1

Capitolo B22
piano sugli interi: trasformazioni e angoli

Contenuti delle sezioni

43 pagine

B220.01 In questo capitolo si prosegue l'introduzione di nozioni geometriche fondamentali alle quali si può dare una base costruttiva in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Qui faremo sistematico riferimento a gruppi di permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che consentono di individuare varie proprietà di simmetria di questo piano e consentono di dare a tale ambiente una descrizione più concisa e, soprattutto, decisamente più organica.

Occorre rilevare che il gruppo totale delle permutazioni del piano-ZZ, $\mathsf{Perm}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, è assai vasto e poco definito; in particolare esso ha cardinale superiore al numerabile e quindi serve poco agli sviluppi di carattere costruttivo.
$\mathsf{Perm}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ serve solo come ambiente entro il quale inquadrare i suoi vari sottogruppi, tutti finiti o numerabili come lo stesso piano-ZZ, in grado di portare a risultati concerneti simmetrie chiarificatrici.

Questi gruppi sono facilmente comprensibili, anche in virtù del poter essere trattabili con l'aiuto di visualizzazioni significative e facili da ricordare.

La visualizzabilità delle accennate simmetrie inducono a richiamare spesso i corrispondenti sottogruppi per esemplificare efficacemente varie proprietà generali della teoria dei gruppi di trasformazioni.

Qui vengono introdotti solo sottogruppi di $\mathsf{Perm}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ costituiti dalle trasformazioni biiettive che lasciano invariate importanti proprietà di configurazioni collocabili entro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; accade in effetti che queste proprietà si possono presentare con l'aiuto di chiare raffigurazioni e rivestono interesse sia per considerazioni generali che per varie questioni applicative.

Tutti i gruppi di permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che consideriamo conservano l'adiacenza-ZZR; da questa seguono anche il mantenimento delle prorietà di adiacenza-ZZB, collinearità, parallelismo e ortogonalità.

Quindi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ da una proprietà locale che estende la adiacenza tra i numeri interi seguono proprietà globali che giustificano, pur entro limiti che si rivelano presto, l'adozione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come primo modello di situazioni di interesse della fisica (in particolare dell'ottica geometrica applicata) e della informatica (si pensi alla importanza della computer graphics per l'intera vita sociale e culturale).

In seguito, per ricordare le immediate conseguenze dell'adiacenza-ZZR, diremo che ci interessano le trasformazioni del piano sugli interi che conservano l'adiacenza-ZZRB,

B220.02 Nella prima parte, dopo aver introdotte le riflessioni rispetto a rette-ZZK, gli angoli multipli di 45° e le rotazioni per angoli multipli di 90°, si possono individuare le isometrie del piano-ZZ, cioè le permutazioni dei suoi punti che mantengono la quadranza dei suoi vettori.a-ZZ.
Successivamente vengono trattate con una certa sistematicità le trasformazioni lineari–ZZ e le loro rappresentazioni matriciali.
Dopo aver ripreso il prodotto scalare, l'ortogonalità e il parallelismo, si introduce l'insieme dei parallelogrammi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e si esaminano le trasformazioni lineari chiamate rotodilatazioni-ZZ. Queste conducono a introdurre una operazione binaria di prodotto tra punti-ZZ per la quale gioca un ruolo importante il punto $\langle 0, 1\rangle$ che si accinge a ricoprire il ruolo di unità immaginaria.

B22 a. riflessioni-ZZK

B22a.01 Come prime permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ossia come prime trasformazioni biunivoche di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con se stesso, introduciamo le 4 riflession che lasciano fissa una delle 4 rette-ZZK passanti per l'origine e che chiameremo complessivamente **riflessioni basilari-ZZK**.

riflessione rispetto all'asse verticale: $\mathsf{Mirr}_{[x=0]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle -i,j\rangle \rceil$.

riflessione rispetto all'asse orizzontale: $\mathsf{Mirr}_{[y=0]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle i,-j\rangle \rceil$.

riflessione rispetto alla diagonale principale, chiamata anche **scambio delle coordinate**:

$$\mathsf{Mirr}_{[y=x]} \;:=\; \mathsf{Mirr}_{[x-y=0]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle j,i\rangle \rceil \;.$$

riflessione rispetto alla diagonale secondaria:

$$\mathsf{Mirr}_{[y=-x]} \;:=\; \mathsf{Mirr}_{[x+y=0]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle -j,-i\rangle \rceil \;.$$

Si dice inoltre **simmetria centrale con centro nell'origine**, o **mezzogiro con centro nell'origine**, o anche **inversione delle coordinate**, la trasformazione

$$\mathsf{ZntsmyZZ}_{[0,0]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle -i,-j\rangle \rceil \;.$$

Si osserva che commutano tra loro sia le prime due riflessioni che la terza e la quarta e che la simmetria centrale si può ottenere come composizione delle prime due o come composizione della terza con la quarta:

$$\mathsf{Mirr}_{[x=0]} \cdot \mathsf{Mirr}_{[y=0]} \;=\; \mathsf{Mirr}_{[y=x]} \cdot \mathsf{Mirr}_{[y=-x]} \;=\; \mathsf{ZntsmyZZ}_{[0,0]} \;.$$

Le quattro riflessioni basilari-ZZK evidentemente sono delle involuzioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che lasciano invariata l'origine $\mathbf{0}_2 = \langle 0,0\rangle$ e l'adiacenza-ZZK. Di conseguenza anche la simmetria centrale conserva origine e adiacenza-ZZK.

B22a.02 Per le permutazioni del piano-ZZ che stiamo introducendo (come per le permutazioni di molti altri ambienti portatori di caratteristiche geometriche o più in generale dotati di strutture di rilevante utilità) usiamo anche notazioni alternative: in alcune di queste ponimo tra parentesi quadre elementi che caratterizzano sottotipi delle trasformazioni invece di collocarli a deponente.
Inoltre ci serviremo spesso di notazioni abbreviate di uso locale. In particolare nel seguito semplifichiamo $\mathbf{0}_2$ con $\mathbf{0}$.

Per le molte trasformazioni che si devono introdurre, dunque, utilizziamo varianti come le seguenti:

$$\mathcal{M}_x \;:=\; \mathsf{Mirr}[x=0] \;:=\; \mathsf{Mirr}_{[x=0]} \quad,\quad \mathcal{M}_y \;:=\; \mathsf{Mirr}[y=0] \;:=\; \mathsf{Mirr}_{[y=0]} \quad,$$

$$\mathcal{M}[y=x] \;:=\; \mathsf{Mirr}[y=x] \;:=\; \mathsf{Mirr}_{[y=x]} \quad,\quad \mathcal{M}[y=-x] \;:=\; \mathsf{Mirr}[y=-x] \;:=\; \mathsf{Mirr}_{[y=-x]} \quad,$$

$$\mathcal{C} \;:=\; \mathsf{ZntsmyZZ}[0,0] \;:=\; \mathsf{ZntsmyZZ}_{[0,0]} \;:=\; \mathsf{ZntsmyZZ}_{\mathbf{0}_2} \;.$$

Aggiungiamo una notazione concisa locale per l'identità su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $\mathcal{I} := \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

I precedenti simboli verranno utilizzati per individuare nuovi punti-ZZ e nuovi insiemi di punti-ZZ ottenuti trasformando punti-ZZ precedenti e individuando i nuovi ottenuti mediante espressioni nelle quali gli argomenti sono delimitati da parentesi tonde: ad esempio:

$$\mathsf{Mirr}[y=k](\langle 3,-1\rangle) \;=\; \langle 3,-1\rangle_{\rceil}\mathsf{Mirr}_{[y=k]} \quad,\quad \mathsf{ZntsmyZZ}_{\langle 0,0\rangle}(\langle i,j\rangle) = \langle i,j\rangle_{\rceil}\mathsf{ZntsmyZZ}_{\mathbf{0}_2} \;.$$

B22a.03 Gli effetti delle riflessioni basilari-ZZK introdotte in a01 sono illustrate dalle figure che seguono.

//input pB22a03

Sulle prime tre figure e sull'ultima si verifica subito che $\mathcal{M}_x \circ \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_y \circ \mathcal{M}_x = \mathcal{C}$; moltiplicando la precedente a destra e a sinistra per $\mathcal{M}_x$ si ottiene $\mathcal{C} \circ \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x \circ \mathcal{C} = \mathcal{M}_y$; moltiplicando la precedente a destra e a sinistra per $\mathcal{M}_y$ si ottiene $\mathcal{C} \circ \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_y \circ \mathcal{C} = \mathcal{M}_x$.
Di conseguenza $\mathcal{I}$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ e $\mathcal{C}$ costituiscono un gruppo di trasformazioni che chiamiamo **gruppo delle riflessioni-ZZR** e che denotiamo con ***Gr***ZZMR.

Similmente si trova che $\mathcal{I}$, $\mathcal{M}_{y=x}$, $\mathcal{M}_{y=-x}$ e $\mathcal{C}$ costituiscono un gruppo di trasformazioni che diciamo **gruppo delle riflessioni-ZZB** e denotiamo con ***Gr***ZZMB.

Per questi gruppi di trasformazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si trovano le seguenti tavole di composizione:

$$(1) \qquad \begin{array}{c|cccc} \mathcal{I} & \mathcal{I} & \mathcal{M}_x & \mathcal{M}_y & \mathcal{C} \\ \hline \mathcal{I} & \mathcal{I} & \mathcal{M}_x & \mathcal{M}_y & \mathcal{C} \\ \mathcal{M}_x & \mathcal{M}_x & \mathcal{I} & \mathcal{C} & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_y & \mathcal{M}_y & \mathcal{C} & \mathcal{I} & \mathcal{M}_x \\ \mathcal{C} & \mathcal{C} & \mathcal{M}_y & \mathcal{M}_x & \mathcal{I} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \mathcal{I} & \mathcal{I} & \mathcal{M}_{x-y} & \mathcal{M}_{x+y} & \mathcal{C} \\ \hline \mathcal{I} & \mathcal{I} & \mathcal{M}_{x-y} & \mathcal{M}_{x+y} & \mathcal{C} \\ \mathcal{M}_{x-y} & \mathcal{M}_{x-y} & \mathcal{I} & \mathcal{C} & \mathcal{M}_{x+y} \\ \mathcal{M}_{x+y} & \mathcal{M}_{x+y} & \mathcal{C} & \mathcal{I} & \mathcal{M}_{x-y} \\ \mathcal{C} & \mathcal{C} & \mathcal{M}_{x+y} & \mathcal{M}_{x-y} & \mathcal{I} \end{array} .$$

Osservando queste tavole si ricava che questi due gruppi sono isomorfi e abeliani.

Ricordiamo anche che nelle formule precedenti il segno "$\circ$" può essere interpretato sia come "$\circ_{lr}$" che come "$\circ_{rl}$" .

B22**a.04** Tutti gli elementi dei gruppi precedenti sono involuzioni, ossia si tratta di due gruppi di involuzioni; vedremo tra poco che hanno interesse anche gruppi di permutazioni di ZcZ che contengono trasformazioni ben diverse dalle involuzioni.

Pensiamo opportuno ricordare qui la proprietà delle involuzioni:

$$(1) \qquad I = I^{-1} \ \ , \ \ J = J^{-1} \implies (I \circ J)^{-1} = J \circ I \ .$$

Osserviamo anche che un insieme di involuzioni che commutano tra di loro è chiuso rispetto al prodotto, ovvero:

$$(2) \qquad I = I^{-1} \ \ , \ \ J = J^{-1} \ \ , \ \ I \circ J = J \circ I \implies (I \circ J)^{-1} = I \circ J \ .$$

Quindi ogni insieme di involuzioni contenuto nel terreno di un gruppo G che commutano tra di loro costituisce un sottogruppo di G il quale ovviamente è abeliano.
Il carattere abeliano di ***Gr***ZZMR e di ***Gr***ZZMB si può inquadrare nel precedente enunciato.

Troveremo invece coppie di trasformazioni involutorie dello stesso ambiente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\langle I, J \rangle$ per le quali $I \circ J$ non è un'involuzione ovvero, equivalentemente, tali che $I \circ J \neq J \circ I$; in effetti:

$$\ulcorner I = I^{-1} \ \wedge \ J = J^{-1} \urcorner \implies \ulcorner J \circ I \neq J \circ I \iff (I \circ J)^{-1} \neq I \circ J \urcorner \ .$$

B22**a.05** Più generali delle riflessioni-ZZK basilari sono le riflessioni rispetto alle diverse rette-ZZK, non necessariamente passanti per l'origine; queste permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le chiamiamo **riflessioni-ZZK**.

Introduciamole come trasformazioni delle coordinate:

riflessione rispetto alla retta verticale $[x = h]$: $\mathsf{Mirr}_{[x=h]} := \ulcorner \langle i, j \rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle 2h - i, j \rangle \urcorner$;

riflessione rispetto alla retta orizzontale $y = k$: $\mathsf{Mirr}_{[y=k]} := \ulcorner \langle i, j \rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle i, 2k - j \rangle \urcorner$;

riflessione rispetto alla retta-ZZD1 $y = x + u$: $\mathsf{Mirr}_{[y=x+u]} := \ulcorner \langle i, j \rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle j - u, i + u \rangle \urcorner$;

riflessione rispetto alla retta-ZZD2 $y = -x + v$: $\mathsf{Mirr}_{[y=v-x]} := \ulcorner \langle i, j \rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle v - j, v - i \rangle \urcorner$.

Si dice inoltre **simmetria centrale** o **mezzogiro** di centro $\langle h, k \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la trasformazione

$$\mathsf{\textbf{ZntsmyZZ}}_{[h,k]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \mapsto \langle 2h-i, 2k-j\rangle \rceil \;;$$

Tutte queste trasformazioni sono involuzioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; tutti i gruppi generati dalle riflessioni-ZZR che lasciano fisso un dato punto-ZZ sono isomorfi al gruppo $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZMR}$ e similmente tutti i gruppi generati dalle riflessioni-ZZB che lasciano fisso un dato punto-ZZ sono isomorfi al gruppo $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZMB}$.

Osserviamo inoltre che ogni retta-ZZK separa due semipiani-ZZ e che ogni retta orientata-ZZK separa due semipiani segnati-ZZ; chiaramente per ogni retta-ZZK R la riflessione $\mathsf{\textbf{Mirr}}_{[\mathsf{R}]}$ scambia i semipiani separati da tale retta cambiando i loro segni.

Introduciamo alcune notazioni per i semipiani associati a rette-ZZ orientate.

Denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{*,+}$ il semipiano con ordinate positive $\mathbb{Z} \times \mathbb{P}$.
Denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{*,0+}$ il semipiano con ordinate nonnegative $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
Denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{*,-}$ il semipiano con ordinate negative $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{-}$.
Denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{*,0-}$ il semipiano con ordinate nonpositive $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{0-}$.

Più in generale se R denota una retta-ZZ ordinata denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\mathsf{R},+}$ il semipiano dei punti-ZZ alla sinistra della R e introduciamo le tre varianti dal chiaro significato $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\mathsf{R},0+}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\mathsf{R},-}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\mathsf{R},0-}$.

B22 b. riflessioni-ZZK, rotazioni-ZZR e traslazioni-ZZK

B22b.01 Ci poniamo ora il problema delle composizioni e delle fattorizzazioni delle riflessioni-ZZK e vedremo che esse conducono alle traslazioni-ZZ introdotte in B21f e alle rotazioni-ZZR che vedremo in :d.

Le prime composizione che conviene considerare riguardano le riflessioni rispetto a due rette-ZZR mutuamente ortogonali

(1) $$\forall h,k \in \mathbb{Z}/2 \,:\, \mathsf{Mirr}_{[x=h]} \circ \mathsf{Mirr}_{[y=k]} = \mathsf{Mirr}_{[y=k]} \circ \mathsf{Mirr}_{[x=h]} = \mathsf{ZntsmyZZ}_{[h,k]}$$

e le riflessioni rispetto a due rette-ZZB mutuamente ortogonali

(2) $$\forall u,v \in \mathbb{Z} \,:\, \mathsf{Mirr}_{[y=x+u]} \circ \mathsf{Mirr}_{[y=-x+v]} = \mathsf{Mirr}_{[y=-x+v]} \circ \mathsf{Mirr}_{[y=x+u]} = \mathsf{ZntsmyZZ}_{[v-u)/2,(v+u)/2]} \,.$$

B22b.02 Le espressioni fornite per $\mathsf{Mirr}_{[x=h]}$ e $\mathsf{Mirr}_{[y=k]}$ individuano altre involuzioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, quelle corrispondenti a valori semidispari per i parametri h e k, cioè per $h,k \in \mathbb{Z}+1/2$. La prima si può interpretare come riflessione rispetto a una linea verticale formata da punti del piano $(\mathbb{Z}+1/2)\times\mathbb{Z}$, la seconda come riflessione rispetto a una linea orizzontale formata da punti del piano $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}+1/2)$.

Di conseguenza l'espressione per la simmetria centrale consente di considerare questo genere di involuzione anche quando h e/o k sono semidispari e quando u e v sono semidispari. Queste involuzioni si possono caratterizzare come simmetrie centrali con centri nei punti di $(\mathbb{Z}+1/2)\times\mathbb{Z}$, di $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}+1/2)$ e di $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$

Complessivamente quindi sono da considerare riflessioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ aventi come assi rette di $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$ e simmetrie centrali aventi come centri punti di $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$.

B22b.03 Una evidente bipartizione di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vede contrapporsi l'insieme dei punti-ZZ pari, cioè aventi la somma delle coordinate pari, che in breve chiamiamo **punti-ZZe**, e l'insieme dei punti-ZZ dispari, i punti aventi la somma delle coordinate dispari. che chiamiamo **punti-ZZo**.

La caratteristica di avere la somma delle coordinate dei punti-ZZ pari o dispari la chiamiamo **parità-ZZSC** e la corrispondente bipartizione la diciamo **bipartizione-ZZSC** (il digramma SC intende richiamare la somma delle coordinate).

L'origine e i punti della diagonale principale e della codiagonale sono punti-ZZe; i versori $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$ sono punti-ZZo.

I punti di ciascuna delle rette-ZZB sono tutti-ZZe oppure tutti-ZZo; sulle rette-ZZR, invece, si alternano punti delle due parità-ZZSC.

Una traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{[h,k]}$ lascia invariate le parità-ZZSC dei punti che trasforma sse $h+k$ è pari, scambia le parità-ZZSC in caso contrario. Le riflessioni rispetto a rette, sia-ZZR che-ZZB, non cambiano le parità-ZZSC. Le riflessioni rispetto a rette della forma $x = h+1/2$ e della forma $y = k+1/2$ scambiano le parità-ZZSC.

Le rotazioni-ZZ con centro in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ non cambiano le parità; viceversa le parità sono scambiate dalle rotazioni di 90° con centro in $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$, cioè in un punto con coordinate semidispari.

La bipartizione-ZZSC serve in particolare a distinguere tra le permutazioni di tale piano quelle che conservano la parità-ZZSC di tutti i punti-ZZ, da quelle che scambiano le parità-ZZSC di tutti i punti-ZZ e dalle permutazioni rimanenti; queste ultime peraltro qui hanno poco interesse in quanto evidentemente non mantengono la collinearità e quindi nemmeno la adiacenza-ZZRB.

L'insieme delle permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che conservano la parità-ZZSC, come ogni insieme di permutazioni di un qualsiasi ambiente che godono di una proprietà di conservazione, costituiscono un sottogruppo di permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. È infatti evidente che il prodotto di due permutazioni con tale proprietà gode della stessa proprietà.

Un sovragruppo del gruppo precedente è fornito dall'insieme delle permutazioni-ZZ che conservano o scambiano le parità-ZZSC: evidentemente il prodotto di due permutazioni che scambiano è una permutazione che conserva e il prodotto di due permutazioni aventi comporti opposti scambia la parità-ZZSC.

Dalla distinzione tra punti-ZZ pari e dispari discende una distinzione strettamente analoga tra caselle-ZZ pari e dispari: conveniamo di chiamare casella-ZZ pari ogni casella che ha il vertice SW pari e casella-ZZ dispari ciascuna delle rimanenti. Anche per le caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si può quindi parlare di parità-ZZSC. Introduciamo inoltre la scrittura $SetZZC$ per denotare l'insieme delle caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La bipartizione delle 8×8 caselle della classica scacchiera in 32 bianche e 32 nere è una evidente resrtrizione della bipartizione suddetta. Si possono quindi distinguere le permutazioni della scacchiera che conservano il colore delle caselle da quelle che lo modificano. Chiaramente sulla scacchiera ogni mossa di cavallo comporta un cambiamento del colore, mentre ciascuno degli alfieri di un giocatore si muove solo o su caselle bianche o su caselle nere.

B22b.04 Introduciamo le scritture **Prm**ZZc e **Prm**ZZm per denotare le permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che, risp., conservano e modificano la parità dei punti-ZZ.
È evidente che una traslazione $\boldsymbol{Trsl}[h, k]$ appartiene a **Prm**ZZc sse $h + k$ è pari, mentre appartiene a **Prm**ZZm in caso contrario. Denotiamo con **Trsl**ZZc l'insieme delle prime traslazioni e con **Trsl**ZZm l'insieme delle seconde.
Le riflessioni rispetto sia a rette-ZZR che a rette-ZZB, non cambiano le parità-ZZSC. Le riflessioni rispetto a rette della forma $x = h + 1/2$ e della forma $y = k + 1/2$, viceversa, modificano le parità-ZZSC.

Denotiamo con **M**ZZB le riflessioni rispetto a rette-ZZB, con **M**ZZRc le riflessioni rispetto alle rette-ZZR e con **M**ZZRm le riflessioni rispetto alle rette con una sola delle coordinate semidispari.

Scriviamo inoltre **C**ZZc per l'insieme delle simmetrie centrali di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aventi come centro un punto-ZZ o un elemento di $(\mathbb{Z}+1/2) \times (\mathbb{Z}+1/2)$ e **C**ZZm per l'insieme delle simmetrie centrali aventi come centro una coppia di coordinate delle quali una intera e una semidispari. evidentemente **C**ZZc $\subset$ **Prm**ZZc e **C**ZZm $\subset$ **Prm**ZZm.

Queste notazioni servono a organizzare le formule delle composizioni tra le permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dei vari generi.
Per esempio si hanno i seguenti schemi di composizione per le permutazioni generiche e per le trasposizioni:

(1)
$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{Prm}\mathsf{ZZc} & \mathbf{Prm}\mathsf{ZZm} \\ \hline \mathbf{Prm}\mathsf{ZZc} & \mathbf{Prm}\mathsf{ZZc} & \mathbf{Prm}\mathsf{ZZm} \\ \mathbf{Prm}\mathsf{ZZm} & \mathbf{Prm}\mathsf{ZZm} & \mathbf{Prm}\mathsf{ZZc} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZc} & \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZm} \\ \hline \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZc} & \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZc} & \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZm} \\ \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZm} & \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZm} & \mathbf{Trsl}\mathsf{ZZc} \end{array} .$$

In tali schemi si evidenziano il sottogruppo delle permutazioni che conservano la parità-ZZSC e il sottogruppo delle trasposizioni con la stessa proprietà

B22b.05 Mediante verifiche effettuabili su grafici e/o su espressioni nelle coppie di coordinate, per le composizioni delle riflessioni si trovano facilmente le seguenti proprietà.

La composizione di due riflessioni rispetto alle due verticali $x = h$ e $x = h + d$ con $h, d \in \mathbb{Z}/2$ è la traslazione orizzontale di passo $2d$; in formula

(1) $$\mathsf{Mirr}_{[x=h]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x=h+d]} = \boldsymbol{Trsl}_{[2d,0]} .$$

La composizione di due riflessioni rispetto alle due orizzontali $y = k$ e $y = k + e$ con $k, e \in \mathbb{Z}/2$ è la traslazione verticale di passo $2e$; in formula

(2) $$\mathsf{Mirr}_{[y=k]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[y=k+e]} = \boldsymbol{Trsl}_{[0,2e]} .$$

Per le trasformazioni inverse, tenuto conto di a03(3), si ha

(3) $$\mathsf{Mirr}_{[x=h]} \circ_{rl} \mathsf{Mirr}_{[x=h+d]} = \mathsf{Mirr}_{[x=h+d]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x=h]} = \boldsymbol{Trsl}_{[-2d,0]} ;$$

(4) $$\mathsf{Mirr}_{[y=k]} \circ_{rl} \mathsf{Mirr}_{[y=k+e]} = \mathsf{Mirr}_{[y=k+e]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[y=k]} = \boldsymbol{Trsl}_{[0,-2e]} .$$

Equivalentemente si hanno le proprietà

(5) $$\mathsf{Mirr}_{[x=h]} \circ_{rl} \mathsf{Mirr}_{[x=u]} = \boldsymbol{Trsl}_{[2(h-u),0]} ;$$

(6) $$\mathsf{Mirr}_{[y=k]} \circ_{rl} \mathsf{Mirr}_{[y=v]} = \boldsymbol{Trsl}_{[0,2(k-v)]} .$$

Si trovano risultati analoghi per le composizioni di due riflessioni-ZZD1 e di due riflessioni-ZZD2

(7) $$\mathsf{Mirr}_{[y=x+h]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[y=x+h+d]} = \boldsymbol{Trsl}_{[-d,d]} ;$$

(8) $$\mathsf{Mirr}_{[y=-x+h]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[y=-x+h+d]} = \boldsymbol{Trsl}_{[d,d]} .$$

Si osserva che le precedenti proprietà si presentano a coppie che si scambiano quando si scambiano i ruoli delle ascisse con quelli delle ordinate e conseguentemente si scambiano le diagonali ZZD1 e ZZD2.

B22b.06 Per la composizione di due simmetrie centrali si trova

(1) $$\mathsf{ZntsmyZZ}_{[h,k]} \circ_{lr} \mathsf{ZntsmyZZ}_{[u,v]} = \boldsymbol{Trsl}_{[2(h-u),2(k-v)]} .$$

Infatti [a02] con abbreviazioni facilmente individuabili si trova:

(2) $$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[h,k]} \circ \mathcal{C}_{[u,v]} &= \mathcal{M}_{[x=h]} \circ \mathcal{M}_{[y=k]} \circ \mathcal{M}_{[x=u]} \circ \mathcal{M}_{[y=v]} = \\ &\mathcal{M}_{[x=h]} \circ \mathcal{M}_{[x=u]} \circ \mathcal{M}_{[y=k]} \circ \mathcal{M}_{[y=v]} = \mathcal{T}_{[2(h-u),0]} \circ \mathcal{T}_{[0,2(k-v)]} .\end{aligned}$$

Per le composizioni di una riflessione-ZZR con una riflessione-ZZB, come vedremo più avanti, si ottengono rotazioni-ZZK.

B22b.07 In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (come in spazi più ricchi) le riflessioni-ZZK sono esprimibili come combinazioni di riflessioni-ZZK basilari e traslazioni-ZZK.
La riflessione $\mathsf{Mirr}_{[x=h]}$ si ottiene effettuando nell'ordine la traslazione $\boldsymbol{Trsl}[-h\,\mathsf{E}_x]$ (in modo che la $[x = h]$ venga a coincidere con l'asse Oy_Z), la riflessione $\mathsf{Mirr}_{[x=0]}$ e la traslazione $\boldsymbol{Trsl}[-h\,\mathsf{E}_x]$ (inversa della prima). Il suo effetto è quindi dato da

(1) $$\mathsf{Mirr}_{[x=h]} = \boldsymbol{Trsl}_{[-h,0]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x=0]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[h,0]} .$$

A questa uguaglianza può essere significativo dare la forma di regola di commutazione:

(2) $$\boldsymbol{Trsl}_{[h,0]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x=h]} = \mathsf{Mirr}_{[x=0]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[h,0]} .$$

B22b.08 **Eserc.** Verificare le seguenti uguaglianze, per h e k interi arbitrari:

(1) $$\mathsf{Mirr}_{[y=k]} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{[0,-k]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[y=0]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[0,k]} \;;$$

(2) $$\begin{aligned}\mathsf{Mirr}_{[y=x+h]} &= \boldsymbol{Trsl}_{[0,-h]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x-y]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[0,h]} \\ &= \boldsymbol{Trsl}_{[h,0]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x-y]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[-h,0]}\end{aligned} \;;$$

(3) $$\begin{aligned}\mathsf{Mirr}_{[y=-x+k]} &= \boldsymbol{Trsl}_{[0,-k]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x+y]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[0,k]} \\ &= \boldsymbol{Trsl}_{[-k,0]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x+y]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[k,0]}\end{aligned} \;.$$

B22b.09 Esaminiamo ora le composizioni di una riflessione con una traslazione e quelle di una traslazione con una riflessione. Osserviamo innanzi tutto che in generale queste due trasformazioni non commutano: per esempio

(1) $$\begin{aligned}\mathsf{Mirr}_{[x=h]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[u,v]} &= \ulcorner \langle i,j\rangle \mapsto \langle 2h-i+u, j+v\rangle \urcorner \\ \boldsymbol{Trsl}_{[u,v]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x=h]} &= \ulcorner \langle i,j\rangle \mapsto \langle 2h-i-u, j+v\rangle \urcorner\end{aligned} \;.$$

Le formule precedenti mostrano che si ha la commutazione sse $u=0$, cioè sse la traslazione è parallela all'asse della riflessione. Visivamente questo è chiaro anche per gli altri tre tipi di riflessioni composte con traslazioni. Possono quindi essere utili le seguenti formule che conducono a composizioni di trasformazioni che commutano (qui abbreviamo **Mirr** con $\mathcal{M}$ e ***Trsl*** con $\mathcal{T}$).

(2) $$\mathsf{Mirr}_{[x=h]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[u,v]} \;=\; \mathsf{Mirr}\left[x=h+\frac{u}{2}\right] \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[0,v]} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{[0,v]} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}\left[x=h+\frac{u}{2}\right] \;;$$

(3) $$\mathcal{M}_{[y=k]} \circ_{lr} \mathcal{T}_{[u,v]} \;=\; \mathcal{M}\left[y=k+\frac{v}{2}\right] \circ_{lr} \mathcal{T}_{[u,0]} \;=\; \mathcal{T}_{[u,0]} \circ_{lr} \mathcal{M}\left[y=k+\frac{v}{2}\right] \;;$$

(4) $$\begin{aligned}\mathcal{M}_{[y=x+h]} \circ_{lr} \mathcal{T}_{[u,v]} &= \mathcal{M}\left[y=x+h+\frac{v-u}{2}\right] \circ_{lr} \mathcal{T}\left[\frac{u+v}{2},\frac{u+v}{2}\right] \\ &= \mathcal{T}\left[\frac{u+v}{2},\frac{u+v}{2}\right] \circ_{lr} \mathcal{M}\left[y=x+h+\frac{v-u}{2}\right]\end{aligned} \;;$$

(5) $$\begin{aligned}\mathcal{M}_{[y=-x+k]} \circ_{lr} \mathcal{T}_{[u,v]} &= \mathcal{M}\left[y=-x+k+\frac{v+u}{2}\right] \circ_{lr} \mathcal{T}\left[-\frac{v-u}{2},\frac{v-u}{2}\right] \\ &= \mathcal{T}\left[\frac{v-u}{2},\frac{v-u}{2}\right] \circ_{lr} \mathcal{M}\left[y=-x+k+\frac{v+u}{2}\right]\end{aligned} \;.$$

Inoltre si segnalano i seguenti casi particolari

(6) $$\mathcal{M}_{[y=x+h]} \circ_{lr} \mathcal{T}_{[-v,v]} \;=\; \mathcal{M}_{[y=x+h+v]} \;;$$

(7) $$\mathcal{M}_{[y=-x+k]} \circ_{lr} \mathcal{T}_{[u,u]} \;=\; \mathcal{M}_{[y=-x+k+u]} \;;$$

B22 **c. angoli-ZZK**

B22c.01 La nozione di angolo risulta piuttosto complessa da definire e in questa *esposizione* viene presentata attraverso varie versioni procedendo dalle più povere di applicazioni alle più utilizzabili seguendo un andamento piuttosto elaborato, ma che riesce a garantire la effettività di tutte le costruzioni introdotte.

In questa sezione viene definita nell'ambito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la versione più economica degli angoli, entità destinate al confronto delle direzioni che si possono trovare in un ambiente geometrico e alla misurazione di quanto due direzioni si scostano. La relativa misura numerica è chiamata ampiezza angolare e risulta essenziale sia per l'impianto teorico che per le applicazioni che qui cerchiamo di segnalare anche per problemi da affrontare con poche informazioni e con strumenti poveri.

In questo capitolo possiamo servirci solo dei numeri interi (che peraltro sono i soli strumenti disponibili per risolvere molte situazioni problematiche nel mondo reale) e per procedere in modo preciso, garantendo la costruttività delle operazioni introdotte e senza rinunciare alla versatilità si devono sviluppare discorsi appesantiti da molti dettagli.

Nel seguito distingueremo chiaramente tra la nozione più intuitiva di angolo senza segno e quella più ricca di applicazioni di angolo con segno.
Per avere discorsi il più possibile precisi i primi sono chiameti angoli.us (unsigned, non segnati) e i secondi angoli *tout court*. Spesso tuttavia, per alleggerire il discorso, useremo in modo un po' vago il termine "angolo" confidando che il contesto consenta di evitare fraintendimenti.

B22c.02 Consideriamo un punto-ZZ $V = \langle h, k\rangle$ e le due rette-ZZR $[x = h]$ e $[y = k]$ che si intersecano in V.
Queste ripartiscono $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in 9 parti:
- il singoletto costituito da V;
- 4 semirette-ZZR prive di V che si possono denotare, risp., con $\{n \in \mathbb{P} :| \langle h+n, k\rangle\}$, $\{n \in \mathbb{P} :| \langle h, k+n\rangle\}$, $\{n \in \mathbb{P} :| \langle h-n, k\rangle\}$ e $\{n \in \mathbb{P} :| \langle h, k-n\rangle\}$;
- 4 insiemi di punti-ZZ ciascuno connesso-ZZR e ottenibile come unione di semirette orizzontali o verticali; questi ultimi sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ li chiamiamo, comprensibilmente, **quadranti-ZZ traslati**.

Consideriamo due semirette-ZZB S e TSs aventi in comune l'estremità che denotiamo con V. non appartenenti alla stessa retta (una orizzontale e una verticale), L'insieme $\mathcal{A} := \{V\} \cup \mathsf{S} \cup \mathsf{T}$ partiziona $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in se stesso, in un settore un quadrante traslato e in un insieme contenente 3 quadranti traslati.

Diciamo **angolo.ZZR retto** definito dalla terna $\mathsf{A} := \big\langle \mathsf{S}, V, \mathsf{T}\big\rangle$ l'insieme delimitato dalle due semirette-ZZR; più precisamente si tratta dell'insieme dei punti-ZZ appartenenti alle semirette, V incluso e dei punti che vengono toccati da una semiretta mobile che viene fatta ruotare intorno a V a partire dalla S fino a coincidere con la T.

V si dice **vertice dell'angolo.ZZR** e le due semirette **lati dell'angolo.ZZR**. Evidentemente a ogni punto-ZZ sono associati 4 angoli retti.ZZR e ciascuno di questi è associato biunivocamente a uno dei suddetti quattro quadranti traslati.

Occorre chiarire che parlare di insieme di punti toccati dalla semiretta mobile consiste nel ricorrere a una metafora che consente di individuare in modo intuitivo l'insieme dei punti-ZZ che appartengono a una delle semirette-ZZ associate a un angolo.ZZK, semirette con estremità in **0** contenute nello stesso angolo.ZZK; tra queste semirette includiamo i due lati dell'angolo.

B22c.03 I quattro angoli.ZZR retti aventi il punto-ZZ V come vertice si possono distinguere con le quattro sigle geografiche NW, NE, SE e SW, ciascuna costituita dalle due lettere che contraddistinguono le due semirette con il ruolo dei lati. I duetti costituiti dagli angoli.ZZR NW e SE e dagli angoli.ZZR NE e SW si dicono costituiti da **angoli.ZZR opposti al vertice**; I duetti costituiti dagli angoli.ZZR NW e NE, dagli angoli.ZZR NE e SE, dagli angoli.ZZR SE e SW e dagli angoli.ZZR SW e NW si dicono costituiti da **angoli.ZZR supplementari**.

//input pB22c02

Si osserva che due angoli.ZZR opposti al vertice sono scambiati dalla simmetria centrale di centro V, che i quattro angoli.ZZR con un vertice in comune si ottengono a partire da uno qualsiasi di essi applicando le due riflessioni-ZZK che scambiano due di essi. Inoltre si osserva che gli angoli.ZZR relativi a un qualsiasi vertice $W = \mathbf{w}$ si ottengono da quelli relativi a V mediante la traslazione $\boldsymbol{Trsl}[\mathsf{w} - \mathsf{v}] = \boldsymbol{Trsl}[\overrightarrow{VW}]$.

B22c.04 Considerazioni analoghe alle precedenti si possono fare su rette e semirette-ZZB.
Si inizia con un punto-ZZ $V = \langle h, k\rangle$ e le due rette-ZZB $[y = x - h + k]$ e $[y = -x + h + k]$ che si intersecano in V.
Queste ripartiscono $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in 9 parti: il singoletto costituito da V, 4 semirette-ZZB e 4 insiemi di punti ciascuno connesso-ZZR e ottenibile come unione di semirette orizzontali o verticali che chiameremo, comprensibilmente, **quadranti-ZZ obliqui traslati**.
Se S e T denotano due delle semirette-ZZB con estremità in V non appartenenti alla stessa retta (una parallela a ZZD1, l'altra a ZZD2), l'insieme $\mathcal{A} := \{V\} \cup \mathsf{S} \cup \mathsf{T}$ tripartisce $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in un quadrante traslato obliquo, in se stesso e in un insieme contenente 3 quadranti traslati obliqui.
Diciamo **angolo.ZZB retto** la terna $\mathsf{A} := \big\langle \mathsf{S}, V, \mathsf{T}\big\rangle$, ovvero la configurazione individuata dalle due semirette-ZZB e dal loro vertice comune V. Ancora V si dice **vertice dell'angolo.ZZB** e le due semirette **lati dell'angolo.ZZB**.
Evidentemente a ogni punto-ZZ sono associati 4 angoli.ZZB retti e ciascuno di questi è associato biunivocamente a uno dei suddetti quattro quadranti traslati obliqui.

B22c.05 I quattro angoli.ZZB retti aventi il punto-ZZ V come vertice si possono distinguere con le quattro sigle geografiche E, N, W e S, ciascuna che contraddistingue un punto cardinale associabile alla semiretta-ZZR rispetto alla cui riflessione il quadrante obliquo è trasformato in se stesso. I duetti costituiti dagli angoli.ZZB E e N e dagli angoli.ZZB W e S si dicono duetti di **angoli.ZZB opposti al vertice**; I duetti costituiti dagli angoli.ZZB E e W e dagli angolZZB N e S e i duetti costituiti dagli angoli.ZZR SE e SW e dagli angoli.ZZR SW e NW si dicono duetti di **angoli.ZZR supplementari**.

Anche due angoli.ZZB opposti al vertice sono scambiati dalla simmetria centrale di centro V; inoltre quattro angoli.ZZB con un vertice in comune si ottengono a partire da uno qualsiasi di essi applicando riflessioni che scambiano due di essi.
Inoltre si osserva che gli angoli.ZZB retti relativi a un qualsiasi vertice $W = \mathbf{w}$ si ottengono da quelli relativi a V mediante la traslazione $\boldsymbol{Trsl}[\mathsf{w} - \mathsf{v}] = \boldsymbol{Trsl}[\overrightarrow{VW}]$.

B22c.06 Gli angoli.ZZR e gli angoli.ZZB con vertice nell'origine si dicono concisamente **angoli-ZZKvO**; qui il digramma vO vuole segnalare che questi angoli hanno il vertice nell'origine, in $\mathbf{0}$.

Eserc. 1 Si osservi la funzione $F := \ulcorner \langle i, j\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \upharpoonleft \langle i + j, i - j\rangle \urcorner$. Constatare che (a) lascia fissa l'origine; (b) ha come codominio l'insieme dei punti-ZZ pari, non è suriettiva ma è invertibile;

(c) trasforma rette-ZZK in rette-ZZB private dei loro punti-ZZ dispari;
(d) trasforma i quadranti in quadranti obliqui privati dei loro punti dispari.
(e) Osservare che essa trasporta le nozioni sugli angoli-ZZK in nozioni sugli angoli-ZZB.
(f) precisare considerazioni simili per la funzione $\ulcorner \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \upharpoonleft \langle i-j, i+j\rangle \urcorner$

B22c.07 Considerazioni un po' più dettagliate delle precedenti si possono fare sui cosiddetti angoli-ZZK, angoli delimitati da due semirette-ZZK.
Iniziamo considerando insiemi di punti-ZZ delimitati da semirette-ZZK con estemità nell'origine, con l'intenzione di generalizzarli applicando traslazioni-ZZ.

Si osserva che le 4 rette-ZZK che si incontrano nell'origine individuano una ripartizione in 17 parti di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ costituita da:

$\{cpzrzr\} = \{\mathbf{0}\}$;

4 semirette-ZZR che denotiamo, risp., con $\mathsf{e}_x\,\mathbb{P}$, $\mathsf{e}_y\,\mathbb{P}$, $-\mathsf{e}_x\,\mathbb{P}$, $-\mathsf{e}_y\,\mathbb{P}$, iascuna delle quali connessa-ZZ;

4 semirette-ZZB che denotiamo, risp., con $\langle 1,1\rangle\,\mathbb{P}$, $\langle -1,1\rangle\,\mathbb{P}$, $\langle -1,-1\rangle\,\mathbb{P}$, $\langle 1,-1\rangle\,\mathbb{P}$, ciascuna delle quali connessa-ZZB;,

8 insiemi separati dalle 8 semirette precedenti ciascuno dei quali connesso-ZZR ma tra di loro sconnessi-ZZR.

Definiamo più dettagliatamente questi ultimi 8 sottoinsiemi numerabili che chiameremo **semiquadranti basilari**:

semiquadrante basilare-ZZENE : $\{i = 2,3,\ldots\,,\ j = 1,\ldots,i-1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZNNE : $\{j = 2,3,\ldots\,,\ i = 1,\ldots,j-1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZNNW : $\{j = 2,3,\ldots\,,\ i = -1,\ldots,-i+1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZWNW : $\{i = -2,-3,\ldots\,,\ j = 1,\ldots,i-1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZWSW : $\{i = -2,-3,\ldots\,,\ j = -1,\ldots,-i+1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZSSW : $\{j = -2,-3,\ldots\,,\ i = -1,\ldots,-j+1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZSSE : $\{j = -2,-3,\ldots\,,\ i = 1,\ldots,j-1 :\mid \langle i,j\rangle\}$;
semiquadrante basilare-ZZESE : $\{i = 2,3,\ldots\,,\ j = -1,\ldots,-1+1 :\mid \langle i,j\rangle\}$.

Si osserva che ciascuno dei semiquadranti basilari si può ottenere come unione di semirette-ZZR o come unione di segmenti-ZZR.

Definiamo quindi come **angolo-ZZns basico semiretto** ogni insieme di punti-ZZ individuato da una terna della forma $\big\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}, \mathsf{T}\big\rangle$, ove S e T sono le due semirette che delimitano uno degli 8 semiquadranti basilari. Questi insiemi sono costituiti dall'origine, dai punti delle semirette e dai punti del semiquadrante che queste delimitano.

Questi 8 sottoinsiemi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si chiamano anche semiquadrati orlati e si possono identificare, risp., con le notazioni di derivazione geografica qENE, qNNE, qNNW, qWNW, qWSW, qSSW, qSSE e qESE.

B22c.08 Rivediamo le 8 semirette-ZZK basilari nel seguente ordine: semiretta-ZZE := $\mathbf{0}_2 + \mathbb{P}\,\mathsf{e}_x = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle i,0\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZNE := $\mathbf{0}_2 + \mathbb{P}(\mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y) = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle i,i\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZN := $\mathbf{0}_2 + \mathbb{P}\,\mathsf{e}_y = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle 0,i\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZNW := $\mathbf{0}_2 + \mathbb{P}(-\mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y) = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle -i,i\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZW := $\mathbf{0}_2 - \mathbb{P}\,\mathsf{e}_x = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle -i,0\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZSW := $\mathbf{0}_2 - \mathbb{P}(\mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y) = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle -i,-i\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZS := $\mathbf{0}_2 - \mathbb{P}\,\mathsf{e}_y = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle 0,-i\rangle\big\rangle$; semiretta-ZZSE := $\mathbf{0}_2 + \mathbb{P}(\mathsf{e}_x - \mathsf{e}_y) = \big\langle i \in \mathbb{P} :\mid \langle -i,i\rangle\big\rangle$.

A queste semirette e alle specificazioni sincopate "-ZZ$\mathfrak{y}$" loro associate biunivocamente assegnamo l'ordine circolare che diciamo **precedenza antioraria** che scende dall'elenco precedente al quale si aggiunge la richiesta "la semiretta-ZZSE precede immediatamente la semiretta-ZZE".

Sulla base di questo ordine circolare possiamo affermare, per esempio, che tra "-ZZN" e "-ZZSW" si susseguono nell'ordine "-ZZNW" e "-ZZW", mentre tra "-ZZSW" e "-ZZN" si susseguono nell'ordine "-ZZS", "-ZZSE", "-ZZE" e "-ZZNE".

Riprendiamo quindi la definizione degli angoli-ZZK basilari individuati dalle notazioni della forma $\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}_2, \mathsf{T}\rangle$, dicendo che le semirette-ZZK S e T hanno il ruolo dei **lati dell'angolo.ZZK**.
Un angolo.ZZK con $\mathsf{S} = \mathsf{T}$, cioè l'angolo con i lati coincidenti, si dice angolo.ZZK nullo e individua l'insieme dei soli punti della semiretta S.
Un angolo.ZZK per il quale T segue immediatamente S nell'ordine antiorario lo chiamiamo angolo.ZZK semiretto ed è costituito dal vertice $\mathbf{0}$, dai punti dei suoi lati e dai punti del relativo semiquadante; esso lo chiamiamo anche semiquadrante orlato.
Un angolo per il quale tra i lati S e T si trova solo un'altra semiretta U costituisce un angolo.ZZK retto in quanto i uoii lati sono ortogonali e individua l'insieme unione degli angoli semiretti $\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}, \mathsf{U}raa$ e $\langle \mathsf{U}, \mathbf{0}, \mathsf{T}raa$, insieme chiamato anche quadrante orlato.
In generale all'angolo.ZZK $\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}_2, TTs\rangle$ individua l'insieme unione dei semiquadranti orlati definiti dalle coppie di semirette-ZZ successive comprese tra la S e la T.

B22c.09 Consideriamo due angoli-ZZK basilari $\hat{\alpha} :=\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}, \mathsf{T}\rangle$ e $\hat{\delta} :=\langle \mathsf{T}\mathbf{0}, \mathsf{U}\rangle$ tali che la semiretta-ZZ S precede la T, questa precede la U e questa precede la S. Due tali angoli-ZZK sono detti **angoli consecutivi**.
Definiamo ora come **somma di due angoli-ZZK consecutivi**, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\delta}$, l'angolo.ZZK basilare $\langle \mathsf{S}, V, \mathsf{U}\rangle$ che denotiamo anche con $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

Evidentemente abbiamo definito una operazione binaria parziale commutativa ed associativa la quale a due angoli-ZZK semiretti fa corrispondere un angolo.ZZK retto, che a un angolo.ZZK semiretto e a un angolo.ZZK retto associa un cosiddetto angolo.ZZK sesquiretto, che a un angolo.ZZK sesquiretto e a un angolo.ZZK semiretto oppure a due angoli-ZZK retti associa un cosiddetto angolo.ZZK piatto, angolo della forma $\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}, -\mathsf{S}\rangle$.

Si vede quindi che ogni angolo.ZZK basilare nonnullo si può ottenere sommando un opportuno insieme di angoli semiretti consecutivi. Inoltre l'angolo.ZZK nullo è elemento neutro di questa somma.

Ad ogni angolo.ZZK basilare $\hat{\alpha}$ associamo una valutazione convenzionale che chiamiamo ampiezza angolare o semplicemente **ampiezza** e che denotiamo con $\text{ampl}(\hat{\alpha})$. Questa valutazione intende fornire un parametro numerico significativo delle estensioni degli angoli-ZZK. Esso quindi deve essere uguale per dua angoli-ZZK che si possono porre in una corrispondenza biunivoca che mantenga la adiacenza-ZZK.

Conveniamo che l'ampiezza dei semiquadranti sia di 45 gradi sessagesimali, qui semplicemente gradi. Per ogni Per denotare la ampiezza di ogni semiquadrante $\hat{\alpha}$ scriviamo $\text{ampl}(\hat{\alpha}) = 45°$.
Si osserva che tutti i semiquadranti-ZZ basilari si possono ottenere da uno di essi con riflessioni-ZZKe questo soddisfa la richiesta di invarianza per corrispondenza biunivoca che mantiene l'adiacenza-ZZK.

Per avere un parametro numerico significativo chiediamo anche che la somma di due angoli abbia una ampiezza somma delle ampiezze degli angoli sommati, ossia che per die angoli-ZZK $\hat{\alpha}$ e $\hat{\delta}$ si abbia

$$\text{ampl}(\hat{\alpha} + \hat{\delta}) \ = \ \text{ampl}(\hat{\alpha}) + \text{ampl}(\hat{\delta}) \ .$$

Quindi si hanno 8 angoli-ZZKv0 da 90°, 8 angoli-ZZKv0 da 135°, 8 angoli-ZZKv0 da 180°, 8 angoli-ZZKv0 da 225°, 8 angoli-ZZKv0 da 227°, 8 angoli-ZZKv0 da 270° e 8 angoli-ZZKv0 da 315° ; si ha inoltre un unico angolo.ZZKv0 giro esprimibile segnalando 8 semirette-ZZK con i ruoli di prima e seconda semiretta, ma che forniscono l'intero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ munito di $\mathbf{0}$ con il ruolo di vertice.

B22c.10 Estendiamo la definizione di angolo.ZZK a tutti gli insiemi di punti-ZZ ottenibili applicando traslazioni-ZZ ai vari angoli-ZZKv0.
Precisamente applicando la trasformazione $\boldsymbol{Trsl}[\mathsf{v}]$ all'angolo.ZZKv0 $\left\langle \mathsf{S}, \mathbf{0}, \mathsf{T} \right\rangle$ si ottiene l'angolo con in vertice nel punto-ZZ $\mathbf{v}$ da denotare con $\left\langle \mathsf{S}, \mathbf{v}, \mathsf{T} \right\rangle$.
Per l'invarianza dell'ampiezza per corrispondenza biunivoca rispettosa dell'adiacenza-ZZK l'angolo con vertice qualsiasi ha la stessa ampiezza dell'angolo.ZZKv0.

Anche le rotazioni-ZZK di 90° mantengono la adiacenza-ZZK, sono trasformazioni invertibili e quindi mantengonol'ampiezza.

Due angoli-ZZK consecutivi la cui somma è un angolo.ZZK piatto si dicono costituire un duetto di **angoli-ZZK complementari**.
I duetti di angoli-ZZK complementari possono essere costituiti da due angoli retti o da un angolo semiretto e un angolo sesquiretto.
Due angoli-ZZK consecutivi la cui somma è un angolo.ZZK giro si dicono costituire un duetto di **angoli-ZZK supplementari**.
I duetti di angoli-ZZK supplementari possono essere costituiti da due angoli piatti, oppure da un angolo da 135° e un angolo da 225°, oppure da un angolo retto e da un angolo da 270°, oppure da un angolo semiretto e da un angolo da 315°.

Più avanti [i:] introdurremo gli angoli acuti e gli ottusi; tra i primi si collocano gli angoli da 45°, tra i secondi quelli da 135°.

Per talune circostanze conviene considerare anche come angoli-ZZK anche quelli ottenibili come somme di due angoli-ZZK piatti, oppure di 4 angoli-ZZK retti, oppure di 8 angoli-ZZK semiretti, oppure di più angoli-ZZK per raggiungere una ampiezza complessiva di 360°.
Ciascuna di queste entità (come gli angoli-ZZK nulli) si può individuare con un punto-ZZ che fa da suo vertice e con una semiretta-ZZK che svolge il ruolo dei suoi due lati coincidenti e viene detta **angolo.ZZK giro**.
Ogni angolo.ZZK giro ha ampiezza $360° = 2\,\pi$ e per essi non adottiamo notazioni della forma $\left\langle \mathsf{S}, V, \mathsf{T} \right\rangle$ per non confonderli con i nulli.
Osserviamo anche che per ogni vertice disponiamo di 8 angoli-ZZK per ciascuna delle ammissibili ampiezze $k\,45°$ con $k = 0, 1, 2, ..., 7$.

B22c.11 Ricordiamo che le rette-ZZB, come le semirette-ZZB e i segmenti-ZZB hanno tutti i loro punti della stessa stessa parità-ZZSC [b03]. Ricordiamo anche che, dato un duetto di rette-ZZB, una del tipo-ZZD1, l'altra del tipo ZZD2, tali rette si intersecano in un punto-ZZ sse hanno la stessa parità-ZZSC. Se questo punto-ZZ comune è $\langle h, k \rangle$ le due rette-ZZ sono $[y-k = x-h]$ e $[y-k = -x+h]$.

Per i duetti di rette della stessa parità-ZZSC la dilatazione di fattore 2 fa corrispondere un duetto di insiemi di punti allineati che si interseca in punto con due coordinate aventi la stessa parità-ZZSC. Viceversa i duetti di rette di diversa parità sono trasformati da Dil_2 in duetti di insiemi di punti allineati che si intersecano in un punto con una coordinata pari e una dispari.

Cerchiamo ora di ampliare la nozione di angolo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a partire dal caso degli angoli retti delimitati da due semirette-ZZB appartenenti a rette-ZZB parità-ZZSC diverse.

Abbiamo visto che queste rette-ZZB si incontrano in un punto che va considerato elemento di $(\mathbb{Z} + 1/2) \times (\mathbb{Z} + 1/2)$.
In tal caso parleremo di angoli retti-ZZBso, dove "so" vuole richiamare la qualifica semidispari, *semiodd*.
Questi angoli si possono dividere con chiarezza in due angoli-ZZ semiretti che condividono un lato

che può dirsi semiretta orizzontale con ordinata semidispari oppure semiretta verticale con ascissa semidispari. con vertice in $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$ si ottengono sommando angoli sesquiretti.

Anche questi angoli si possono collegare tra di loro attraverso traslazioni-ZZK, mentre ciascuno di essi si può collegare con gli angoli-ZZK attraverso traslazioni nelle 8 orientazioni-ZZK per spostamenti espressi da vettori appartenenti a $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$.

Utilizzando le coordinate semiintere per vertici e lati si ottiene una disponibilità di angoli equivalente a quella che si aveva utilizzando per vertici e lati solo le coordinate intere.
In effetti sottoponendo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alla dilatazione con centro nell'origine e fattore 2 si ottiene un sistema che confrontato con $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ equivale a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ confrontato con $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$.
In effetti le limitazioni operative riscontrate per $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si ripropongono per $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$: per andare sostanzialmente oltre infatti, come vedremo, serve un processo di arricchimento illimitato. Questa necessità viene suggerita anche dalla insufficienza del passaggio da $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$.

B22c.12 Consideriamo un duetto di angoli-ZZK retti o di angoli-ZZKoo con un lato in comune. Anche per questi si può definire la somma e si giunge ad angoli con ampiezza di 180°; un angolo di questo genere si dice **angolo.ZZK piatto**. Un angolo piatto-ZZK è individuato da un sistema $\langle V,\{\mathsf{s},\mathsf{t}\}\rangle$ con le semirette aventi la stessa estremità e appartenenti alla stessa retta-ZZK. Un angolo piatto-ZZBoo è individuato da un sistema $\langle W,\{\mathsf{s},\mathsf{t}\}\rangle$ con le semirette appartenenti a una stessa retta-ZZB separate da un punto $W\in(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$.
Complessivamente gli angoli aventi ampiezze angolari minori o uguali di 180° si dicono **angoli-ZZ senza segno convessi**.

Riassumiamo elencando gli angoli-ZZK che hanno come vertice un generico $V\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e facendo riferimento agli 8 punti-ZZ a esso adiacenti-ZZK indicati in figura.

//input pB22c12

8 angoli con ampiezza di 45°: aVe, eVb, bVf,..., hVa ;

4 angoli retti delimitati da semirette-ZZR: aVb, bVc, cVd, dVa ;

4 angoli retti delimitati da semirette-ZZB: hVe, eVf, fVg, gVh ;

8 angoli con ampiezza di 135°: aVf, eVc, bVg, ..., hVb ;

2 duetti di angoli piatti delimitati da una retta-ZZR: aVc, cVc, bVd, ddb ;

2 duetti di angoli piatti delimitati da una retta-ZZB: hVe, eVf, fVg, gVh .

Possono avere qualche utilità anche 8 angoli-ZZK di ampiezza nulla determinati dal vertice V e da due semirette-ZZK coincidenti.

B22 **d. rotazioni-ZZR e rotoriflessioni-ZZ**

B22d.01 Introduciamo le rotazioni-ZZR, le prime rotazioni che si possono introdurre in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, iniziando con quelle che lasciano fissa l'origine e che chiameremo **rotazioni basilari-ZZR**.

Rotazione di $90°$ con centro in $\langle 0,0\rangle$: $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \;\mapsto\; \langle -j,i\rangle \rceil$.

Rotazione di $180°$ con centro in $\langle 0,0\rangle$: $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \;\mapsto\; \langle -i,-j\rangle \rceil$; questa trasformazione è un'involuzione e coincide con la simmetria centrale con centro nell'origine.

Rotazione di $270°$ con centro in $\langle 0,0\rangle$: $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,3\pi/2]} \;:=\; \lceil \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}^{\times 2} \;\mapsto\; \langle j,-i\rangle \rceil$.

In generale possiamo definire come rotazione con centro in $\mathbf{0}_2$ di $m\,90°$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ la potenza m-esima della rotazione $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}$.

Inoltre per **rotazione di** $0°$ con centro in $\langle 0,0\rangle$ intendiamo la trasformazione identità di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Dalle definizioni si ricavano facilmente le regole di composizione:

(1)
$$\left(\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}\right)^2 \;=\; \boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi]} = \mathsf{ZntsmyZZ}_{\langle 0,0\rangle} \qquad \left(\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}\right)^3 \;=\; \boldsymbol{Rot}_{[0,0,3\pi/2]}$$
$$\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}{}^4 \;=\; \boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi]}{}^2 = \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;.$$

Evidentemente le 4 rotazioni basilari-ZZR $\left(\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}\right)^m$ per $m = 0,1,2,3$, commutano tra di loro e quindi formano un gruppo commutativo; questo è isomorfo al gruppo ciclico di 4 elementi.

Osserviamo esplicitamente che la rotazione $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}$ permuta ciclicamente le quattro semirette-ZZR $\mathbf{0}+\mathbb{P}\,\mathsf{e}_x$, $\mathbf{0}+\mathbb{P}\,\mathsf{e}_y$, $\mathbf{0}-\mathbb{P}\,\mathsf{e}_x$ e $\mathbf{0}-\mathbb{P}\,\mathsf{e}_y$ e permuta ciclicamente le le quattro semirette-ZZB $\langle 0,0\rangle+\mathbb{P}\,(\mathsf{e}_x+\mathsf{e}_y)$, $\langle 0,0\rangle+\mathbb{P}\,(\mathsf{e}_x+\mathsf{e}_y)$, $\langle 0,0\rangle+\mathbb{P}\,(\mathsf{e}_x+\mathsf{e}_y)$ e $\langle 0,0\rangle+\mathbb{P}\,(\mathsf{e}_x+\mathsf{e}_y)$.

B22d.02 Più in generale si definiscono le rotazioni con centro in $\langle 0,0\rangle$ per ampiezze angolari date da multipli interi arbitrari di $90° = \pi/2$.
Si osserva che $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,3/2\,\pi]}$ è l'inversa della $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\pi/2]}$, rotazione che in questa sezione denotiamo semplicemente con $\mathcal{R}$; inoltre sia la $\mathcal{R}$ che la sua inversa sono elemento generatore del gruppo delle rotazioni basilari-ZZR.

Dunque si può definire $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,-\pi/2]} \;:=\; \mathcal{R}^{\mathbf{-1}}$ e quindi si possono definire tutte le potenze negative della $\mathcal{R}$ come $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,-m\,\pi/2]} \;:=\; \left(\mathcal{R}^{\mathbf{-1}}\right)^m$ in modo di disporre di tutte le potenze intere della rotazione basilare di un angolo-ZZ retto

$$\forall n \in \mathbb{Z} \;\colon\; \boldsymbol{Rot}_{[0,0,n\,\pi/2]} \;:=\; \mathcal{R}^n \;.$$

Si constata subito che due rotazioni relative ad ampiezze angolari che differiscono per un multiplo di $360° == 2\,\pi$ coincidono e viceversa:

(1)
$$\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\alpha]} = \boldsymbol{Rot}_{[0,0,\alpha']} \;\iff\; \alpha - \alpha' \in \mathbb{Z}\,2\,\pi \;.$$

Si può quindi affermare che per ogni α e β ampiezze angolari multiple intere di $\pi/2$ componendo la rotazione di ampiezza angolare α con quella di ampiezza β si ottiene la rotazione relativa all'angolo $\alpha+\beta$:

(2)
$$\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\alpha]} \circ \boldsymbol{Rot}_{[0,0,\beta]} \;=\; \boldsymbol{Rot}_{[0,0,\alpha+\beta]} \;.$$

Servendosi delle abbreviazioni $\mathcal{R}_{k\pi/2} := \boldsymbol{Rot}[0,0,k\pi/2]$ e simili si ha la seguente tavola di moltiplicazione simmetrica:

$$
(3) \qquad \begin{array}{c|cccc}
 & \mathcal{R}_0 & \mathcal{R}_{\pi/2} & \mathcal{R}_\pi & \mathcal{R}_{3\pi/2} \\
\hline
\mathcal{R}_0 & \mathcal{R}_0 & \mathcal{R}_{\pi/2} & \mathcal{R}_\pi & \mathcal{R}_{3\pi/2} \\
\mathcal{R}_{\pi/2} & \mathcal{R}_{\pi/2} & \mathcal{R}_\pi & \mathcal{R}_{3\pi/2} & \mathcal{R}_0 \\
\mathcal{R}_\pi & \mathcal{R}_\pi & \mathcal{R}_{3\pi/2} & \mathcal{R}_0 & \mathcal{R}_{\pi/2} \\
\mathcal{R}_{3\pi/2} & \mathcal{R}_{3\pi/2} & \mathcal{R}_0 & \mathcal{R}_{\pi/2} & \mathcal{R}_\pi
\end{array} .
$$

B22d.03 L'insieme delle rotazioni basilari si amplia definendo come rotazione-ZZR di ampiezza angolare α avente centro in un qualsiasi $\langle h,k\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la trasformazione ottenuta effettuando la traslazione che porta $\langle h,k\rangle$ nell'origine, applicando $\boldsymbol{Rot}_{[0,0,\alpha]}$ e infine effettuando la traslazione che porta l'origine in $\langle h,k\rangle$. In formula

$$
(1) \qquad \boldsymbol{Rot}_{[h,k,\alpha]} := \boldsymbol{Trsl}_{[-h,-k]} \circ_{lr} \boldsymbol{Rot}_{[0,0,\alpha]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{[h,k]} .
$$

Si osserva subito che il centro di queste rotazioni viene lasciato fisso e che esse permutano ciclicamente le semirette-ZZR e le semirette-ZZB con estremità in $\langle h,k\rangle$.

Dalla decomposizione precedente si trova che il generico $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ viene trasformato successivamente in $\langle x-h, y-k\rangle$, $\langle -y+k, x-h\rangle$ e in $\langle -y+k+h, x+k-k\rangle$. Quindi

$$
(2) \qquad \langle x,y\rangle \lrcorner \boldsymbol{Rot}_{[h,k,90^\circ]} = \langle -y+k+h, x+k-h\rangle .
$$

Si osserva che si hanno anche permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ interpretabili come rotazioni per angoli multipli di 90° il cui centro appartiene a $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$: infatti per h e k semidispari la formula precedente fornisce un punto trasformato con entrambe le coordinate intere, cioè è una permutazione di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

B22d.04 Si osserva che, come tutte le traslazioni e tutte le riflessioni, anche le rotazioni basilari-ZZR mantengono l'adiacenza-ZZR e l'adiacenza-ZZB. Più in generale si constata che queste proprietà di conservazione sono godute anche da tutte le rotazioni-ZZR, in quanto trasformazioni ottenibili componendo rotazioni basilari e traslazioni [b03(1)].
Da queste proprietà di conservazione ne discendono molte altre. Per mostrare questo introduciamo due tipi di figure-ZZ.
JP Diciamo **tròmino-ZZR** ogni terzetto della forma $\{P,Q,R\} \subset SetZZC$ con $Q = P \pm \mathsf{e}_x$ ed $R = P \pm \mathsf{e}_y$.
Diciamo **tròmino-ZZB** ogni terzetto della forma $\{P,S,T\} \subset SetZZC$ con $S = P \pm (\mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y)$ e $T = P \pm (\mathsf{e}_x - \mathsf{e}_y)$.

//input pB22d04

Si dimostra facilmente che una permutazione di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ conserva l'adiacenza-ZZR (e l'adiacenza-ZZB e la-ZZK) sse trasforma tròmini-ZZR in tròmini-ZZR e tròmini-ZZB in tròmini-ZZB.
Da questo segue agevolmente che tutte le permutazioni che conservano la adiacenza-ZZR (e le conseguenti) trasformano le rette-ZZR in rette-ZZR e trasformano le rette-ZZB in rette-ZZB. Possiamo quindi dire che queste permutazioni conservano allineamento-ZZR e allineamento-ZZB.
Conviene osservare che la relazione locale di adiacenza-ZZR opportunamente reiterata può garantire le relazioni globali di allineamento e di invarianza della quadranza.

B22d.05 Mostriamo ora che le permutazioni che conservano adiacenza-ZZR e adiacenza-ZZB posseggono molte altre proprietà di conservazione.

Le permutazioni che conservano adiacenza-ZZR e adiacenza-ZZB devono trasformare semirette-ZZR in semirette-ZZR, semirette-ZZB in semirette-ZZB, segmenti-ZZR in segmenti-ZZR e segmenti-ZZB in segmenti-ZZB.

Per la conservazione di proprietà angolari osserviamo che ogni tròmino-ZZR individua biunivocamente un angolo-ZZR retto e che ogni tròmino-ZZB individua biunivocamente un angolo retto-ZZB.
Ne segue che le permutazioni in esame conservano gli angoli retti-ZZR e gli angoli retti-ZZB.

Consideriamo ora due punti-ZZ $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e $B = \langle x_B, y_B \rangle$ e la loro quadranza $\mathsf{Qdr}(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_a - y_B)^2$. È evidente che le traslazioni e le riflessioni-ZZR che conservano sia $(x_A - x_B)^2$ che $(y_a - y_B)^2$.
Le riflessioni-ZZB e le rotazioni di 90° e le loro potenze hanno invece l'effetto di scambiare il quadrato della differenza delle ascisse con il quadrato della differenza delle ordinate: anch'esse comunque conservano la quadranza.

Le traslazioni-ZZ, le riflessioni-ZZK e le rotazioni $\mathcal{R}^m$ trasformano i tròmini-ZZR in tròmini-ZZR e i tròmini-ZZB in tròmini-ZZB; quindi trasformano i rettangoli-ZZR in rettangoli-ZZR e i rettangoli-ZZB in rettangoli-ZZB. Questo implica la conservazione di molti altri tipi di figure-ZZK, come vedremo in seguito.
Questi risultati giustificano di usare per le permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che conservano adiacenza-ZZR e adiacenza-ZZB il termine **movimenti rigidi-ZZ**.
Inoltre il loro insieme costituisce un sottogruppo proprio del gruppo delle permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in quanto è un suo sottoinsieme proprio caratterizzato da una proprietà di conservazione. Tale struttura viene chiamata **gruppo dei movimenti rigidi di** $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e viene denotata con il simbolo ***GrRgdm*ZZ**.

B22d.06 Esaminiamo le composizioni di una riflessione rispetto a una linea-ZZR per l'origine con una riflessione rispetto a una retta-ZZB per l'origine. Questa trasformazione mantiene fissa l'origine e, come tutte le riflessioni, mantiene la quadranza dei vettori-ZZ trasforma rette-ZZK in rette-ZZK e rispetta l'adiacenza-ZZK; quindi deve essere una rotazione avente come centro l'origine e riguardare un angolo di ampiezza $\pi/2$ o $3\pi/2$.

Dunque le rotazioni-ZZR con centro l'origine e le riflessioni rispetto a rette-ZZK passanti per l'origine costituiscono un sottogruppo del gruppo $\mathsf{Perm}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ di tutte le permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esso viene detto **gruppo delle rotoriflessioni basilari di** $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e lo denotiamo con ***Gr*ZZRM**$_8$; esso consta di 8 elementi, 4 riflessioni e 4 rotazioni (identità compresa).

Questo gruppo può anche definirsi come il gruppo delle permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che mantengono fissa l'origine e conservano la relazione di adiacenza-ZZRB.

Considerazioni del tutto simili valgono per un qualsiasi punto-ZZ $Z = \langle h, k \rangle$ sopra l'insieme delle rotazioni-ZZR che mantengono fisso Z e l'insieme delle riflessioni rispetto a rette-ZZK passanti per P: ancora si ha un insieme di 8 trasformazioni che costituiscono un sottogruppo di $Perm_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ isomorfo al precedente.

Per descrivere questi gruppi può essere utile ricondurre gli effetti delle rotoriflessioni basilari agli spostamenti che tali trasformazioni inducono tra gli otto tetròmini della figura seguente:

//input pB22d06

Si osserva che queste 8 figure-ZZ vengono permutate tra di loro dalle rotoriflessioni basilari: quindi il gruppo delle rotoriflessioni basilari è isomorfo a un sottogruppo del gruppo simmetrico su 8 oggetti.

B22d.07 Anche le composizioni tra rotoriflessioni basilari si possono precisare osservando come si trasformano gli 8 tetròmini della figura.
Componendo, in ordine qualsiasi, le riflessioni rispetto ai due assi e componendo, in ordine qualsiasi, le riflessioni rispetto alle due diagonali si ottiene la rotazione di 180° con centro nell'origine.
Componendo una riflessione rispetto a un asse con una riflessione rispetto a una diagonale, in ordine qualsiasi, si ottiene una rotazione di 90° o di 270° con centro nell'origine.
Scambiando l'ordine delle riflessioni precedenti, essendo queste delle involuzioni, si ottiene la rotazione inversa.

Non è difficile ottenere i dettagli delle composizioni tra le rotoriflessioni basilari di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se per queste trasformazioni usiamo le notazioni abbreviate

$$\mathcal{R}_\alpha \;:=\; \boldsymbol{Rot}_{[\alpha]} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{f(x,y)} := \mathsf{Mirr}_{[f(x,y)=0]} \;.$$

per il gruppo $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZRM}_8$ si trova la seguente tavola di moltiplicazione:

	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_{y+x}$
$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_{y+x}$
$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_x$
$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_{y-x}$
$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_y$
$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$
$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$
$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{R}_\pi$
$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_{y+x}$	$\mathcal{M}_y$	$\mathcal{M}_{y-x}$	$\mathcal{M}_x$	$\mathcal{R}_{3\pi/2}$	$\mathcal{R}_{\pi/2}$	$\mathcal{R}_\pi$	$\mathcal{I}$

B22d.08 Si nota che sono sottogruppi di $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZRM}_8$ il gruppo delle rotazioni basilari e i 4 gruppi di due elementi generati dalle 4 riflessioni $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_{x-y}$ e $\mathcal{M}_{x+y}$.
Si osserva inoltre che $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZRM}_8$ è generato dalle tre riflessioni $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ ed $\mathcal{M}_{y-x}$: infatti

$$\begin{gathered}
\mathcal{R}_{\pi/2} = \mathcal{M}_x \circ_{lr} \mathcal{M}_{y-x} \quad , \quad \mathcal{R}_\pi = \mathcal{M}_x \circ_{lr} \mathcal{M}_{y-x} \circ_{lr} \mathcal{M}_x \circ_{lr} \mathcal{M}_{y-x} \quad , \\
\mathcal{R}_{3\pi/2} = \mathcal{M}_{y-x} x \circ_{lr} \mathcal{M}_x \quad , \quad \mathcal{R}_0 = \mathcal{M}_x \circ_{lr} \mathcal{M}_x \\
\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_x \circ_{lr} \mathcal{R}_\pi \quad , \quad \mathcal{M}_{y+x} = \mathcal{R}_{3\pi/2} \circ_{lr} \mathcal{M}_x
\end{gathered} \tag{1}$$

È importante la distinzione tra rotoriflessioni pari esprimibili con un numero pari di riflessioni generatrici e rotoriflessioni dispari esprimibili con un numero dispari di riflessioni generatrici.

Per questo distinguiamo tra gli angoli semiretti quelli aventi come primo lato una semiretta-ZZR e come secondo una semiretta-ZZB, che diciamo semiretti di tipo RB, da quelli aventi come primo lato una semiretta-ZZB e come secondo una semiretta-ZZR, che diciamo semiretti di tipo BR.

Le rotoriflessioni pari mantengono il tipo RB o BR degli angoli semiretti, le rotoriflessioni dispari scambiano i due tipi.

Effetti analoghi si hanno per gli angoli seaquiretti, mentre queste differenze non si rivelano per gli angoli retti e per gli angoli con ampiezze multiple di 90°.

B22 e. angoli-ZZK

B22e.01 Un sistema della forma $\langle V, \{\mathsf{s}, \mathsf{t}\} \rangle$, ove $V \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e s e t sono due semirette-ZZK che hanno V come estremità comune può anche chiamarsi **separatore angolare-ZZK**.

Ogni separatore angolare-ZZK nel quale le due semirette non coincidono tripartisce $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nell'insieme dei punti costituenti le semirette (V compreso), e in due altri insiemi di punti-ZZ connessi-ZZR.

Ricordiamo che un sottoinsieme di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si dice connesso-ZZR sse dati due suoi punti si può passare dall'uno all'altro attraverso passi-ZZR che toccano solo punti dell'insieme in quastione.
Si osserva in particolare che se le due semirette s e $\mathsf{t}\}$ appartengono alla stessa retta la tripartizione si riduce alla tripartizione in una retta e in due semipiani determinata da una retta-ZZK.

Dei due insiemi connessi-ZZR individuati da un separatore angolare i cui lati appartengono a rette-ZZK diverse solo uno non contiene alcuno dei punti delle semirette che prolungano i suoi lati. Tale insieme è l'insieme associato a un angolo.ZZK convesso che denotiamo con $\overline{\alpha}$.
L'altro insieme si può associare a un altro angolo che si dice **angolo esplementare** di quello convesso. A questo angolo si attribuisce la ampiezza angolare $360° - \text{ampl}(\overline{\alpha})$.
Si viene quindi a disporre di **angoli-ZZK nonconvessi** aventi le ampiezze 225°, 270° e 315°. Per ogni vertice ammissibile e per ciascuna di queste ampiezze angolari si hanno 8 angoli.

È poi ragionevole assumere come angolo esplementare di un angolo piatto $\overline{\pi}$ l'angolo piatto associato al semipiano ottenibile per riflessione rispetto alla retta contenente i due lati dell'insieme associato ad $\overline{\pi}$.

Può inoltre risultare utile considerare che due semirette-ZZK coincidenti individuano un angolo di ampiezza nulla cui è associato l'insieme vuoto e come suo esplementare un angolo detto **angolo giro** il cui insieme associato esaurisce $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ privato dei punti della semiretta che fornisce i due lati.

B22e.02 L'additività degli angoli rimane valida per tutte le coppie di angoli adiacenti la cui somma abbia ampiezza minore o uguale a 360°. Per estendere la possibilità di mantenere la additività degli angoli è necessaria una generalizzazione che consente di prendere in considerazione angoli di ampiezza superiore a quella di un angolo giro e, come vedremo, di attribuire un segno agli angoli in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Per questo scopo denotiamo con SQ_2 il quadrato-ZZ avente centro in $\langle 0, 0\rangle$ e delimitato da 2 lati orizzontali e 2 lati verticali aventi lunghezza 2; vertici di SQ_2 sono $\langle 1, 1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$, $\langle -1, -1\rangle$ e $\langle 1, -1\rangle$.

Osserviamo che le 8 semirette-ZZK con estremità nell'origine sono in corrispondenza biunivoca con gli 8 punti, che diciamo **punti angolari-ZZK**, nei quali intersecano, risp., il perimetro di SQ_2, come esplicitato dalla seguente biiezione nella quale le semirette sono individuate dalle note sigle geografiche.

$$\left\downarrow \begin{matrix} E & NE & N & NW & W & SW & S & SE \\ \langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle -1,1\rangle & \langle -1,0\rangle & \langle -1,-1\rangle & \langle 0,-1\rangle & \langle 1,-1\rangle \end{matrix} \right\downarrow .$$

//input pB22e03

B22e.03 Definiamo come **segmenti perimetrali** di Q i segmenti orientati definiti da coppie di punti-ZZ adiacenti del perimetro di $\mathsf{SQ}(0, 0)$ e denotiamoli con le seguenti notazioni:

$$\mathsf{s}_0 := \overrightarrow{\langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle} \ , \quad \mathsf{s}_1 := \overrightarrow{\langle 1,1\rangle, \langle 0,1\rangle} \ , \quad \ldots, \mathsf{s}_6 \ := \ \overrightarrow{\langle 0,-1\rangle, \langle 1,-1\rangle} \ , \quad \mathsf{s}_7 \ := \ \overrightarrow{\langle 1,-1\rangle, \langle 0,0\rangle} \ .$$

La sequenza $\mathsf{S} = \langle \mathsf{s}_0, \mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_7 \rangle$ definisce un verso di percorrenza del perimetro che si dice **verso antiorario** o **verso positivo**.
Definiamo come sequenza opposta della precedente $\mathsf{S}^\mathsf{T} := \langle -\mathsf{s}_7, ..., -\mathsf{s}_1, -\mathsf{s}_0 \rangle$; questa definisce il verso di percorrenza del perimetro detto **verso orario** o **verso negativo**.

Questi due versi vanno considerati l'uno il **verso opposto** dell'altro.

Della sequenza S si possono considerare le successive potenze di giustapposizione e di queste le diverse sottosequenze; questi oggetti sono chiamati **cammini perimetrali positivi** di SQ_2. Le sottosequenze delle potenze di giustapposizione della S' sono invece dette **cammini perimetrali negativi** di SQ_2.

Alcuni di tali cammini percorrono anche più volte, aut in un verso aut nell'opposto, il perimetro di SQ_2.

Cammini analoghi si possono associare a ogni quadrato-ZZR con i lati di lunghezza 2 avente il centro in un qualsiasi $\langle h, k \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, configurazione che denotiamo con $\mathsf{SQ}_2(h, k)$. Si osserva che con tale notazione $\mathsf{SQ}_2 = \mathsf{SQ}_2(0, 0)$ e che questo quadrato e i corrispondenti cammini si possono ottenere applicando a SQ_2 e ai suoi cammini la traslazione $\boldsymbol{Trsl}[h, k]$.

B22e.04 Possiamo ora definire come **angolo.ZZK [con segno]** avente vertice in $\langle h, k \rangle$ una entità individuata da un cammino perimetrale su $\mathsf{SQ}_2(h, k)$ che può seguire o il verso positivo o il negativo e che inizia e termina in uno degli 8 punti angolari-ZZK dello stesso $\mathsf{SQ}_2(h, k)$.

Ad un angolo con segno è quindi associata una coppia di semirette-ZZK, chiamate ancora i lati dell'angolo. Chiaramente questa corrispondenza è solo univoca: ad ogni coppia di semirette sono associati tutti i cammini che presentano come estremità i due punti angolari corrispondenti, che si sviluppano in verso sia positivo che negativo e che potrebbero ripetere un certo numero di volte l'intero perimetro.

Si può invece definire una biiezione tra gli angoli con il vertice in un dato $\langle h, k \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e il prodotto cartesiano i cui fattori sono l'insieme dei punti angolari e $\mathbb{Z}$; per essa gli interi positivi forniscono il numero di circuiti perimetrali percorsi in verso positivo e gli interi negativi il numero di circuiti perimetrali percorsi in verso negativo

Ad ogni angolo.ZZK con segno associamo una misura estensiva dotata di segno che estende quella definita per gli angoli-ZZK senza segno.
Definiamo le **ampiezza in gradi di un angolo** $\hat{\alpha}$ il prodotto di 45 per il numero dei segmenti perimetrali che costituiscono il cammino stesso preso con segno + nel caso di cammino positivo o antiorario e con il segno − nel caso di cammino negativo o orario.
Anche per tale misura scriviamo $\alpha := \text{ampl}(\hat{\alpha})$.

//input pB22e05

Quindi l'insieme delle ampiezze degli angoli-ZZK con segno è

(1) $$\{n \in \mathbb{Z} :| \, n\, 45°\} \;=\; \left\langle n \in \mathbb{Z} :| \, n \, \frac{\pi}{4} \right\rangle .$$

Si osserva che l'ampiezza angolare è una misura invariante per traslazione: sottoponendo un angolo con vertice in $\langle h, k \rangle$ alla traslazione $\boldsymbol{Trsl}[u - h, v - k]$ si ottiene un angolo della stessa ampiezza con vertice in $\langle u, v \rangle$.

B22e.05 La tabella che segue presenta le ampiezze attribuite ai vari angoli-ZZK in relazione alle due semirette che costituiscono i loro lati.

	E	NE	N	NW	W	SW	S	SE
E	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
NE	−45°	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°
N	−90°	−45°	0	45°	90°	135°	180°	225°
NW	−135°	−90°	−45°	0	45°	90°	135°	180°
W	−180°	−135°	−90°	−45°	0	45°	90°	135°
SW	−225°	−180°	−135°	−90°	−45°	0	45°	90°
S	−270°	−225°	−180°	−135°	−90°	−45°	0	45°
SE	−315°	−270°	−225°	−180°	−135°	−90°	−45°	0

Va detto che ad una coppia di semirette-ZZK alla quale si può associare l'ampiezza angolare α, a causa della possibilità di associare ad essa diversi cammini perimetrali, si possono attribuire anche tutte le ampiezze angolari della forma $\alpha + n \cdot 360^\circ$ con $n \in \mathbb{Z}$.
Per esempio alla coppia delle semirette E e NE si possono associare anche le ampiezze angolari di $... - 685^\circ,\ -315^\circ,\ 45^\circ\ ,\ 405^\circ\ ,\ 765^\circ, ...$.

Come si è già accennato per molti calcoli conviene usare per le ampiezze angolari misure proporzionali alle precedenti chiamate **misure angolari in radianti** collegate a quelle in gradi dalla seguente biiezione:

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & -90^\circ & -45^\circ & 0^\circ & 45^\circ & 90^\circ & 135^\circ & 180^\circ & 225^\circ & 270^\circ & 315^\circ & 360^\circ & 405^\circ & \cdots \\ \cdots & -\pi/2 & -\pi/4 & 0 & \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 & \pi & 5\pi/4 & 3\pi/2 & 7\pi/4 & 2\pi & 9\pi/4 & \cdots \end{array} \right\downarrow .$$

Il segno π che compare in questa tabella corrisponde a un numero reale che si può definire solo ricorrendo a nozioni di geometria del di una circonferenza e la lunghezza del suo diametro [B47].
Potendo fare riferimento al solo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, π può essere considerato come un semplice simbolo il cui valore numerico per ora si lascia imprecisato.

B22e.06 Spesso conviene identificare un angolo con una scrittura della forma $\hat{\alpha}$ nella quale α può essere un puro segno identificativo oppure può rappresentare una espressione in grado di individuare un angolo. Questa scrittura la chiamiamo **notazione angolo con cappuccio**.

In seguito a una tale scelta con la scrittura della forma $-\hat{\alpha}$ si conviene di denotare l'angolo suo opposto, cioè l'angolo corrispondente al cammino riflesso del cammino che caratterizza $\hat{\alpha}$; la ampiezza angolare di $-\hat{\alpha}$ si ottiene cambiando di segno a quella di $\hat{\alpha}$, ossia:

$$\text{ampl}(-\hat{\alpha}) \ = \ -\text{ampl}(\hat{\alpha}) \ .$$

Spesso quando α è un segno identificativo, lo si usa anche per denotare l'ampiezza dell'angolo, cioè si pone $\alpha := \text{ampl}(\hat{\alpha})$ e quindi si ha $-\alpha := \text{ampl}(-\hat{\alpha})$.

Occorre segnalare che in molti contesti gli angoli e le loro ampiezze possono essere confusi senza che nascano ambiguità, similmente a quanto accade per molte occorrenze di segmenti e le loro lunghezze, per varie occorrenze di figure bidimensionali e le loro aree e per varie occorrenze di figure solide e i loro volumi.

Due angoli-ZZK $\hat{\alpha}$ ed $\hat{\beta}$ con lo stesso vertice $\langle h, k\rangle$ tali che il nodo terminale del primo cammino perimetrale coincide con il nodo iniziale del secondo cammino perimetrale sono detti **angoli consecutivi**.

Si definisce come **somma di due angoli consecutivi** l'angolo.ZZK con lo stesso vertice $\langle h, k\rangle$ determinato dalla giustapposizione dei due cammini semplificata attraverso eliminazioni di coppie di segmenti opposti consecutivi, nel caso si riscontrino.
Con notazione cappuccio tale angolo si denota con $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

Chiaramente l'ampiezza dell'angolo somma è data dalla somma algebrica delle ampiezze degli angoli di partenza:

$$\text{ampl}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \ = \ \text{ampl}(\hat{\alpha}) + \text{ampl}(\hat{\beta}) \ = \ \alpha + \beta \ .$$

//input pB22e07

La precedente proprietà opportunamente estesa risulta utile per attività computazionali e giustifica la precedente macchinosa introduzione degli angoli-ZZK con segno.

B22e.07 Ogni semiretta-ZZK di vertice $\langle h, k\rangle$, $\{i \in \mathbb{N} :| \langle i, k\rangle\}$, si può individuare con uno degli angoli che essa forma con la semiretta E di vertice $\langle h, k\rangle$ assunta come semiretta di riferimento.
Per esempio la semiretta-ZZ NE con vertice nell'origine può essere caratterizzata da ciascuno degli angoli di ampiezza $45° + n \cdot 360°$. Quindi queste ampiezze angolari possono servire per individuare le semirette-ZZK: ciascuna di esse è determinata dalla sua estremità e da una ampiezza angolare appartenente a $\{0°, 45°, 90°, ..., 315°\}$, o, se si preferisce, appartenente a $\{-135°, -90°, ..., 135°, 180°\}$.

Ogni retta-ZZK di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dato che è unione di due semirette-ZZK aventi coordinate angolari che differiscono di 180°, si può individuare con un suo punto-ZZ e con una delle ampiezze angolari di un insieme della forma

$$\{n \in \mathbb{Z} :| \alpha + n \cdot 180°\} \ \text{ con } \ \alpha \in \{0°, 45°, 90°, 135°\} \ .$$

Ricordiamo che un segmento-ZZK si può arricchire assegnando ad una delle sue estremità il ruolo di estremità iniziale ed all'altra quello di estremità finale. Una tale configurazione si dice **segmento-ZZK orientato** o **vettore-ZZK applicato**.
Il segmento-ZZK orientato avente come estremità iniziale $\langle h, k\rangle$ ed estremità finale $\langle u, v\rangle$ si può individuare con la sua estremità iniziale e con il vettore-ZZ $\langle u - h, v - k\rangle$: questo sommato alla estremità iniziale fornisce l'estremità finale:

$$\langle h, k\rangle + \langle u - h, v - k\rangle \ = \ \langle u, v\rangle \ .$$

Ad ogni segmento-ZZK si può attribuire come coordinata angolare quella della retta della quale fa parte. Similmente a ogni segmento orientato si può attribuire come coordinata angolare quella della retta orientata della quale fa parte.

B22e.08 La relazione di **parallelismo tra rette-ZZK** si può definire assumendo che due rette-ZZH, due rette-ZZV, due rette-ZZD1 e due rette-ZZD2 si dicano essere due rette-ZZK parallele.

È allora immediato mostrare che questa relazione è un'equivalenza e che vi sono 4 classi di parallelismo-ZZK, quella delle rette orizzontali, quella delle verticali, quella delle rette-ZZD1 e quella delle rette-ZZD2.

Con tale impostazione è immediato anche dimostrare che due diverse rette-ZZK parallele non hanno in comune alcun punto-ZZ (e neppure alcun punto di $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).
Basta verificare l'incompatibilità tra le due equazioni delle rette per ciascuna delle 4 classi di parallelismo.

B22e.09 Con atteggiamento analogo si può convenire che si dicano coppi di **rette-ZZR ortogonali**, tutte e sole le coppie costituite da una retta orizzontale con una verticale e d una retta-ZZD1 con una retta-ZZD2.

Inoltre si parla di **ortogonalità tra rette-ZZK** sse si ha la ortogonalità-ZZR o la ortogonalità-ZZB.

Anche da queste definizioni seguono immediatamente le proprietà di simmetria, di antiriflessività edi antitransitività della relazione di ortogonalità-ZZK.

Aggiungiamo un collegamento alcune considerazioni sopra angoli e ortogonalità-ZZK.

(1) Prop.: Due rette-ZZK sono ortogonali sse le ampiezze angolari delle loro inclinazioni presentano una differenza della forma $90° + n \cdot 180°$ ▮

Dim.: I duetti delle rette-ZZR ortogonali sono i duetti di rette caratterizzate dalle equazioni $x = h$ e $y = k$ e i duetti delle rette-ZZB ortogonali sono caratterizzati dalle equazioni $y = x + h$ e $y = -x + k$, al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$ ▮

Dato che ogni semiretta-ZZK (orientata o meno), come ogni segmento-ZZK (orientato o meno), appartiene a una sola retta-ZZK, le relazioni di parallelismo e di ortogonalità si possono estendere a semirette-ZZK e a segmenti-ZZK, orientati o meno.

B22e.10 Definiamo la nozione di proiezione ortogonale di un punto-ZZ sopra una retta-ZZK.

Si dice proiezione di $\langle i, j\rangle$ sulla retta-ZZ $x = h$ $\boldsymbol{Prj}_{[x=h]}(\langle i, j\rangle) := \langle h, j\rangle$.

Si dice proiezione di $\langle i, j\rangle$ sulla $[y = k]$ $\boldsymbol{Prj}_{[y=k]}(\langle i, j\rangle) := \langle i, k\rangle$.

Per quanto riguarda le proiezioni dei punti-ZZ sopra rette-ZZB bisogna prendere in considerazione le parità-ZZSC dei punti-ZZ e delle rette-ZZB.

Si dice proiezione di $\langle i, j\rangle$ su $[y = x + u]$ $\boldsymbol{Prj}_{[y=x+u]}(\langle i, j\rangle) := \left\langle \frac{i + j - u}{2}, \frac{i + j + u}{2} \right\rangle$.

Si dice proiezione di $\langle i, j\rangle$ su $\mathsf{Rtlin}[y = -x + v]$ $\boldsymbol{Prj}_{y=-x+v}(\langle i, j\rangle) := \left\langle \frac{i - j + v}{2}, \frac{j - i + v}{2} \right\rangle$.

Si osserva che i punti ottenuti con la prima proiezione appartengono a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sse $i + j$ ha la stessa parità-ZZSC di u, mentre i punti ottenuti con la seconda proiezione appartengono a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sse $i + j$ ha la stessa parità-ZZSC di v.

Nei casi contrari si individuano punti di $(\mathbb{Z} + 1/2) \times (\mathbb{Z} + 1/2)$: un altro aspetto della limitatezza del piano-ZZ.

Le espressioni delle ultime due proiezioni vanno giustificate e per questo denotiamo con $Q = \langle x_Q, y_Q\rangle$ il punto fornito dalle due proiezioni e scriviamo $P = \langle i, j\rangle$.

La prima discende dalla richiesta che Q appartenga alla retta $[y = x + u]$ e alla retta-ZZD2 passante per P, cioè alla $[y - j = -x + i]$.
La seconda prima discende dalla richiesta che Q appartenga alla retta $[y = -x + v]$ e alla retta-ZZD1 passante per P, cioè alla $[y - j = x - i]$.

B22e.11 Per tutti i vettori.a di $(\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)$ si possono definire le quadranze con la stessa espressione usata per i vettori.a-ZZ ottenendo valori in $\mathbb{Z}/4$. In particolare la quadranza tra l'origine ed il punto $\langle 1/2, 1/2\rangle$ vale $1/4$.

Può servire disporre di una quadranza tra un punto-ZZ ed una retta-ZZK. La definizione non incontra problemi nel caso di rette-ZZR, mentre per le rette-ZZB si hanno difficoltà quando punto e retta hanno parità-ZZSC opposte, difficoltà superabili solo ricorrendo a punti di $(\mathbb{Z}/4) \times (\mathbb{Z}/4)$.

Consideriamo tre punti-ZZ P, A e B; si dice che A e B sono **punti-ZZ equidistanti da un punto-ZZ** P sse si verifica l'uguaglianza di quadranze: $\mathsf{Qdr}(A, P) = \mathsf{Qdr}(B, P)$.

(1) Prop.: Dato un punto A e una retta-ZZK R e denotata con P la proiezione di A sopra la R, il punto A e il suo trasformato $A' = Mirr[\mathsf{R}](A)$ sono equidistanti da P.

Dim.: Segue direttamente dalle definizioni date ▮

Data una coppia di punti-ZZ $\langle A, B\rangle$ con $A = \big\langle x_A, y_A\big\rangle$ e $B = \big\langle x_B, y_B\big\rangle$ si definisce triangolo rettangolo-ZZR avente $\langle A, B\rangle$ come coppia di vertici acutangoli l'insieme convesso-ZZ:

$$CnvxZZ(\big\langle x_A, y_A\big\rangle, \big\langle x_B, y_A\big\rangle, \big\langle x_B, y_A + (x_B - x_A)\big\rangle) \ .$$

B22 f. movimenti rigidi del piano-ZZ

B22f.01 Chiamiamo **traslorotazioni-ZZR** le permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che si ottengono componendo una traslazione-ZZ e una rotazione-ZZR.
Queste permutazioni mantengono quadranza e ampiezze degli angoli-ZZK e si trova che formano un gruppo nonabeliano che denotiamo con $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZTR}$.

Chiamiamo **trasloriflessioni-ZZK** le permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che si ottengono componendo traslazioni-ZZ e riflessioni-ZZK.
Queste permutazioni mantengono la quadranza ma non gli angoli, solo i valori assoluti delle loro ampiezze e si trova che formano un gruppo nonabeliano che denotiamo con $\boldsymbol{Gr}\mathsf{ZZTM}$.

Eserc. 1 Dimostrare che per ogni $\langle h,k\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e ogni retta-ZZK R:
$$\boldsymbol{Trsl}[h,k]\circ_{lr}\mathsf{Mirr}[\mathsf{R}] \;=\; \mathsf{Mirr}[\mathsf{R}]\circ_{lr}\boldsymbol{Trsl}[\langle h,k\rangle_{\rceil}\mathsf{Mirr}[\mathsf{R}]]\ .$$

Eserc. 2 Dimostrare che per ogni $\langle h,k\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, ogni angolo $\hat{\alpha}$ con ampiezza α multipla di $\pi/2$ e ogni retta-ZZK R:
$$\boldsymbol{Rot}[h,k,\alpha]\circ_{lr}\mathsf{Mirr}[\mathsf{R}] \;=\; \mathsf{Mirr}[\mathsf{R}]\circ_{lr}\boldsymbol{Rot}[\langle h,k\rangle\mathsf{Mirr}_{\mathsf{R}},-\alpha]\ .$$

B22f.02 Si possono definire anche rotazioni-ZZ, relative ad ampiezze angolari multiple di 90° e con un centro appartenente a $\mathbb{Z}+1/2\times\mathbb{Z}+1/2$, cioè in un punto con coordinate semidispari.

Si constata che le rotazioni-ZZ con centro in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ non cambiano le parità-ZZSC dei punti-ZZ; viceversa le parità sono scambiate dalle rotazioni-ZZ di 90° con centro in $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$. Evidentemente con un tale centro di rotazione la parità-ZZSC viene cambiata quando si ruota di un angolo con ampiezza multipla dispari di 90° e non viene cambiata nel caso di ampiezza multipla pari di 90°.

Presentano interesse anche le rotazioni con centro in uno degli elementi in $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}+1/2)$ e in uno degli elementi di $(\mathbb{Z}+1/2)\times\mathbb{Z}$; l'angolo di queste rotazioni deve essere un multiplo di 180° e quindi si tratta di simmetrie centrali e quindi di involuzioni. Ciascuna di queste trasformazioni genera un sottogruppo di ordine 2 e scambia le parità-ZZSC.

B22f.03 Chiamiamo **traslorotoriflessioni-ZZ** le permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ottenute componendo le traslazioni-ZZ, le riflessioni-ZZK e le rotazioni-ZZR.
Queste permutazioni mantengono le quadranze e quindi le adiacenze ed evidentemente costituiscono un gruppo di permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Diciamo **movimento rigido del piano-ZZ** ogni permutazione di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che mantiene la relazione di adiacenza-ZZR.
Evidentemente la composizione di due movimenti rigidi è una trasformazione dello stesso tipo e quindi l'insieme di tali movimenti costituisce un gruppo di permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Questo viene chiamato **gruppo dei movimenti rigidi di** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e viene denotato con $\boldsymbol{GrRgdm}\mathsf{ZZ}$.

Tra i movimenti rigidi vi sono chiaramente le traslazioni-ZZ, le riflessioni-ZZ e le rotazioni-ZZR con centro in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e quelle con centro in $(\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$, e le simmetrie centrali con centro in $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}+1/2)$ o in $(\mathbb{Z}+1/2)\times\mathbb{Z}$.

I movimenti rigidi evidentemente rispettano le relazioni di adiacenza e mantengono le mutue quadranze tra i punti-ZZ.
Essi quindi agiscono sugli insiemi piani come se spostassero rigidamente gli aggregati di piastrelle che li compongono: questo giustifica il loro nome.

B22f.04 Si ricava che per individuare l'effetto di un movimento rigido $\mathcal{T}$ è sufficiente stabilire come si trasformano tre punti non allineati, o equivalentemente come si trasforma una figura semplice e priva di simmetrie come il tetròmino con la forma della L maiuscola che denotiamo con L ed i cui elementi numeriamo come in figura.

//input pB22f04

Supponiamo di conoscere $\mathsf{L}_{\shortmid}\mathcal{T}$ e contrassegnamo le sue caselle corrispondenti a quelle contrassegnate con i successivi interi, risp., con 1',2', 3' e 4' $(i' := i_{\shortmid}\mathcal{T})$. Si sa che:

- la retta-ZZR che contiene gli elementi allineati 1, 2 e 3 di L viene trasformata nella retta-ZZR che contiene i tre elementi allineati 1', 2' e 3';
- la retta-ZZR che contiene gli elementi 3 e 4 di L viene trasformata nella retta-ZZR che contiene 3' e 4';
- un punto generico, chiamate i e j le coordinate che presenta rispetto alle due rette contenenti $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 4\}$, viene trasformato nel punto che presenta le stesse coordinate rispetto alle rette contenenti $\{1', 2', 3'\}$ e $\{3', 4'\}$.

B22f.05 Chiamiamo **movimento rigido pari** rigido ogni rototraslazione e diciamo **movimento rigido dispari** ogni altro movimenti rigido.
Ogni movimento rigido dispari si può esprimere come prodotto di traslazioni-ZZ, rotazioni-ZZ e una unica riflessione-ZZK,
La composizione di due movimenti rigidi entrambi pari o dispari è un movimento rigido pari.
La composizione di un movimento rigido pari con uno dispari, in un ordine qualsiasi, è un movimento rigido dispari.

B22f.06 Le azioni sugli insiemi piani dei movimenti rigidi pari si possono descrivere come se facessero scivolare sul piano i relativi aggregati di piastrelle. Le azioni delle riflessioni invece richiedono di sollevare dal piano gli aggregati di piastrelle e di capovolgerle, cioè di cambiare le loro facce d'appoggio. Gli altri movimenti rigidi dispari si realizzano attraverso uno scivolamento seguito da un capovolgimento o viceversa.

Nelle applicazioni può essere rilevante distinguere le manovre nelle quali è lecito effettuare dei capovolgimenti, cioè nelle quali si possono far intervenire i movimenti rigidi dispari, e quelle che non li consentono.
Per esempio si può osservare che la scacchiera per la dama e per gli scacchi non può essere sottoposta a capovolgimenti a causa dei differenti ruoli nelle regole del gioco svolti delle caselle bianche e delle nere.

Analogamente può essere rilevante distinguere all'interno del gruppo ***GrRgdm***ZZ il sottogruppo dei movimenti rigidi che lasciano invariate le parità-ZZSC.

Eserc. 1 Dimostrare che il gruppo dei movimenti rigidi si ottiene componendo in tutti i modi possibili la traslazione orizzontale ***Trsl***$[\mathsf{e}_x]$, la rotazione con centro nell'origine di ampiezza angolare 90°.

B22 g. trasformazioni lineari-ZZ e loro matrici

B22g.01 Introduciamo ora un importante insieme di endofunzioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, le trasformazioni-ZZ lineari, cioè le endofunzioni caratterizzate dalla proprietà di trasformare ogni combinazione lineare di vettori-ZZ nella combinazione lineare con gli stessi coefficienti di partenza dei vettori ottenuti trasformando i vettori di partenza.

Definiamo **trasformazione-ZZ lineare** o operatore-ZZ lineare ogni funzione del genere $\mathsf{T} \in \lceil \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \rceil$ tale che

(1) $$\forall\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ ,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z} \quad \vdots \quad \mathsf{T}(\alpha\,\mathbf{v}+\beta\,\mathbf{w}) \ = \ \alpha\,\mathsf{T}(\mathbf{v}) + \mathsf{T}(\mathbf{w})\ .$$

Vedremo che l'insieme delle trasformazioni-ZZ lineari contiene molte interessanti endofunzioni entro $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e in particolare varie permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che abbiamo già incontrate e che possono essere interpretate visivamente in modo significativo.

Va anche segnalato che queste trasformazioni fanno parte del larghissimo insieme delle trasformazioni lineari di moduli e spazi lineari, ambienti che generalizzano ampiamente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Come vedremo in seguito [B31, B32, B45, G40, G42, G45, G47] le trasformazioni lineari sono utilizzate in molti modelli matematici e possono essere trattate con metodi algoritmici di notevole efficacia; per queste caratteristiche esse rivestono grandissima importanza applicativa.

Denotiamo con **Lintr**$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ l'insieme delle trasformazioni lineari su $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

B22g.02 Segnaliamo innanzi tutto come semplice conseguenza della definizione che ogni trasformazione lineare-ZZ lascia invariata l'origine: infatti

(2) $$\mathsf{T}(\langle 0,0\rangle) \ = \ \mathsf{T}(0\,\langle 0,0\rangle) \ = \ 0\,\mathsf{T}\langle 0,0\rangle \ = \ \langle 0,0\rangle\ .$$

Dato che ogni vettore-ZZ si può esprimere come combinazione lineare dei due vettori $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1 := \langle 1,0\rangle$ ed $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2 := \langle 0,1\rangle$, ogni trasformazione-ZZ lineare T è interamente individuata precisando le sue due immagini $\mathsf{T}(\mathbf{e}_x)$ e $\mathsf{T}(\mathbf{e}_y)$. In effetti

(1) $$\mathsf{T}_{\shortmid}\big\langle v_1,v_2\big\rangle = v_1\,\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) + v_2\,\mathsf{T}(\mathbf{e}_2)\ .$$

Per trattare comodamente le trasformazioni-ZZ conviene rappresentare queste funzioni e i vettori-ZZ mediante opportune matrici.

Diciamo **versori-ZZ canonici** i vettori $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$.
Diciamo **base canonica ordinata** di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la coppia di vettori-ZZ $\mathfrak{B} := \big\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\big\rangle$.

Prendiamo in considerazione il generico vettore-ZZ $\mathbf{v} = \big\langle v_1,v_2\big\rangle$ e la generica trasformazione-ZZ lineare T.
Diciamo **vettore colonna** rappresentante $\mathbf{v}$ nella base canonica $\mathfrak{B}$ la matrice di profilo 2×1

(2) $$\mathbf{v}_{\mathfrak{B}} \ := \ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\ .$$

Diciamo **vettore riga** rappresentante $\mathbf{v}$ nella base canonica $\mathfrak{B}$ la matrice di profilo 1×2

(3) $$[\,v_1 \quad v_2\,] \ = \ (\mathbf{v}_{\mathfrak{B}})^{\mathsf{T}}\ .$$

In genere questa rappresentazione si può identificare con il vettore-ZZ come è stato trattato finora.

Se per i trasformati dei versori canonici scriviamo $\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) =: \langle T_{1,1}, T_{2,1}\rangle$ e $\mathsf{T}(\mathbf{e}_2) =: \langle T_{1,2}, T_{2,2}\rangle$, diciamo **matrice rappresentante T nella base canonica**, o anche **matrice canonica** della T, la matrice di profilo 2×2 con entrate in $\mathbb{Z}$

$$(4) \qquad \mathsf{T}_{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle} \;=\; \mathsf{T}_{\mathfrak{B}} \;:=\; \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix} .$$

Questa matrice si può considerare ottenuta affiancando i due vettori colonna $(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1))_{\mathfrak{B}}$ e $(\mathsf{T}(\mathbf{e}_2))_{\mathfrak{B}}$, oppure sovrapponendo i due vettori riga trasposti dei precedenti

$$\mathsf{T}_{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle} \;=\; \mathsf{T}(\mathbf{e}_1)^{\top} \,\square\, \mathsf{T}(\mathbf{e}_2)^{\top} .$$

B22g.03 L'azione della trasformazione T sopra il generico vettore $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si può rappresentare mediante la moltiplicazione della matrice quadrata rappresentante la T per il vettore colonna rappresentante $\mathbf{v}$:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} T_{1,1} \cdot v_1 + T_{1,2} \cdot v_2 \\ T_{2,1} \cdot v_1 + T_{2,2} \cdot v_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \end{bmatrix} v_2 \quad .$$

L'espressione finale va confrontata con il secondo membro della (1); da essa si ricava che delle 4 entrate della $\mathsf{T}_{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle}$:

- $T_{1,1}$ fornisce la prima componente del trasformato di $\mathbf{e}_1$;
- $T_{2,1}$ fornisce la seconda componente del trasformato di $\mathbf{e}_1$;
- $T_{1,2}$ fornisce la prima componente del trasformato di $\mathbf{e}_2$;
- $T_{2,2}$ fornisce la seconda componente del trasformato di $\mathbf{e}_2$.

Utilizzando l'operazione prodotto scalare, si può quindi scrivere

$$(2) \qquad \mathsf{T}_{\mathfrak{B}} \;=\; \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) & \mathbf{e}_1 \cdot T(\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_2 \cdot T(\mathbf{e}_1) & \mathbf{e}_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} ,$$

B22g.04 Vediamo come si può ricavare per linearità l'azione di una trasformazione lineare dalla sua azione sui vettori della base canonica.
Per questo introduciamo la casella i cui vertici sono $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$ e $\langle 0, 1\rangle$, che chiamiamo **quadrato basico**, e denotiamo con bSq.
Consideriamo quindi le figure che seguono e rappresentano le trasformazioni fornite, risp., dalle matrici
$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

//input pB22g04

Dalla figura si vede che i vertici del quadrato basico bSq vengono trasformati, risp., nei punti: $\langle 0, 0\rangle$ (dato che ogni trasformazione lineare lascia fissa l'origine), $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 2.3\rangle$ e $\langle -1, 2\rangle$.

I quattro lati trasformati dei quattro lati del bSq sono tali che entrambe le coppie di lati opposti sono costituite da segmenti paralleli; questo porta a chiamare parallelogramma la figura ottenuta.

Si osserva anche che i punti dell'asse Ox_{ZZ} sono trasformati nei punti allineati ..., $\langle -6, -2\rangle$, $\langle -3, -1\rangle$, $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 6, 2\rangle$, $\langle 3, 9\rangle$, ...
I punti delle altre rette orizzontali sono trasformati in punti delle rette parallele alla precedente.
I punti dell'asse Oy_{ZZ} sono trasformati nei punti allineati ..., $\langle 2, -4\rangle$, $\langle 1, -2\rangle$, $\langle 0, 0\rangle$, $\langle -1, 2\rangle$, $\langle -2, 4\rangle$, $\langle -3, 6\rangle$, ...

I punti delle rette verticali diventano punti delle rette parallele alla precedente.
I vertici della generica casella avente come i vertici $\langle i,j\rangle$, $\langle i+1,j\rangle$, $\langle i+1,j+1\rangle$ e $\langle i,j+1\rangle$, sono trasformai nei vertici di parallelogramma $\langle 3i-j, i+2j\rangle$, $\langle 3i-j+3, i+2j+1\rangle$, $\langle 3i-j+2, i+2j+3\rangle$ e $\langle 3i-j-1, i+2j+2\rangle$.

B22g.05 Procediamo ora a introdurre varie importanti operazioni sulle trasformazioni lineari e sulle corrispondenti matrici.
Ricordiamo che con $\mathsf{Mat}_{2;\mathbb{Z}}$ denotiamo l'insieme delle matrici di profilo 2×2 e con entrate in $\mathbb{Z}$; inoltre per ciascuna di tali matrici useremo il termine **matrice-Z2x2**.

Innanzi tutto definiamo le combinazioni lineari delle trasformazioni-ZZ.

(1) $$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\mathsf{T},\mathsf{U}\in\mathbf{Lintr}_{ZZ}\ \vdots\ \ \alpha\,\mathsf{T}+\beta\,\mathsf{U}\ :=\ \lceil \mathbf{v}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ \mapsto\ \alpha\,\mathsf{T}(\mathbf{v})+\beta\,\mathsf{U}(\mathbf{v})\rceil\ .$$

Passando alle matrici-Z2x2 che costituiscono le loro rappresentazioni canoniche si trova che una combinazione lineare di trasformazioni-ZZ viene rappresentata nella base canonica dalla stessa combinazione lineare delle matrici che rappresentano le trasformazioni di partenza.

(2) $$\begin{aligned}\alpha\,\mathsf{T}_{\mathfrak{B}}+\beta\,\mathsf{U}_{\mathfrak{B}}\ &=\ \alpha\begin{bmatrix}T_{1,1} & T_{1,2}\\ T_{2,1} & T_{2,2}\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}U_{1,1} & U_{1,2}\\ U_{2,1} & U_{2,2}\end{bmatrix}\\ &=\ \begin{bmatrix}\alpha T_{1,1}+\beta U_{1,1} & \alpha T_{1,2}+\beta U_{1,2}\\ \alpha T_{2,1}+\beta U_{2,1} & \alpha T_{2,2}+\beta U_{2,2}\end{bmatrix}\ =\ (\alpha\,U+\beta\,U)_{\mathfrak{B}}\end{aligned}\ .$$

Queste relazioni dicono che la corrispondenza tra trasformazioni-ZZ lineari e matrici-Z2X2 è molto stretta. Più precisamente si constata che la corrispondenza tra queste trasformazioni e queste matrici è biunivoca, ovvero che data una matrice è completamente individuata la trasformazione che essa rappresenta e viceversa.

In effetti in molti contesti queste due nozioni vengono identificate senza che nascano effettive ambiguità.

B22g.06 Tutte le matrici-Z2x2 possono essere considerate combinazioni lineari-ZZ delle 4 matrici che presentano una entrata uguale a 1 e tre uguali a zero: e che chiamiamo **matrici-ZZ di base**:

(1) $$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ .$$

Si constata facilmente quanto segue.

L'effetto della prima è la proiezione di un vettore sull'asse Ox_{ZZ}, mentre l'effetto della quarta è la proiezione di un vettore sull'asse Oy_{ZZ}:

(2) $$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ =\ (\boldsymbol{Prj}_1)_{\mathfrak{B}}\qquad,\qquad\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ =\ (\boldsymbol{Prj}_2)_{\mathfrak{B}}\ .$$

La matrice somma della prima e della quarta è la matrice unità:

(3) $$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ =\ (\boldsymbol{Prj}_1+\boldsymbol{Prj}_2)_{\mathfrak{B}}\ =\ \mathsf{Id}_{\mathfrak{B}}\ .$$

L'effetto della seconda consiste nel trasformare un vettore $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2\rangle$ nel vettore $\langle v_2,0\rangle$ mentre la terza trasforma $\langle v_1,v_2\rangle$ in $\langle 0,v_1\rangle$. La somma di queste due matrici comporta la trasformazione di un vettore nel suo riflesso rispetto alla diagonale principale:

(4) $$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ =\ (\mathsf{Mirr}[y=x])_{\mathfrak{B}}\ .$$

Si trova anche che la somma delle 4 matrici trasforma un vettore-ZZ nella sua somma con il riflesso rispetto alla diagonale ZZD1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle \ .$$

Più in generale è interessante esprimere alcune matrici-ZZ come combinazioni lineari di altre più semplici e di interpretare queste decomposizioni in termini di trasformazioni e dei loro significati geometrici.

B22g.07 Consideriamo le seguenti matrici di profilo 2×2 su $\mathbb{Z}$

(1) $$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathsf{V} = \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix} \ .$$

e ricordiamo come si definisce il **prodotto [righe per colonne]** di due di queste matrici la matrice dello stesso genere

(2) $$\mathsf{T} \cdot \mathsf{U} := \begin{bmatrix} T_{1,1}\, U_{1,1} + T_{1,2}\, U_{2,1} & T_{1,1}\, U_{1,2} + T_{1,2}\, U_{2,2} \\ T_{2,1}\, U_{1,1} + T_{2,2}\, U_{2,1} & T_{2,1}\, U_{1,2} + T_{2,2}\, U_{2,2} \end{bmatrix} \ .$$

A questa definizione si può ricondurre anche la definizione di moltiplicazione di una matrice 2×2 per un vettore colonna 2×1 ricordata in g03 affiancando questo vettore e il risultato con il vettore colonna con due entrate nulle.

Il prodotto tra matrici si trova essere associativo:

(3)
$$\begin{aligned} (\mathsf{T} \cdot \mathsf{U}) \cdot \mathsf{V} &= \begin{bmatrix} T_{1,1}\, U_{1,1} + T_{1,2}\, U_{2,1} & T_{1,1}\, U_{1,2} + T_{1,2}\, U_{2,2} \\ T_{2,1}\, U_{1,1} + T_{2,2}\, U_{2,1} & T_{2,1}\, U_{1,2} + T_{2,2}\, U_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11\,11\,11 + 12\,21\,11 + 11\,12\,21 + 12\,22\,21 & 11\,11\,12 + 12\,21\,12 + 11\,12\,22 + 12\,22\,22 \\ 11\,11\,11 + 12\,21\,11 + 11\,12\,21 + 12\,22\,21 & 11\,11\,12 + 12\,21\,12 + 11\,12\,22 + 12\,22\,22 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1,1}\, V_{1,1} + U_{1,2}\, V_{2,1} & U_{1,1}\, V_{1,2} + U_{1,2}\, V_{2,2} \\ U_{2,1}\, V_{1,1} + U_{2,2}\, V_{2,1} & U_{2,1}\, V_{1,2} + U_{2,2}\, V_{2,2} \end{bmatrix} = \mathsf{T} \cdot (\mathsf{U} \cdot \mathsf{V}) \ \cdot \end{aligned}$$

Qui abbiamo abbreviato il prodotto $T_{i,j} \cdot U_{j,h} \cdot V_{h,k}$ con la scrittura $ij\, jh\, hk$.

Utilizziamo questa proprietà alla applicazione della matrice prodotto $(\mathsf{T} \cdot \mathsf{U})$ al vettore colonna $\mathbf{v}_{\mathfrak{B}}$ ottenendo:

(4) $$(\mathsf{T} \cdot \mathsf{U})\, \mathbf{v}_{\mathfrak{B}} = \mathsf{T}\left(\mathsf{U}\, \mathbf{v}_{\mathfrak{B}}\right) \ .$$

Questa uguaglianza dice che il prodotto di due matrici 2×2 su $\mathbb{Z}$ fornisce la rappresentazione canonica della trasformazione di un vettore colonna ottenuta applicando la prima matrice al risultato della applicazione della seconda matrice al vettore dato. In altre parole il prodotto di due matrici è la rappresentazione canonica della composizione delle trasformazioni rappresentate dalle matrici di partenza.

B22g.08 Si dimostra facilmente che il prodotto di matrici introdotto è distributivo rispetto alla loro somma, anzi rispetto alla loro combinazioni lineari.

(1) $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \ : \ (\alpha\, \mathsf{T} + \beta\, \mathsf{U}) \cdot \mathsf{V} = \alpha\, \mathsf{T} \cdot \mathsf{V} + \beta\, \mathsf{U} \cdot \mathsf{V} \ .$$

(2) $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \ : \ \mathsf{V} \cdot (\alpha\, \mathsf{T} + \beta\, \mathsf{U}) = \alpha\, \mathsf{V} \cdot \mathsf{T} + \beta\, \mathsf{V} \cdot \mathsf{U} \ .$$

Il prodotto di matrici non gode invece della commutatività: Infatti si trovano controesempi fornitianche da matrici molto semplici.

(3) $$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} .$$

B22g.09 Vediamo ora alcune trasformazioni particolari cercando di collegare la descrizione geometrica dei loro effetti alla strutture delle loro matrici canoniche.
Preliminarmente ricordiamo che tutte le trasformazioni lineari lasciano fisso il vettore origine del piano combinatorio.

Una trasformazione molto semplice è il collasso che trasforma ogni vettore-ZZ nel vettore $\langle 0,0\rangle$. Le entrate della sua matrice, secondo la loro interpretazione alla fine di g03, devono essere tutte uguali a 0, cioè

(1) $$\lceil \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle 0,0\rangle \rceil_{\mathfrak{B}} = \mathbf{0}_{2,2} := \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} .$$

Un'altra trasformazione semplice è la trasformazione identica di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, trasformazione che lascia fissi tutti i vettori-ZZ. Dalla interpretazione dei $T_{i,j}$ si ricava che la sua matrice canonica è la matrice identica

(2) $$\lceil \langle v_1, v_2\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle v_1,v_2\rangle \rceil_{\mathfrak{B}} = \mathbf{1}_{2,2} := \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} .$$

B22g.10 Esaminiamo le trasformazioni-ZZ lineari con tre entrate nulle e una uguale ad 1. Se questa si trova sulla diagonale principale si hanno questi effetti

(1) $$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\v_2\end{bmatrix} .$$

La prima matrice rappresenta l'operatore lineare che trasforma il generico vettore $\langle v_1, v_2\rangle$ in $\langle v_1, 0\rangle$, cioè nella sua sua proiezione sull'asse Ox. La seconda matrice rappresenta l'operatore lineare che trasforma il generico vettore $\langle v_1, v_2\rangle$ in $\langle 0, v_2\rangle$, cioè nella sua sua proiezione sull'asse Oy.

Come si è visto, questi due operatori, chiamati **proiettori sugli assi** e si denotano, risp., con $\boldsymbol{Prj}_1 := \boldsymbol{Prj}_x$ e con $\boldsymbol{Prj}_2 := \boldsymbol{Prj}_y$. Possiamo quindi scrivere

(2) $$\boldsymbol{Prj}_{1\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{Prj}_{2\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} .$$

Se l'entrata 1 si trova fuori della diagonale principale si hanno le relazioni:

(3) $$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_2\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\v_1\end{bmatrix} .$$

Prima di descrivere le trasformazioni corrispondenti consideriamo l'effetto della seguente matrice 2×2

(4) $$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_2\\v_1\end{bmatrix} .$$

Essa quindi rappresenta la riflessione del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ rispetto alla diagonale principale. Le due matrici precedenti quindi rappresentano le trasformazioni ottenute effettuando prima questa riflessione e poi la proiezione, risp., sull'asse OxZZ o sull'asse Oy_{ZZ}. In effetti abbiamo

(5) $$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} .$$

B22g.11 Vediamo gli effetti delle matrici diagonali, matrici aventi entrate nulle al di fuori della diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 \\ d_2 v_2 \end{bmatrix} .$$

Quando $d_1 = d_2 \neq 0$ l'effetto della trasformazione consiste nel sostituire ogni vettore-ZZ con quello avente le componenti moltiplicate per il parametro $d_1 \neq 0$; essa si dice **omotetia** di centro nell'origine e di fattore d_1.
Se $d_1 = d_2 > 1$ si usa il termine più specifico **dilatazione del piano-ZZ**: ad ogni vettore-ZZ viene sostituito il vettore ingrandito d_1 volte.

Se $d_1 = d_2 = -1$, ogni vettore-ZZ viene trasformato nel suo simmetrico rispetto all'origine:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} .$$

Questa trasformazione viene detta **simmetria centrale** di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avente come centro l'origine $\mathbf{0}_2$ e viene denotata con $\mathsf{Zntsmy}_{\mathbf{0}_2}$.

B22g.12 Altre due trasformazioni particolari sono:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ d_2 v_2 \end{bmatrix} ;$$

esse forniscono, risp., l'omotetia di fattore d_1 nella sola direzione orizzontale e l'omotetia di fattore d_2 nella sola direzione verticale.

Quindi la più generale trasformazione diagonale si può descrivere come ottenuta applicando successivamente due omotetie nelle due direzioni orizzontale e verticale; l'ordine è ininfluente e infatti

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbin{\dagger} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \mathbin{\dagger} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Se uno dei due parametri è uguale a 1 e l'altro a -1 si hanno le due riflessioni del piano rispetto all'asse orizzontale e rispetto all'asse verticale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} .$$

B22g.13 Per la trasformazione che a un punto-ZZ fa corrispondere il simmetrico rispetto alla codiagonale, si osserva che essa scambia le ascisse con le ordinate e cambia il loro segno. Quindi la sua azione è fornita dalla seguente espressione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} .$$

Consideriamo le trasformazioni corrispondenti alle matrici con due entrate uguali a 1 sulla diagonale principale, una entrata nulla e una nonnulla. Per esse si trova

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + b\, v_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ c\, v_1 + v_2 \end{bmatrix} .$$

Per queste due trasformazioni usiamo il francesismo **glissazioni**. Più compiutamente la prima di esse viene detta glissazione secondo la direzione Ox per l'estensione b e la denotiamo con $\mathsf{Glide}_{b\,\mathbf{e}_1}$; essa lascia invariata l'ordinata di tutti i punti-ZZ e quindi trasforma le rette-Z orizzontali in se stesse, mentre alza ($b > 0$) o abbassa ($b < 0$) le ascisse di una quantità $b\, v_2$ proporzionale all'ordinata. Esse quindi trasformano le rette-ZZ verticali in rette oblique della forma $\langle h, 0\rangle + \mathbb{Z} \cdot \langle b, 1\rangle$.

La trasformazione della seconda forma, che denotiamo con $\mathsf{Glide}_{c\,\mathbf{e}_2}$ e chiamiamo glissazione secondo Oy per lo spostamento c, ha l'interpretazione ottenibile dalla precedente scambiando le ascisse con le ordinate: essa lascia invariata l'ascissa di tutti i punti-ZZ e quindi trasforma le rette-ZZ verticali in se stesse, mentre alza ($c > 0$) o abbassano ($c < 0$) le ascisse di una quantità $c\,v_1$ proporzionale all'ascissa. Essa quindi trasforma le rette-ZZ orizzontali in rette oblique della forma $\langle 0, k\rangle + \mathbb{Z} \cdot \langle 1, c\rangle$.

B22g.14 Ricordiamo che la rotazione-ZZ di 90° con centro nell'origine, $\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°]$, è la permutazione-ZZ la cuii azione sul vettore $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ è determinata dalla seguente costruzione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} .$$

Si osserva che la rotazione-ZZ di 90° trasforma ogni retta-ZZK orientata per l'origine nella retta-ZZK orientata per l'origine che è sua ortogonale.

Applicando due volte la rotazione di 90°, cioè effettuando la rotazione di 180°, si ottiene la simmetria centrale:

$$\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 180°](\mathsf{v}) = \boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°]\,(\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°](\mathsf{v})) = -\mathsf{v} .$$

Applicando tre volte la rotazione di 90°, cioè effettuando la rotazione di 270°, si ottiene :

$$\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 270°](\mathsf{v}) = \boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°]\,(\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 180°](\mathsf{v})) = \boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°](-\mathsf{v}) = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} .$$

Infine applicando quattro volte la rotazione di 90° si ottiene l'identità:

$$\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 360°](\mathsf{v}) = \boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°]\left(\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},270°}(\mathsf{v})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \mathsf{v} .$$

Per le rotazioni con centro nell'origine si osserva che commutano e che

$$(\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°])^2 = \mathsf{Zntsmy}[\mathbf{0}] \;,\; (\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°])^3 = (\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°])^{-\mathbf{1}} \;\text{ e }\; (\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°])^4 = \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} .$$

Queste relazioni si possono leggere nelle seguenti uguaglianze matriciali:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} .$$

B22g.15 Dalla definizione segue che la composizione di due trasformazioni lineari T ed U è anch'essa una trasformazione lineare.

Questo fatto si può generalizzare a insiemi di trasformazioni di qualsiasi insieme ambiente (nel caso attuale $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), definiti chiedendo che le trasformazioni conservino qualche carattere di certe composizioni degli oggetti su cui agiscono (nel caso attuale conservano le combinazione lineare di vettori-ZZ).

È evidente che il prodotto di composizione di due trasformazioni caratterizzate dal mantenere una data proprietà deve mantenerla esso stesso. Come avremo ampiamente modo di vedere, queste caratteristiche di conservazione consentono di individuare gruppi di trasformazioni di grande interesse e utilità.

Nel caso delle trasformazioni lineari di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si trova inoltre che la matrice che rappresenta nella base canonica $\mathfrak{B} := \langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\rangle$ una trasformazione esprimibile come composizione $T \circ_{rl} U$ è ottenibile come prodotto delle matrici che rappresentano le trasformazioni fattore:

$$(T \circ_{rl} U)_{\mathfrak{B}} = T_{\mathfrak{B}} + U_{\mathfrak{B}} .$$

B22g.16 Talora per calcolare l'effetto di una permutazione T piuttosto elaborata risulta conveniente calcolare le successiva applicazioni di due o più permutazioni T_1, T_2, ... il cui prodotto di composizione fornisce la stessa T.
Può quindi essere utile individuare le trasformazioni ottenute con prodotti di composizione di trasformazioni semplici.

(1) Eserc. Verificare geometricamente e mediante le matrici le uguaglianze
(a) $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \;:\; \mathsf{Glide}_{b_1\mathbf{e}_1} \circ \mathsf{Glide}_{b_2\mathbf{e}_1} = \mathsf{Glide}_{(b_1+b_2)\mathbf{e}_1}$.
(b) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \;:\; \mathsf{Glide}_{a_1\mathbf{e}_1} \circ \mathsf{Glide}_{a_2\mathbf{e}_2} = \mathsf{Glide}_{(a_1+a_2)\mathbf{e}_2}$.

Verificare le seguenti uguaglianze
(c) $\forall a \in \mathbb{Z} \;:\; \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},90^\circ} \circ_{rl} \mathsf{Glide}_{a\mathbf{e}_1} = \mathsf{Glide}_{-a\mathbf{e}_2} \circ_{rl} \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},90^\circ}$.
(d) $\forall b \in \mathbb{Z} \;:\; \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},90^\circ} \circ_{rl} \mathsf{Glide}_{b\mathbf{e}_2} = \mathsf{Glide}_{-b\mathbf{e}_1} \circ_{rl} \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},90^\circ}$.
(e) $\forall a \in \mathbb{Z} \;:\; \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},180^\circ} \circ_{rl} \mathsf{Glide}_{a\mathbf{e}_1} = \mathsf{Glide}_{a\mathbf{e}_1} \circ_{rl} \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},180^\circ}$.
(f) $\forall b \in \mathbb{Z} \;:\; \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},180^\circ} \circ_{rl} \mathsf{Glide}_{b\mathbf{e}_2} = \mathsf{Glide}_{b\mathbf{e}_2} \circ_{rl} \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},180^\circ}$.

B22g.17 È interessante individuare le trasformazioni-ZZ involutorie, cioè le trasformazioni che applicate due volte non portano alcuna modifica al piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e considerare la struttura delle loro matrici canoniche.

Chiaramente sono involutorie tutte le riflessioni-ZZK, cioìe riflessioni rispetto agli assi, alla diagonale principale e alla codiagonale. Inoltre è involutoria la simmetria centrale, come lo sono tutti i prodotti di trasformazioni involtorie che commutano.

Delle trasformazioni involutorie è utile individuare i punti fissi e le coppie di punti duali. Le riflessioni rispetto a una retta hanno questa retta come insieme dei punti fissi; la simmetria centrale ha un unico punto fisso, l'origine $\langle 0, 0\rangle$.

B22g.18 È interessante individuare anche le trasformazioni-ZZ idempotenti, cioè le trasformazioni che hanno lo stesso effetto se applicate una volta o due volte (o più volte); è anche utile leggere la proprietà dell'idempotenza nelle corrispondenti matrici.
Sono idempotenti le due proiezioni sugli assi, la proiezione sulla diagonale e la proiezione sulla codiagonale. Più in generale sono idempotenti le proiezioni su tutte le rette-ZZK del piano-ZZ. Ovviamente è idempotente anche la trasformazione identica di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Si trovano inoltre le seguenti uguaglianze

$$\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1] \circ_{rl} \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_2] \;=\; \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_2] \circ_{rl} \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1] \;=\; \lceil \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\#\; \mathbf{0}_2 \rceil \;,$$
$$(\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1] + \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_2])^2 \;=\; \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1] + \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_2] \;=\; \lceil \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\#\; \mathbf{v} \rceil \;=\; \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;.$$

I proiettori $\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1]$ e $\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_2]$ si possono chiamare proiettori-ZZR ortogonali; ci si può chiedere se si possono introdurre due proiettori-ZZB ortogonali ai quali dare le forme $\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2]$ e $\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2]$, ma accade che essi forniscono punti-ZZ solo se applicati a una parte dei punti-ZZ.

Eserc. 1 Stabilire quale insieme di punti-ZZ può costituire il dominio di una proiezione della forma $\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2]$ e e di una proiezione della forma $\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2]$.
Constatare che per tale dominio valgono le rlazioni

$$\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2] \circ_{rl} \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2] \;=\; \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2] \circ_{rl} \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2] \;=\; \lceil \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\#\; \mathbf{0}_2 \rceil$$

e

$$(\boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2] + \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2])^2 \;=\; \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2] + \boldsymbol{Prj}[\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2] \;=\; \lceil \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\#\; \mathbf{v} \rceil \;=\; \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \;.$$

Eserc. 2 Constatare che le proiezioni-ZZR non commutano con le proiezioni-ZZB.

B22g.19 È utile distinguere le trasformazioni invertibili e più compiutamente individuare le coppie costituite da una trasformazione invertibile, cioè da una permutazione, e della sua inversa.
Tutte le trasformazioni involutorie sono invertibili e coincidono con la propria inversa.
Sono invertibili anche le glissazioni e si trova facilmente che l'inversa della $\mathsf{Glide}[b\,\mathbf{e}_1]$ è $\mathsf{Glide}[-b\,\mathbf{e}_1]$, mentre l'inversa della glissazione $\mathsf{Glide}[c\,\mathbf{e}_2]$ è $\mathsf{Glide}[-c\,\mathbf{e}_2]$.

B22g.20 Abbiamo visto molti movimenti rigidi che sono particolari trasformazioni lineari. Vi sono invece trasformazioni che conservano la adiacenza-ZZR, cioè movimenti rigidi, che non non sono trasformazioni lineari.

Ovviamente non sono lineari tutte le trasformazioni che non conservano l'origine.
Non sono quindi lineari le traslazioni che non si riducono alla identità.

Non sono lineari neanche le riflessioni rispetto a una retta-ZZK che non passa per l'origine e non lo sono le rotazioni con centro diverso dall'origine. In particolare non sono lineari le riflessioni rispetto ad una retta orizzontale, verticale, diagonale e codiagonale che passi per punti di $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} + 1/2)$ o di $(\mathbb{Z} + 1/2) \times \mathbb{Z}$; e non lo sono le rotazioni con centro in $(\mathbb{Z} + 1/2) \times (\mathbb{Z} + 1/2)$.

Vi sono poi trasformazioni che lasciano fissa l'origine ma non sono lineari; in particolare gli scorrimenti dei quadrati con centro nell'origine e lati paralleli ai due assi oppure lati paralleli alle due diagonali.

B22 h. prodotto scalare nel piano-ZZ

B22h.01 Abbiamo visto la relazione $\mathbf{e}_x \perp \mathbf{e}_y$ e l'uguaglianza $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$; questi due fatti si possono generalizzare.
Innanzi tutto si osserva che il prodotto scalare di un vettore $\mathbf{v}$ nonnullo per il vettore ottenuto ruotando $\mathbf{v}$ di 90° o di 270° vale 0; infatti

$$\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{Rot}_{90^\circ}(\mathbf{v})) = v_1\, v_2 + v_2\,(-v_1) = 0 = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{Rot}_{270^\circ}(\mathbf{v})) = v_1\,(-v_2) + v_2\, v_1 \ .$$

(1) Prop.: Consideriamo due vettori-ZZ nonnulli $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$; per essi si trova

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ = \ 0 \quad \iff \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \ .$$

Dim.: Consideriamo innanzi tutto il caso in cui $v_1 = 0$ e quindi $v_2 \neq 0$ e si possa scrivere $\mathbf{v} =: h\, \mathbf{e}_2$; in tal caso $v_1\, w_1 + v_2\, w_2 = 0$ implica $w_2 = 0$, cioè $\mathbf{w} = k\, \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{v}$ e viceversa $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ implica $\mathbf{w} \perp \mathbf{e}_2$, cioè $w_2 = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Il caso $v_2 = 0$ si tratta in modo simmetrico.

Nel caso in cui nessuna delle quattro componenti sia nulla, possiamo limitarci a considerare il caso in cui $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori-ZZ primitivi. Supponiamo in particolare che $\mathbf{v}$ abbia entrambe le componenti positive (gli altri casi essendo riducibili a questo mediante rotazioni-ZZR) e che $\mathbf{w}$ presenti $w_1 < 0$ e $w_2 > 0$ (gli altri casi essendo riducibili a questo mediante riflessioni-ZZR).
Evidentemente $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ sse $w_1 = -v_2 \ \wedge \ w_2 = v_1$ e questo implica $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.
Per il viceversa cominciamo con il ricordare che con $maxpwr_p(n)$ denotiamo la massima potenza dell'intero (primo) p che divide n.
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ equivale alla $v_1\,|w_1| = v_2\, w_2$; sia p uno dei numeri primi che dividono v_1, cioè tali che $m_p := maxpwr_p(v_1) > 0$; dato che $v_1 \perp v_2$, deve essere $maxpwr_p(v_2) = 0$ e di conseguenza $maxpwr_p(w_2) = m_p + maxpwr_p(|w_1|)$; ma $|w_1| \perp w_2$ e $maxpwr_p(w_2) > 0$ implicano $maxpwr_p(|w_1|) = 0$ e quindi $maxpwr_p(w_2) = maxpwr_p(v_1)$; per l'arbitrarietà di p si conclude che $w_2 = v_1$ e con considerazioni simmetriche $w_1 = -v_2$; Si conclude che in ogni caso $v_1\, w_1 + v_2\, w_2 = 0$ ∎

Si osserva che può essere utile decidere l'ortogonalità di due rette-ZZ R ed S studiando se si verifica una uguaglianza della forma $\overrightarrow{R_1\, R_2} \cdot \overrightarrow{S_1\, S_2} = 0$, con R_1 ed R_2 punti diversi qualsiasi di R e S_1 ed S_2 punti diversi arbitrari di S.
Anche dalla dimostrazione precedente emerge che la relazione di ortogonalità qui trattata amplia la ortogonalità tra rette-ZZK introdotta in b18 .

B22h.02 A cominciare dal prodotto scalare, molte manipolazioni riguardanti i vettori-ZZ e le matrici-ZZ di profilo 2×2, entità che talora conviene considerare come coppie di vettori-ZZ affiancati o come coppie di vettori-ZZ sovrapposti, possono essere utilmente espresse mediante notazioni matriciali.
Anche queste nozioni costituiscono versioni limitate a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di nozioni di portata molto più ampia.

Diciamo rappresentazioni mediante matrici colonna dei vettori-ZZ le matrici colonna (ossia di profilo 1×2) che nelle due successive posizioni di colonna presentano le loro successive componenti cartesiane. Ad esempio per i vettori-ZZ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ scriviamo

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{w}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \ .$$

Diciamo invece matrici riga di tali vettori le matrici 2×1 trasposte delle precedenti, cioè scriviamo

$$\mathbf{v}^\mathsf{T} = [\, v_1 \quad v_2 \,] \quad , \quad \mathbf{w} = [\, w_1 \quad w_2 \,] \ .$$

Va precisato che abbiamo introdotto entità come $\mathbf{v}^\top$ e $\mathbf{w}^\top$ che evidentemente sono in biiezione con i vettori-ZZ ma alle quali va attribuito un ruolo un po' diverso e che chiameremo **funzionali lineari** associati biunivocamente ai corrispondenti vettori-ZZ.

B22**h.03** Le notazioni matriciali dei vettori-ZZ sono rappresentazioni che consentono di esprimere vantaggiosamente alcuni tipi di manipolazioni di vettori.
Innanzi tutto consentono di presentare efficacemente le combinazioni lineari dei vettori.
Inoltre il prodotto scalare nella notazione matriciale assume la seguente forma

$$[\, v_1 \ v_2 \,] \ \dotplus \ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \ := \ v_1\, w_1 + v_2\, w_2 \ = \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ .$$

Qui abbiamo introdotto con una notazione della forma $M_1 \dotplus M_2$, l'operazione binaria **prodotto righe per colonne di due matrici** conformabili, M_1 e M_2.
Esso si può immaginare ottenuto con due puntatori che scorrono in sincronia, risp., le successive posizioni della la riga $\mathbf{v}$ e le successive posizioni della colonna $\mathbf{w}^\top$ e che in ciascuno dei due passi moltiplicano i due interi incontrati per ottenere la loro somma da presentare come risultato della manovra.
Si osserva che si è effettuata una prima generalizzazione dell'operazione definita in e06 .

La suddetta composizione si può considerare l'applicazione al vettore $\mathbf{w}$ di un operatore associato a $\mathbf{v}$, cioè $\mathbf{v}^\top$, che svolge il ruolo di funzionale lineare:

$$\mathbf{v}^\top \ = \ \left\ulcorner \langle w_1, w_2 \rangle \mapsto v_1\, w_1 + v_2\, w_2 \right\urcorner \ = \ \ulcorner \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \urcorner \ .$$

Per il prodotto scalare possono essere significative anche queste due notazioni:

$$\mathbf{v}^\top{}_{,}\mathbf{w} \ = \ \mathbf{v}^\top(\mathbf{w}) \ := \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Può servire anche avere presente la seguente considerazione:
Se $\mathbf{v} = v_1\, \mathbf{e}_1 + v_2\, \mathbf{e}_2$, allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = v_1 \ \wedge \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = v_2$ e quindi $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$.

B22**h.04** L'importanza del prodotto scalare si può ricondurre in gran parte alle sue proprietà di invarianza rispetto al gruppo ***GrRgdm***ZZ, ossia rispetto ai movimenti rigidi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(1) Prop.: Il prodotto scalare è invariante per la rotazione $\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}_2, 90°]$ e di conseguenza per le sue potenze di composizione, cioè per $\mathsf{ZntsmyZZ}_{\mathbf{0}_2,180°}$ e per $\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}_2, 270°]$.
Dim.: Per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si ha

$$\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}_2, 90°](\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0}_2,90°}(\mathbf{w}) \ = \ [\, v_2 \ -v_1 \,] \ \dotplus \ \begin{bmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{bmatrix} \ = \ v_2\, w_2 + (-v_1)\,(-w_1) \ = \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ \blacksquare$$

Di conseguenza le rotazioni $(\boldsymbol{Rot}[\mathbf{0}, 90°])^n$ mantengono l'ortogonalità:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \implies \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},90°}(\mathbf{v}) \perp \boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},90°}(\mathbf{w}) \ .$$

(2) Prop.: Il prodotto scalare è invariante per le riflessioni-ZZK.
Dim.: Ancora basta esplicitare le espressioni dei prodotti scalari dei vettori trasformati per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\mathcal{M}_{[x=0]}(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{M}_{[x=0]}(\mathbf{w}) = [\, v_1 \ -v_2 \,] \dotplus \begin{bmatrix} w_1 \\ -w_2 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{[y=0]}(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{M}_{[y=0]}(\mathbf{w}) = [\, -v_1 \ v_2 \,] \dotplus \begin{bmatrix} -w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathcal{M}_{[y=x]}(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{M}_{[y=x]}(\mathbf{w}) = [\, v_2 \ v_1 \,] \dotplus \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{[y=-x]}(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{M}_{[y=-x]}(\mathbf{w}) = [\, -v_2 \ -v_1 \,] \dotplus \begin{bmatrix} -w_2 \\ -w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ \blacksquare$$

B22h.05 Conviene segnalare esplicitamente l'utilità delle traslazioni-ZZ, delle rotazioni-ZZR e delle riflessioni-ZZK.
Dalle loro definizioni risulta evidente che esse lasciano invariate o modificano in modo ben controllabile numerose proprietà e valutazioni.
Tutte lasciano invariata la quadranza tra due punti; più in generale lasciano invariato il prodotto scalare di due vettori-ZZ e di due vettori.a-ZZ; lasciano invariata anche l'ampiezza degli angoli-ZZK; vedremo tra poco che traslazioni-ZZ e rotazioni-ZZR lasciano invariate le ampiezze degli angoli-ZZ, mentre le riflessioni cambianoil loro segno.
Vedremo anche che per un cammino-ZZK traslazioni-ZZ, rotazioni-ZZR e riflessioni-ZZK conservano le proprietà di essere cammino-ZZR o meno, di essere cammino-ZZB o meno, di essere cammino aperto o chiuso, di essere cammino hamiltoniano o meno di essere cammino euleriano e non cambiano i parametri lunghezza-arc e lunghezza-vert. Inoltre vedremo che traslazioni-ZZ e rotazioni-ZZR non cambiano l'area definita da un circuito-ZZ, mentre le riflessioni-ZZK cambiano il suo segno.

Queste trasformazioni consentono quindi di estendere le proprietà e le valutazioni di molte configurazioni che si sono trovate analizzando un insieme circoscritto di configurazioni che evidentemente conviene scegliere semplici da studiare.

Questo rende le suddette trasformazioni utili sia per affrontare specifiche applicazioni che per l'impianto teorico complessivo.

B22 i. angoli con segno nel piano-ZZ

B22i.01 Procediamo alla definizione generale degli angoli-ZZ in grado di contenere quelle date finora, procedendo con insiemi progressivamente più estesi di angoli e con le nozioni di rotodilatazione del piano-ZZ e di somma di angoli.

Questi sviluppi ci mettono in grado di esercitare un semplice controllo qualitativo degli angoli in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ma forniscono un poco soddisfacente controllo quantitativo. Questo è evidente soprattutto nella possibilità di definire una precisa misura della ampiezza solo per pochi angoli.
Per un migliore controllo degli angoli risulta quindi necessario di ampliare l'insieme dei numeri trattabili.

In effetti si otterrà un primo miglioramento con la disponibilità dei numeri razionali, ma ancora dei limiti evidenti; un ulteriore miglioramento si ottiene definendo i numeri algebrici, ma solo con i numeri che chiamiamo reali costruibili si raggiunge un soddisfacente controllo quantitativo.
Occorre aggiungere che un agevole controllo delle proprietà generali si potrà ottenere con la definizione assiomatica dei numeri reali e della teoria degli insiemi, ma al costo di non occuparsi delle esigenze pratiche .

B22i.02 Per angolo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ senza segno basico convesso, o concisamente per **angolo-ZZus basico convesso**, si intende un insieme di punti-ZZ individuato dalla semiretta-ZZ Ox_{0+}, dal punto $\mathbf{0}$ e da una semiretta-ZZ con estremità in $\mathbf{0}$ e passante per un punto-ZZ $\mathbf{b} := \langle a, b\rangle$ del semipiano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{0+}$, semiretta esprimibile come $\overrightarrow{\mathbf{0}, \langle a, b\rangle}$.
Tale angolo si denota con $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathbf{b}\big\rangle$ si vuole costituito dai punti-ZZ di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{0+}$ che si trovano nel semipiano a destra della retta.or-ZZ $\mathbb{Z} \cdot \mathbf{b} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ contenente il vettore-ZZ $\mathbf{b}$.

In seguito procediamo a definire angoli più generali e dotati anche di un segno individuandoli sempre mediante terne della forma $\angle\langle \mathcal{U}, \mathsf{V}, \mathcal{W}\rangle$, con V che denota un punto di un piano e con $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ che denotano semirette dello stesso piano che hanno estremità in V.
Il punto V è detto dn vertice dell'angolo e le semirette $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ sono chiamate primo e secondo **lato dell'angolo**.

Si osserva che ciascuna di queste due semirette può essere individuata da un vettore applicato in V da un suo altro punto, dalla retta orientata sua estensione (passante per V) e da qualsiasi vettore applicato contenuto nella suddetta retta orientata. Dai queste 4 possibilità seguono 16 tipi di possibi notazioni equivalenti per ogni angolo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (e non solo).

B22i.03 Particolari angoli-ZZus basici convessi sono:
l'**angolo-ZZus basico retto** $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_y\big\rangle$;
l'**angolo-ZZus basico piatto** $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathsf{e}_x\big\rangle$; questo evidentemente coincide con l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_{0+}$ munito del punto origine $\mathbf{0}$;
l'**angolo-ZZus basico semiretto** $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y\big\rangle$.

Le definizioni degli angoli-ZZus basici convessi risultano quindi coerenti con le definizioni degli angoli-ZZK.

Un angolo-ZZus basico convesso $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathbf{b}\big\rangle$ viene detto **angolo-ZZus basico acuto** sse $\mathbf{b} = \langle a, b\rangle$ con $a, b \in \mathbb{N}$, mentre viene detto **angolo-ZZus basico ottuso** sse $\mathbf{b} = \langle a, b\rangle$ con $-a, b \in \mathbb{N}$. intero negativo.
Si osserva che gli angoli-ZZus basici acuti sono sottoinsiemi propri dell'angolo-ZZus basico retto, mentre un angolo-ZZus basico ottuso contiene propriamente l'angolo-ZZus basico retto ed è sottoinsieme proprio dell'angolo-ZZus basico giro.

Gli angoli-ZZus basici sono in corrispondenza biunivoca con i loro secondi lati e con i corrispondenti punti-ZZ $\langle a,b\rangle$ appartenenti al secondo lato con $|a|$ e b interi nonnegativi coprimi.

Stabiliamo anche una biiezione tra angoli-ZZus basici convessi e trasformazioni esprimibili mediante matrici 2×2 sugli interi. Queste matrici si trovano essere matrici di rotodilatazione-ZZ.

All'angolo-ZZus $\hat{\alpha} = \angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \langle a,b\rangle\big\rangle$ con $|a| \perp b$ e al corrispondente $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Q}_{0+}$ facciamo corrispondere la matrice di rotodilatazione-ZZ

(1). $$\boldsymbol{RotDil}_{\hat{\alpha}} = \boldsymbol{RotDil}_{\langle a,b,\rangle} := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix} \in \mathsf{Mat}_{2;\mathbb{Z}}$$

L'applicazione (lineare-Z) di tale matrice a un vettore-ZZ $\langle x,y\rangle$ fornisce

(2) . $$\boldsymbol{RotDil}_{\langle a,b\rangle}(x,y) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ax-by \\ bx+ay\end{bmatrix}$$

Si constata che questa trasformazione è lineare-Z lascia invariata l'origine, trasforma ogni semiretta-ZZ con estremità nell'origine in un sottoinsieme di una semiretta-ZZ con estremità nell'origine.

Inoltre trasforma le quadranze dei vettori-ZZ nel seguente modo

(3) . $$\mathsf{Qdr}\left(\boldsymbol{RotDil}_{\langle a,b,\rangle}(x,y)\right) = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2) = \mathsf{Qdr}(a,b)\,\mathsf{Qdr}(x,y)$$

Si tratta di una trasformazione del genere $\{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} funbc \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$, ossia di una trasformazione iniettiva nonbiettiva. Fanno eccezione le rotodilatazioni relative agli angoli-ZZs nullo, retto e giro per le quali abbiamo, rispettivamente, l'identità $\mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, la rotazione-ZZR di 90° e la rotazione-ZZ di 180°, ossia la simmetria centrale che trasforma ogni vettore nel suo opposto.

(4) . $$\boldsymbol{RotDil}(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{RotDil}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{RotDil}(-1,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Queste sono quindi permutazioni, di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ molto semplici.

B22i.04 Le rotodilatazioni associate ad angoli-ZZus basici convessi trasformano appartenenti a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{*,0}$ in semirette che possono appartenere a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}[*,-]$; inoltre la rotazione corrispondente all'angolo-ZZus basico trasforma una semiretta-ZZ in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{*,0+}$ nella sua opposta.

Si è quindi indotti a definire angolo-ZZus basico nonconvesso come angolo esprimibile come $\angle\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \langle a,b\rangle\big\rangle$ con a e b interi qualsiasi diversi entrambi da 0.

Tale insieme si può descrivere come l'insieme dei punti-ZZ toccati da una semiretta mobile con estremità in $\mathbf{0}$ che ruota intorno all'origine a partire dalla posizione del semiasse Ox_{0+} fino ad occupare la posizione della semiretta appartenente a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{*,0-}$.

Questi angoli sono qualificati come nonconvessi in quanto si trovano segmenti definiti da un duetto di loro punti che toccano punti-ZZ loro estranei.

Tra questi angoli-ZZus basici si trovano anche angoli identificabili, risp., con gli angoli-ZZK $\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathsf{e}_x - \mathsf{e}_y$ con ampiezza 225°, $\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, -\mathsf{e}_y$ con ampiezza 270°, $\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_x - \mathsf{e}_y$ con ampiezza 315° e l'angolo.ZZK giro basico. che

B22i.05 Se si cerca di individuare l'angolo giro basico con la terna $\big\langle \mathsf{e}_x, \mathbf{0}, \mathsf{e}_x \ \big\langle$ lo si confonde con l'angolo nullo basico.

L'angolo-ZZus basico giro si ottiene sommando due angoli-ZZus basici piatti e si può si esprime bene servendosi di lato iniziale, vertice e rotazione di 360° della semiretta mobile.

Questo tipo di identificazione risulta valida per ogni angolo-ZZus basico e quindi può essere preferito alla identificazione con semiretta, vertice e semiretta, il quale tuttavia risulta validoe comodo per tutti gli angoli-ZZus basici.

Il nuovo tipo di identificazione porta una terza generalizzazione che considera angolo-ZZ un multiinsieme con terreno $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e valori di molteplicità forniti da interi positivi.
Anche l'angolo basico giro va considerato un tale multiinsieme che attribuisce molteplicità 2 ai punti del semiasse $\mathsf{Ox}_{Z,0+}$ e molteplicità 1 ai rimanenti elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Con la identificazione che si serve di lato iniziale, vertice e rotazione è naturale introdurre angoli-ZZus basici che hanno come primo lato $\mathbf{e}_x \cdot \mathbb{N}$ (, vertice in $\mathbf{0}$) e rotazioni della semiretta mobile per ampiezze superiori a 360°.

Consideriamo il caso di un angolo ottenuto con una rotazione che compie $k \geq 0$ giri completi intorno al vertice $\mathbf{0}$ e effettua un ulteriore movimento rotatorio inferiore a un giro completo che porta al secondo lato della forma $\langle d, n\rangle \cdot \mathbb{N}$; denotiamo con $\hat{\sigma}$ l'angolo-ZZus basico corrispondente all'ultima parte della rotazione.

L'angolo così imdividuato si può considerare la somma di un multiplo k dell'engolo giro basico e di un angolo-ZZus basico che scriviamo $\hat{\sigma} = \angle\big\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{0}, \mathbf{f}\big\rangle$, con $\mathbf{f} = lad, n\rangle$.
Questo angolo consiste nel multiinsieme che ai punti-ZZ di $\hat{\sigma}$ assegna la molteplicità $k+1$ e ai punti-ZZ rimanenti la molteplicità k.

Abbiamo dunque una generalizzazione coerente degli ango-ZZus con il primo lato uguale a $\mathbf{e}_x\mathbb{N}$ e ampiezze illimitatamente elevate. Anche questi angoli li qualifichiamo come**angoli-ZZus basici**.

Osserviamo esplicitamente che le ampiezze di questi angoli non sono semplici da trattare in quanto sono espresse da un multiplo naturale di 360° e da una rotazione espressa da una coppia di interi che sappiamo tradurre in gradi solo per algoli con ampiezze multiple di 45°

B22i.06 Una successiva generalizzazione introduce angoli-ZZ con ampiezze negative ed è motivata dalla opportunità di trattare angoli ottenuti per riflessione di altri angoli, cominciando dalla riflessione rispetto all'asse orizzontale $\mathbf{Mirr}[\mathsf{Ox}_Z]$, e dal giustificato desiderio di disporre di una riduzione degli angoli ottenuta per sottrazione da un angolo con secondo lato $\mathcal{L}$ di un secondo angolo con secondo lato $\mathcal{L}$.

La riflessione rispetto Ox_Z di un angolo definito da una rotazione antioraria porta naturalmente a un angolo definito da una rotazione oraria, cioè negativa. A questo punto possiamo parlare di angoli con ampiezze multiple intere, non solo naturali, di 45°.
Abbiamo ad esempio l'angolo-ZZus basico $\angle\big\langle \mathsf{Ox}_{ZZ}, \mathbf{0}, \langle -1, 1\rangle\big\rangle$ di ampiezza 125° che viene riflesso nell'angolo individuabile con $\angle\big\langle \mathsf{Ox}_{ZZ}, \mathbf{0}, -125°\big\rangle$.

Per introdurre l'accennata sottrazione tra angoli, a rigore, si devono definire angoli-ZZus della forma $\angle\big\langle \mathbf{a}, \mathbf{0}, \alpha\big\rangle$ con $\mathbf{a}$ vettore-ZZ e α indicazione di ampiezza di rotazione che deve essere fornita da un numero di giri completi (in $\mathbb{Z}$ e da uan rotazione ulteriore determinata da una coppia $\langle d, n\rangle$.
Definiamo quindi angolo-ZZ con vertice nell'origine,o concisamente angolo-ZZv0 e scriviamo $\angle\big\langle \mathbf{a}, \mathbf{0}, \alpha\big\rangle$ ogni angolo esprimibile con

$$\boldsymbol{RotDil}[\mathbf{a}]\big(\angle\big\langle \mathsf{Ox}_{ZZ}, \mathbf{0}, \alpha\big\rangle\big) \ ,$$

cioè come angolo ottenuto ruotando opportunamente un angolo-ZZus con vertice nell'origine e avente come primo lato Oz_Z.

Possiamo quindi definire opposto di un angolo $\hat{\alpha} = \angle\big\langle \mathbf{a}, \mathbf{0}, \alpha\big\rangle$, con α indicazione di ampiezza angolare l'angolo che definiamo

$$-\hat{\alpha} \ := \ \angle\big\langle \mathbf{a}, \mathbf{0}, -\alpha\big\rangle \ .$$

Esso individua il multiinsieme opposto del multiinsieme definito da $\hat{\alpha}$, ossia il multiinsieme con molteplicità opposte a quellefornite da $\hat{\alpha}$.

Si può quindi definire differenza di due angoli-ZZ $\hat{\alpha} = \angle\langle \mathsf{a}, \mathbf{0}, \alpha \rangle$ e $\hat{\delta} = \angle\langle \mathsf{d}, \mathbf{0}, \delta \rangle$ con $\mathsf{d}{\cdot}\mathbb{N} = \boldsymbol{RotDil}[\alpha](\mathsf{a})$:

$$\hat{\alpha} - \hat{\delta} := \hat{\alpha} + (-\hat{\delta}) = \angle\langle \mathsf{a}, \mathbf{0}, \alpha - \delta \rangle \ ,$$

dove la differenza delle ampiezze angolari va ora calcolata considerando sia i giri completi sia la rotazione ridotta.

Questo calcolo si può effettuare in modo preciso operando solo sugli interi, ma lo lasciamo inespresso solo come possibilità intuibile, in quanto risulta interessante per gran parte degli scenari pratici solo quando si opera con numeri reali costruibili. Risulta comunque più presentabile utilizzando numeri razionali e diinteresse pratico in casi circoscritti quando si dispone dei numeri algebrici.

Conviene osservare esplicitamente che la somma di angoli-ZZ è commutativa e associativa:

$$\hat{\alpha} + \hat{\delta} = \hat{\delta} + \hat{\alpha} \quad \text{ e } \quad (\hat{\alpha} + \hat{\delta}) + \hat{\phi} = \hat{\alpha} + (\hat{\delta} + \hat{\phi}) =: \hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\phi} \ .$$

Osserviamo anche che disponendo degli angoli-ZZ con vertice nell'origine le rotazioni, il passaggio all'opposto, la somma e la differenza di angoli sono operazioni sempre definite, senza le limitazioni degli angoli-ZZus basici.

B22i.07 Si impone a questo punto l'opportunità di disporre di angoli-ZZ con vertici diversi dall'origine e di definire come i vari angoli si comportano quando sono sottoposti a traslazioni-ZZ, riflessioni intorno a punti-ZZ arbitrari con ruolo di vertice e rispetto a riflessioni-ZZK.

La generalizzazione riguardante l'arbitrarietà del vertice si risolve facilmente definendo **angolo-ZZ [con segno]** ogni multiinsieme con terreno $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e molteplicità in $\mathbb{Z}$ ottenibile applicando una relazione-ZZ ad un angolo-ZZv0, con vertice nell'origine.

Si trova senza difficoltà che le proprietà non legate a elementi specifici (come particolari punti-ZZ e particolari parametri valutativi) valgono anche per gli angoli-ZZ con vertice diverso da $\mathbf{0}$.
Questo è in accordo con la conservazione da parte delle traslazioni-ZZ delle relazioni di adiacenza-R e adiacenza-B e della quadranza tra duetti di punti-ZZ.

Per quanto riguarda i procedimenti e le formule che consentono di effettuare le costruzioni di un nuovo nuovi angolo a partire da angoli-ZZ $\hat{\alpha}_i$ con vertice in V si possono ottenere trasformando mediante $\boldsymbol{Trsl}[-\mathsf{V}]$ questi angoli $\hat{\alpha}_i$ nei corrispondenti angoli $\hat{\alpha}_{i,0}$ con vertice nell'origine, costruendo l'angolo composizione di questi $\hat{\rho}$ e trasformando questo nell'angolo con vertice in V $\boldsymbol{Trsl}[\mathsf{V}](\hat{\rho})$ costituente il risultato richiesto.