle 0,5\rangle, \langle 1,7\rangle}$, mentre in senso passivo trasforma il sistema di riferimento di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ spostando l'asse orizzontale dove prima si trovava la retta $y = -5$.
- La riflessione rispetto all'asse piano verticale del tetròmino costituito dalle tessere $\langle 0,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle$, $\langle 2,0\rangle$ e $\langle 2,1\rangle$ e la rotazione di 180° nello spazio tridimensionale del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ intorno al suo asse verticale, piano pensato come sistema di caselle destinate a contenere delle tessere da mosaico.
- La misurazione della estensione di un convoglio ferroviario può effettuarsi con un orologio sia da un osservatore fermo nella stazione che osserva mentre il convoglio gli scorre davanti a una velocità nota, sia da un osservatore che si sposta a una sua velocità nota al fianco del convoglio fermo.

Per l'equivalenza tra una permutazione considerata dal punto di vista attivo e la sua inversa intesa in senso passivo si può proporre il termine **relativismo basato su permutazioni**.

B24m.03 Alcune delle relazioni e delle configurazioni definite in precedenza ed alcune delle proprietà e delle valutazioni che si possono loro attribuire non cambiano in seguito alla effettuazione di movimenti rigidi; altre configurazioni e altre proprietà invece si trasformano tra di loro secondo regole specifiche e maneggevoli.

In genere è piuttosto utile e significativo stabilire per le relazioni, le proprietà, i parametri e le procedure che si trovano per le configurazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o in un altro ambiente quali sono conservate e quali sono modificate in seguito alla applicazione dei vari tipi di permutazioni.
Qui vediamo in particolare cosa si può dire su $\boldsymbol{GrRgdm}\mathsf{ZZ}$, il gruppo dei movimenti rigidi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Osserviamo innanzi tutto che i movimenti rigidi, come tutte le permutazioni, non modificano i cardinali degli insiemi di punti-ZZ.
Questo fatto risulta evidente quando si immaginano i sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come aggregati di tessere rigidamente collegate e si pensa una loro trasformazione secondo il punto di vista passivo come modifica del sistema al quale sono riferite.

Inoltre tutti i movimenti rigidi per definizione conservano l'adiacenza-ZZR e e di conseguenza l'adiacenza-ZZB, l'appartenenza alle rette-ZZK e le ampiezze degli angoli-ZZK. Essi quindi trasformano cammini-ZZR in cammini-ZZR, cammini-ZZB in cammini-ZZB (e cammini-ZZK in cammini-ZZK); di conseguenza mantengono le proprietà di connessione-ZZR, di connessione-ZZB (e di connessione-ZZK) dei sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

I movimenti di ***GrRgdm***ZZ inoltre conservano le lunghezze dei cammini, parametri riconducibile a **cardinali** di sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; in particolare conservano i perimetri e i diametri delle figure poligonali.

Parametri più specifici come Larghezza, altezza ed estensioni NE e SE degli insiemi di punti-ZZ (o di tessere), invece, sono conservati dalle traslazioni, ma sono modificate da alcune rotazioni e da alcune riflessioni.
Le riflessioni-ZZR, cioè le riflessioni rispetto a rette orizzontali o verticali, conservano le **estensioni-ZZR**, cioè larghezze e altezze, ma scambiano le **estensioni-ZZB**, cioè estensioni-NE ed estensioni-SE. A loro volta le riflessioni-ZZB scambiano le estensioni-ZZR e conservano le estensioni-ZZB. La rotazione di 90° scambia le due estensioni-ZZR e le due estensioni-ZZB.

B24m.04 Le proprietà delle trasformazioni indotte dai movimenti rigidi del piano-ZZ sulle entità in gioco (configurazioni, relazioni, proprietà, parametri e procedure), ed in particolare le proprietà di invarianza rispetto a ***GrRgdm***ZZ, si possono considerare conseguenze dell'applicazione di ***GrRgdm***ZZ.

Conviene ribadire l'utilità delle caratteristiche invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni. Se si conosce un invariante per una data configurazione, esso risulta automaticamente noto per tutte le configurazioni ottenibili applicando le trasformazioni del gruppo: con una tale consapevolezza si possono attuare vantaggiose economie nelle esposizioni e nelle elaborazioni.

Gli invarianti si possono quindi considerare degli strumenti che possono favorire un consapevole controllo sopra oggetti in corso di studio e sopra problemi in corso di indagine.
Questo fa sì che in molti campi gli invarianti vengono considerati caratteristiche "sostanziali", ovvero nozioni "intrinseche", da preferirsi ad altre nozioni più "episodiche", legate a circostanze più 'accidentali": infatti queste ultime nozioni nell'organizzazione delle conoscenze hanno conseguenze di portata tendenzialmente circoscritta.

B24m.05 Anche una buona conoscenza delle conseguenze delle trasformazioni costituenti un gruppo come ***GrRgdm***ZZ può portare a utili economie di pensiero e rivelarsiutile per molti studi.

Come esempio supponiamo, banalmente, di aver determinate altezze e larghezze di certe figure piane. Se interessano anche le figure di un secondo tipo e si sa che queste si possono ottenere dalle precedenti per applicazione di qualche riflessione-ZZB, si possono ottenere con poco sforzo le altezze e le larghezze delle seconde, risp., dalle larghezze e dalle altezze delle prime.

In molte circostanze dalla conoscenza degli effetti di trasformazioni (diverse dalla mera identità) si possono ottenere dei sistemi di parametri, relazioni e procedimenti modificando opportunamente altre caratteristiche analoghe che sono state individuate e accertate in situazioni particolari con procedimenti specifici (meglio se poco impegnativi). Anche queste strade possono presentare vantaggi conoscitivi, anche se in genere di impatto meno evidente di quelli forniti dalla conoscenza di invarianti.

B24m.06 Consideriamo le permutazioni entro un certo ambiente geometrico-fisico **S** e più particolarmente un certo gruppo **G** di queste permutazioni determinato dalla richiesta di invarianza di determinate proprietà $\mathcal{P}$ di configurazioni di elementi di **S**.
In particolare possiamo pensare a specifici gruppi di movimenti rigidi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (traslazioni, rotazioni, riflessioni, glissazioni, ...).

Spesso si pone il problema delle conseguenze della applicazione delle trasformazioni di **G** su certe configurazioni di **S**.
Per un buon controllo di queste conseguenze risulta opportuno prendere in considerazioni non tanto singole configurazioni, quanto intere **orbite di configurazioni**, intendendo con questo termine gli insiemi di configurazioni ottenute applicando ripetutamente ad un sottoinsieme di configurazioni una o più trasformazioni di **G** ed in particolare applicando ripetutamente elementi generatori del gruppo. Queste orbite di configurazioni risultano complessivamente stabili rispetto alle permutazioni di **G**.

Va rilevato che questo punto di vista viene spesso assunto implicitamente e in modo naturale, talora inconsapevolmente.

Spesso si enunciano e si dimostrano proprietà P riguardanti un circoscritto insieme di configurazioni C di un ambiente **S**, ma queste proprietà possono essere estese senza difficoltà a tutte le configurazioni ottenibili applicando un gruppo di permutazioni **G**, cioè sono valide per l'intero C,**G**.

In qualche circostanza risulta più conveniente affermare che le proprietà P valgono per le configurazioni C a meno delle trasformazioni in **G**, oppure che le P esse sono valide per C modulo **g**. Spesso tuttavia le precisazioni di questo genere vengono trascurate per evitare di essere prolissi.

In particolare la maggior parte delle figure presentate in questi ultimi capitoli prescindono dalla posizione rispetto all'origine e quindi riguardano non tanto singoli insiemi (barre, ganci, triangoli, poliòmini, ...) quanto insiemi individuati, per esempio, a meno di traslazioni o a meno di rotoriflessioni. In particolare il fatto di considerare equivalenti la raffigurazioni geografiche e matriciali di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ discende dal considerare le configurazioni a meno di rotoriflessioni-ZZR.

Spesso dunque quando si trattano configurazioni entro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si sottintende che esse vengono considerate a meno di movimenti rigidi ovvero, come si dice, vengono considerate e modulo ***GrRgdm***ZZ. In particolare sono stati elencati tutti i poliòmini e sostanzialmente tutti gli pseudo-poliòmini di area non superiore a 4, considerati modulo ***GrRgdm***ZZ.
Di solito, per non appesantire i discorsi, si evita di parlare di orbite rispetto a un dato gruppo e si usano i termini per i singoli insiemi piani $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (gancio, triangolo rettangolo CathR, poliòmino, ...) per individuare generici elementi delle orbite costituite da questi insiemi.

B24m.07 Per talune configurazioni e proprietà occorre distinguere con cura le trasformazioni di ***GrRgdm***ZZ rispetto alle quali esse sono invarianti da quelle che comportano variazioni. Per esempio si incontrano proprietà invarianti per movimenti rigidi pari ma non per movimenti dispari.
Definiremo un verso di percorrenza di circuito, positivo o antiorario e negativo o orario che le riflessioni e i movimenti rigidi dispari scambiano. Si può quindi pensare a due facce, una superiore e una inferiore, presentate da sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che i movimenti rigidi dispari scambiano.

Rinunciando ai movimenti rigidi dispari al precedente elenco dei tetròmini si deve aggiungere

//input pB24m07

B24m.08 Osserviamo ancora che la precedente considerazione è molto generale: può applicarsi a configurazioni di qualsiasi natura collocate in ambienti qualsiasi (ad esempio, invece che nel piano combinatorio, nello spazio combinatorio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) e a diversi gruppi di trasformazioni: per tutti i generi di configurazioni che si possono introdurre negli ambienti geometrico-fisici in linea di massima le orbite delle configurazioni rivestono interesse più diffuso delle singole configurazioni.

Le figure invarianti per gruppi significativi di trasformazioni, per esempio per le riflessioni o le rotazioni, vengono chiamate genericamente **figure simmetriche**. Queste figure sono spesso di elevato interesse in quanto suscitano aspettative di economie di pensiero e di migliore organizzazione delle conoscenze.

B24m.09 In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono stati definiti angoli di 45° ma non rotazioni di questa ampiezza angolare. In effetti nel piano combinatorio conviene definire solo un tipo di trasformazioni collegate agli angoli di 45°, permutazioni che posseggono solo una parte delle proprietà delle rotazioni e quindi hanno scarsa utilità geometrica, pur avendo qualche applicazione nella elaborazione dei dati.

Riferendoci alla raffigurazione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mediante caselle, consideriamo un punto $C = \langle h, k \rangle$ e per $s = 0, 1, 2, 3, ...$ denotiamo con F_s il perimetro del quadrato di centro C e lato di lunghezza dispari $2s + 1$. F_0 contiene il solo C, F_1 è l'insieme delle 8 caselle adiacenti-ZZK a C ed F_s è formato da $4 \cdot 2\,s = 8\,s$ caselle appartenenti a due segmenti-h e a due segmenti-v di $2s + 1$ caselle (4 delle quali comuni a due segmenti).

Diciamo **pseudorotazione di** 45° con centro in $C = \langle h, k \rangle$ e denotiamo con $\mathsf{Psrot}_{[h,k,45°]}$, la trasformazione che trasforma i punti degli F_k facendoli scorrere di s passi nel verso positivo. Questa trasformazione lascia fisso C, permuta gli elementi di ogni F_s, e quindi è una permutazione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Si vede che essa trasforma le linee-ZZR passanti per C in linee-ZZB e viceversa e che applicata due volte fornisce la rotazione di 90° con centro C:

$$\mathsf{Psrot}_{[h,k,45°]} \circ \mathsf{Psrot}_{[h,k,45°]} = \boldsymbol{Rot}_{[h,k,45°]} \ .$$

Essa però non mantiene adiacenza-ZZR (solo nell'ambito delle varie F_s) e adiacenza-ZZB e soprattutto non mantiene gli allineamenti.

B24m.10 **(1) Eserc.** Descrivere come vengono trasformate dalla $\mathsf{Psrot}[0, 0, 45°]$ le successioni di linee-ZZK $x = s$, $y = s$, $y = x + s$ e $y = -x + s$ per successivi s interi.

(2) Eserc. Definite le trasformazioni

$$\forall m \in \mathbb{Z} \ : \ \mathsf{Psrot}[h, k, m\,45°] := \mathsf{Psrot}[0, 0, 45°]^m \ ,$$

constatare che per ogni $j \in \mathbb{Z}$ valgono le seguenti formule:

$$\mathsf{Psrot}[h, k, 8\,j\,45°] = \mathsf{Id}_{ZZ} \quad , \quad \mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 1)\,45°] = \mathsf{Psrot}[h, k, m\,45°] \quad ,$$
$$\mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 2)\,45°] = \boldsymbol{Rot}[h, k, 90°] \quad , \quad \mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 3)\,45°] = \mathsf{Psrot}[h, k, m\,135°] \quad ,$$
$$\mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 4)\,45°] = -\mathsf{Id}_{zz} \quad , \quad \mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 5)\,45°] = \mathsf{Psrot}[h, k, m\,225°] \quad ,$$
$$\mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 6)\,45°] = \boldsymbol{Rot}[h, k, 270°] \quad , \quad \mathsf{Psrot}[h, k, (8\,j + 7)\,45°] = \mathsf{Psrot}[h, k, m\,315°] \quad ,$$

(3) Eserc. Dimostrare che $\mathsf{Psrot}[0, 0, 45°]$ genera un gruppo isomorfo al gruppo ciclico di 8 elementi e che contiene il sottogruppo delle rotazioni basilari.

(4) Eserc. Trovare la tavola di moltiplicazione del gruppo di 16 elementi generato da $\mathsf{Psrot}[0, 0, 45°]$ e da $\mathsf{Mirr}[x = 0]$ che denotiamo con $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZRM}_{16}$.

B24m.11 Le configurazioni invarianti per un certo gruppo di trasformazioni $\boldsymbol{G}$ si dicono anche **configurazioni simmetriche** per il gruppo $\boldsymbol{G}$.

È interessante individuare le configurazioni simmetriche rispetto ai molti sottogruppi di $\boldsymbol{GrRgdm}\mathsf{ZZ}$. Queste entità, proprio in virtù delle loro proprietà di invarianza, risultano particolarmente utili nella organizzazione delle conoscenze matematiche e in molteplici attività computazionali.

In linea generale si possono individuare insiemi invarianti per l'azione di un gruppo $\boldsymbol{T}$ di movimenti rigidi considerando un qualsiasi insieme $\mathsf{F} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e quindi ampliandolo aggiungendogli tutte le figure ottenute applicando ad F le trasformazioni $T \in \boldsymbol{T}$.

Gli insiemi simmetrici per $\mathbf{T}$ sono quindi esprimibili nella forma

$$\mathsf{F}_{\mathbf{T}} := \bigcup_{T \in \boldsymbol{T}} \mathsf{F}_{;} T .$$

Infatti applicando a $\mathsf{F}_{\boldsymbol{T}}$ una qualsiasi trasformazione $\overline{T} \in \boldsymbol{T}$ si ottiene l'unione di una collezione di insiemi uguale a quella dell'espressione precedente, cambia solo il loro ordine di presentazione.

Osserviamo che la considerazione precedente ha portata molto generale: vale non solo per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e per gruppi di movimenti rigidi, ma per ogni ambiente e per ogni gruppo di sue permutazioni.

B24m.12 Le figure invarianti per un sottogruppo del gruppo delle traslazioni che non si riduca alla mera identità $\mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ devono essere sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: infatti se contengono $\langle i, j \rangle$ contengono anche tutti gli infiniti diversi punti-ZZ ottenuti applicando una traslazione e le sue potenze intere positive e negative.

In particolare le rette-ZZH sono invarianti per traslazioni orizzontali, le rette-ZZV invarianti per le traslazioni verticali, le rette-ZZD1 per le traslazioni-ZZD1, le rette-ZZD2 per le traslazioni-ZZD2 e in generale le rette-ZZ della forma $\mathsf{Rtlin}[k\,x - h\,y + c = 0]$ (caratterizzate dalla pendenza k/h) sono invarianti per le traslazioni $\boldsymbol{Trsl}[h, k]$.

B24m.13 In conseguenza dell'esecuzioni delle rotoriflessioni basilari costituenti $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZRM}_8$, sono invarianti le figure seguenti:

//input pB24m13

Diciamo **asse di simmetria** di una figura $\boldsymbol{F} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ una retta-ZZ A tale che sia $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}$. Le figure precedenti presentano 4 assi di simmetria , le rette-ZZK passanti per l'origine.

Sono invarianti per le sole rotazioni basilari le figure

//input pB24m13B

e quelle ottenibili dalle precedenti mediante riflessioni basilari. Si noti che esse non presentano alcun asse di simmetria.

B24m.14 Alcune figure invarianti per le riflessioni di $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZMR}$ e dotate di due assi di simmetria sono:

//input pB24m14

Figure invarianti per riflessioni rispetto a uno solo dei due assi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono:

//input pB24m14B

Alcune figure invarianti solo per la simmetria centrale con centro nell'origine e che non presentano alcun asse di simmetria sono:

//input pB24m14C

Oltre a queste sono invarianti le figure ottenute da queste per le riflessioni rispetto all'asse ortogonale all'asse di simmetria; questo dipende dal fatto che M_x ed M_y commutano. Queste figure-ZZ presentano un solo asse di simmetria.

Figure invarianti per le trasformazioni di $\boldsymbol{Gr}$ZZMB e dotate di due assi di simmetria sono:

//input pB24m14D