Capitolo B23:
piano sugli interi: insiemi di caselle

Contenuti delle sezioni

B23:**0.01** Il capitolo inizia con l'introduzione delle figure-bx, cioè degli insiemi di caselle del piano-ZZ, e con la definizione delle loro aree, delle loro frontiere e delle loro poprietà di connessione.

Ai percorsi chiusi-ZZR costituenti la frontiera di una figure-bx è opportuno assegnare un'orientazione di percorrenza che risulta coerente con l'orientazione delle rette-ZZ, con l'assegnazione di un segno ai corrispondenti semipiani e con i segni attribuiti agli angoli.

Questa scelta apre consente di attribuire un segno ad aree e angoli che contribuiscono a stabilire un sistema coerente ed eficace di formule che permettono di controllare varie entità della geometria nel piano-ZZ e successivamente consentono molte valutazioni delle figure appartenenti a spazi più elaborati del piano-ZZ.

L'esame dei circuiti costituenti le frontiere delle figure-bx variamente connesse conduce a una classificazione delle stesse figure-bx che si esprime mediante uno schema topologico definibile ricorsivamente il quale si serve di multigrafi collocabili su più livelli.

Per la valutazione delle aree delle figure-bx risulta utile fare riferimento alle classi di equivalenza costituite da figure aventi la stessa area ed individuare la collezione delle trasformazioni che conservano l'area stessa.

In tal modo si giunge a porre l'attenzione su collezioni di figure-bx che condividono proprietà interessanti per molte applicazioni; vanno anche studiate con cura le operazioni di composizione e decomposizione entro le citate collezioni di figure-bx collegandole alle collezioni di circuiti-ZZR che costituiscono le loro frontiere.
Ad ogni collezione di circuiti-ZZR si viene ad associare una misura che può assumere ogni valore intero e che chiamiamo "multiarea".

Delle figure-bx connesse mediante duetti di caselle che presentano un lato in comune si esaminano sistematicamente alcuni procedimenti costruttivi graduali al fine di delineare uno schema per dimostrazioni induttive in grado di facilitare le analisi di queste configurazioni. Questo schema si può considerare una estensione bidimensionale del classico schema dell'induzione sugli interi positivi.

B23:a. figure-bx, loro componenti connesse e loro frontiere

B23:**a.00** Ci proponiamo di delineare una strumentazione computazionale con valenze algebriche che riguarda primariamente gli insiemi di caselle, che chiameremo anche **figure-bx**, ma coinvolge anche altre entità dell'ambientate $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, come segmenti, cammini, in particolare circuiti che costituiscono le frontiere di figure-ZZ e angoli.
Della accennata strumentazione fanno parte anche valutazioni come lunghezza dei circuiti-ZZR, ampiezze degli angoli e aree delle figure.

Le figure-bx e i circuiti-ZZR rivestono notevole importanza applicativa, in quanto consentono di rappresentare con efficiente schematicità sistemi di posizioni e di percorsi di interesse logistico, regioni individuabili su carte geografiche e su mappe topografiche, aree su grafici economici, su schemi amministrativi, su disegni tecnici, ...

Le conoscenze sugli insiemi di caselle possono essere utili anche per le molteplici applicazioni degli schermi digitali: apparecchi televisivi, monitors di computers e di apparecchiature di controllo, schermi di smart phones e displays degli svariati dispositivi portatili di cui si va arricchendo il mercato.

È evidente che le aree delle figure-bx possano rivestire grande interesse.
D'altra parte in molte applicazioni (si pensi ad applicazioni riguardanti recinzioni, difese o orlature) interessa anche tenere sotto controllo i "contorni" delle figure-bx, le loro lunghezze e le loro articolazioni.
I segmenti, i percorsi, le aree e gli angoli in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono collegate attraverso relazioni ben definite e per definire soddisfacenti strumenti di calcolo si rende necessario introdurre rilevantu generalizzazioni e arricchimenti di entità e algoritmi che in gran parte conviene introdurre in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ per la chiarezza consentita da questo ambiente fondativo.

B23:**a.01** Denotiamo con **SetSq** la collezione degli insiemi Finiti di caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e con **SetSq**.N la collezione degli insiemi infiniti numerabili di caselle-ZZ; anche **SetSq** essendo una collezione di sottinsiemi finiti di un ambiente numerabile ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) coStituisce un insieme numerabile.

Tra l'insieme dei punti-ZZ e l'insieme delle caselle-ZZ si individuano corrispondenze biunivoche facilmente esprimibili; qui ci serviamo solo di quella che a ogni punto-ZZ associa la casella della quale il punto è il vertice (o nodo) SW.

Formalizziamo questa biiezione introducendo la funzione

$$\mathsf{Bx} \;:=\; \left\lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;\not\mapsto\; \big\langle \langle i,j\rangle, \langle i+1,j\rangle, \langle i+1,j+1\rangle, \langle i,j+1\rangle \big\rangle \right\rceil \;\in\; \lceil \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{SetSq} \,\dot\cup\, \mathbf{SetSq}.N \rceil \;.$$

Evidentemente la sua estensione booleana è una biiezione tra $\mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ e **SetSq** $\dot\cup$ **SetSq**.N.

Nel seguito di questo capitolo e dei seguenti ci interesseremo solo di insiemi finiti di caselle-ZZ e utilizzeremo il termine **figura-bx** solo per queste configurazioni finite.

Incontreremo una ampia varietà di figure-bx. Tra le più semplici vi sono le barre-bx, a loro volta distinte tra barre orizzontali, barre verticali, barre-D1 e barre-D2.

Sono notevolmente utili i **rettangoli-bx**, insiemi costituiti da barre-bx orizzontali sovrapposte con le estremità allineate verticalmente, ovvero insiemi costituiti da barre-bx verticali affiancate con le estremità allineate orizzontalmente.

Per identificare i rettangoli-bx, come per varie altre configurazioni geometriche, sono utilizzabili più tipi di espresssioni; la più semplice è la seguente:

$$\mathsf{rtngBx}[p,q,h,k] \;:=\; \{i = p, p+1, ..., p+h-1, j = q, q+1, ..., q+k-1 \;:|\; \mathsf{Bx}(\langle i,j\rangle)\} \;,$$

per ogni $p, q \in \mathbb{Z}$ e ogni $h, k \in \mathbb{P}$. Denotiamo inoltre con **RtngBx** l'insieme di tutti i rettangoli-bx.

B23:**a.02** Ad ogni figura-bx $\boldsymbol{F}$ sono strettamente associate varie entità: innanzi tutto i relativi lati elementari (cioè i segmenti-ZZR di lunghezza 1) e i relativi nodi (elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) delle varie caselle che la costituiscono.

Definiamo come **chiusura rettangolare-bx** di una figura-bx $\boldsymbol{F} \in$ **SetSq** il più piccolo rettangolo-bx che lo contiene. Questo insieme di caselle lo denotiamo con l'espressione $\boldsymbol{ClsrRctngl}(\boldsymbol{F})$.
I vertici delle sue caselle hanno le ascisse che vanno dalla minima alla massima delle ascisse di vertici della $\boldsymbol{F}$, mentre le ordinate dei loro vertici vanno dalla minima alla massima delle ordinate di vertici della $\boldsymbol{F}$.

$\boldsymbol{ClsrRctngl}$ è evidentemente una funzione di chiusura [B54c05], cioè una funzione da insiemi a insiemi, ampliante e idempotente.

Una figura-bx $\boldsymbol{F}$ può essere individuata in più modi.
Si possono elencare i suoi elementi, meglio se in un ordine determinato, ad esempio procedendo per coordinate dei vertici SW secondo uno degli ordini lessicografici delle coppie di interi.
Si può fornire la sua chiusura rettangolare e la funzione caratteristica (matrice binaria) delle sue caselle entro tale insieme.
Per quest'ultima sorta di "mappa" può essere conveniente individuare ogni casella di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con le coordinate intere del suo vertice SW.
Per certe operazioni che richiedono di sapere se le caselle adiacenti a ciascuna casella appartengono o meno alla figura può essere utile fornire la funzione caratteristica dei suoi elementi nell'ambito del rettangolo-bx che amplia la chiusura rettangolare $\boldsymbol{ClsrRctngl}(\boldsymbol{F})$ con tutte le caselle adiacenti a quelle della sua frontiera. Si constata che non è difficile passare da ciascuna delle implementazioni accennate alle altre e individuare algoritmicamente gli insiemi dei nodi e gli insieme dei lati delle sue caselle.

Introduciamo il termine **terna-bx** di una figura-bx $\boldsymbol{F}$ per la terna costituita da un insieme di caselle-ZZ, dall'insieme dei suoi lati e dall'insieme dei suoi vertici o nodi.
Evidentemente le terne-bx sono associate biunivocamente alle figure-bx.

Se $\mathsf{S} = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{V} \rangle$ denota una terna-bx, denotiamo con $\mathsf{SetY}(\mathsf{S})$ e chiamiamo terreno di S l'insieme $\boldsymbol{T}$ delle sue caselle e denotiamo con $\mathsf{Side}(\mathsf{S})$ l'insieme $\boldsymbol{S}$ dei suoi lati e con $\boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{S})$ l'insieme $\boldsymbol{V}$ dei suoi vertici.

B23:**a.03** Ogni terna-bx che riguarda una sola casella, i suoi 4 lati ed i suoi 4 vertici sarà chiamata **terna casella**.

Data una figura-bx sono definite sei **relazioni di incidenza**:

l'incidenza tra ciascuno dei suoi lati e due vertici che sono le sue estremità;
l'incidenza tra ciascuna delle sue caselle e i 4 lati che la delimitano;
l'incidenza tra ciascuna delle sue caselle e i suoi 4 vertici;
le tre incidenze trasposte delle precedenti.

Le relazioni di incidenza si possono ridurre a relazioni di appartenenza se i vertici estremità di un lato si considerano elementi di un duetto, se i vertici di una casella si considerano elementi di un quadrupletto e se i lati di una casella si considerano duetti contenuti in un quadruplrtto.
Per esprimere formalmente le incidenze si possono quindi utilizzare il segno dell'appartenenza $\in$ e il segno del sottoinsieme $\subset$.

Ad esempio consideriamo:

i punti $a := \langle -1,1\rangle$, $b := \langle 0,1\rangle$, c $:= \langle 1,1\rangle$, $d := \langle -1,2\rangle$, $e := \langle 0,2\rangle$, f $:= \langle 1,2\rangle$, $g := \langle 0,3\rangle$, h $:= \langle 1,3\rangle$;

i duetti di punti $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,f\}$, $\{d,e\}$, $\{e,f\}$, $\{e,g\}$, $\{f,h\}$, $\{g,h\}$;

le caselle $S := \mathsf{Bx}(a)$, $T := \mathsf{Bx}(b)$, $U := \mathsf{Bx}(e)$;

la terna-bx $\boldsymbol{T} := \{S,T,U\}$.

Questa figura appartiene al tipo dei tròmini e le risulta associata la terna-bx $\mathsf{T} := \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}\rangle$, dove $\boldsymbol{V} := \{a,b,c,...,h\}$ e $\boldsymbol{S} := \{\{a,b\},\{b,c\},...,\{g,h\}\}$.
Tra le coppie delle sei relazioni di incidenza che determina è svidente che in particolare si trovino $\langle c,T\rangle$, $\langle\{l,g\},U\rangle$ e $\langle\{e,f\},f\rangle$ ed è ovvio che si possano presentare gli enunciati $U \ni h$, $\{c,f\} \subset T$ e $d \in \{d,e\}$.

//input pB23a03

Alle figure-bx in quanto insiemi (di caselle) si possono applicare le relazioni insiemistich e le relative notazioni.
Quindi è opportuno parlare di figura-bx vuota per intendere $\emptyset$ come elemento appartenente all'insieme delle figure-bx. Essa serve in particolare per segnalare che due figure-bx F_1 ed F_1 non hanno caselle in comune scrivendo concisamente $!F_1 \cap F_1 = \emptyset$.

Chiediamo anche che all'insieme delle terne-bx appartengano anche la terna $\langle\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle$ da chiamare **terna-bx vuota**, tutte le terne della forma $\langle\emptyset,\emptyset,P\rangle$ per ogni $P \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ da chiamare **terne-bx vertice** con i ruoli di vertici incidenti in nessuna casella e nessun lato della strutura stessa e tutte le terne $\big\langle\emptyset,\{\{P,Q\}\},\{P,Q\}\big\rangle$ per ogni $P \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e ogn Q punto-ZZ adiacente-ZZR di P da chiamare **terne-bx lato**.

Queste terne-bx consentono di proporre formalmente le operazioni booleane come operazioni definite su tutto l'insieme delle terne-bx.
In particolare risultano ben definite l'intersezione di due terne-bx che hanno in comune un solo punto-ZZ e un solo segmento-ZZR elementare, di lunghezza 1.

B23:**a.04** Il numero delle caselle che costituiscono una figura-bx $\boldsymbol{F}$ può essere chiamato cardinale di $\boldsymbol{F}$ e può essere denotato con $|\boldsymbol{F}|$.

Si dice **lato di frontiera** di una figur-bx $\boldsymbol{F}$ ogni lato di una casella $C \in \boldsymbol{F}$ che separa tale C da una casella non appartenente ad $\boldsymbol{F}$; i lati non di frontiera di $\boldsymbol{F}$ separano due caselle della figura e si dicono **lati-ii** della $\boldsymbol{F}$; i lati della frontiera li chiamiamo anche anche **lati-ie** in queste scritture "i" sta per interno ed "e" sta per esterno; evidentemente i lati in comune a due celle esterne, denominabili come lati-ee, hanno poco interesse.

Si dice **frontiera diuna figura-bx** $\boldsymbol{F}$, e si denota con $\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})$ l'insieme dei suoi lati di frontiera. Il cardinale di $\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})$ si dice lunghezza della frontiera della figura e si definisce formalmente scrivendo $\mathsf{frntrL}(\boldsymbol{F}) := |\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})|$.

Diremo **vertice di frontiera** della $\boldsymbol{F}$ ogni nodo nel quale incide sia una casella che appartiene alla $\boldsymbol{F}$ che una casella che non vi appartiene. Si dice **vertice interno** della $\boldsymbol{F}$ ogni punto-ZZ che incide in una sua casella e che non è nodo di frontiera.

//input pB23a04

Tra i vertici di $\boldsymbol{F}$ si distinguono i vertici interni ciascuno dei quali incide con 4 caselle della figura-bx, e i vertici di frontiera.

Questi si distinguono in

vertici-eee, vertici che incidono in 3 caselle esterne;

vertici eie, che incidono in una casella interna, connessa-ZZB con la nostra, e 2 interne;

vertici eei, che incidono in due caselle esterne e una interna, connessa-ZZR.

vertici eii, che incidono in una casella esterna e due caselle interne, una connessa-ZZR e una connessa-ZZB.

Il numero delle coppie $\langle$ casella, vertice $\rangle$ della $\boldsymbol{F}$ sono $4\cdot|\boldsymbol{F}|$, il numero dei lati-ei è $\mathsf{frntrL}(\boldsymbol{F}) := |\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})|$ e il numero dei lati-ii è $4\cdot|\boldsymbol{F}| - |\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})|$.

Osserviamo che non è difficile implementare procedure che forniscono il cardinale, i lati, la lunghezza della frontiera e consentano di individuare caselle, lati e nodi interni.

B23:**a.05** Consideriamo le frontiere di alcune semplici figure-Sd.

La frontiera di una barra di area s ha lunghezza $2s+2$.

La frontiera di un rettangolo $s \times t$ è lunga $2(s+t)$.
La lunghezza della frontiera di una scala di area s è $4s$.
La lunghezza della frontiera di un triangolo rettangolo-CathR di larghezza s è $4s$.
La lunghezza della frontiera di un triangolo rettangolo-CathB la cui ipotenusa ha lunghezza s è $2s + 2\cdot\lceil s/2\rceil$.
Anche la lunghezza della frontiera di un triangolo rettangolo CathR 2-allargato di larghezza s è $2s + 2\cdot\lceil s/2\rceil$.
La lunghezza della frontiera di un trapezio di Euler, nel caso la sua larghezza sia $2\,u$, pari, è $6\,u$, mentre quando è $2\,u-1$, dispari, è $2\,u-2$.
La lunghezza della frontiera di un gancio di larghezza s e altezza t è $2(s+t)$.
Più in generale la lunghezza della frontiera di una forma di Ferrers [e21d] di larghezza s e altezza t è $2(s+t)$.

B23:**a.06** Tra le prime distinzioni tra le figure-bx che conviene prendere in considerazione vi sono le caratteristiche di connessione. Per questo occorre distinguere tra diversi percorsi sopra le figure-bx:

percorsi-bxR, percorsi costituiti da sequenze di caselle ciascuna adiacente-ZZR della precedente,

percorsi-bxB, percorsi costituiti da sequenze di caselle ciascuna adiacente-ZZB della precedente,

percorsi-bxK, percorsi costituiti da sequenze di caselle ciascuna adiacente-ZZK della precedente.

Evidentemente le collegabilità tra caselle di una figura $\boldsymbol{F}$ attraverso percorsi-bxR, percorsi-bxB e percorsi-bxK costituiscono relazioni di equivalenza.
Per una figura-bx sono quindi definite le componenti connesse-ZZR, le componenti connesse-ZZB e le componenti connesse-ZZK.
Sono inoltre definite le figure connesse-ZZ$\mathfrak{z}$ per $\mathfrak{z} \in \{R, B, K\}$ come figure-bx che presentano una unica componente connessa-ZZ$\mathfrak{z}$.

//input pB23a06

//input pB23a06B

La prima delle figure precedenti è connessa-ZZK, mentre presenta due componenti connesse-ZZR. La seconda presenta due componenti connesse-ZZK: quella a sinistra è formata da due componenti connesse-ZZR; quella a destra è costituita da ben 5 componenti connesse-ZZR, tre delle quali sono figure-bx casella.

Le diverse componenti connesse di una figura-bx si possono individuare attraverso procedure di invasione graduale che si possono considerare casi particolari delle procedure di invasione graduale delle diverse componenti connesse per i grafi.

Nel seguito denotiamo con **SetSqconnR** la collezione degli insiemi di caselle connessi-bxR e denotiamo con **SetSqconnK** la collezione degli insiemi di caselle connessi-bxK. L

Le figure-bx connesse-ZZB hanno meno interesse delle connesse-R a causa della funzione biunivoca tra caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e caselle pari di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ corrispondenti alla cosiddetta rotazione di 45° e dilatazione del fattore $\sqrt{2}$ delle caselle o dei punti del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

B23:**a.07** Le figure-bx connesse-R vengono chiamateanche **poliòmini**, mentre le figure connesse-ZZK e non connesse-ZZR vengono chiamate **pseudopoliòmini**.

Sono facilmente dimostrabili i seguenti fatti.

Le figure connesse-ZZB sono costituite aut solo da caselle pari, aut solo da caselle dispari; qui per **casella pari** si intende una casella della forma $\mathsf{Bx}(cpij)$ con $i + j \in \mathbb{E}\mathsf{ven} = 2 \cdot \mathbb{Z}$, mentrsi dice **casella dispari** ciascuna delle rimanenti.

Le sole figure-bx che sono connesse-ZZR e connesse-ZZB sono le caselle singole.

La collezione delle figure-bx connesse-R e la collezione delle figure connesse-ZZB costituiscono sottoinsiemi propri dell'insieme delle figure connesse-ZZK. Una semplice figura-bx connessa-ZZK, non connessa-ZZR e non connessa-ZZB è la prima mostrata in a06.

Si individuano semplici biiezioni riguardanti
  l'insieme delle figure-bxR connesse-ZZR,
  l'insieme delle figure-bx connesse-ZZB costituite da caselle pari e
  l'insieme delle figure-bx connesse-ZZB costituite da caselle dispari.

Questo consente di trasportare le proprietà e le costruzioni per le figure-bx connesse-R alle figure connesse-ZZB.

Le proprietà di connessione-bx$\mathfrak{z}$ e parametri relativi come i numeri delle componenti connesse-ZZ$\mathfrak{z}$ sono invarianti per movimenti rigidi.

Inoltre si mostra facilmente che per $\mathfrak{z} \in \{R, B, K\}$ le proprietà di connessione-bx$\mathfrak{z}$ sono conservate dalle traslazioni-ZZ, dalle rotazioni-ZZR e dalle riflessioni-ZZK.

Le aree delle figure-bx si ottengono semplicemente sommando le corrispondenti misure delle loro componenti connesse-ZZK e queste della corrispondenti grandezze delle loro componenti connesse-ZZR.

B23:**a.08** In molte analisi delle figure-bx si possono ottenere utili conoscenze a partire dalle caratteristiche delle loro componenti connesse-ZZK e queste a loro volta possono ricondursi spesso allo studio delle loro componenti connesse-ZZR.
Quindi lo studio delle figure-bx va ricondotto allo studio degli insiemi connessi-bxK e alle decomposizioni di questi nelle loro componenti connesse-ZZR.

//input pB23a08

//input pB23a08B

La riconducibilità delle proprietà delle figure-bx alle proprietà delle figure-bx connesse-K e successivamente alle proprietà delle figure-bx connesse-R interessa soprattutto per lo studio delle frontiere. La frontiera di una figura $\boldsymbol{F}$ è dato dall'unione (disgiunta) delle frontiere delle sue componenti connesse-ZZK; quindi la lunghezza $\mathsf{frntrL}(\boldsymbol{F})$ è la somma delle lunghezze delle sue componenti connesse-ZZK.

A sua volta ogni frontiera di una figura connessa-ZZK si può esprimere come unione disgiunta delle frontiere delle sue componenti connesse-ZZR; quindi la sua lunghezza si ottiene dalla somma delle lunghezze delle corrispondenti frontiere.

B23:**a.09** Come suggeriscono le figure in queste pagine, la tipologia delle figure-bx è assai variegata. In particolare i rapporti tra lunghezza della frontiera e area variano notevolmente, anche quando ci si limita alle figure-bx connesse-R.

//input pB23a09B

Cercheremo comunque di delineare una classificazione delle figure-bx.

B23:**a.10** Riprendiamo i rettangoli-ZZ, tra le più semplici figure-bx.

Consideriamo due punti-ZZ $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e $C = \langle x_C, y_C \rangle$ con $x_A < x_C$ ed $y_A < y_C$ e il il rettangolo-bx costituito dalle caselle le cui coordinate soddisfano le disuguaglianze $x_A \leq x \leq x_C$ e $y_A \leq y \leq y_C$ che denotiamo con $\mathsf{RtngBxR}(\overrightarrow{A, C})$
Per l'area e per la lunghezza della frontiera di questa figura abbiamo

$$(1) \qquad \boldsymbol{Area}\left(\mathsf{RtngBxR}(\overrightarrow{AC})\right) \;=\; (x_C - x_A)\,(y_C - y_A)\;,$$

$$(2) \qquad \mathsf{frntrL}(\mathsf{RtngBxR}(\overrightarrow{AC}) = 2(x_C - x_A + y_C - y_A)\;.$$

Casi particolari di rettangoli-bxR sono i quadrati-bxR e le barre-bxR orizzontali e le verticali.

Vi sono poi figure-bx ottenibili come unioni di rettangoli mutuamente disgiunti ma connessi grazie a collegamenti-bxR (prima delle figure che seguono) o collegamenti-bxB (seconda delle figure).

//input pB23a10

Tra queste figure presentano particolare interesse gli istogrammi-bxR, istogrammi esprimibili con funzioni a valori interi; queste figure sono esprimibili come unioni di barre-bxV.
Risulterà opportuno distinguere gli istogrammi che forniscono solo valori positivi (come nella terza delle figure precedenti), da quelli che forniscono sia valori positivi che valori negativi (come nella quarta) e quelli che forniscono anche qualche valore nullo.

B23:**a.11** Tutte le figure suddette sono caratterizzate dall'avere una frontiera che costituisce un solo ciclo di percorsi-ZZR chiusi che non può decomporsi in più cicli; tale ciclo viene detto ciclo esterno della figura e delimita tutte le sue caselle.

Vi sono invece figure la cui frontiera si può considerare un unico ciclo di percorsi chiusi il quale può decomporsi in più cicli e quindi, per ragioni di finitezza, può decomporsi in più cicli indecomponibili. Uno di questi cicli non decomponibili, che diciamo ciclo esterno della figura $\boldsymbol{K}$, "delimita" tutte le sue caselle.

I cicli rimanenti si possono ripartire in cicli connessi-ZZB; tra questi insiemi di cicli si possono avere cicli singoli o gruppi di cicli; ciascuno di questi costituisce un ciclo euleriano non hamiltoniano.

Ogni regione di caselle delimitata da uno di questi cicli si dice **regione lagunare** della $\boldsymbol{K}$. La regione lagunare delimitata da un ciclo indecomponibile si dice **laguna-bx** della $\boldsymbol{K}$.

Esempi di tali figure sono:

//input pB23a11

La figura più a sinistra presenta una sola laguna, ma piuttosto estesa e "diramata"; si osservi in particolare che le caselle estranee alla $\boldsymbol{K}$ costituiscono un insieme-bx connesso-ZZK e quindi non si deve ricorrere al termine regione lagunare. Nella figura centrale si vedono quattro lagune, un paio delle quali piuttosto articolate.
La figura sulla destra presenta due regioni lagunari.

B23:**a.12** Altre figure-bx hanno frontiere che presentano, oltre a percorsi chiusi esterni (vuoi decomponibili vuoi indecomponibili), uno o più cicli non collegati ai precedenti; questi ultimi li chiameremo **cicli interni** e delimitano insiemi di caselle estranee a $\boldsymbol{K}$. Anche ciascuno di questi cicli può essere indecomponibile o decomponibile. Si individuano cicli interni indecomponibili che racchiudono quelle che chiameremo **regioni lacuali** della $\boldsymbol{K}$. Ogni regione lacuale delimitata da un ciclo interno non connesso-ZZB ad altri cicli interni viene chiamato **lago-bx**, abbreviazione per "lago di una figura-bx".

Esempi di tali figure sono:

//input pB23a12

In quella a sinistra si vedono due laghi e nessuna laguna. Nella centrale un lago e altre due regioni lacuali: in una si riconoscono tre componenti connesse mediante 2 nodi istmo, cioè nodi nei quali incidono 4 lati della frontiera ossia due caselle; nell'altra 8 componenti connesse mediante 8 nodi istmo.

Nella figura a destra si individua una regione lagunare con tre componenti connesse mediante 2 nodi istmo ed una regione lacuale delimitata da un circuito quadrato all'interno della quale si riconosce un sottoinsieme della figura contenente un lago costituito da una sola casella.
Osserviamo che se si eliminasse una casella come la quarta dall'alto nell'ultima barra a destra si avrebbe una figura costituita da due componenti connesse-ZZB collegate da due nodi istmo.

B23:**a.13** Per vari motivi risulta opportuno assegnare un'orientazione secondo ben definito criterio a ciascuno dei lati di frontiera delle figure-ZZR. Più in generale conviene orientare anche i lati delle frontiere delle figure-ZZ che incontreremo più oltre, a partire da :a .

Un primo motivo riguarda il fatto che utilizzando cammini e circuiti basati su questa orientazione risultano più semplici varie costruzioni sulle figure stesse e molte loro analisi; alcune di tali costruzioni le vediamo nei prossimi paragrafi.

Un motivo maggiore riguarda la possibilità di giungere a un formalismo per le figure-ZZR e per loro generalizzazioni che si serve in modo rilevante di numeri interi relativi, sia per le coordinate dei punti-ZZ, sia per le aree, sia per gli angoli.
Questo formalismo renderà disponibili espressioni sottoponibili a manipolazioni algebriche semplici ed efficienti.

Osserviamo anche che le raffigurazioni dei soli lati in alcune zone circoscritte della frontiera di una figura-bx non consentono di distinguere le caselle appartenenti alla figura dalle rimanenti: l'aggiunta dell'informazione riguardante l'orientazione dei lati della frontiera elimina ogni ambiguità.

//input pB23a13

B23:b. orientazioni per le figure-bx

B23:**b.01** Ci proponiamo ora di analizzare in modo più stringente una generica $\boldsymbol{K} \in SetZZCconnR(\boldsymbol{F})$ che in taluni momenti è significativo considerare come componente connessa-ZZR di una $\boldsymbol{F} \in$ **SetSq** .

Consideriamo la frontiera B della $\boldsymbol{K}$ e sia $L = \{u, v\}$ un suo lato. Denotiamo con C la casella di $\boldsymbol{K}$ che incide in L e con E quella estranea a $\boldsymbol{K}$ e che non può appartenere neppure alla $\boldsymbol{F}$.

Attribuiamo ad L come **orientazione positiva** relativa alla stessa $\boldsymbol{K}$ (o alla $\boldsymbol{F}$) l'orientazione tale che un mobile che lo percorre in tale senso lascia alla sua sinistra la casella $C \in \boldsymbol{K}$ ed alla sua destra la casella $E \notin \boldsymbol{K}$. Denotiamo quindi con $\overrightarrow{L} := \langle p, q\rangle$ il vettore-ZZ applicato che è lato orientato positivamente di C.

Si osserva che l'orientazione positiva è coerente con l'orientazione positiva della retta-ZZR $\overrightarrow{u, v}$ estensione del segmento orientato $\langle u, v\rangle$ e che la casella C appartiene al semipiano positivo per la retta orientata, mentre la casella E appartenente al suo semipiano negativo.

Il criterio di orientazione adottato consente di sostituire ogni lato della frontiera B con un segmento orientato di lunghezza 1, ossia con un versore-ZZR.
Quando $\boldsymbol{K}$ è un rettangolo-ZZR si osserva che il complesso dei lati orientati della frontiera costituisce un circuito-ZZ rettangolare e si osserva che, ovviamente, la corrispondenza tra rettangoli-ZZR e loro circuiti frontiera è biunivoca.
Si osserva anche che ogni rettangolo-ZZR si può ottenere come intersezione dei 4 semipiani positivi per le 4 rette orientate che contengono i lati orientati della sua frontiera orientata B.

B23:**b.02** Riprendiamo il generico lato orientato di frontiera $\overrightarrow{(}L) = \langle u, v\rangle$ e denotiamo con x, w e y gli altri tre punti-ZZ adiacenti-ZZR a v.
Per il lato $\langle u, v\rangle$, le caselle incidenti e i precedenti punti si possono avere le situazioni presentate in figura.

//input pB23b02

Per identificare ciascuna delle caselle delle situazioni abbiamo usata una maiuscola se appartiene a $\boldsymbol{K}$ e una minuscola in caso contrario. Altre situazioni dei dintorni di un lato di frontiera di una figura di **SetSqconnR** si ottengono sottoponendo le precedenti a rotazioni, traslazioni e riflessioni-ZZR. Vedremo che le conclusioni alle quali si giunge rimangono invariate in seguito a traslazioni e rotazioni, mentre le riflessioni comportano solo un cambiamento di segno.

B23:**b.03** A partire da un qualsiasi lato orientato $\overrightarrow{(}L)$ della frontiera di una $\boldsymbol{K} \in$ **SetSqconnR** si può far attuare un procedimento di avanzamento che individua via via una sequenza di lati orientati della frontiera che va formando un cammino-ZZR via via più esteso.
Ciascuna delle manovre di aggiunta di un nuovo lato orientato deve seguire una delle seguenti situazioni raffigurate presentate in figura.

Si mostra facilmente che due cammini di frontiera di una figura-bx connessa-ZZK $\boldsymbol{F}$ possono incrociarsi solo nei punti di istmo-ZZR.

B23:**b.04** Il processo di avanzamento di una frontiera deve concludersi dopo un numero finito di passi con il ritrovamento del lato orientato di partenza per motivi di finitezza: i lati della figura sono in numero finito e un cammino di frontiera può toccare più volte un nodo solo se questo è un istmo ed in tal caso deve toccarlo due volte. Dunque ogni lato di frontiera di una figura-bx connessa-ZZR si riesce a estendere a un cammino chiuso di frontiera della figura.

Per ogni circuito di frontiera di figura-bx connessa-ZZR si può valutare l'ampiezza con segno dell'angolo di rotazione complessivo dell'orientazione e si danno due possibilità: angolo di $360°$ e angolo di $-360°$. Nel primo caso si parla di circuiti-ZZ-E (esterni) e nel secondo di circuiti-ZZ-I (interni).
Un circuito-ZZ-E Γ può contenere istmi-ZZR o meno. In mancanza di tali punti si ha un circuito che non tocca zone lagunari.
In presenza di istmi-ZZR, ciascuno di questi punti, P viene toccato da due frontiere-ZZR le quali si dicono coniugate. Per ciascuno di questi istmi si possono individuare le frontiere-ZZR coniugate.
In una frontiera orientata di un insieme-bx connesso-ZZK le due occorrenze di un istmo possono o meno ad altre occorrenze coniugate di istmi, ma possono organizzarsi solo come coppie di parentesi di Dyck coniugate.

B23:**b.05** Dato un insieme-bx connesso-ZZR risulta determinato l'insieme dei circuiti-ZZR che si possono ottenere dai suoi lati di frontiera. Si può quindi individuare il circuito-ZZR dell'insieme-bx $\boldsymbol{K}$ che è indecomponibile e che risulta sottocircuito di tutti gli altri eventuali circuiti-ZZR di $\boldsymbol{K}$; lo chiamiamo **diperimetro greedy** di $\boldsymbol{K}$.
Tra gli eventuali restanti circuiti-ZZE di $\boldsymbol{K}$ si individua il circuito del quale tutti i rimanenti circuiti sono sottocircuiti; lo chiamiamo **diperimetro sobrio**.
Il termine diperimetro sta per directed perimeter e il corrispondente ciclo di percorsi chiusi viene detto **perimetro della figura-bx**.
L'insieme delle caselle interne al perimetro greedy si dice copertura greedy della $\boldsymbol{K}$. L'insieme delle caselle interne al perimetro sobrio è l'insieme delle caselle costituenti la figura-ZZR $\boldsymbol{K}$.
La funzione che associa a una $\boldsymbol{K}$ la copertura greedy è effettivamente una funzioni di copertura.
Sia il diperimetro greedy che il sobrio lasciano alla loro sinistra tutte le caselle di $\boldsymbol{K}$. Il sobrio solo quelle, il greedy che non sia l'unico circuito E ne lascia alcune che non fanno parte della $\boldsymbol{K}$ (e della $\boldsymbol{F}$).
Il circuito opposto a quello ottenuto dai lati del circuito sobrio che non fanno parte del greedy delimita una cosiddetta **regione lagunare** della figura $\boldsymbol{K}$.
Questa regione è contenuta nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \boldsymbol{K}$ ed è una figura che può configurarsi come una qualsiasi figura di **SetSqconnK**. In altre parole ogni figura-bx connessa-ZZK $\boldsymbol{G}$ può costituire un complemento lagunare di una figura di **SetSqconnR**. Una tale figura si ottiene assegnando una cornice esterna alla $\boldsymbol{G}$.

B23:**b.06** Diciamo **cornice interna della figura-bx connessa-ZZR** $\boldsymbol{K}$ l'insieme delle sue caselle che hanno almeno un lato o un vertice che incide in una casella non appartenente alla $\boldsymbol{K}$.
Diciamo invece **cornice esterna della figura-bx connessa-ZZR** $\boldsymbol{K}$ l'insieme delle caselle che non appartengono alla $\boldsymbol{K}$ e che hanno almeno un lato o un vertice che incide in una casella che fa parte della $\boldsymbol{K}$. Queste caselle potrebbero appartenere o meno alla $\boldsymbol{F}$.

Si osserva che le caselle delle cornici di una figura $\boldsymbol{K}$ si possono individuare algoritmicamente a partire da uno qualsiasi dei suoi lati di frontiera o da uno qualsiasi dei suoi nodi di frontiera seguendo la frontiera stessa.

Inoltre a partire dalle caselle della coernice interna si possono individuare tutte le caselle appartenenti a $\boldsymbol{K}$.

B23:**b.07** Dalla frontiera di iuna figura-bx $\boldsymbol{K}$, ossia dai suoi nodi o dai suoi lati, si possono individuare tutti i suoi istmi interni, tutte le sue regioni lagunari e tutti i lati delle eventuali frontiere interne.

B23:**b.08** Una $\boldsymbol{K} \in SetZZCconnR$ può possedere più cammini di frontiera.

Questi cammini possono incrociarsi o meno.

B23:**b.09** Schema delle inclusioni di un $\boldsymbol{K} \in$ **SetSqconnR**
Le sue regioni lagunari e le sue regioni lacuali. Sono descrivibili come le generiche figure-ZZR

B23:**b.10** Introduciamo costruttivamente alcune nozioni di perimetro per le figure-bx connesse-ZZR e connesse-ZZK.

Definiamo ora un algoritmo che per ogni figura-bx $\boldsymbol{F}$ effettua una restrizione di $\mathsf{R} := \boldsymbol{ClsrRctngl}(\boldsymbol{F})$ che opera per stadi successivi in ciascuno dei quali elimina una casella estranea ad $\boldsymbol{F}$ e procede a individuare una sequenza di figure $\langle \mathsf{R}, ..., \mathsf{R}', \mathsf{R}'', ... \rangle$ che sono sovrainsiemi della $\boldsymbol{F}$ sempre più ridotti.
In ciascuno dei suoi stadi, diciamo in quello che porta dalla R' alla R^prime^prime, viene eliminata una casella dell'insieme $\mathsf{R}^prime \setminus \boldsymbol{F}$ che risulta connessa-ZZR ad almeno una casella di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \mathsf{R}'$.

Si constata facilmente che le scelte delle caselle da eliminare non influiscono sul risultato: infatti, date due caselle eliminabili quale che sia la prima eliminata si ottiene la stessa figura; quindi la figura ZZCR che si deve ottenere come fine procedimento è univocamente determinata.
Essa, come tutte le figure intermedie, è sovrainsieme di $\boldsymbol{F}$ ed ha come frontiera un poligono-ZZR hamiltoniano, ossia è una figura connessa-ZZR.
Questa figura la chiamiamo **copertura hamiltoniana** della $\boldsymbol{F}$ e la sua frontiera viene detta **perimetro hamiltoniano** della $\boldsymbol{F}$.

Nel seguito denotiamo con $\mathit{CoverHam}(\boldsymbol{F})$ la figura ottenuta.

B23:**b.11** Se $\boldsymbol{F}$ è una figura-bx connessa-R la frontiera della sua copertura hamiltoniana è un poligono-ZZR hamiltoniano. In tal caso denotiamo con $\mathsf{PerimHam}(\boldsymbol{F})$ il perimetro della $\boldsymbol{F}$ e con $\mathsf{perimHamL}(\boldsymbol{F})$ il suo cardinale, cioè la sua lunghezza.

Il termine perimetro si usa in vari ambienti, non solo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e accade che spesso si usa il termine perimetro per denotare sia un insieme di elementi di frontiera sia la sua lunghezza, confidando che il contesto consenta di evitare le ambiguità.

La funzione $\mathit{CoverHam}$ è del genere $\lceil \mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rceil$ e si può applicare a tutte le figure-bx; nel caso di mancanza della connessione-bxR conduce a unioni di figure-bx connesse-R aventi come frontiere poligoni hamiltoniani.
In questo ambito $\mathit{CoverHam}$ è una funzione di chiusura [B54]; infatti evidentemente è nonriducente, monotona e idempotente.
Le figure-bx chiuse rispetto a essa hanno le componenti connesse-ZZR che sono figure la cui frontiera è un poligono-ZZR hamiltoniano.

B23:**b.12** Definiamo un algoritmo molto simile al precedente che ancora, per una figura-bx data, effettua una restrizione di $\boldsymbol{ClsrRctngl}(\boldsymbol{F})$ procedendo per stadi concernenti l'eliminazione di una casella estranea alla figura data.
In ciascuno dei suoi stadi, diciamo in quello che porta dalla R' alla R^prime^prime, viene eliminata una casella dell'insieme $\mathsf{R}^prime \setminus \boldsymbol{F}$ che risulta connessa-ZZK (invece che-bxR) ad almeno una casella di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \mathsf{R}'$.
Ancora l'insieme che si ottiene è univocamente determinato, è un sovrainsieme di $\boldsymbol{F}$, si chiama **copertura euleriana** di $\boldsymbol{F}$ e si denota con $CoverEul(\boldsymbol{F})$.
Nel caso in cui $\boldsymbol{F}$ sia connessa-ZZR la copertura euleriana è una figura-bx connessa-R e la sua frontiera è mentre se $\boldsymbol{F}$ è connessa-ZZBK la copertura è connessa-ZZBK; in entrambi i casi la sua frontiera è

un poligono-ZZR euleriano che viene denotato con **PerimEul**($\boldsymbol{F}$); la sua lunghezza viene denotata con **perimEulL**($\boldsymbol{F}$).
Per una generica figura-bx la copertura euleriana è unione di figure connesse-ZZK e la frontiera è unione di poligoni-ZZR euleriani.
Anche *CoverEul* è una funzione di chiusura su $\mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

B23:**b.13** Il perimetro-bxR di una componente connessa-ZZR $\boldsymbol{C}$ di una figura-bx $\boldsymbol{F}$ si può ottenere con un algoritmo che a partire da un qualsiasi lato lato di frontiera della $\boldsymbol{C}$ procede nella sua orientazione positiva e a ogni nodo istmo sceglie il lato più a sinistra.
In una tale componente connessa-ZZR si individua una regione lagunare in corrispondenza di ciascuno dei nodi istmo della $\boldsymbol{C}$. Si osservi che ogni nodo istmo della $\boldsymbol{F}$ non istmo per la $\boldsymbol{C}$ riguarda invece un collegamento-bxB tra $\boldsymbol{C}$ e un'altra componente connessa-ZZR della $\boldsymbol{F}$.
La regione lagunare della $\boldsymbol{C}$ associata al nodo istmo I si denota con $lagnreg_{\boldsymbol{C}}(I)$ e corrisponde al sottocircuito passante per I del circuito di $\boldsymbol{C}$.

B23:**b.14** Si individua una regione lacustre della $\boldsymbol{C}$ e della $\boldsymbol{F}$ (se esiste) a partire da ogni lato di frontiera della $\boldsymbol{C}$ non facente parte del perimetro-bxR della stessa $\boldsymbol{C}$ ma interno al perimetro-bxR.
Si tratta di individuare il suo perimetro-bxK proseguendo sui lati di frontiera e scegliendo a ogni nodo istmo il lato più a sinistra.

La regione lacuale della $\boldsymbol{C}$ associata al suo lato frontiera interno A si denota con $lakereg_{\boldsymbol{C}}(A)$.

Sia $\boldsymbol{L}$ una regione lacustre o lagunare di $\boldsymbol{C}$ e denotiamo con $\boldsymbol{L}'$ la figura-bx ottenuta eliminando da $Intrn(\boldsymbol{C})$ le caselle della $\boldsymbol{F}$; tale figura si dice figura lacustre o lacuale della $\boldsymbol{F}$.
Ciascuna delle figure di **SetSq** si può trovare come figura lacustre o lacuale di una figura-bx connessa-ZZR. Questo consente di definire la costruzione dello schema topologico di una figura-bx con un procedimento ricorsivo.

B23:**b.15** Le figure-bx connesse-R possono presentare dei cosiddetti laghi: la frontiera di un **lago-bxR** è costituita da un percorso chiuso-ZZR euleriano; se tale percorso è hamiltoniano si parla di **lago-bxR hamiltoniano**; in caso contrario si hanno laghi che presentano le cosiddette **lagune-bxR**.
Anche i laghi sono schematizzabili con multigrafi-bxB.

Hanno interesse gli insiemi di caselle ottenuti dalla chiusura euleriana di un lago da cui eliminare le caselle della figura originaria. Queste chiusure di lago possono essere costituite da figure-bx arbitrarie.

Una figura-bx connessa-ZZK può dunque presentare al suo interno un insieme arbitrario di laghi che possono presentare al loro interno insiemi arbitrari di laghi e così via.

B23:**b.16**
I punti nei quali diversi cicli si toccano devono essere nodi istmo [ii]. Tra i diversi cicli frontiera uno solo è perimetro maggiore, gli altri sono contenuti nella copertura maggiore. Questi si possono considerare perimetri di regioni lagunari.

Sono da distinguere le figure con frontiera data da un ciclo di percorsi chiusi hamiltoniani da quelle con frontiera data da ciclo di percorsi chiusi euleriani non hamiltoniani. Le prime costituiscono figure semplicemente connesse. Le seconde possono presentare lagune [v.o.].

B23:**b.17** Una figura-bx $\boldsymbol{F}$ può essere schematizzata con un cosiddetto **multigrafo-bxB**: ogni suo nodo rappresenta una componente connessa-ZZR di $\boldsymbol{F}$ e ogni suo spigolo una connessione-bxB tra due delle suddette componenti; quindi ciascuno spigolo corrisponde a una coppia di caselle aventi in comune un solo vertice e non connesse-ZZR.

Evidentemente si tratta di un multigrafo planare e una sua raffigurazione piana si ottiene collocando un nodo in un punto della corrispondente componente connessa-ZZR e tracciando gli spigoli senza incorrere in alcun incrocio.

Si può caratterizzare una figura-bx $\boldsymbol{F}$ con la sua cosiddetta **arborescenza schematica**, struttura che procediamo a definire ricorsivamente.

La radice rappresenta l'intera figura. I nodi figli corrispondono alle sue componenti connesse-ZZK; i figli di ciascuno di questi alle sue componenti connesse-ZZR.
Sotto ciascuna di queste si pongono nodi che riguardano i suoi laghi e le sue lagune.
Ciascun lago o laguna L viene caratterizzato dalla figura-bx ottenuta eliminando dalla sua copertura hamiltoniana la stessa $\boldsymbol{F}$.
Questa può essere una figura-bx qualsiasi e quindi può venire rappresentata dalla propria arborescenza schematica.
Una figura-bx incontrata in tale arborescenza è una foglia sse non contiene né laghi né lagune.

Ovviamente anche l'arborescenza schematica di una figura-bx è invariante per movimenti rigidi.

B23:**b.18** Ad ogni figura-bx è associato un insieme di percorsi chiusi-ZZR, cioè di percorsi costituiti da segmenti elementari-ZZR ovvero da lati orizzontali e verticali di caselle-ZZ.

Riprendiamo le distinzioni tra i percorsi-ZZR. Si distinguono innanzi tutto i percorsi chiusi-ZZR e le loro classi cicliche; queste configurazioni saranno chiamate anche **poligoni-ZZR**.
Prenderemo poi in considerazione percorsi-ZZR hamiltoniani, cioè percorsi privi di vertici toccati due volte, e percorsi-ZZR euleriani, cioè percorsi privo di lati che vengono toccati due volte.

Sappiamo che tutti i percorsi-ZZR hamiltoniani sono euleriani, ossia che l'insieme dei percorsi-ZZR si ripartisce in tre sottoinsiemi disgiunti: l'insieme dei percorsi hamiltoniani, l'insieme dei percorsi euleriani nonhamiltoniani e l'insieme dei percorsi noneuleriani.

In particolare l'insieme dei poligoni-ZZR si tripartisce tra l'insieme dei poligoni-ZZR hamiltoniani, l'insieme dei poligoni-ZZR euleriani nonhamiltoniani e l'insieme dei poligoni-ZZR noneuleriani.

//input pB23b18

Si osserva che percorsi-ZZR chiusi euleriani non hamiltoniani si possono decomporre in percorsi-ZZR chiusi hamiltoniani in numero uguale al numero dei loro vertici toccati più volte aumentato di 1.
A loro volta i percorsi-ZZR chiusi non euleriani si possono decomporre in percorsi-ZZR chiusi euleriani (hamiltoniani o meno) e in percorsi ottenuti giustapponendo un percorso e il suo riflesso.
Queste proprietà di decomposizione rimangono valide per i poligoni-ZZR.

B23:**b.19** Processi costruttivi più lunghi possono dare figure-bx connesse-R assai più articolate.
Una di tali figure, $\boldsymbol{F}$, può presentare sia laghi hamiltoniani (isolati), sia i cosiddetti **laghi euleriani**, cioè insiemi di caselle non appartenenti ad $\boldsymbol{F}$ ma delimitate da un poligono-ZZR euleriano.
Un lago euleriano di $\boldsymbol{F}$ può descriversi come grappolo di laghi hamiltoniani collegati-bxB attraverso vertici in ciascuno dei quali incidono due caselle di $\boldsymbol{F}$ connesse-ZZB e due caselle non di $\boldsymbol{F}$ (e quindi incidono in ciascuno di tali vertici quattro lati di frontiera di $\boldsymbol{F}$).

Si individuano facilmente processi **P**ZZCR che conducono a figure connesse-ZZR ciascuna delimitata da un poligono euleriano che "racchiude" tutte le loro caselle e può presentare laghi euleriani che possono essere hamiltoniani o non hamiltoniani il cui numero può essere elevato quanto si vuole e che possono avere perimetri lunghi quanto si vuole.

B23:**b.20** Introduciamo i**plurigrafo topologico i una figura-bx**.

B23:**b.21** Diciamo **genere di una figura-bx connessa-R** il numero dei poligoni euleriani che costituiscono la sua frontiera diminuito di 1.

Consideriamo le seguenti figure-bx connesse-R:

//input pB23b20

Le precedenti figure presentano, risp., i generi 0, 0, 1, 2 e 3.
Il primo poliòmino ha area 27, genere 0, perimetro costituita da un poligono hamiltoniano di lunghezza 56; esso non presenta buchi.
Il secondo è un eptòmino, cioè un poliòmino di area 7 e genere 0, ed è il più piccolo poliòmino con una laguna: il suo perimetro ha lunghezza 16, è connesso e costituisce un poligono euleriano non hamiltoniano.
Il terzo poliòmino ha area 32 e genere 1, in quanto presenta un perimetro costituito da due poligoni hamiltoniani, uno di lunghezza 24 e l'altro di lunghezza 8.
Il quarto è evidentemente il più piccolo poliòmino di genere 2; esso ha area 13 ed ha il perimetro costituito da tre poligoni aventi lunghezze, risp., 16, 4 e 4.
Il quinto è un poliòmino di area 27 con il poligono esterno hamiltoniano di lunghezza 24, due poligoni interni hamiltoniani di lunghezza 4 (corrispondenti a due laghi di area 1) e un poligono interno euleriano non hamiltoniano di lunghezza 18 decomponibile in tre poligoni hamiltoniani ciascuno di lunghezza 6 e delimitante un lago di area 2.

B23:**b.22** Consideriamo una figura-bx connessa-R $\boldsymbol{F}$ e denotiamo con $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$ l'insieme dei poligoni-bxR hamiltoniani ottenibili con lati delle sue caselle, appartenenti o meno al suo perimetro.

Per ciascuno dei poligoni $\gamma \in \mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$, in forza di B21i14(2) risulta definito l'insieme delle sue caselle interne $\mathsf{Intrn}(\gamma)$.
Tra i più semplici poligoni di $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$ i quadrati formati dai quattro lati di una casella di $\boldsymbol{F}$; a $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$ ammettiamo appartengano anche i circuiti di lunghezza 0 ridotti a un vertice di $\boldsymbol{F}$ il cui insieme di caselle interne è $\emptyset$.

Diciamo **deformazione topologica elementare** la trasformazione di un poligono $\gamma \in \mathbf{C}_F$ in un secondo poligono $\gamma' \in \mathbf{C}_F$ ottenuto aggiungendo a $\mathsf{Intrn}(\gamma)$ oppure eliminando da esso una casella di $\boldsymbol{F}$.

Diciamo **deformazione topologica** la trasformazione di un poligono di $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$ in un altro ottenuto con una sequenza di deformazioni topologiche elementari; tra queste deformazioni includiamo anche la trasformazione di un poligono in se stesso, ottenibile con la sequenza di 0 deformazioni topologiche elementari.

Denotiamo con $\boldsymbol{AE}_{top-\boldsymbol{F}}$ la relazione tra due poligoni di $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$ trasformabili l'uno nell'altro per deformazione topologica. Evidentemente questa relazione dipende da $\boldsymbol{F}$ ed è un'equivalenza.

È chiaro anche che tutti i quadrati relativi a singole caselle sono topologicamente equivalenti e sono equivalenti ai poligoni ridotti a un vertice di $\boldsymbol{F}$.

Una figura $\boldsymbol{F}$ per la quale tutti i poligoni di $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$ sono topologicamente equivalenti si dice **figura-bx semplicemente connessa-ZZR**.
Inoltre è facile mostrare che le figure semplicemente connesse-ZZR sono tutte e sole quelle il cui perimetro costituisce solo un poligono hamiltoniano, poligono topologicamente equivalente a tutti gli altri circuiti di $\mathbf{C}_{\boldsymbol{F}}$.

Per una figura $\boldsymbol{M}$ che presenta laghi e/o lagune accade invece che due circuiti μ e $\mu^{"}$ di $\mathbf{C}_{\boldsymbol{M}}$ sono topologicamente equivalenti sse $\mathsf{Intrn}(\mu) \setminus \boldsymbol{M} = Intrn(\mu') \setminus \boldsymbol{M}$.
Una tale $\boldsymbol{M}$ si chiama **figura-bx molteplicemente connessa**.

Una figura-bx connessa-R è molteplicemente connessa sse il suo genere è positivo.

B23:**b.23** Ogni figura-bx si può ottenere con processi di accrescimento graduale, ciascuno dei quali inizia con una delle sue caselle e che ad ogni passo vede l'aggiunta di una nuova casella in modo da portare ad una figura la cui area è cresciuta di 1.

Questo consente di collocare la collezione delle figure-bx su un digrafo graduato nel quale ogni figura è collegata alle figure ottenibili con l'aggiunta di una casella. Va notato però che tale digrafo presenta i nodi di livello 1 in biiezione con le caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

In effetti conviene considerare il digrafo graduato riguardante le classi di equivalenza per i movimenti rigidi del piano-ZZ.

Ogni figura connessa-ZZK si può ottenere con processi di accrescimento graduale, ciascuno dei quali inizia con una delle sue caselle e che ad ogni passo vede l'aggiunta di una nuova casella che risulta connessa-ZZK ad almeno una dell eprecedenti.

Considerazione analoga vale per le figure-bx connesse-R e per l'aggiunta di una nuova casella che abbia almeno un lato in comune con una casella già presente.
Denotiamo l'insieme di questi processi graduali con $\mathbf{P}$ZZCR.

B23:**b.24** Si constata che le figure-bx connesse-R con al più 6 caselle hanno il rispettivo perimetro che costituisce un poligono-ZZR hamiltoniano.
Se si aggiungono altre caselle, cioè se si effettuano processi di $\mathbf{P}$ZZCR con 7 o più caselle, si possono ottenere perimetri più complessi.

Con 7 caselle si può ottenere un eptòmino F_7 che presenta un vertice di frontiera nel quale incidono 4 lati di frontiera e quindi il perimetro costituisce un poligono-ZZR euleriano non hamiltoniano; la casella che confina con 4 caselle di F_7 ed è connessa-ZZB ad una casella "esterna" alla figura e costituisce una laguna delle F_7.

Con 8 passi si può ottenere una figura F_8 il cui perimetro costituisce due poligoni hamiltoniani (ovvero due percorsi chiusi mdlcy hamiltoniani) senza vertici in comune, uno di 4 lati "contenuto" nella figura delimitata dall'altro, formato da 12 lati.
In questo caso il percorso chiuso contenuto è hamiltoniano e delimita una figura-bx connessa-R che viene chiamata **buco hamiltoniano** o **lago-ZCC hamiltoniano** della F_8.

B23:c. circuiti-ZZR e aree con segno delimitate

B23:**c.01** Ai percorsi chiusi-ZZR che costituiscono la frontiera di una figura-bx conviene assegnare un verso di percorrenza.
Un primo motivo sta nel fatto che se conosciamo solo i tratti della frontiera di una figura che si trovano in una regione piana limitata non sappiamo decidere quali delle caselle considerate appartengono alla figura.

Sia i segmenti che le rette in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ possono essere muniti di orientazioni; un tale simile arricchimento, rappresentabile con il segno $+$ o $-$, è stato attribuito anche agli angoli.
All'attribuzione di un segno alle aree si collega la possibilità di ampliare la collezione delle configurazioni che comprende le figure-bx e le loro frontiere e nelle pagine che seguono giungeremo ad ambienti più completi e a strumenti più incisivi.
Questi arricchimenti, come l'introduzione delle aree con segno e delle multiaree, sono importanti perché, come vedremo, danno la possibilità di avere espressioni algebriche nelle quali possono entrare coordinate, angoli, lunghezze, aree e altre misure che hanno vasta portata e sono sottoponibili a manipolazioni formali.

Inoltre queste nozioni di maggiore portata sono estendibili a configurazioni geometriche continue, a partire da quelle che si collocano in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$, configurazioni che consentono la definizione di utili modelli applicativi (in particolare per l'elettromagnetismo).

Il criterio per l'orientazione delle frontiere delle figure-bx risulta in accordo con l'assegnazione di una orientazione alle rette-ZZ e di un segno ai corrispondenti semipiani.

B23:**c.02** Come notato in precedenza, i vettori-ZZ applicati orizzontali, e gli equivalenti segmenti-ZZ orientati orizzontali, sono in biiezione con le sequenze di interi consecutivi e con le traslazioni orizzontali e con le operazioni del sommare o del sottrarre numeri interi.
Ai due orientamenti verso destra e verso sinistra dei vettori-ZZ, ai due ordinamenti crescente e decrescente delle sequenze di interi e alle operazioni del sommare e del sottrarre quantità espresse da interi positivi con atteggiamento naturale si associano, risp., i segni $+$ e $-$.

L'attribuzione di un segno a entità che vengono visualizzate in una sola dimensione è stata motivata dalla opportunità di ampliare le loro applicazioni per i modelli e insieme alle loro prestazioni computazionali (trattare crediti e debiti, pesi e contrappesi, traslazioni in una direzione e nella direzione opposta).
Un analogo ampliamento si rende opportuno per entità che vengono visualizzate in due o più dimensioni.
Ora ci proponiamo di attribuire un segno alle figure-ZZ e ai circuiti-ZZ motivando l'introduzione di questi elementi distintivi.

Segnaliamo anche che l'attribuzione di un segno a un'area consentirà di sviluppare modelli fisici per il trattamento di fenomeni elettromagnetici: un circuito percorso da corrente genera un campo magnetico che attraversa le sezioni del circuito in una direzione che cambia con il verso del circuito. Inoltre si possono avere lamine sottili elettroconduttrici con cariche opposte sulle loro due facce.

B23:**c.03** Cominciamo a porci il problema della valutazione delle aree delle figure-bx, cominciando da alcuni tipi di figure piuttosto semplici.

Consideriamo le sequenze di valori interi positivi; più precisamente la variabile $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ed i valori $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{P}$.

Una tale sequenza si rappresenta comodamente con una figura-bx con lo spigolo inferiore sinistro nell'origine **0** ed ottenibile affiancando n barre verticali con la casella inferiore delimitata dall'asse orizzontale e altezze date, risp., da x_1, ..., x_n.

Consideriamo una sequenza di interi $\mathsf{s} = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$; si dice **istogramma di una sequenza di interi**, qui la s, la figura della griglia combinatoria costituita da n successive barre verticali di caselle collocate in modo che la i-esima abbia un vertice in $\langle i-1, 0\rangle$ e un vertice opposto in $\langle i, a_i\rangle$.
Per esempio gli istogrammi delle sequenze $\mathsf{s}_1 = \langle 3, 4, 4, 6, 5, 2\rangle$ e $\mathsf{s}_2 = \langle 3, 2, 0, -3, -4, -1, 2, 4\rangle$ sono

//input pB23c03

B23:**c.04** Nel caso della sequenza s_1 di interi positivi la somma dei componenti $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ coincide con l'area della figura e la valutazione dell'area dell'istogramma può dare una utile presentazione visiva del meccanismo della sommatoria di interi positivi
Con questa raffigurazione risulta molto intuitiva la associatività della sommatoria espressa dalla formula

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{con} \quad \sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=i_0}^{i_0} a_i = a_{i_0} \ .$$

Questa proprietà infatti traduce fatti elementari come l'additività deli cardinali di insiemi disgiunti e l'additività delle lunghezze di stringhe giustapposte; questa proprietà si ottiene visivamente allineando in un unico nastro le barre di un istogramma relativo ai soli interi positivi: nel caso s_1:

//input pB23c04B10

Questa operazione si può vedere come la effettuazione di successive operazioni di traslazione e rotazioni di barre, operazioni per le quali si è richiesta la conservazione delle aree, e di unificazione di figure accostate per le quali si è richiesta l'additività.

B23:**c.05** Risulta utile estendere la precedente interpretazione visiva al caso degli interi non necessariamente positivi, come per la sequenza s_2: in questo modo si visualizzano situazioni applicative come calcoli finanziari riguardanti sequenze di crediti (guadagni) e di debiti (perdite) (barre al di sopra e al di sotto dell'asse Ox); altre situazioni con grandezze di segno opposto riguardano spostamenti secondo le due orientazioni di una retta.
Il calcolo della sommatoria corrisponde alla differenza tra le aree delle figure formate risp. dalle barre al di sopra e al di sotto dell'asse (attribuendo naturalmente area zero alle barre senza caselle). Si possono pensare processi di accumulo separato delle caselle al di sopra e al di sotto dell'asse Ox e processi di annichilazione di un certo numero di caselle positive con un ugual numero di caselle negative. Si può anche parlare della possibilità di compensazione per i cammini chiusi e per le aree.

B23:**c.06** Cominciamo ad attribuire un segno alle figure rettangolari. Se $h, k \in \mathbb{P}$, definiamo il **rettangolo-bx** determinato dalla coppia di vettori, orizzontale il primo $\langle h, 0\rangle$ e verticale il secondo $\langle 0, k\rangle$, come insieme delle caselle aventi vertici NE nei punti $\langle i, j\rangle$ per $i = 1, ..., h$ e $j = 1, ..., k$.
Per **area di un rettangolo-bx** si intende il numero delle sue caselle, cioè $h \cdot k$.

Se h e k possono essere anche interi nonpositivi, si hanno insiemi rettangolari di caselle del tutto simili. Se alla loro area si assegna ancora il valore $h \cdot k$, essi possono avere come area un intero negativo. Si hanno quindi aree dotate di segno.

Un rettangolo, definito da una coppia di vettori-ZZ, il primo orizzontale e il secondo verticale, ha area positiva sse si porta il primo vettore-ZZ ad avere la stessa direzione del secondo (verso Nord oppure verso Sud) ruotandolo nel verso antiorario o positivo; ha area negativa in caso contrario, cioè sse si porta il primo vettore-ZZ ad avere la stessa direzione del secondo ruotandolo nel verso orario o negativo.

Altri rettangoli si possono definire con una coppia di vettori applicati $\langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle$, uno dei quali orizzontale, l'altro verticale, i quali hanno l'estremità iniziale in comune. A questi rettangoli vengono attribuite aree con segno come mostra la seguente figura:

//input pB23c06

B23:**c.07** Vi sono importanti applicazioni che richiedono di trattare figure aventi aree negative. Mentre la somma di interi positivi si può visualizzare come determinazione del numero di caselle di una figura-ZZR ottenuta affiancando barre verticali che rappresentano addendi, si possono visualizzare le somme di interi che possono essere negativi con istogrammi-ZZR, figure costituite da barre verticali che stanno al di sopra dell'asse Ox orizzontale per gli addendi positivi, e al di sotto dell'asse Ox per gli addendi negativi.

In applicazioni finanziarie le aree delle barre di un tale istogramma possono rappresentano crediti se si trovano al di sopra dell'asse delle ascisse, debiti se al di sotto. Gli opposti significati delle aree di queste porzioni di figure si possono associare ai due versi di percorrenza dei corrispondenti circuiti perimetrali. Ogni affiancamento di barre al di sopra di Ox va considerato delimitato da un circuito positivo, ossia antiorario, ogni affiancamento al di sotto della Ox delimitato da un circuito negativo. In tal modo si possono attribuire aree positive alle figure delimitate da circuiti hamiltoniani positivi e aree negative alle figure delimitate da circuiti hamiltoniani negativi.

Anche nell'elettromagnetismo emerge la necessità di trattare aree con segno: una spira percorsa da corrente elettrica viene attraversata da un campo magnetico il cui flusso è ortogonale alla sezione della spira; la due possibili direzioni vanno collegate ai due versi opposti secondo i quali la corrente può percorrere la spira. Una tale spira nei casi più semplici si può rappresentare con un circuito-ZZR rettangolare o comunque hamiltoniano. Si giunge a quantificare la relazione tra corrente, spira e flusso in modo unificato attribuendo alla sezione della spira aree di segno opposto in dipendenza dei versi di percorrenza della corrente.

Un'altra grandezza con segno che si collega a circuiti e ai possibili versi di percorrenza sono le ampiezze angolari: un angolo di $+360°$ è stato associato alla figura-ZZR $\mathbf{Q}$, cioè al quadrato avente i vertici nei punti $\langle \pm 1, \pm 1 \rangle$ il cui circuito perimetrale viene percorso secondo il verso positivo. Al circuito opposto, percorso nel verso negativo, si è attribuita l'ampiezza angolare $-360°$. Conviene anche segnalare che proseguendo nello sviluppo di queste nozioni si associa a ogni angolo piano un'area con segno, quella determinata da un circuito comprendente un movimento lungo la circonferenza di raggio 1 che può anche percorrere più volte l'intera circonferenza.

B23:**c.08** Osserviamo che i segni attribuiti alle barre degli istogrammi con significati finanziari si scambiano in conseguenza della riflessione rispetto ad Ox. Questa involuzione si potrebbe associare allo scambiarsi dei punti di vista di un creditore e di un debitore.

La precedente attribuzione delle aree con segno legata all'asse Ox non è dunque invariante per traslazione e per riflessione, mentre l'area di una figura-bx, cioè il numero delle caselle che la compongono, è invariante per traslazione e per rotazione.

In effetti vi sono problemi di geometria analitica e di geometria computazionale, di fisica e di molte altre discipline che inducono a introdurre aree con segno che siano invarianti per traslazioni e rotazioni e che cambino di segno in seguito a riflessioni.
si rivela utile dare una tale definizione in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e successivamente estenderla ad ambienti spaziali più ricchi come $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^3$. La definizione nel piano combinatorio che stiamo per dare consente una prima trattazione delle aree con segno che può fare riferimento a oggetti intuitivi come piastrelle con facce opposte di due diversi colori, oggetti sui quali si possono effettuare calcoli verificabili molto concretamente senza dover ricorrere a nozioni infinitesimali.

B23:**c.09** L'espressione a09(1) trovata per l'area di un rettangolo-ZZR vale per tutte le posizioni relative di C rispetto ad A: è nulla sse A e B si trovano sulla stessa retta-ZZ orizzontale o verticale, è positiva sse C si trova in alto a destra o in basso a sinistra rispetto ad A, è negativa sse C si colloca a NE o a SW rispetto ad A.

//input pB23c09

Dunque il collegamento che abbiamo stabilito tra circuiti-ZZR hamiltoniani e aree delle figure-ZZR che essi delimitano consente di controllare con una sola formula le aree dei rettangoli-ZZR. Vedremo che una proprietà di questo genere vale per molte altre aree con segno e può estendersi anche a volumi con segno.

B23:**c.10** Si osserva che l'area con segno di un rettangolo-ZZR è un invariante per tutte le traslazioni, e per la rotazione di 90°.
Viceversa si ha che l'area cambia di segno in seguito alle riflessioni rispetto a rette-ZZH orizzontali, rette-ZZV verticali, rette-ZZD1 ossia rette parallele alla diagonale principale, rette-ZZD2 ossia rette parallele alla codiagonale. Inoltre con la composizione delle trasformazioni si ha la moltiplicazione delle segnature.
Queste proprietà di invarianza o di invarianza a meno del segno contribuiscono al carattere intrinseco dell'area, misura numerica che stiamo attribuendo ad una gamma di figure-ZZ (piane) che cerchiamo di individuare come il più possibile estesa.

Osserviamo che la definizione del segno di un rettangolo (e di conseguenza, come vedremo, delle altre figure bidimensionali, o**figure 2D**, cui si riesce ad attribuire un'area) si basa su di un processo che richiede di operare in 3 dimensioni, 3D, e di servirsi di oggetti fisici, un mobile che percorre un segmento orientato e per il quale si sa distinguere la sua sinistra dalla sua destra.
Si può anche ricorrere alla associazione di una figura-bx ad un modello materiale 3D costituito da tessere delle quali si distinguono una faccia inferiore e una superiore: mentre le traslazioni e le rotazioni di 90° e di suoi multipli mandano tessere in tessere attraverso spostamenti attuabili con continuità in 2D, senza modificare il carattere superiore/inferiore delle facce, le riflessioni possono essere attuate con continuità con rotazioni di 180° delle figure in 3D e con conseguente scambio del carattere superiore/inferiore delle facce.
È opportuno osservare che stiamo trattando entità geometriche bidimensionali ricorrendo a un modello fisico (inevitabilmente) tridimensionale.

B23:**c.11** Vogliamo ampliare la nozione di area per renderla applicabile a tutti i circuiti-ZZ, anche ai non euleriani, chiedendo che costituisca una funzione con valori in $\mathbb{Z}/2$ invariante a meno del segno, in accordo con quanto accade per i circuiti-ZZR.
Estendiamo ora la nozione di area a figure in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che si possono associare a cammini-ZZR orientati chiusi.

Ricordiamo che diciamo **cammino-ZZR** ogni sequenza di punti-ZZ $\big\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}\big\rangle$, con $s \in \mathbb{N}$ e tale che ogni suo segmento orientato $\overline{P_{i-1}P_i}$ sia orizzontale o verticale. Per maggiore generalità non escludiamo che si possano avere due successivi segmenti orientati con la stessa direzione. Due cammini-ZZR si dicono equivalenti sse si possono trasformare l'uno nell'altro con operazioni di sostituzione di due segmenti consecutivi della stessa direzione con la loro somma di vettori applicati o con operazioni inverse di decomposizione di segmenti in due segmenti consecutivi della stessa direzione.

Si dice cammino-ZZR chiuso ogni cammino con la prima estremità coincidente con l'ultima, cioè ogni cammino-ZZR della forma $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}, P_0\rangle$, Due cammini-ZZR chiusi si dicono ciclicamente equivalenti sse hanno due presentazioni delle forme $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}, P_0\rangle$ e $\langle P_h, P_{h+1}, ..., P_{s-1}, P_0, P_1, ..., P_h\rangle$, per $h = 0, 1, ..., s-1$. Evidentemente questa relazione resa riflessiva è un'equivalenza.

Diciamo notazione abbreviata del cammino chiuso $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}, P_0\rangle$ la scrittura ottenuta eliminando l'ultima estremità $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}, \rangle$.

Ricordiamo anche che chiamiamo circuito-ZZR ogni classe di equivalenza ciclica di cammini-ZZR chiusi. Ciascuna delle notazioni abbreviate dei cammini-ZZR chiusi costituenti un circuito-ZZR si può considerare una rappresentazione abbreviata di tale circuito.
Diciamo invece rappresentazione dettagliata una scrittura come la precedente nella quale ogni coppia $\langle P_{h-1}, P_h\rangle$ riguarda un vettore applicato orizzontale o verticale di lunghezza 1

Chiamiamo invece riflesso di un circuito-ZZ Δ la classe di equivalenza costituita dai cammini riflessi di quelli che costituiscono Δ.

Si dice **circuito-ZZR hamiltoniano** un circuito nelle cui rappresentazioni dettagliate non si ha nessun punto ripetuto (che non sia il primo coincidente con l'ultimo).

B23:**c.12** Si hanno notazioni equivalenti. Una notazione richiede tutti i punti-ZZ toccati. Questa è chiaramente equivalente a una notazione che riguarda la sequenza degli spostamenti elementari (WE, SN, EW, NS) che si costituisce una descrizione cinematica del cammino. Equivalenti a questa notazioni basate sulle deviazioni a sinistra o a destra di una punta tracciante.
Risultano utili anche le notazioni a coppie di cifre decimali per cammini circoscritti alla regione $[0:9] \times [0:9]$.

B23:**c.13** Introduciamo i due circuiti-ZZR hamiltoniani basilari $\mathcal{C}_1 := \big\langle\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,1\rangle, \big\rangle$ e il suo riflesso $\mathcal{C}_{-1} := \big\langle\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \big\rangle$.
Entrambi delimitano una figura-ZZR costituita da una sola casella. Percorrendo $\mathcal{C}_1$ si ha la casella, cioè la figura, sulla sinistra, mentre percorrendo $\mathcal{C}_{-1}$ la si vede alla destra.

Al primo circuito si attribuisce verso positivo (o antiorario) a alla prima figura si assegna area pari ad 1. Al secondo circuito si attribuisce verso negativo (o orario) a alla figura che delimita si assegna area pari a -1.

Questi segni sono in accordo con le assegnazione dei segni ai due semipiani individuati da un segmento orientato [t02].

Si osserva inoltre che la somma degli angoli di deviazione di un mobile che percorre per intero $\mathcal{C}_1$ vale $360°$, in quanto somma di quattro angoli retti, mentre per un mobile che percorre $\mathcal{C}_{-1}$ si ha una deviazione complessiva di $-360°$.

Consideriamo ora un generico circuito-ZZR hamiltoniano C. L'insieme delle caselle costituenti $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si bipartisce in due classi tali che si possono collegare tra di loro le caselle di ciascuna classe con passi (di lunghezza 1) orizzontali o verticali senza attraversare i lati del circuito C.

Queste classi si possono quindi chiamare figure connesse-ZZR. Le caselle di una delle due classi sono contenute in un rettangolo-ZZ che contiene l'intero C e quindi costituiscono un insieme finito. Essi si dicono costituire la **figura-bx caratterizzata da una frontiera**, la C.
La classe delle caselle rimanenti è invece non finita e illimitata.

La corrispondenza tra circuiti-ZZR hamiltoniani e figure-ZZR è evidentemente biunivoca e quindi si può associare un'area con segno a uno di questi circuiti, in quanto equivalente a un insieme di caselle.

B23:**c.14** Ogni circuito-ZZR hamiltoniano si può ridurre progressivamente con successive modifiche corrispondenti a eliminazioni di singole caselle che mantengono la figura connessa-ZZR.
Con ciascuna di queste manovre di abbassa di 1 il numero delle caselle e si possono avere o meno accorciamenti del circuito.

Un esame della tipologia delle suddette manovre mostra che con ciascuna di esse rimane invariata l'ampiezza complessiva con segno degli angoli delle complessive deviazioni.
Si può quindi concludere che l'insieme dei circuiti-ZZR hamiltoniani (e l'insieme delle figure-ZZR) e si bipartisce come segue

(1) classe dei circuiti che si riducono al circuito basilare $\mathcal{C}_1$ e che hanno un'ampiezza delle deviazioni complessive di $360°$;
(2) classe dei circuiti che si riducono al circuito basilare $\mathcal{C}_{-1}$ e che hanno un'ampiezza delle deviazioni complessive di $-360°$.

Ai circuiti della prima classe si attribuisce il verso di percorrenza positivo o antiorario; ai circuiti della seconda classe si attribuisce il verso di percorrenza negativo o orario.
Si definisce come area delle figure-ZZR relative alla prima classe il numero delle caselle interne; si definisce come area delle figure-ZZR relative alla seconda classe il numero delle caselle interne cambiato di segno.

Si osserva facilmente che le traslazioni e le rotazioni lasciano invariate le classi (1) e (2) dei circuiti hamiltoniani, mentre le riflessioni le scambiano. Lo scambio delle due classi si ottiene anche con la riflessione dei circuiti.

Un circuito di frontiera si considera percorso in verso orario (risp. in verso antiorario) sse nel semipiano a sinistra (a destra) di ogni segmento della frontiera si trova sempre almeno un altro vertice del circuito.

Degli 8 rettangoli della figura in t03 le prime 4 hanno frontiera antiorarie, le ultime 4 frontiere orarie.

B23:**c.15** Per ogni circuito-ZZR hamiltoniano Γ denotiamo con $\text{sign}(\Gamma)$ il suo segno, pari a $+1$ se il suo verso di percorrenza è positivo e pari a -1 nel caso opposto; denotiamo inoltre con $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$ l'insieme delle caselle che esso delimita. Tale figura-bx viene detta anche **poligono-ZZR nonintrecciato**.

Si osserva che ciascuno dei lati orientati di Γ lascia la casella appartenente a $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$ del cui perimetro fa parte alla sua sinistra sse $\text{sign}(\Gamma) = +1$ e alla sua destra sse $\text{sign}(\Gamma) = -1$.
Il numero delle caselle costituenti $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$ ovviamente coincide con il numero delle caselle costituenti la figura delimitata dal circuito con verso di percorrenza opposto $\ominus\Gamma$. Quindi per l'area di $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$

possiamo scrivere

(1) $$\boldsymbol{Area}(\Gamma) \ := \ \mathrm{sign}(\Gamma)\cdot|\mathsf{Intrn}(\Gamma)| \ .$$

Alcuni esempi:

//input pB23c15

B23:**c.16** Ci proponiamo ora di ampliare il dominio della funzione $\boldsymbol{Area}$ dai circuiti-ZZR hamiltoniani a tutti i circuiti-ZZR e successivamente a tutti i circuiti-ZZ sulla base di una richiesta di additività.

L'area attribuita a un circuito esprimibile come giustapposizione di alcuni circuiti è data dalla somma algebrica delle aree attribuite ai circuiti componenti.

Vediamo come questa richiesta di additività risulti coerente con l'additività della operazione di sommatoria esprimibile con l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i \ .$$

La definizione di area di circuito-ZZR hamiltoniano si applica direttamente ad ogni istogramma che presenta tutte le barre costituite da caselle collocate al di sopra dell'asse Ox e che rappresenta una sommatoria di addendi tutti interi positivi, l'i-esimo dei quali uguaglia il numero delle caselle sovrapposte a formare la barra i-esima. Alla figura si attribuisce il circuito-ZZR che inizia nel vertice SW della prima barra, prosegue sull'asse Ox fino al vertice SE dell'ultima barra, sale seguendo il lato destro dell'ultima barra, segue il profilo superiore dell'istogramma e termina scendendo sul lato sinistro della prima barra.

B23:**c.17** Per spiegare l'area di un istogramma che presenta anche barre negative e nulle, cioè di altezza 0, ridotte a un segmento tra due punti $\langle i-1, 0\rangle$ e $\langle i-1, 0\rangle$, occorre estendere la definizione di area di un circuito-ZZR non hamiltoniano.

Ogni circuito non hamiltoniano Ξ si può decomporre come giustapposizione di circuiti hamiltoniani Γ_1,..., Γ_k, fatto che esprimiamo scrivendo $\Xi = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_k$.
Al circuito Ξ si attribuisce l'area ottenuta come somma algebrica delle aree con segno dei Γ_i:

(1) $$\boldsymbol{Area}(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_k) \ := \ \boldsymbol{Area}(\Gamma_1) + \boldsymbol{Area}(\Gamma_2) + \cdots + \boldsymbol{Area}(\Gamma_k) \ .$$

L'area dell'istogramma-ZZR che raffigura un'espressione della forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$ si riconduce all'area della figura definita da circuito che inizia nell'origine, segue Ox fino al punto $\langle k, 0\rangle$ e prosegue contornando successivamente le barre relative ad a_k, a_{k-1}, ...,a_2, a_1 servendosi dei lati ancora non toccati.
Fanno eccezione le eventuali barre nulle, diciamo quelle relative ad $a_\nu = 0$, per le quali si percorrono i lati $\overrightarrow{\langle \nu, 0\rangle \ \langle \nu-1, 0\rangle}$.

Nel caso di due addendi successivi a_j e a_{j+1} entrambi positivi o entrambi negativi il circuito si può semplificare trascurando i sottocammini costituenti sottocircuiti nulli relativi a segmenti della forma $\big\langle \langle j+1, \mu\rangle, \langle j+1, \mu\rangle \big\rangle$, dove $\mu := \min(a_j, a_{j+1})$ sse $a_j, a_{j+1} > 0$ e $\mu := -\max(a_j, a_{j+1})$ sse $a_j, a_{j+1} < 0$.
Questo circuito di istogramma-ZZR termina nell'origine e lascia alla sua sinistra solo caselle di barre positive e alla sua destra solo caselle di barre negative.

//input pB23c17

B23:**c.18 (1) Prop.**: L'area additiva associata ai circuiti-ZZR è una misura numerica invariante le traslazioni-ZZ e per le rotazioni-ZZR, mentre cambia di segno in seguito a ogni riflessione-ZZK.

Dim.: Per una dimostrazione di questo genere è utile tenere presente che ogni circuito-ZZR rettangolare si riduce a giustapposizione di circuiti-ZZR di casella singola, che ogni circuito hamiltoniano si riduce a giustapposizione di circuiti rettangolari (e a giustapposizione di circuiti di casella singola) e che ogni circuito-ZZR si riduce a giustapposizione di circuiti hamiltoniani (e di circuiti rettangolari e di circuiti di casella singola.

Dato che la giustapposizione di circuiti è conservata dai movimenti rigidi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le proprietà di invarianza e cambiamento di segno delle aree-ZZR si possono quindi ricavare dalle corrispondenti proprietà dei circuiti-ZZR rettangolari o addirittura da quelle dei circuiti di casella singola.
Queste ultime risultano evidenti da figure come quelle che seguono ▮

//input pB23c182

L'area di una figura convessa-ZZV tipo cerchio si può ricondurre a due istogrammi e risulta invariante per traslazione-ZZV.

B23:d. composizioni di circuiti-ZZR e multiaree

B23:**d.01** Due problematiche di ampio interesse ed evidentemente collegate riguardano il calcolo delle aree delle figurepiane e delle lunghezze . delle rispettive frontiere. Qui affrontiamo questi problemi al livello più semplice del iano-ZZ.

Due figure-bx si dicono **figure-bx equiareali** sse hanno la stessa area. Evidentemente la equiarealità è una relazione di equivalenza entro **SetSq**. Data la sua importanza questa relazione viene considerata per prevalenza la **equivalenza tra figure-bx** ed affermare che due figure sono equivalenti sta per dire che hanno la stessa area.

Si trova che spesso l'area di una figura conviene valutarla osservando la sua equivalenza con una figura di area nota o facilmente valutabile. Per queste valutazioni è importante il riconoscimento di di trasformazioni di figure che mantengono l'area. Per individuare queste trasformazioni è opportuno considerare anche le figure-bx nonconnesse-R o nonconnesse-K, in quanto risulta spesso utile stabilire l'equivalenza di una figura connessa con una figura nonconnessa.

Per trattare efficacemente il problema dell'area risulta utile anche ampliare la nozione di area introducendo aree negative. Questo conduce a introdurre un orientamento dei percorsi di frontiera ed a considerare l'area di una figura come associata ad un circuito-ZZR. A questo punto, per disporre di strumenti efficaci, conviene associare un'area a un cosiddetto **multicircuito-ZZR**, c01cioè a un insieme di circuiti-ZZR. Questo ampliamento, quando lo si voglia applicare a tutti i circuiti-ZZR, comporta che si estenda la nozione di area in modo da poter trattare caselle che contribuiscono all'area di un circuito con una loro area data da un intero qualsiasi.

Questo rilevante ampliamento della nozione di area consente di formulare enunciati generali e coerenti per le figure-bx i quali saranno facilmente estendibili a tutte le figure associate a un circuito-ZZ [v.o.] e successivamente a tutti i circuiti in piani come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o come il piano complesso.
Inoltre l'area di un multicircuito è direttamente utilizzabile per modelli fisici riguardanti fenomeni elettromagnetici.

B23:**d.02** Ai fini della valutazione delle aree delle figure conviene prendere in considerazione le classi di equivalenza costituite da collezioni di figure-bx aventi la stessa area e considerare trasformazioni che l'area conservano. Si giunge quindi a individuare operazioni di aggregazione e disaggregazione per collezioni di figure-bx da trattare attraverso le collezioni di circuiti-ZZR loro frontiere. Si giunge anche ad associare a ogni collezione di circuiti-ZZR una misura che può assumere ogni valore intero e che diciamo multiarea.

B23:**d.03** Tra i rettangoli-bx e tra le figure-bx è opportuno non trascurare anche i **rettangoli-bx degeneri** determinati da un segmento orientato orizzontale o verticale e da suo riflesso. Queste figure hanno area nulla e sono delimitati da circuiti degeneri.
Inoltre è utile fare riferimento a figure degeneri di area nulla determinate da cammini-ZZR giustapposto al suo oppostoi.

B23:**d.04** Una caratteristica sostanziale degli interi positivi e la possibilità di sommarli e in tal modo di avere la possibilità di esprimere il cardinale dell'unione di due insiemi finiti disgiunti; questa caratteristica va ricondotta alla possibilità di esprimere un insieme unione di due insiemi finiti disgiunti con la lista ottenuta giustapponendo le liste che esprimono i due insiemi.

Alla proprietà di sommabilità deli cardinali di due insiemi finiti disgiunti va collegata anche la sommabilità delle aree di due figure-bx disgiunte.
I vantaggi derivanti dall'estensione di $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Z}$ con il mantenimento delle proprietà collegate alla sommabilità induce a introdurre figure ambientate in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aventi aree negative per le quali possano valere proprietà collegate con la sommabilità.

B23:**d.05** Ampliamo ora le figure-ZZ con area considerando quelle ottenibili con accostamenti di rettangoli aventi segmenti di frontiera comuni e privi di sovrapposizioni e basandoci sopra una proprietà di additività cui diamo per ora la formulazione che segue.
Se R_1 e R_2 sono due tali rettangoli e denotiamo con $\mathsf{R}_1 \oplus \mathsf{R}_2$ la figura ottenuta con la loro unificazione poniamo, quali che siano i segni delle aree $\boldsymbol{Area}(\mathsf{R}_1 \oplus \mathsf{R}_2) := \boldsymbol{Area}(\mathsf{R}_1) + \boldsymbol{Area}(\mathsf{R}_2)$.

Questa richiesta è ben giustificata nel caso in cui i due rettangoli hanno aree positive: infatti essa è utile in applicazioni in cui l'area serve per individuare pesi di oggetti materiali (porzioni accostabili di un mosaico, di una piastrellatura, ...). Come vedremo la sua validità può essere molto ampliata.

Anche nella precedente formulazione circoscritta la additività delle aree-ZZ porta a considerazioni che vogliamo esplicitare. Mediante accostamento di rettangoli e in particolare di barre orizzontali e/o verticali, cioè di rettangoli con una coppia di lati opposti di lunghezza 1, si possono ottenere varie figure-ZZ interessanti che saranno riprese in seguito: triangoli-ZZ, trapezi-ZZ, forme di Ferrers, ...

Queste figure si possono definire in funzione di uno, due o più parametri interi e quindi si organizzano in successioni a uno, due o più indici. Molte aree di queste figure si possono ottenere mediante espressioni nei sopraccennati indici e queste espressioni costituiscono risultati della cosiddetta combinatorica enumerativa di livello elementare ma che servono per sviluppi di grande interesse, in particolare nello studio delle cosiddette `funzioni generatrici (wi)`, entità centrali per lo studio delle `funzioni speciali (wi)`.

B23:**d.06** Casistica della composizione e della decomposizione.
Una di queste figure F può dividersi, in genere in più modi, in due figure F_1 e F_2 con frontiere che presentano una sottopoligonale comune ma percorsa in sensi opposti.
Si chiede allora che sia $\boldsymbol{Area}(F) = \boldsymbol{Area}(F_1) + \boldsymbol{Area}(F_2)$.
Con successive suddivisioni ogni figura-ZZR si può ricondurre a unioni con segno di parallelogrammi o di triangoli e quindi si può calcolare la sua area come numero intero.
Con questa nozione di area si possono impostare calcoli su integrali discreti applicabili a calcoli finanziari riguardanti sequenze di crediti e debiti.

B23:**d.07** Consideriamo ora un circuito-ZZR che presenta vertici ripetuti. Si associa a esso un'area riconducendosi alle aree dei circuiti-ZZR hamiltoniani sulla base di una richiesta di additività riferita ai circuiti e coerente con l'additività delle figure intese come insiemi di caselle con segno.

Ora ci limitiamo a esempi che riguardano circuiti con vertici con coordinate che vanno da 0 a 9 e per essi possiamo usare notazioni abbreviate.

Il circuito $\mathsf{C} := \big\langle \langle 0,0\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 7,9\rangle, \langle 4,9\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 0,6\rangle, \big\rangle$ si può esprimere in forma abbreviata come
$\big\langle 00, 40, 43, 73, 79, 49, 46, 06, \big\rangle$, l'insieme delle caselle interne a C con $\mathcal{S}(00, 40, 43, 73, 79, 49, 46, 06,)$ e l'area della figura delimitata da C con $\boldsymbol{Area}(00, 40, 43, 73, 79, 49, 46, 06,)$.
L'insieme delle caselle interne a C si può bipartire come $\mathcal{S}(00, 40, 43, 73, 79, 49, 46, 06,) = \mathcal{S}(00, 40, 46, 06,) \dot\cup \mathcal{S}(43, 73, 79, 49,)$.
Quindi l'area della figura complessiva vale $4 \cdot 6 + (7-4) \cdot (9-3) = 42$.

Il circuito C si può riscrivere come $\langle 00, 40, 43, 46, 43, 73, 79, 49, 46, 06, \rangle$ Si può dire che C è stato ampliato con l'inserimento del circuito $\langle 43, 46, 43\rangle = \langle 46, 43, 4\rangle$, circuito che delimita una figura di area nulla, con l'insieme delle caselle interne vuoto.
Un tale circuito-ZZR si dice **circuito di regione vuota** e serve solo per dare una definita forma a questi sviluppi.
Il circuito precedente si può riscrivere $\langle 43, 73, 79, 49, 46, 43, 46, 06, 00, 40, \rangle$ e questo si può decomporre in due circuiti come segue:

$$\langle 43, 73, 79, 49, 46, 43, 46, 06, 00, 40, \rangle = \langle 43, 73, 79, 49, 46, \rangle \oplus \langle 46, 06, 00, 40, \rangle \ .$$

A questa decomposizione facciamo corrispondere l'additività delle aree delimitate:

$$\boldsymbol{Area}(\mathsf{C}) = \boldsymbol{Area}(43, 73, 79, 49, 46,) + \boldsymbol{Area}(46, 06, 00, 40,) \ .$$

Decomposizioni di questo genere si possono effettuare anche per circuiti di verso orario: basta considerare i circuiti riflessi dei precedenti e cambiare il segno delle aree.

B23:**d.08** Consideriamo un esempio di aggregazione di due circuiti con due porzioni comuni ma riflesse. Introduciamo

$$\mathsf{C}_1 \ := \ \langle 00, 30, 32, 22, 24, 34, 38, 08, \rangle \ \text{ e } \ \mathsf{C}_2 := \langle 30, 70, 78, 38, 34, 64, 62, 32, \rangle \ .$$

Aggreghiamo i due circuiti nel nuovo $\mathsf{C}_1 \oplus \mathsf{C}_2 = \langle 00, 30, 32, 22, 24, 34, 38, 34, 64, 62, 32, 30, 70, 78, 08, \rangle$.
Eliminiamo il circuito con regione interna nulla ottenendo

$$\langle 00, 30, 32, 22, 24, 34, 64, 62, 32, 30, 70, 78, 08, \rangle \ .$$

Ora consideriamo l'aggregazione del precedente con il suo circuito interno

$$\langle 00, 30, 32, 22, 24, 34, 64, 62, 32, 30, 70, 78, 08, \rangle \oplus \langle 22, 62, 64, 24, \rangle \ ,$$

ed otteniamo $\langle 00, 70, 78, 08, \rangle$.
Scriviamo allora $\mathsf{C}_1 \oplus \mathsf{C}_2 = \langle 00, 70, 78, 08, \rangle \oplus \langle 22, 24, 64, 62, \rangle = \langle 00, 70, 78, 08, \rangle \ominus \langle 22, 62, 64, 24, \rangle$.
A queste relazioni tra circuiti facciamo corrispondere la relazione tra le aree

$$\boldsymbol{Area}(\mathsf{C}_1 \oplus \mathsf{C}_2) \ = \ \boldsymbol{Area}(00, 70, 78, 08,) - \boldsymbol{Area}(22, 62, 64, 24,) = 56 - 8 = 48 \ .$$

B23:**d.09** Possiamo ora definire un'area con segno per ogni circuito-ZZR.

Se un tale circuito ammette vertici ripetuti, si procede a successive decomposizioni in ciascuna delle quali si individua un circuito-ZZR hamiltoniano e un circuito-ZZR con meno ripetizioni di vertici del precedente. Dopo un numero finito di manovre di questo genere si ottiene una decomposizione del circuito originario in circuiti hamiltoniani la cui area è stata definita in precedenza; la somma algebrica delle aree dei circuiti hamiltoniani viene assegnata come area al circuito dato.

//input pB23d09

B23:**d.10** Si osserva che a ogni circuito-ZZR costituito da un cammino giustapposto al suo opposto corrisponde l'area nulla.
Con l'aggiunta di un opportuno cammino e del suo opposto si può ridurre l'area di due circuiti disgiunti all'area di un unico circuito contenente due cammini opposti.

Inoltre una figura comprendente un lago può considerarsi delimitata da un unico circuito contenente due cammini opposti. //input pB23d10

B23:**d.11** Una ulteriore estensione riguarda l'assegnazione di un'area a ogni multicircuito: questa configurazione infatti mediante l'inserimento di opportuni circuiti a regione interna nulla si riconducono a un unico circuito.

Spesso un tale circuito risulta decisamente artificioso e poco maneggevole. Per il calcolo effettivo delle aree serve di più il procedimento opposto consistente nella sostituzione di circuiti complessi con circuiti semplici e di area facilmente valutabile.

Si possono sviluppare calcoli effettivi che si avvalgono di semplificazioni motivate da equivalenze e da commpensazioni.

B23:**d.12** Conviene estendere la nozione di area di circuito-ZZR a quella di **multicircuito-ZZR**; con questo termine si intende semplicemente una famiglia finita di circuiti-ZZR ai quali non si impone alcuna restrizione: i circuiti di un multicircuito potrebbero possedere vertici in comune o meno, potrebbero coincidere in parte o completamente, potrebbero essere presenti insieme ai loro opposti.
Definiamo come area associata a un multicircuito la somma algebrica delle aree associate ai suoi circuiti e quindi la somma algebrica delle aree associate ai circuiti-ZZR hamiltoniani nei quali si può decomporre. Questa definizione è coerente con l'estensione ai multicircuiti della proprietà di additività introdotta in c04.

Come si è visto, il perimetro di una figura connessa-ZZR determina un sistema di circuiti-ZZR hamiltoniani, ossia un multicircuito-ZZR.

Si osserva che ogni multicircuito-ZZR si può ridurre a un unico circuito (in genere non euleriano) manovrando con dissezioni e con collegamenti mediante circuiti di area nulla.
Siamo quindi condotti a definire area con segno associata a famiglia di circuiti chiedendo per essa l'additività rispetto alla decomposizione dei circuiti.
Con multicircuiti si possono quindi trattare anche aree con segno di unioni di figure-ZZR.

B23:**d.13** In tal modo si possono trattare in modo unificato le aree di figure-ZZR e non connesse. Per esempio si trattano le aree di figure che si avvicinano alla corona circolare.

Si individua una equivalenza forte tra multicircuiti-ZZR aventi la stessa area che chiamiamo **equiarealità**.

Si osserva come due multicircuiti-ZZR equiareali si possono trasformare l'uno nell'altro mediante modifiche riconducibili a spostamenti di singole caselle orientate dall'uno all'altro, cioè mediante modifiche elementari.
Da questo per due circuiti con lati comuni segue la possibilità della semplificazione: l'area è coerente e ben definita.

Come vedremo nella prossima sezione, le regole di decomposizione consentono di ottenere numerose aree dalla conoscenza delle aree di figure semplici (triangoli-ZZR, quadrati-ZZR, rettangoli-ZZR).

B23:**d.14** Per la valutazione dell'area (senza segno) di un poligono-ZZR nonintrecciato può essere utile la formula che segue.

(2) Prop.: (**Formula di George Pick**) L'area di un poligono-ZZ il cui perimetro tocca F punti-ZZ e che ha al suo interno I punti-ZZ è data dalla espressione

$$\boldsymbol{Area} \;=\; I + \frac{F}{2} - 1 \;.$$

Dim.: La formula vale per i rettangoli costituiti da $m \times n$ caselle-ZZ: infatti per un tale rettangolo $F = 2m + 2n$, $I = (m-1)(n-1) = m\,n - m - n + 1$ e quindi

$$I + \frac{F}{2} - 1 = m\,n - m - n + 1 + (m+n) - 1 = m\,n \;.$$

Si osserva poi che ogni poligono-ZZ si può ottenere da un rettangolo applicandogli successive eliminazioni di triangoli-ZZ aventi almeno un lato in comune con il poligono da ridurre; in particolare conviene iniziare dal più ridotto rettangolo che contiene il poligono, quello avente in comune con il poligono ascissa e ordinata minima e massima.

Si tratta allora di esaminare le possibili manovre di eliminazione per constatare che esse comportano modifiche di F ed I che mantengono la validità della formula da dimostrare ▮

B23:e. costruzione graduale delle figure-bx connesse-R

B23:**e.01** Ora ci proponiamo di analizzare in quali modi una figura-bx connessa-ZZR $\boldsymbol{F}$ può essere costruita attraverso una sequenza di aggiunte di singole caselle che conducono solo a sue sottofigure-bx connesse-R e come di conseguenza si modificano le sue caratteristiche, in particolare $\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})$, $\mathsf{PerimHam}(\boldsymbol{F})$ e $\mathsf{PerimEul}(\boldsymbol{F})$.
In tal modo si individuerà uno schema dimostrativo per la collezione **SetSq** che costituisce un arricchimento dello schema di induzione e che facilita varie analisi di questa collezione di figure piane.

La frontiera di una figura-bx connessa-ZZR è costituita da un poligono (perimetrale) esterno e da eventuali poligoni (perimetrali) interni. Se si chiede che la figura $\boldsymbol{F}$ sia orientata positivamente, il poligono perimetrale esterno assume il verso di percorrenza positivo e le caselle della $\boldsymbol{F}$ che via via lambisce sono lasciate alla sinistra, alcuni poligoni interni assumono il verso di percorrenza negativo in modo da lasciare anch'esso alla sua sinistra le caselle della $\boldsymbol{F}$ successivamente lambite.

Vediamo alcuni esempi di figure-bx connesse-R per osservare alcune possibilità per lagune e laghi; per i primi esempi presentiamo anche gli schemi ad albero [e26h] dei grappoli di lagune e di laghi.

//input pB23e01

La prima figura presenta un grappolo di 11 laghi hamiltoniani; la seconda un grappolo di 5 lagune e un grappolo di 3 lagune; la terza una laguna hamiltoniana, un grappolo di 4 lagune hamiltoniane, 2 laghi isolati e un grappolo di 4 laghi hamiltoniani.

Osserviamo inoltre che ciascuno dei lati dei circuiti di frontiera di una figura-bx connessa-R può soltanto essere connesso ad altri 2, ad altri 4 o ad altri 6 lati di frontiera.

B23:**e.02** Per analizzare la tipologia delle figure-bx connesse-R e delle relative caratteristiche di frontiera risulta utile presentare i processi di **P**ZZCR attraverso un digrafo in cui ciascun nodo rappresenta una figura-bx connessa-R e ciascun arco $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}' \rangle$ rappresenta il passo di ampliamento consistente nell'aggiunta di una casella che fa passare dalla $\boldsymbol{F}$ alla $\boldsymbol{F}'$ tale che $\boldsymbol{Area}(\boldsymbol{F}') = \boldsymbol{Area}(\boldsymbol{F}) + 1$. Per queste figure conveniamo di collocare più in basso i nodi rappresentanti le figure meno estese.
Chiamiamo questi posets **digrafi costruttivi graduali-bxR**.

Diamo come esempio il digrafo delle possibili costruzioni di un tetròmino, trascurando quelle ottenibili applicando la simmetria centrale dello stesso tetròmino, cioè la permutazione $\left\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\downarrow$.

//input pB23e02

I digrafi costruttivi-bxR sono digrafi graduati nei quali un nodo si trova al livello w sse rappresenta una figura di w caselle. In effetti ogni nodo che rappresenta una figura $\boldsymbol{F}$ di w caselle si può ottenere con un processo di **P**ZZCR rappresentato da un cammino di $w-1$ archi che inizia in un nodo rappresentante di una figura costituita da una sola casella (al livello 1) e termina nel nodo rappresentante $\boldsymbol{F}$ (al livello w).

Le precedenti considerazioni si possono estendere alle costruzioni graduali di insiemi finiti dotati di opportune proprietà, più precisamente di costruzioni ottenibili attraverso successive aggiunte di singoli elementi che mantengono le proprietà caratterizzanti. I digrafi delle costruzioni di queste figure

vanno chiamati **digrafi costruttivi graduali-bxK**. In particolare questo termine viene applicato al digrafo precedente.
Chiaramente questi digrafi interessano principalmente le figure connesse-ZZK.

Le dimostrazioni di varie proprietà delle figure-bx connesse-R e connesse-bxK conviene facciano riferimento a questi digrafi e ai relativi cammini.

B23:**e.03** Per analizzare i processi di costruzione graduale risulta utile individuare tipologie esaurienti e significative dei passi costruttivi, cioè individuare tipi di archi dei corrispondenti digrafi tali che ogni arco possa afferire algoritmicamente a un tipo e che siano correlabili a significative proprietà degli insiemi da analizzare.
Questi tipi per le costruzioni graduali qualificabili con la specifica "-ZCCR" sono caratterizzati primariamente dal numero di lati e dal numero dei vertici che la nuova casella ha in comune con la figura che viene ampliata.
Questa classificazione la presentiamo mediante schemi di figure $\boldsymbol{F}'$ ottenute da una $\boldsymbol{F}$ con l'aggiunta di una casella. In questi schemi le caselle della $\boldsymbol{F}$ di partenza sono contrassegnati con "$\times$", la nuova casella con "n'', le caselle che potrebbero appartenere o meno alla $\boldsymbol{F}$ e alla $\boldsymbol{F}'$ con "."; sono invece rappresentate da quadratini bianchi le caselle non appartenenti alla $\boldsymbol{F}'$ (e alla $\boldsymbol{F}$).

Gli schemi dei passi di ampliamento che seguono sono contraddistinti da etichette della forma $[s, v]$, dove s fornisce il numero dei lati in comune tra casella nuova e figura $\boldsymbol{F}$ precedente e v il numero dei vertici in comune e non appartenenti ai suddetti s lati.

//input pB23e03

B23:**e.04** **(1) Prop.**: Il cardinale della frontiera di ogni figura-bx è un numero pari.

Dim.: Basta dimostrare la proprietà per figure-bx connesse-R. Per questo si procede per induzione sul numero di caselle costituenti la figura, ossia procedendo sui successivi livelli del digrafo costruttivo-bxR. Si constata subito che il perimetro della figura costituita da una sola casella è 4. Si considerano poi le diverse possibilità che si danno per ciascuno dei passi di aggiunta di una nuova casella distinguendo la posizione di tale casella rispetto alla frontiera della figura da ampliare $\boldsymbol{F}$. Si vede poi che si possono dare solo casi per i quali $\mathsf{frntrL}(\boldsymbol{F}') = \mathsf{frntrL}(\boldsymbol{F}) + a$ con $a \in \{-4, -2, 0, +2, +4\}$ ▮

//input pB23e04

(2) Eserc. Riprendere la dimostrazione precedente per provare che una frontiera contiene un numero pari di lati orizzontali e un numero pari di lati verticali.

B23:**e.05** Cominciamo ora a presentare un teorema che precisa proprietà delle figure-bx connesse-R e dei relativi perimetri già in parte anticipate facendo ricorso a esempi e all'intuizione. Questo enunciato sarà dimostrato facendo riferimento al digrafo costruttivo graduale-bxR della figura.

Abbiamo visto che a ogni figura-bx connessa-R $\boldsymbol{F}$ è associata la frontiera $\mathsf{Frntr}(\boldsymbol{F})$ e che questo insieme di lati si ripartisce in parti ciascuna delle quali costituisce un poligono-ZZR euleriano.

Per dare chiarezza a questo sistema di poligoni si individua la figura semplicemente connessa-ZZR minimale tra i sovrainsiemi della $\boldsymbol{F}$ e il relativo percorso chiuso euleriano che fornisce la sua frontiera. La suddetta figura si dice **chiusura semplicemente connessa-ZZR** della $\boldsymbol{F}$ e si denota con $CSCZZR(\boldsymbol{F})$; il suo percorso-frontiera si dice **poligono perimetrale di una figura-bx**, la $\boldsymbol{F}$, e si denota con $Dlmtplgn(\boldsymbol{F})$.

Per procedere con rigore va individuata una procedura per la costruzione di queste due funzioni.

B23:**e.06** **Teorema** Le due funzioni *CSCZZR* e *Dlmtplgn* sono effettivamente costruibili.

Dim.: Il procedimento dimostrativo segue uno schema induttivo -BldDgrfG basato su digrafi di **P**ZZCR. Il primo passo si riduce a constatare che le figure connesse-ZZR di area 1 (caselle) coincidono con la loro chiusura semplicemente connessa (CSC) e il loro poligono delimitante consiste nel quadrato frontiera della casella.

Come ipotesi induttiva -BldDgrfG si assume la costruibilità delle due funzioni per tutte le figure connesse-ZZR di area non superiore a un certo $w \in \mathbb{P}$.
Si tratta dunque di costruire i valori delle due funzioni per una figura $\boldsymbol{F}'$ di area $w+1$ ottenibile aggiungendo una casella ad una figura $\boldsymbol{F}$ di area w. La trasformazione da $\boldsymbol{F}$ ad $\boldsymbol{F}'$ la presentiamo con l'espressione $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[s,v](\boldsymbol{F})$, nella quale $\mathsf{A}[s,v]$ rappresenta una delle manovre di aggiunta di una casella che in comune con **Perim**($\boldsymbol{F}$) presenta s lati e v vertici che non incidono nei suddetti lati.

La rassegna di tutte le configurazioni che corrispondono alle varie coppie $[s,v]$ richiede di considerare varie situazioni; possiamo però ridurli trascurando le configurazioni ottenibili da quelle esaminate applicando rotazioni, riflessioni e, naturalmente, traslazioni. Conviene inoltre introdurre alcune notazioni locali.

Abbreviamo *CSCZZR* con $\mathcal{C}$ e *Dlmtplgn* con $\mathcal{D}$; introduciamo inoltre le seguenti semplificazioni: $\mathbf{C}$ per *CSCZZR*($\boldsymbol{F}$), $\mathbf{C}'$ per *CSCZZR*($\boldsymbol{F}'$), $\mathbf{D}$ per *Dlmtplgn*($\boldsymbol{F}$), $\mathbf{D}'$ per *Dlmtplgn*($\boldsymbol{F}'$), $\mathbf{P}$ per **Perim**($\boldsymbol{F}$) $\mathbf{P}'$ per **Perim**($\boldsymbol{F}'$).

Denotiamo con n la casella aggiunta e con a, b, c e d i suoi vertici presi nel verso positivo a partire dal vertice SW. Denotiamo con x la casella adiacente alla sinistra della n e supponiamo che appartenga ad $\boldsymbol{F}$; le altre situazioni si possono ottenere applicando a quelle che descriveremo rotazioni di 90°, 180° e 270°, trasformazioni non modificano le connessioni. Denotiamo le rimanenti caselle che incidono nella n prese procedendo secondo il verso positivo dopo la x, risp., con y, z, s, t, u, v, w.

//input pB23e06

Dobbiamo segnalare che talora nel seguito ci serviremo disinvoltamente la relazione $\in$ per descrivere situazioni come il fatto che un punto-ZZ sia vertice di una casella, di un poligono o di un perimetro e come il fatto che un lato-ZZR sia spigolo di una casella, di un poligono o di un perimetro. Per esempio scriviamo $ab = \mathsf{n} \cap \mathsf{z}$ e $c = \mathsf{n} \cap \mathsf{u}$.

B23:**e.07** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[1,0](\boldsymbol{F})$.

Vanno distinti due casi. $da \notin \mathbf{D}$ implica che il poligono delimitante non cambia, cioè $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, e che la chiusura semplicemente connessa conteneva già la casella n, cioè $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$; essa inoltre rimane copertura minimale: se non fosse minimale per $\boldsymbol{F}'$ non potrebbe essere minimale neppure per la $\boldsymbol{F}$.

Se viceversa $da \in \mathcal{D}(\boldsymbol{F}_w)$, allora $\mathbf{D}'$ si ottiene da $\mathbf{D}$ eliminando il lato comune da e aggiungendo i tre lati rimanenti della n (in breve i lati del percorso *abcd*), mentre $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{\mathsf{n}\}$ e rimane copertura minimale.

//input pB23e07

B23:**e.08** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[1,1](\boldsymbol{F})$.

Consideriamo il vertice a comune ad n e ad y. Se a è vertice di $\mathbf{D}$, allora da deve far parte di $\mathbf{P}$, in quanto in caso contrario x non potrebbe appartenere a $\mathbf{C}$. In tal caso $\mathbf{D}'$ deve contenere qualche lato di n diverso da ab e deve racchiudere, oltre ad n, la figura G (disgiunta da $\boldsymbol{F}$) delimitata da una porzione di $\mathbf{D}$ che viene esclusa da $\mathbf{D}'$. Per la nuova chiusura si ha $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup G \dot\cup \{\mathsf{n}\}$ e si vede che tale chiusura è minimale.
Se a non è vertice di $\mathbf{D}$, neanche da e le sue due estremità possono far parte di $\mathbf{D}$; quindi tutte le componenti di n devono trovarsi all'interno di $\mathbf{C}$, cioè devono essere componenti di $\mathbf{C}$ e non componenti di $\mathbf{D}$; quindi l'aggiunta di n non amplia $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ che resta minimale e non modifica $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$.

//input pB23e08

B23:**e.09** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[1,2](\boldsymbol{F})$.

Consideriamo i vertici a comune ad n e ad y e b comune ad n e ad s. Si mostra che $a \in \mathbf{D} \iff b \in \mathbf{D} \iff da \in \mathbf{D}$.
In questo caso si individuano due figure G ed H disgiunte da $\mathbf{C}$, la prima delimitata da una porzione D' di $\mathbf{D}$ e dal lato ab, la seconda delimitata dal lato bc (in comune tra n e t), da un lato di y, da una porzione D'' di $\mathbf{D}$ e da un lato di z. Le configurazioni individuate sono tali da consentire di scrivere $\mathbf{D} = da + D' + D'' + D''^prime$. Con l'aggiunta di $\mathbf{N}$ si ottengono $\mathbf{C}^prime = \mathbf{C} \dot\cup \{\mathsf{n}\} \dot\cup G \dot\cup H$ e $\mathbf{D}^prime = D^prime^prime^prime + cd$.

Nel caso opposto sia a che b che da sono componenti interni a $\mathbf{C}$. Quindi l'aggiunta di n non amplia $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ che resta minimale e non modifica $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$.

//input pB23e09

B23:**e.10** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[2,0](\boldsymbol{F})$.
Si danno due possibilità:
[a] i due lati comuni a n e $\boldsymbol{F}$ sono adiacenti: in tal caso possiamo assumere, senza ledere la generalità, che essi siano da (tra x ed n) ed ab (tra z ed n);
[b] i due lati comuni a n ed $\boldsymbol{F}$ non sono adiacenti e possiamo assumere che essi siano da (tra x ed n) e bc (tra n e t).

Nel caso [a] possono essere spigoli di $\mathbf{P}$: sia da che ab; solo da; solo ab (caso simmetrico del precedente); né da, né ab. Infatti in caso contrario x non potrebbe appartenere a $\mathbf{C}$. In tal caso $\mathbf{D}'$ deve contenere qualche lato di n diverso da da e deve racchiudere, oltre ad n, la figura G (disgiunta da $\boldsymbol{F}$) delimitata da una porzione di $\mathbf{D}$ che viene esclusa da $\mathbb{D}'$. Per la nuova chiusura si ha $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup G \dot\cup \{\mathsf{n}\}$ e si vede che tale chiusura è minimale.

Se $a \notin \mathbf{D}$, neanche da e le sue due estremità possono far parte di $\mathbf{D}$; quindi tutte le componenti di n devono trovarsi all'interno di $\mathbf{C}$, cioè devono essere componenti di $\mathbf{C}$ e non componenti di $\mathbf{D}$; quindi l'aggiunta di n non amplia $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$, che resta minimale, e non modifica $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$.

In questi cinque casi valgono, risp., i seguenti cinque sistemi di uguaglianze:

$\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$.

$\mathbf{D} = E \oplus ad \oplus E' \oplus ba$, $\mathbf{D}' = E$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{N\} \dot\cup H$.

$\mathbf{D} = E \oplus ba \oplus E' \oplus ad$, $\mathbf{D}' = E \oplus bcd$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{N\} \dot\cup G$.

$\mathbf{D} = E \oplus cb \oplus E' \oplus ad$, $\mathbf{D}' = E \oplus cd$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{N\} \dot\cup G$.
$\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$.

//input pB23e10

//input pB23e10B

B23:**e.11** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[2,1](\boldsymbol{F})$.

I due lati comuni ad n e ad $\boldsymbol{F}$ devono essere adiacenti e l'altro vertice di n facente parte di $\boldsymbol{F}$ non può incidere nei suddetti lati. Possiamo assumere che le caselle di $\boldsymbol{F}$ adiacenti ad n siano x e z, per cui la casella di $\boldsymbol{F}$ con un solo vertice (che deve essere c) in comune con n sia la u. Con tali scelte t e v non possono appartenere ad $\boldsymbol{F}$.

Per quanto riguarda y vanno distinte le configurazioni per le quali questa casella appartiene ad $\boldsymbol{F}$ da quelle nelle quali non vi appartiene. Dovremo considerare i due lati di u che hanno c come estremità: denotati con $b' := c + \mathsf{e}_y$ e con $d' := c + \mathsf{e}_x$ i due vertici di u adiacenti a c, i due suddetti lati sono $b'c$ e cd' .

Occorre distinguere primariamente due possibilità: [A] bcd' fa parte di $\mathbf{D}$; [B] bcd' fa parte di $\mathsf{Perim}(\boldsymbol{F})$, ma non di $\mathbf{D}$, cioè fa parte della frontiera, che denotiamo con $\mathbf{B}$, di un buco di $\boldsymbol{F}$. Nei casi [A] anche da e ab devono far parte di $\mathbf{D}$; nei casi [B] anche da e ab devono far parte della $\mathbf{B}$.

Nei casi [A], dato che $\mathsf{t} \notin \boldsymbol{F}$, $\mathbf{D}$ dopo aver toccato ab, deve raggiungere c; questo può essere fatto attraverso un percorso che giunge a d' (casi [A1]), oppure attraverso un percorso che giunge a b' (casi [A2]). Queste due possibilità sono sostanzialmente simmetriche e si trasforma l'una nell'altra per riflessione rispetto alla retta-ZZD1 che passa per a e c (con conseguente scambio tra b e d e di x con z).
I casi [A1] riguardano figure $\boldsymbol{F}$ per le quali si collegano-ZZR le caselle x e z (evidentemente a loro volta collegate-ZZR) con la u attraverso un percorso-bxR che passa al di sotto della n; i casi [A2] riguardano figure nelle quali u è raggiungibile da x e z con un cammino che passa al di sopra della n. Basta quindi prendere in considerazione solo i casi [A1].
Entro tale insieme di possibilità si distinguono: i casi [A11] per i quali in $\mathbf{D}$ i lati da e ab sono consecutivi (sse $\mathsf{y} \in \boldsymbol{F}$), ed i casi [A12] in cui in $\mathbf{D}$ da ed ab sono separati da un percorso E'' che delimita una regione K costituita da caselle estranee ad $\boldsymbol{F}$ (tra le quali la y).
Per i casi [A11] e [A12], riferendoci alla prima delle figure che seguono, si hanno, risp.,

[A11]: $\mathbf{D} = E \oplus b'cd' \oplus E' \oplus ba \oplus ad$ e [A12]: $\mathbf{D} = E \oplus b'cd' \oplus E' \oplus ba \oplus E'' \oplus ad$,

espressioni che differiscono solo per la presenza del circuito che delimita la regione K.

Per la nuova figura $\boldsymbol{F}'$ si hanno le espressioni

[A11] $\mathbf{D}' = E \oplus b'c \oplus cd$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{\mathsf{n}\} \dot\cup G$ e [A12] $\mathbf{D}' = E \oplus b'c \oplus cd$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{\mathsf{n}\} \dot\cup G \dot\cup K$.

Per i casi [B] si ha che le caselle x e z si possono collegare-bxR alla u sia con percorsi di caselle al di sotto della n, sia con percorsi al di sopra di essa. Accade poi che le caselle n, t e v appartengono a un buco per la figura $\boldsymbol{F}$. Inoltre si possono distinguere i casi in cui y appartiene ad $\boldsymbol{F}$ dai casi in cui questa casella non fa parte di $\boldsymbol{F}$, ma di un suo buco K delimitato da un circuito E'' passante per a. In ogni caso l'aggiunta di n non comporta modifiche del circuito delimitante e della chiusura semplicemente connessa: $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$ e $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$. Vi sono solo modifiche dei buchi e la crescita di 1 del numero dei circuiti hamiltoniani interni.

//input pB23e11

B23:**e.12** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[3,0](\boldsymbol{F})$.

Si danno due possibilità: i casi [A] in cui tutti i tre archi cd, da ed ab fanno parte di $\mathbf{D}$ e i casi [B] in cui nessuno di questi tre archi fa parte di $\mathbf{D}$.
Sia nei casi [A] che nei casi [B] può accadere che $\mathsf{y} \in \boldsymbol{F}$ o meno e può accadere che $\mathsf{w} \in \boldsymbol{F}$ oppure che $\mathsf{w} \notin \boldsymbol{F}$. Se una di queste caselle non appartiene alla $\boldsymbol{F}$ si deve tener conto di una regione-ZZR estranea alla $\boldsymbol{F}$ costituita dalla casella estranea e da quelle da lei raggiungibili mediante cammini-ZZR di caselle senza attraversare $\mathsf{Perim}(\boldsymbol{F})$ ed eventualmente di regioni-ZZR estranee connesse-ZZB alla suddetta.

Nei casi [A] i circuiti che delimitano queste regioni estranee fanno parte di $\mathbf{D}$; in tali casi l'aggiunta di n evita che facciano parte di $\mathbf{D}'$ e provoca l'inclusione delle regioni estranee nella chiusura $\mathbf{C}'$.

Nei casi [B] i circuiti che delimitano queste regioni estranee non fanno parte di $\mathbf{D}$, ma solo di $\mathsf{Perim}(\boldsymbol{F})$ e le regioni fanno parte di $\mathbf{C}$. Nei casi [B] si deve tener conto anche di una regione estranea comprendente n e almeno una casella a lei connessa-ZZR; anche questa regione è delimitata da un circuito contenuto in $\mathsf{Perim}(\boldsymbol{F}) \setminus \mathbb{P}$ e fa parte di $\mathbf{C}$.

Le figure che seguono riguardano i casi di numeri massimi di regioni estranee le quali sono prive di regioni loro connesse-ZZB, regioni che se presenti si comporterebbero come la loro regione radice.

Per questi casi si hanno le seguenti relazioni di crescita:

[A]: $\mathbf{D} = E \oplus ba \oplus E' \oplus ad \oplus E'' \oplus dc$, $\mathbf{D}' = E \oplus bc$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{\mathsf{n}\} \dot\cup K \dot\cup L$;

[B] $\mathbf{D}' = \mathbf{D} = E$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$.

//input pB23e12

B23:**e.13** **Manovra** $\boldsymbol{F}' = \mathsf{A}[4,0](\boldsymbol{F})$.

Si danno due possibilità: i casi [A] in cui tutti i 4 vertici di n fanno parte di $\mathbf{D}$ e i casi [B] in cui nessuno di questi vertici fa parte di $\mathbf{D}$.

Considerazioni analoghe alle precedenti conducono alle equazioni di crescita e alle figure che seguono.

[A]: $\mathbf{D} = E \oplus c'cb \oplus E_1 \oplus ba \oplus E_2 \oplus ad \oplus E_3 \oplus dcc''$, $\mathbf{D}' = E \oplus c'cc''$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \dot\cup \{\mathsf{n}\} \dot\cup G \dot\cup K \dot\cup L$;

[B]: $\mathbf{D}' = \mathbf{D} = E$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$.

//input pB23e13