1

Capitolo B21
piano sugli interi: basi geometriche

Contenuti delle sezioni

a. punti-ZZ e vettori-ZZ p. 4
b. segmenti-ZZ, semirette-ZZ e rette-ZZ p. 8
c. operazioni e valutazioni per i vettori-ZZ p. 11
d. vettori applicati e segmenti orientati; segmenti, semirette e rette-ZZK p. 15
e. rette, equazioni lineari, disequazioni lineari e semipiani segnati p. 24
f. traslazioni del piano-ZZ p. 28
g. parallelismo e ortogonalità p. 31
h. griglia combinatoria e sue coordinate p. 37
i. cammini, connessioni e distanze per insiemi di caselle p. 39
j. cammini, percorsi e circuiti sui punti-ZZ p. 44
k. figure-Bx specifiche e loro cardinali p. 51
l. costruzioni sul piano-ZZ p. 57
m. validità del piano-ZZ come modello fisico p. 59

59 pagine

B21 0.01 Questo capitolo sviluppa la trattazione del piano-ZZ, l'insieme ambiente delle coppie di numeri interi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si tratta di una struttura costruttivamente semplice che può essere presentata con raffigurazioni chiare ed efficaci che consentono di introdurre una buona gamma di nozioni geometriche fondamentali attraverso la semplice nozione di coppia di numeri interi, evitando di fare ricorso all'elaborato concetto di continuo.

Il piano-ZZ, da un lato consente di introdurre una notevole varietà di situazioni e di costruzioni algoritmiche, dall'altro rende sostenibile dall'intuizione e da argomentazioni empiristiche e ben motivate dagli obiettivi computazionali la successiva introduzione di ambienti più ricchi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (piano sui razionali, piano e spazi sui reali, sui complessi, ...), ambienti in grado di ospitare discipline importanti quali la geometria euclidea, l'analisi infinitesimale e la fisica classica.

In effetti il piano-ZZ consente di iniziare un approccio costruttivo e graduale dei temi della geometria e del calcolo infinitesimale che non deve fare ricorso dall'inizio a concetti piuttosto impegnativi (numero reale, curva continua, ...) che il rigore richiede di basare su sistemi di assiomi, ma che, comprensibilmente, spesso sono trattate ricorrendo all'intuizione spaziale con tutte le perplessità che questa può suscitare.

Il presente approccio costruttivo graduale non rinuncia all'intuizione spaziale e al suo evidente merito di sostenere mnemonicamente e psicologicamente gli sviluppi delle costruzioni e delle argomentazioni che intendono raggiungere lo status delle dimostrazioni.

Va precisato che gli sviluppi che seguono sono sostenuti dall'intuizione, ma non ne dipendono in quanto sono interamente riconducibili alle nozioni di numero intero e di coppia che a loro volta si possono far risalire alle nozioni elementari della comunicazione tra esecutori di manipolazioni formali a di algoritmi.
Queste attività si possono proporre come sostanziali e caratterizzanti per molte discipline rivolte alla conoscenza (quelle che qui principalmente interessano) e che inoltre per la propria condivisibilità e per la propria portata possono invocare il supporto della osservabilità delle conseguenze applicative, oggi sperimentabile ampiamente e spesso agevolmente.

B21 0.02 Nel piano-ZZ si possono introdurre varie figure e configurazioni geometriche e loro valutazioni numeriche significative, cioè utilizzabili per varie applicazioni e vari sviluppi successivi.
Le prime valutazioni si servono di numeri interi, ma poco dopo emerge la necessità di servirsi dei numeri razionali, mentre solo più oltre si rende necessario introdurre i radicali e i numeri reali costruibili.

Le configurazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e le loro valutazioni consentono di affrontare problemi di forte incisività, sia all'interno della matematica che nel mondo delle sue applicazioni. Per definire questi problemi è opportuno fare riferimento esplicito al modello fisico-matematico di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e si pongono le prime questioni sulla relazione tra configurazioni geometriche e realtà fisica.

Per risolvere vari problemi nel piano-ZZ si devono effettuare attività algoritmiche significative e talora fondamentali le quali hanno il pregio di poter essere portate a termine facendo uso solo di numeri interi e di altre semplici entità discrete.
Con queste entità discrete inizia a porsi l'esigenza di trattare sistematicamente un'ampia varietà di strutture discrete e questo conduce ad affrontare le prime problematiche delle teorie combinatorie e a prepararsi alle problematiche dell'algebra.

Studiando il piano-ZZ si sente la necessità di ampliare anche le nozioni sulle simmetrie e sui gruppi di trasformazioni e queste danno l'opportunità di chiarire come queste nozioni possano contribuire all'economia di pensiero, ad argomentazioni più strutturate e quindi ad esposizioni più concise, più fondate e, se si vuole, più eleganti.

Conviene anche osservare che nello studio del piano-ZZ risulta ben chiara l'opportunità di presentare in forma concisa insiemi di situazioni finite ma potenzialmente illimitate ricorrendo alla nozione di infinito, ma solo nella versione numerabile.

Va anche segnalato che il modo di procedere strettamente costruttivo richiede molte distinzioni; qui molte di esse sono presentate attraverso elenchi di casi che sono visti attraverso una gamma minuziosa di notazioni.
Queste possono risultare stucchevoli per molte visioni di insieme, ma possono risultare utili in attività di implementazione di algoritmi ampiamente praticati, in particolare nelle applicazioni grafiche.
Per cercare di tenere sotto controllo le accennate minuzie sono proposti alcuni accorgimenti lessicali e sono gestiti elenchi di termini, notazioni e abbreviazioni [Xte, Xno, Xab], utili anche per verifiche semiautomatiche di completezza e coerenza.

B21 0.03 La presentazione del piano sugli interi inizia dai suoi elementi, i punti-ZZ; questi in vari sviluppi si trova più opportuno chiamarli vettori-ZZ e, mentre per i punti usiamo notazioni come P_i e $\overline{Q}$, per i vettori usiamo notazioni come $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_j$.
per essi si possono introdurre varie costruzioni e valutazioni che saranno riprese trattando ambienti operativamente più prestanti come i piani sui numeri razionali e sui numeri reali e come gli spazi cartesiani a 3 o più dimensioni su razionali, reali costruibili, reali e complessi.

Dobbiamo ricordare che allo stato attuale delle definizioni si possono utilizzare solo i numeri interi, mentre per gli ambienti più prestanti si potrà contare sulle entità numeriche più prestanti sopra citate.

Ipunti o vettori sono introdotti, in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ma non solo, come entità statiche ma, nella prospettiva di svariate possibilità applicative, possono essere interpretati anche come entità cinematiche, ossia come spostamenti da un punto all'altro nell'ambiente nel quale sono collocati, attualmente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Una coppia di vettori-ZZ o punti-ZZ $\langle P_1, P_2 \rangle = \langle$ viene chiamata anche **vettore-ZZ applicato**, **vettore.a-ZZ** o **segmento-ZZ orientato**; a questo tipo di entità orientata si aggiunge il corrispondente tipo di entità nonorientata chiamata segmento-ZZ nonorientato o soltanto **segmento-ZZ**.

Risulta opportuno introdurre anche vari tipi di insiemi numerabili di punti: le semirette, le rette e i semispazi.

La distinzione tra entità orientate e nonorientate, spesso sfuggente, si ripresenta per molte altre configurazioni (rette, percorsi e cammini, poligoni, areecon eventuale segno, ...).
Di vettori e segmenti si individuano vari casi particolari (orizzontali, verticali, diagonali, codiagonali, ...), forse troppi ma utili in applicazioni quali architettura, geografia e geologia.

Ai vettori si associa la nozione di orientazione e ai segmenti nonorientati quella di inclinazione.

Tra vettori, segmenti, rette e simili intercorrono due relazioni importanti: il parallelismo (al quale si collega la nozione di punto all'infinito) e l'incidenza, anche queste nozioni che conviene presentare in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Sui vettori si definiscono varie operazioni di carattere algebrico: somma, differenza, moltiplicazione per un intero, combinazione lineare-Z di vettori e prodotto scalare.
Dal prodotto scalare si derivano le definizioni di ortogonalità, norma al quadrato di un vettore e quadranza di un segmento.

Successivamente si esaminano le trasformazioni lineari di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le rappresentazioni di queste mediante matrici 2×2 ed espressioni matriciali che permettono di controllare proprietà come parallelismo, ortogonalità e dipendenza lineare.

Strumenti fondamentali per lo studio del piano-ZZ sono le trasformazioni invertibili di tale ambiente che formano collezioni chiuse rispetto alla loro composizione, i gruppi di simmetria.
Le più semplici simmetrie di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono le traslazioni che risultano associabili strettamente (criptomorfe) agli stessi vettori-ZZ.
Insiemi particolari di matrici individuano fondamentali gruppi di traformazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le riflessioni e le rotazioni-ZZR.
Sono importanti anche taluni tipi di trasformazioni componibili ma non invertibili (in algebra chiamati monoidi di trasformazioni), le proiezioni, le dilatazioni e le rotodilatazioni.

Altri rilevanti strumenti per operare sopra $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si basano sulle definizioni di cammini e percorsi in tale ambiente; anche tra di essi servono varie distinzioni: cammini hamiltoniani e non, cammini euleriani e noneuleriani, i diradati e i densi, gli e i chiusi.
Con circuiti opportuni si definiscono triangoli orientati o meno e più in generale poligoni orientati o meno; inoltre si devono distinguere i poligoni intrecciati e dai semplici.
A ciascun circuito chiuso si associa un'area con segno, valutazione che in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ deve ricorrere ai numeri semiinteri, con un ruolo da immigrati decisamente utili.

B21 a. punti-ZZ e vettori-ZZ

B21 a.01 Per gli elementi costituenti $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si possono usare sia il termine **punti-ZZ** che **vettori-ZZ**; qui sarà usato più spesso il primo di questi termini equivalenti .

Per queste entità, come per i punti collocati in molti altri ambienti (spazi), risulta opportuno servirsi di diversi tipi di notazioni per i vantaggi che ciascuno di essi può presentare nei diversi contesti.
Alcuni esempi sono: $\mathsf{x} = \langle x, y\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$, $P = \langle p_x, p_y\rangle = \langle p_1, p_2\rangle$, $Q = \langle q_1, q_2\rangle$, $A = \langle x_A, y_A\rangle$.

Per trattare le componenti delle sequenze di punti-ZZ useremo notazioni quali $B_i = \langle b_{i,x}, b_{i,y}\rangle$ con i intero naturale o intero positivo e $C_\sigma = \langle c_{\sigma,x}, c_{\sigma,y}\rangle$ dove σ rappresenta una lettera minuscola o una cifra decimale, accompagnati di richieste opportune per gli intervalli di variabilità degli indici i e σ.

B21 a.02 Evidentemente ogni punto-ZZ $P = \langle x, y\rangle$ risulta associato strettamente alla coppia di punti-ZZ $\big\langle\langle 0, 0\rangle, \langle x, y\rangle\big\rangle$ e questa nelle raffigurazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è ragionevolmente visualizzata con un tratto dritto dall'origine a P arricchito con un segno di freccia che distingue tra punto iniziale e punto finale. Alla suddetta coppia, oltre al nome "punto-ZZ" diamo anche il nome di **vettore-ZZ**

Questi due nomi sono usati come fossero sinonimi trattando $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e vari altri ambienti più elaborati ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ...).
Conviene anche segnalare che "punto" si preferisce in considerazioni geometriche e topologiche, mentre "vettore" si usa più spesso in algebra e in fisica matematica. . Aggiungiamo che si tende a dare a punto una connotazione più "statica e descrittiva" e a vettore una connotazione più "dinamica e costruttiva" e si tende ad utilizzarlo per scenari che conviene descrivere con immagini o filmati, in particolare per esprimere spostamenti da una posizione 0all'altra.

Anche per i vettori nei diversi contesti vengono usate diverse notazioni: in particolare $\overrightarrow{OP}$ e per evidenziare la natura vettoriale si introducono scritture come $\overrightarrow{\mathsf{x}}$ e E.

B21 a.03 Si dice **opposto di un vettore** $\overrightarrow{OP} := \big\langle\langle 0, 0\rangle, \langle x, y\rangle\big\rangle$ il vettore $\big\langle\langle 0, 0\rangle, \langle -x, -y\rangle\big\rangle$, mentre il punto $\langle -x, -y\rangle$ viene detto opposto di $\langle x, y\rangle$ rispetto all'origine di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}_2$. Se si scrive $\mathsf{x} := \langle x, y\rangle$ per il suo opposto si scrive $-\mathsf{x} = \langle -x, -y\rangle$.

A fianco della notazione Ox_{ZZ} per l'asse orizzontale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, cioè per l'insieme di punti-ZZ $\{x \in \mathbb{Z} :| \langle x, 0\rangle\}$ e della notazione Oy_{ZZ} per l'asse verticale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, cioè per l'insieme di punti-ZZ $\{y \in \mathbb{Z} :| \langle 0, y\rangle\}$, introduciamole notazioni per 8 semiassi:

$$\begin{array}{llll}
\mathsf{Ox}_{0+ZZ} := \{x \in \mathbb{N} :| \langle x, 0\rangle\} & , & \mathsf{Ox}_{+-ZZ} := \{x \in \mathbb{P} :| \langle x, 0\rangle\} & , \\
\mathsf{Ox}_{0-ZZ} := \{x \in \mathbb{N} :| \langle -x, 0\rangle\} & , & \mathsf{Ox}_{-ZZ} := \{x \in \mathbb{P} :| \langle -x, 0\rangle\} & , \\
\mathsf{Oy}_{0+ZZ} := \{y \in \mathbb{N} :| \langle 0, y\rangle\} & , , & \mathsf{Oy}_{+ZZ} := \{y \in \mathbb{P} :| \langle 0, y\rangle\} & , \\
\mathsf{Oy}_{0-ZZ} := \{y \in \mathbb{N} :| \langle 0, -y\rangle\} & , & \mathsf{Oy}_{-ZZ} := \{y \in \mathbb{P} :| \langle 0, -y\rangle\} & .
\end{array}$$

Va però segnalato che in genere serve poco distinguere l'asse orizzontale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dall'asse del piano sui razionali o del piano sui reali e in gran parte dei contesti le precedenti notazioni vengono semplificate trascurando la qualificazione -ZZ, scrivendo Ox invece di Ox_{ZZ} e Oy invece di Ox_{ZZ}.

Ad ogni punto-ZZ $P = \langle x, y\rangle$ si associano le sue due cosiddette proiezioni sugli assi del piano: $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Ox}}(P) := \langle 0, y\rangle$, punto sull'asse orizzontale $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oy}}(P) := \langle x, 0\rangle$, punto sull'asse verticale.
Va segnalato anche che la notazione $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Ox}}$ si può sostituire con la più semplice e generale $\boldsymbol{Prj}_x$ o con l'equivalente $\boldsymbol{Prj}_1$, mentre la notazione $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oy}}$ in genere viene sostituita dalla più semplice e generalizzabile $\boldsymbol{Prj}_y$ o con la $\boldsymbol{Prj}_2$.

Si dicono **vettori orizzontali** quelli che coincidono con la loro proiezione orizzontale, cioè quelli i cui punti appartengono all'asse orizzontale, mentre si dicono **vettori verticali** quelli che coincidono con la loro proiezione verticale, ovvero quelli i cui punti appartengono all'asse orizzontale.

Evidentemente la proiezione su Ox lascia invariati i punti della Ox e solo questi, mentre $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oy}}$ lascia invariati esattamente i punti dell'asse verticale; si tratta quindi di due trasformazioni idempotenti; inoltre esse sono ovviamente nonsuriettive e noninvertibili.

B21 a.04 L'asse orizzontale Ox si tripartisce in:
semiasse orizzontale negativo, insieme $\{x \in \mathbb{P} :| \langle -x, 0\rangle\}$;
origine $\langle 0, 0\rangle$;
semiasse orizzontale positivo, insieme $\{x \in \mathbb{P} :| \langle x, 0\rangle\}$.
Similmente l'asse verticale Oy si tripartisce in:
semiasse verticale negativo, insieme $\{y \in \mathbb{P} :| \langle 0, -y\rangle\}$;
origine $\langle 0, 0\rangle$;
semiasse verticale positivo, insieme $\{y \in \mathbb{P} :| \langle 0, y\rangle\}$.

Si individuano in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 4 quadranti aperti mutuamente disgiunti: primo quadrante o quadrante I o Qdrnt_{++ZZ} $\{x, y \in \mathbb{P} :| \langle x, y\rangle\}$; quadrante II o Qdrnt_{-+ZZ} $\{x, y \in \mathbb{P} :| \langle -x, y\rangle\}$; quadrante III o Qdrnt_{--ZZ} $\{x, y \in \mathbb{P} :| \langle -x, -y\rangle\}$; quadrante IV o Qdrnt_{+-ZZ} $\{x, y \in \mathbb{P} :| \langle x, -y\rangle\}$.

Dunque l'intero piano-ZZ si ripartisce in 9 parti: origine $\langle 0, 0\rangle$, semiasse orizzontale positivo, quadrante I, semiasse verticale positivo, quadrante II, semiasse orizzontale negativo, quadrante III, semiasse verticale negativo, quadrante IV.

Talora servono anche i cosiddetti quadranti chiusi:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Qdrnt}_{0+0+ZZ} &:= \mathsf{Qdrnt}_{++ZZ} \dot\cup \mathsf{Ox}_{+} \dot\cup \mathsf{Oy}_{+} \dot\cup \{\langle 0, 0\rangle\} \ , \\
\mathsf{Qdrnt}_{0-0+ZZ} &:= \mathsf{Qdrnt}_{-+ZZ} \dot\cup \mathsf{Ox}_{-} \dot\cup \mathsf{Oy}_{+} \dot\cup \{\langle 0, 0\rangle\} \ , \\
\mathsf{Qdrnt}_{0-0-ZZ} &:= \mathsf{Qdrnt}_{--ZZ} \dot\cup \mathsf{Ox}_{-} \dot\cup \mathsf{Oy}_{-} \dot\cup \{\langle 0, 0\rangle\} \ , \\
\mathsf{Qdrnt}_{0+0-ZZ} &:= \mathsf{Qdrnt}_{+-ZZ} \dot\cup \mathsf{Ox}_{+} \dot\cup \mathsf{Oy}_{-} \dot\cup \{\langle 0, 0\rangle\} \ .
\end{aligned}$$

Va però segnalato che in genere non serve distinguere i quadranti e i semiassi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dai corrispondenti insiemi di punti del piano sui razionali o del piano sui reali e in gran parte dei contesti le precedenti notazioni si semplificano trascurando la qualificazione $_{ZZ}$, ad esempio scrivendo Qdrnt_{++} invece di Qdrnt_{++ZZ} .

B21 a.05 Si dice riflessione rispetto Ox la trasformazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}} := \lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \langle x, -y\rangle \rceil$.
Si dice riflessione rispetto Oy la trasformazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} := \lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \langle -x, y\rangle \rceil$.
Si tratta di biiezioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che mantengono l'adiacenza-ZZR e che applicate due volte lasciano invariato ogni punto-ZZ, cioè sono involuzioni e quindi biiezioni.

Evidentemente $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$ lascia invariati i punti dell'asse Ox e solo questi, scambia il semiasse Oy positivo con il negativo, scambia il quadrante I con il quadrante IV e scambia il quadrante II con il quadrante III.
Similmente $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}}$ lascia invariato l'asse Oy e solo questi, scambia il semiasse Ox positivo con il negativo, scambia il quadrante I con il quadrante II e scambia il quadrante III con il quadrante IV.

Si dice riflessione rispetto alla diagonale D1 di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la trasformazione

$$\mathsf{Mirr}_{y=x} := \lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \langle y, x\rangle \rceil \ .$$

Si dice riflessione rispetto alla codiagonale D2 di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la trasformazione

$$\mathsf{Mirr}_{y=-x} := \lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \langle -y, -x\rangle \rceil \ .$$

Anche queste due trasformazioni sono biiezioni involutorie di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che mantengono l'adiacenza-ZZR. La prima lascia invariati solo i punti della diagonale $\{x\in\mathbb{Z} :|\ \langle x,x\rangle\}$ e la seconda solo i punti delle codiagonale $\{x\in\mathbb{Z} :|\ \langle x,-x\rangle\}$. La prima scambia gli assi orientati e i quadranti II e IV, la $\mathsf{Mirr}_{y=x}$ scambia gli assi insieme alle rispettive orientazioni e scambia i quadranti I e III.

La stretta somiglianza l'operazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$ definita riferendosi all'asse Ox con l'operazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}}$ definita riferendosi al secondo asse Oy si riscontra in molte altre proprietà. Vedremo come essa si può precisare formalmente come trasformazione involutoria di enunciati (definizioni e proposizioni) in enunciati equivalenti riconducendola alla trasformazione $\mathsf{Mirr}_{y=x}$, anch'essa involutoria. Questa trasformazione di enunciati viene detta **dualità-xy** e si può considerare una estensione della $\mathsf{Mirr}_{y=x}$, trasformazione che opera semplicemente su punti-ZZ.

Applicando le due riflessioni $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$ e $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}}$ successivamente, in entrambi gli ordini, si ottiene la trasformazione $CntrSym := \lceil\!\lceil \langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle -x,-y\rangle \rceil\!\rceil$, chiamata **simmetria centrale** con centro nell'origine, o **mezzogiro** intorno all'origine, o anche inversione delle coordinate e passaggio al vettore opposto.

Anche questa trasformazione è una involuzione, lascia fissa l'origine e rispetta la adiacenza-ZZR; inoltre essa inverte l'orientazione di ciascuno degli assi Ox ed Oy, scambia il quadrante I con il quadrante III e scambia il quadrante II con il quadrante IV.

Si constata che l'inversione delle coordinate si ottiene anche componendo in entrambi gli ordini le riflessioni $\mathsf{Mirr}_{y=x}$ e $\mathsf{Mirr}_{y=-x}$.

B21 a.06 Si dicono **versori base** i vettori $\mathsf{e}_x := \langle 1,0\rangle$ ed $\mathsf{e}_y := \langle 0,1\rangle$. Diciamo insieme dei **versori canonici** l'insieme costituito dai versori base e dai loro opposti $-\mathsf{e}_x$ e $-\mathsf{e}_y$.

Useremo anche la notazione e_1 come sinonima della e_x e la e_2 come sinonima della e_y; questi due simboli spesso risultano più pratici, per esempio in espressioni come $\{i=1,2 :|\ \mathsf{e}_i\}$.

(1) Eserc. Constatare che $\mathsf{Ox}=\{h\in\mathbb{Z} :|\ \langle h,0\rangle\}$ e che $\mathsf{Oy}_{_}=\{k\in\mathbb{N} :|\ \langle 0,-k\rangle\}$.

Un vettore-ZZ $\mathsf{w}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{nz}$ si dice multiplo del vettore $\mathsf{v}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{nz}$ sse si trova un intero m tale che $\mathsf{w}=m\,\mathsf{v}$.
Per esempio sono multipli di $\langle -3,6\rangle$ il suo opposto $\langle 30,-60\rangle$, $\langle -9,18\rangle$ e $\langle 300,600\rangle$; ogni vettore-ZZ nonnullo è multiplo del suo opposto.
Il vettore origine si può considerare multiplo degenere di ogni altro vettore-ZZ, mentre ogni vettore $\langle x,y\rangle$ si può chiamare multiplo improprio di se stesso.

B21 a.07 Conviene introdurre due operazioni algebriche sulle quali ritorneremo per approfondirle.

Si definisce somma dei vettori-ZZ $P=\langle p_x,p_y\rangle$ e $Q=\langle q_x,q_y\rangle$ il vettore-ZZ

$$P+Q \ := \langle p_x+q_x, p_y+q_y\rangle \ .$$

La somma è chiaramente una operazione commutativa e associativa.

Si definisce moltiplicazione per l'intero k del vettore-ZZ $P=\langle p_x,p_y\rangle$il vettore-ZZ

$$k\cdot\langle p_x,p_y\rangle \ := \langle k\cdot p+x, k\cdot p_y\rangle \ .$$

Chiaramente per h,k interi qualsiasi $h\cdot(k\cdot P)=(h\cdot k)P$.
In genere il segno $\cdot$ si trascura o si sostituisce con un piccolo spazio bianco.

Si osserva che la moltiplicazione per -1 non è che il passaggio all'opposto.
Un vettore si dice **vettore multiplo** di un altro sse si può ottenere moltiplicando l'altro per un intero. Si constata che due vettori P e Q sono proporzionali sse si può scrivere $hP=kQ$ per opportuni h e k.

B21 a.08 Un vettore-ZZ nonnullo si dice **vettore-ZZ primitivo-pp** sse ha una la forma $\langle a, b\rangle$ con a e b interi positivi e coprimi. Si dice invece **vettore-ZZ primitivo-np** un vettore della forma $\langle -a, b\rangle$ con $\langle a, b\rangle$ primitivo-pp.
Definiamo inoltre come **insieme dei vettori primitivi-ZZI** l'insieme costituito da $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, dall'insieme dei vettori primitivi-pp e dall'insieme dei vettori primitivi-np. Denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prmI}$ il loro insieme. La lettera I qui usata vuole ricordare che si trattano i vettori primitivi che caratterizzano le inclinazioni di vettori, segmenti, rette e semirette.

Diciamo infine insieme dei **vettori-ZZ primitivi** l'insieme costituito dai vettori primitivi-ZZI e dai loro opposti; tale insieme lo denotiamo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prmt}$.

È rilevante la bipartizione dei vettori-ZZ nonnulli tra primitivi e nonprimitivi; l'insieme di questi è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz} \setminus \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm}$.

(1) Eserc. Constatare che ogni vettore-ZZ nonprimitivo si può esprimere in un modo unico come multiplo proprio di un vettore-ZZ primitivo. Quindi discutere le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz} \setminus \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm} &= (\mathbb{P} \setminus \{1\})\, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm} = \{m = 2, 3, 4, ..., \mathbf{u} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm} :|\ m\,\mathbf{u}\} \\ &= (\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\})\, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prmI} \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &= \{\mathbf{0}_2\} \ \dot\cup\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm} \ \dot\cup\ (\cup_{m=2,3,4,...}(m\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm}) \end{aligned} \quad .$$

B21 a.09 Due vettori di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz}$ si dicono **vettori proporzionali** sse hanno la forma $\langle h\,p, h\,q\rangle$ e $\langle k\,p, k\,q\rangle$ con $\langle p, q\rangle$ vettore primitivo e $h, k \in \mathbb{Z}_{nz}$. Si constata che la proporzionalità tra vettori di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz}$ è una equivalenza e inoltre che essa estende la relazione "essere multiplo di", relazione nonsimmetrica e quindi non relazione di equivalenza.

Dei due punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz}$ identificabili con due vettori di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{nz}$ proporzionali si dice che anche che sono **punti allineati con l'origine**.

Questa espressione corrisponde al fatto che nel modello materiale del piano-ZZ ad asticelle sottili questi risultano otticamente allineati.

B21 b. segmenti-ZZ, semirette-ZZ e rette-ZZ

B21 b.01 Ricordiamo che la notazione $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})nz$ individua l'insieme dei punti di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ privato dell'origine $\mathbf{0}_2=\langle 0,0\rangle$, cioè poniamo $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})_{nz}:=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{\mathbf{0}_2\}$.

Diciamo **vettori-pp primitivi** i vettori-ZZ della forma $\langle p,q\rangle$ dove $p,q\in\mathbb{P}$ e $\mathrm{MCD}(p,q)=1$, cioè dove p e q sono interi positivi coprimi, con $p\perp q$.

Diciamo insieme dei **vettori-ZZQ1 primitivi** l'insieme dei vettori-pp primitivi ampliato con l'aggiunta del versore $\langle 1,0\rangle=\mathbf{e}_x$; Q1 intende richiamare il primo quadrante di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Diciamo **vettori primitivi-ZZQ2** il versore $\langle 0,1\rangle=\mathbf{e}_y$ e tutti i vettori della forma $\langle -p,q\rangle$, dove $p,q\in\mathbb{P}$ e $\mathrm{MCD}(p,q)=1$, cioè dove $\langle p,q\rangle$ è primitivo-pp; Q2 vuole richiamare il secondo quadrante di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Diciamo collettivamente **vettori-ZZQ12 primitivi** i vettori primitivi-ZZQ1 e i vettori primitivi-ZZQ2.

Diciamo **vettori-ZZ primitivi** i vettori-ZZQ12 primitivi e i loro opposti, ovvero i vettori $\langle p,q\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{nz}$, con $|p|\perp|q|$.

Con $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{prm}$ denoteremo l'insieme dei vettori-ZZ primitivi.

Osserviamo che i vettori-ZZQ2 si ottengono ruotando di 90^circ i vettori-ZZQ1 e i tutti i vettori-ZZ primitivi si ottengono ampliando l'insieme dei vettor-ZZQ1 con gli insiemi ottenuti ruotandolo di 90°, di 180° e di 270°.

Osserviamo anche che i vettori-ZZQ1 si possono ottenere dai vettori del triangolo

$$\{i=1,2,...j=1,...,i:|\ \langle i,j\rangle\}$$

aggiungendo loro i vettori trasposti $\langle j,i\rangle$, cioè i vettori ottenuti dai precedenti per riflessione rispetto alla diagonale principale di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

B21 b.02 (1) Prop.: Ogni vettore-ZZ nonnullo si può esprimere come prodotto di un numero intero per un vettore-ZZQ12 primitivo.

Dim.: La cosa è evidente per i vettori degli assi-ZZ orizzontale e verticale. Per ogni altro vettore $\langle h,k\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus(\mathsf{Ox}_{ZZ}\ \cup\ \mathsf{Oy}_{ZZ})$, (vettore con h e k interi nonnulli) si ha:

$$\begin{aligned}\langle h,k\rangle\ &=\big\langle \mathrm{sign}(h)|h|,\mathrm{sign}(k)|k|\big\rangle\\ &=\ \mathrm{sign}(h\,k)\ \mathrm{MCD}(|h|,|k|)\ \left\langle\frac{|h|}{\mathrm{MCD}(|h|,|k|)}\ ,\ \frac{|k|}{\mathrm{MCD}(|h|,|k|)}\right\rangle\ \blacksquare\end{aligned}\tag{2}$$

Per esempio $\langle 8,14\rangle=2\langle 4,7\rangle$, $\langle -6,15\rangle=3\langle -2,5\rangle$, $\langle 28,-77\rangle=-7\langle -4,11\rangle$, $\langle -7,-5\rangle=-\langle 7,5\rangle$.

(3) Eserc. Dimostrare che ogni vettore-ZZ nonnullo si può esprimere come prodotto di un numero naturale per un vettore-ZZQ12 primitivo.

B21 b.03 Ad ogni coppia di punti-ZZ $\langle P,Q\rangle=\Big\langle\big\langle x_P,y_P\big\rangle,\big\langle x_Q,y_Q\big\rangle\Big\rangle$ risulta associato un unico vettore-ZZ primitivo:

$$\mathbf{Orient}(P,Q)\ :=\ \begin{cases}\mathrm{sign}(x_Q-x_P)\cdot\langle 1,0\rangle & \text{sse } y_P=y_Q\\ \mathrm{sign}(y_Q-y_P)\cdot\langle 0,1\rangle & \text{sse } x_P=x_Q\\ \dfrac{\big\langle x_Q-x_P\ ,\ y_Q-y_P\big\rangle}{\mathrm{MCD}_{(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|)}} & \text{sse altrimenti}\end{cases}\ .\tag{1}$$

Per esempio $\mathbf{Orient}(\langle 7,-3\rangle,\langle 5,-3\rangle)=-\langle 1,0\rangle$, $\mathbf{Orient}(\langle 7,4\rangle,\langle -1,0\rangle)=\langle -2,-1\rangle$,

Orient$(\langle 27,-3\rangle,\langle 3,9\rangle)=\langle -2,1\rangle$.
Questo vettore-ZZ si dice **orientazione della coppia di punti**, ovvero orientazione del segmento-ZZ di lunghezza nonnulla.

Evidentemente $\mathbf{Orient}(Q,P)=-\mathbf{Orient}(P,Q)$.

Inoltre il vettore-ZZ $\overrightarrow{Q-P}$ è un multiplo positivo di $\mathbf{Orient}(P,Q)$:

$$\overrightarrow{Q-P} \;=\; \mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|)\cdot \mathbf{Orient}(P,Q)\ . \tag{2}$$

Per la sequenza di punti-ZZ costituenti il **segmento orientato** associato alla coppia di punti-ZZ $\langle P,Q\rangle$ si ha l'espressione

$$\big\langle j=0,1,...,\mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|) :|\ P+j\cdot\mathbf{Orient}(P,Q)\big\rangle\ . \tag{3}$$

Questa sequenza inizia con P, termina con Q, ha lunghezza $\mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|)+1$ e presenta i successivi punti-ZZ ottenibili sommando a P i successivi multipli di $\mathbf{Orient}(P,Q)$.

Il **segmento opposto** del precedente, cioè il segmento orientato associato alla coppia $\langle Q,P\rangle$ riflessa della precedente, è dato dalla sequenza riflessa da quella relativa a $\langle P,Q\rangle$.

B21 b.04 L'insieme dei segmenti orientati-ZZ amplia notevolmente quello dei segmenti orientati-ZZK: l'insieme delle orientazioni di questi contiene solo gli 8 vettori dati da $\pm\mathbf{e}_1$, $\pm\mathbf{e}_2$ e $\pm\mathbf{e}_1\pm\mathbf{e}_2$ [B20b].

Procediamo ora ad ampliare in modo analogo gli insiemi delle semirette-ZZK, delle rette-ZZK e delle rette orientate-ZZK trattati in B20b.

Si dice **semiretta-ZZ** ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ della forma $\{n\in\mathbb{N} :|\ \langle h,k\rangle+n\cdot\langle p,q\rangle\}$, dove $\langle h,k\rangle$ è un qualsiasi punto-ZZ, mentre $\langle p,q\rangle$ è un qualsiasi vettore-ZZ primitivo; $\langle h,k\rangle$ viene detto **estremità della semiretta-ZZ**, mentre $\langle p,q\rangle$ viene detto **orientazione della semiretta-ZZ**.

Si dice **retta-ZZ** ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ della forma $\{j\in\mathbb{Z} :|\ \langle h,k\rangle+j\,\langle p,q\rangle\}$, dove $\langle h,k\rangle$ è un qualsiasi punto-ZZ, mentre $\langle p,q\rangle$ è un qualsiasi vettore-ZZ primitivo.

Si osserva che l'insieme $\{j\in\mathbb{Z} :|\ \langle h,k\rangle+j\,(-\langle p,q\rangle)\}$ coincide con la suddetta retta; in altri termini questa retta si può individuare concisamente con $\langle h,k\rangle+\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$, o equivalentemente con $\langle h,k\rangle-\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$.

Nel seguito denotiamo con RtlinZZ l'insieme delle rette-ZZ.

Le rette-ZZ della forma $\{j\in\mathbb{Z} :|\ j\,\langle p,q\rangle)\}=\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ passano per l'origine; questo punto è il loro elemento comune e corrisponde a $j=0$); queste rette comprendono le classi-ZZ razionali che saranno introdotte in B30a. Si dice anche che per ogni $p,q\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{nz}$ la retta $\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ passa per l'origine.

B21 b.05 Consideriamo due punti-ZZ $A=\big\langle x_A,y_A\big\rangle$ e $B=\big\langle x_B,y_B\big\rangle$ e gli insiemi $A+\mathbb{Z}\cdot\mathbf{Orient}(A,B)$ e $B+\mathbb{Z}\cdot\mathbf{Orient}(B,A)$. Si mostra facilmente che essi coincidono, che individuano una retta-ZZ contenente sia A che B e che nessun'altra retta contiene entrambi questi punti.

La retta-ZZ determinata da A e B nel modo precedente si dice **retta passante per due punti**, A e B.
Come **inclinazion di una retta-ZZ**, ad esempio la precedente, si assume il duetto formato dal vettore-ZZ $\langle p,q\rangle$ e dal suo opposto $-\langle p,q\rangle$, cioè l'insieme $\{\langle p,q\rangle,-\langle p,q\rangle\}$.

La retta-ZZ passante per A e B, che denotiamo con R, si individua anche come insieme dei punti-ZZ che costituiscono soluzioni di una equazione. Denotiamo con $C=\langle x,y\rangle$ il punto generico della R, punto che possiamo immaginare che si muova in qualche modo sui punti della R.
L'appartenenza di C alla R equivale alla possibilità di trovare due interi a e b tali che valgano le uguaglianze tra vettori-ZZ $C=A+a\langle p,q\rangle$ e $C=B+b\langle p,q\rangle$.

Queste a loro volta equivalgono alle uguaglianze tra numeri interi

$$x = x_A + a\,p\ ,\quad x = x_B + b\,p\ ,\quad y = y_A + a\,q\ ,\quad y = y_B + b\,q\ . \tag{1}$$

Da queste si ricava

$$(x - x_A)(y - y_B) = a\,p\,b\,q\ ,\quad (x - x_B)(y - y_A) = b\,p\,a\,q \tag{2}$$

e quindi l'equazione

$$(x - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y - y_A)\ . \tag{3}$$

A questa si può dare l'espressione equivalente lineare in x e y, variabili in $\mathbb{Z}$.

$$(y_A - y_B)\,x + (x_B - x_A)\,y + x_A\,y_B - x_B\,y_A\ =\ 0\ . \tag{4}$$

B21 b.06 Mentre un duetto di punti-ZZ (diversi) $\{P, Q\}$ individua una retta-ZZ R, ciascuna delle due corrispondenti coppie $\langle P, Q\rangle$ e $\langle Q, P\rangle$ individua una entità che costituisce un arricchimento della R.

I due arricchimenti sono dati dalla distinzione che chiamiamo **senso di percorrenza**; la coppia $\langle P, Q\rangle$ determina il senso di percorrenza, descritto intuitivamente ricorrendo a un oggetto meccanico che si muove sui suoi punti e che incontra P prima di Q; la coppia $\langle Q, P\rangle$ individua il senso opposto, secondo il quale un oggetto mobile sulla R incontra P dopo Q.

Una coppia costituita da una retta-ZZ e da un suo senso di percorrenza viene detta **retta orientata-ZZ**.
La retta orientata associata a una coppia di punti-ZZ $\langle P, Q\rangle$ può essere individuata anche dal punto P e da $\mathbf{Orient}(P, Q)$, oppure da un qualsiasi altro suo punto $P + j\,\mathbf{Orient}(P, Q)$ con j arbitrario intero in $\mathbb{Z}$ e dallo stesso $\mathbf{Orient}(P, Q)$.
Questo vettore-ZZ primitivo viene detto **orientazione della retta orientata-ZZ**.
In modo conciso la retta orientata-ZZ passante per $\langle h, k\rangle$ e avente orientazione $\langle p, q\rangle$ si può denotare con

$$\langle h, k\rangle + \overrightarrow{\mathbb{Z}\,\langle p, q\rangle}\ . \tag{1}$$

B21 c. operazioni e valutazioni per i vettori-ZZ

B21 c.01 Ci proponiamo ora di introdurre varie operazioni tra i punti-ZZ e per questo risulta conveniente utilizzare per essi termini e notazioni vettoriali.

Il termine vettore si applica a varie entità matematiche che vanno collocate in diversi ambienti.
Oltre ai vettori-ZZ, cioè ai punti-ZZ, sono chiamati vettori altre entità ampiamente utilizzate nell'algebra, nella geometria, nella meccanica e in numerosi campi della fisica e di tante altre discipline scientifiche e tecnologiche.

I vettori dei vari generi (come si vede in particolare in B32, B41, B45, B46 e G45] hanno il pregio di essere sottoponibili a una notevole gamma di operazioni caratterizzate da regole formali precise; in molti casi queste operazioni si possono calcolare effettivamente senza difficoltà e questo rende questi vettori in grado di affrontare costruttivamente svariate applicazioni.

Introdotti dunque i vettori-ZZ come entità equivalenti, ai punti-ZZ, predisponiamoci a trattare con procedimenti simili vettori collocati in ambienti più ricchi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ [B30], $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ [B43], $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ [B50], spazi tridimensionali [G36] e multidimensionali [G40], spazi funzionali e spazi di Hilbert [T34],

I punti-ZZ (come i punti di spazi più ricchi) spesso si identificano con lettere maiuscole e tipicamente queste lettere vengono utilizzate come deponenti della x e della y nelle denotazioni delle le coordinate: si hanno quindi notazioni per i punti-ZZ come $P=\langle x_P, y_P\rangle$ e $Q=\langle x_Q, y_Q\rangle$.
Secondo questo stile per l'origine di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si ha l'identificazione $O := \langle 0,0\rangle$.
Per i vettori-ZZ (e per i vettori di ambienti più ricchi) si usano anche scritture come $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P-O}$.
In molti testi i vettori si denotanoinvece con lettere in grassetto e si usano le corrispondenti lettere corsive munita di pedici letterali o numerici per le rispettive coordinate; un esempio tipico è $\mathbf{v} = \langle v_x, v_y\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$.
Secondo questo stile per l'origine si scrive $\mathbf{0}_2 := \langle 0,0\rangle$; per tale vettore si usa anche il termine, di sapore algebrico, **vettore nullo**.

B21 c.02 Definiamo come **somma di due vettori-ZZ** $\langle i,j\rangle$ e $\langle h,k\rangle$ l'estensione cartesiana alle coppie di elementi di $\mathbb{Z}$ della somma degli interi naturali:

$$\langle i,j\rangle +^{ce} \langle h,k\rangle \;:=\; \langle i+h, j+k\rangle \;. \tag{1}$$

Chiaramente questa somma, come la somma di numeri interi, è un'operazione binaria commutativa e associativa; inoltre sommando $\mathbf{0}_2$ a un qualsiasi vettore-ZZ lo si lascia invariato; in termini algebrici questo fatto si esprime dicendo che $\mathbf{0}_2$ è l'**elemento neutro** per la somma tra vettori-ZZ.

Definiamo la **moltiplicazione di un vettore-ZZ per un intero**. Come moltiplicazione di $\alpha\in\mathbb{Z}$ per $\langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ intendiamo

$$\alpha\cdot\langle i,j\rangle \;:=\; \langle \alpha\cdot i, \alpha\cdot j\rangle \;. \tag{2}$$

In particolare $0\cdot\langle i,j\rangle = \langle 0,0\rangle$, $1\cdot\langle i,j\rangle = \langle i,j\rangle$, $-1\cdot\langle i,j\rangle = \langle -i,-j\rangle = -\langle i,j\rangle$; quest'ultimo vettore-ZZ si dice **vettore opposto** di $\langle i,j\rangle$.

Nel seguito per denotare il prodotto di numeri e la moltiplicazione di un numero con un vettore spesso trascureremo il segno "$\cdot$", spesso limitandoci a introdurre una piccola separazione tra i due fattori; in tal modo possiamo distinguere meglio queste operazioni dalla notazione usata per una operazione importante come il prodotto scalare tra vettori [:k].

Avremo quindi espressioni quali $7\,\alpha$ e $c\,\langle i,j\rangle \;:=\; \langle c\,i, c\,j\rangle$ invece di $7\cdot\alpha$ e $c\cdot\langle i,j\rangle \;:=\; \langle c\cdot i, c\cdot j\rangle$.

Definiamo come **differenza di due vettori-ZZ** $\langle i,j\rangle$ e $\langle h,k\rangle$ l'estensione cartesiana alle coppie di elementi di $\mathbb{Z}$ della differenza di interi naturali:

$$\langle i,j\rangle -^{ce} \langle h,k\rangle \;:=\; \langle i-h, j-k\rangle \;. \tag{3}$$

Si osserva che $\langle i,j\rangle -^{ce} \langle h,k\rangle = \langle i,j\rangle +^{ce} (-1)\cdot\langle h,k\rangle)$.

In genere i simboli $+^{ce}$ e $-^{ce}$ si semplificano trascurando l'esponente; inoltre una scrittura come $-1\cdot\langle i,j\rangle$ si semplifica nella $-\langle i,j\rangle$.

Evidentemente $\forall \mathsf{v},\mathsf{w}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,:\,(\mathsf{v}+\mathsf{w})-\mathsf{w}=\mathsf{v}$; questo fatto si esprime anche dicendo che la differenza tra vettori-ZZ è l'operazione inversa della somma.

B21 c.03 Ricordiamo che i punti-ZZ $\langle 1,0\rangle$ e $\langle 0,1\rangle$ sono identificati anche, risp., con le seguenti notazioni vettoriali

$$\mathsf{e}_1 := \mathsf{e}_x \;:=\; \langle 1,0\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathsf{e}_2 := \mathsf{e}_y := \langle 0,1\rangle \;, \tag{1}$$

e che sono detti **versori canonici**.

Questi vettori consentono, in particolare, di esprimere i passi-ZZK nei modi seguenti (qui P denota un arbitrario punto-ZZ):

passo-ZZE: vettore della forma $\langle P, P+\mathsf{e}_1\rangle$;

passo-ZZNE: vettore della forma $\langle P, P+\mathsf{e}_1+\mathsf{e}_2\rangle$;

passo-ZZN: vettore della forma $\langle P, P+\mathsf{e}_2\rangle$;

passo-ZZNW: vettore della forma $\langle P, P-\mathsf{e}_1+\mathsf{e}_2\rangle$;

passo-ZZW: vettore della forma $\langle P, P-\mathsf{e}_1\rangle$;

passo-ZZSW: vettore della forma $\langle P, P-\mathsf{e}_1-\mathsf{e}_2\rangle$;

passo-ZZS: vettore della forma $\langle P, P-\mathsf{e}_2\rangle$;

passo-ZZSE: vettore della forma $\langle P, P+\mathsf{e}_1-\mathsf{e}_2\rangle$.

Ogni espressione di un vettore-ZZ della forma $\alpha\,\langle i,j\rangle + \beta\,\langle h,k\rangle$ con α e β interi naturali, viene detta **combinazione lineare-ZZ di una coppia di vettori-ZZ**, $\big\langle\langle i,j\rangle, \langle h,k\rangle\big\rangle$, effettuata mediante una coppia di **coefficienti**, $\langle\alpha,\beta\rangle$.

Si osserva che ogni vettore-ZZ si può esprimere come combinazione lineare dei versori canonici e si possono incontrare scritture come le seguenti:

$$\langle h,k\rangle = h\langle 1,0\rangle + k\langle 0,1\rangle \;=\; h\,\mathsf{e}_x + k\,\mathsf{e}_y \quad , \quad \mathsf{v} = \big\langle v_1, v_2\big\rangle = v_1\,\mathsf{e}_1 + v_2\,\mathsf{e}_2 \;.$$

Questo induce a chiamare **base canonica [ordinata]** di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la coppia $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\rangle = \langle \mathsf{e}_x, \mathsf{e}_y\rangle$. Questa entità la denoteremo anche con $\mathfrak{b}$.
Inoltre diciamo **sistema di riferimento canonico per** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la terna $\big\langle \mathsf{0}_2, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\big\rangle$.

B21 c.04 Introduciamo per i vettori-ZZ altre notazioni che si riconducono a quelle adottate da Paul Dirac per i vettori degli spazi di Hilbert ed ampiamente utilizzate nella `meccanica quantistica (wi)` [P70].

Ogni vettore v viene identificato anche dalla scrittura $\big|\mathsf{v}\big\rangle$ chiamata **ket**

I vettori della base canonica $\mathfrak{b}$ vengono individuati, risp., dai kets

$$\big|1\big\rangle \;:=\; \mathsf{e}_1 = \mathsf{e}_x = \langle 1,0\rangle \qquad \text{e} \qquad \big|2\big\rangle \;:=\; \mathsf{e}_2 = \mathsf{e}_y = \langle 0,1\rangle \;. \tag{1}$$

Di conseguenza ogni vettore $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ si può scrivere

$$\mathsf{v} = |\mathsf{v}\rangle = v_1 \, |1\rangle + v_2 \, |2\rangle \ . \tag{2}$$

Diciamo inoltre **rappresentazione nella base $\mathfrak{b}$ di un vettore**, v, la seguente matrice colonna 2×1

$$\mathsf{v}_{\mathfrak{b}} \ := \ |\mathsf{v}\rangle_{\mathfrak{b}} \ := \ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \ . \tag{3}$$

B21 c.05 I punti-ZZ sono evidentemente entità più elaborate degli interi naturali. In molte circostanze risulta utile associare a ciascuno di essi, ovvero a ciascun vettore-ZZ, qualche intero naturale che individui una sua caratteristica rilevante.
Più precisamente cerchiamo funzioni del genere $\lceil \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$, con il solo $\langle 0, 0 \rangle$ valutato 0, spesso suriettive, le quali sono chiamate "valutazioni mediante interi naturali".

Una prima proprietà degli elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che vogliamo esprimere mediante interi naturali riguarda la "lontananza" di ciascun punto-ZZ dall'origine, ovvero la "estensione della freccia" che raffigura il corrispondente vettore-ZZ. Ne diamo tre, tutte suriettive e di semplice interpretazione visiva.

Lunghezza-M: $\mathsf{len}_M(\langle x, y \rangle) \ := \ |x| + |y|$;

Lunghezza-GC: $\mathsf{len}_{GC}(\langle x, y \rangle) \ := \ \max(|x|, |y|)$;

Quadranza: $\mathcal{Q}(\langle x, y \rangle) \ := \ x^2 + y^2$.

Qui la M sta per Manhattan e GC per cateto più grande, più esteso.

Esempi: $\mathsf{len}_M \langle 2, 3 \rangle = 5$; $\mathsf{len}_{GC} \langle 2, 3 \rangle = 3$; $\mathcal{Q} \langle 2, 3 \rangle = 13$.

B21 c.06 Si osserva che queste valutazioni sono lasciate invariate per applicazione delle riflessioni rispetto a Ox, a Oy, alla diagonale D1 e alla codiagonale D2; di conseguenza esse sono invarianti in seguito alla applicazione della simmetria centrale e a scambio dei due argomenti.

Inoltre esse sono invarianti rispetto alle rotazioni di 90° e delle sue potenze, cioè alle rotazioni-ZZR. Esse quindi rispettano tutte le simmetrie di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che lasciano invariata l'origine e la adiacenza-ZZR. Inoltre esse sono monotone nondecrescenti nel modulo di ciascuno degli argomenti, come è opportuno richiedere alle valutazioni di caratteristiche estensive.

Le proprietà di invarianza rispetto a importanti simmetrie dell'ambiente i cui elementi si sottop[ongono a una valutazione vanno considerate qualità che contribuiscono alla rilevanza di quanto le valutazioni possono esprimere.

Consideriamo due vettori proporzionali $\mathsf{v} = \langle h\,p, h\,q \rangle$ e $\mathsf{w} = \langle k\,p, k\,q \rangle$ con $|h| < |k|$ ed osserviamo che, visti e i numeri dei punti-ZZ sfiorati dalle corrispondenti frecce, sarebbe irragionevole giudicare il primo più esteso del secondo.

Per le tre valutazioni si trova:

$\mathsf{len}_M(\mathsf{v}) \ = \ |h|(p+q) \ < \ \mathsf{len}_M(\mathsf{w}) = |k|(p+q)$;

$\mathsf{len}_{GC}(\mathsf{v}) \ = \ |h| \max(p,q) \ < \ \mathsf{len}_{GC}(\mathsf{w}) = |k| \max(p,q)$;

$\mathcal{Q}(\mathsf{v}) \ = \ h^2(p^2+q^2) \ < \ \mathcal{Q}(\mathsf{w}) = k^2(p^2+q^2)$.

Queste disuguaglianze contribuiscono ad attribuire ragionevolezza alle tre valutazioni di carattere estensivo introdotte.

B21 c.07 Nel confrontare ciascuno dei duetti di queste tre valutazioni si trovano coppie di vettori per le quali i valori forniti sono interi naturali diversamente ordinati. Queste coppie di oggetti valutati le chiamiamo "coppie di incoerenza".

In particolare abbiamo

$\mathsf{len}_M(\langle 5,5\rangle) = 10 > \mathsf{len}_M(\langle 6,1\rangle) = 7$ mentre $\mathsf{len}_{GC}(\langle 5,5\rangle) = 5 < \mathsf{len}_{GC}(\langle 6,1\rangle) = 6$;
$\mathcal{Q}(\langle 5,5\rangle) = 50 > \mathcal{Q}(\langle 6,1\rangle) = 37$ mentre $\mathsf{len}_{GC}(\langle 5,5\rangle) = 5 < \mathsf{len}_{GC}(\langle 6,1\rangle) = 6$;
$\mathsf{len}_M(\langle 4,4\rangle) = 8 > \mathsf{len}_M(\langle 6,1\rangle) = 7$ mentre $\mathcal{Q}(\langle 4,4\rangle) = 32 < \mathcal{Q}(\langle 6,1\rangle) = 37$.

Questo mostra che due diverse valutazioni possono porre in rilievo caratteristiche diversamente valutate e implica che la scelta tra due valutazioni sia da far dipendere dall'utilizzo che si intende fare di queste semplificazioni delle entità valutate.

Nel seguito considereremo sinonimo dell'espressione "lunghezza-$\mathfrak{x}$ del vettore-ZZ $\overrightarrow{\mathbf{0}_2, P}$", ove -$\mathfrak{x}$ sta per -M o per -GC, l'espressione "distanza-$\mathfrak{x}$ dall'origine del punto-ZZ P".

Può essere interessante osservare come si dispongono in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i punti che dall'origine presentano, risp., una uguale distanza-M, una uguale distanza-GC e una uguale quadranza.

Prevedibilmente questi insiemi di punti-ZZ si dispongono secondo figure invarianti per riflessioni-ZZK e per rotazioni-ZZR; quindi è sufficiente considerare i punti del primo quadrante chiuso; anzi basterebbe limitarsi alla parte compresa tra il semiasse orizzontale positivo e la diagonale principale con ascissa nonnegativa.

I punti aventi lunghezza-M pari a 8 costituiscono il segmento $\overline{\langle 8,0\rangle, \langle 0,8\rangle}$.

I punti aventi lunghezza-GC pari a k costituiscono i segmenti $\overline{\langle k,0\rangle, \langle k,k\rangle}$ e $\overline{\langle k,k\rangle, \langle 0,k\rangle}$.

I punti aventi quadranza 25 sono $\langle 0,5\rangle$, $\langle 4,3\rangle$, oltre ai rispettivi riflessi rispetto alla diagonale principale $\langle 3,4\rangle$ e $\langle 0,5\rangle$.

I punti che, mediante riflessione-ZZD1 e rotazioni-ZZ, generano tutti i punti-ZZ aventi quadranza 1625 sono

$$\langle 29,28\rangle,\ \langle 35,20\rangle,\ \langle 37,16\rangle \text{ e } \langle 40,5\rangle \ .$$

B21 d. vettori applicati e segmenti orientati; segmenti, semirette e rette-ZZK

B21 d.01 Tra le entità entro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le più semplici, dopo i singoli punti-ZZ, sono le coppie di punti-ZZ $\langle P, Q\rangle = \Big\langle \langle p_x, p_y\rangle, \langle q_x, q_y\rangle \Big\rangle$; queste sono dette anche **vettori-ZZ applicati** o concisamente **vettori.a-ZZ**.
Chiaramente i vettori applicati si riducono a vettori-ZZ quando il primo componente P è l'origine; quindi possono considerarsi generalizzazioni dei vettori-ZZ.

Si dice vettore-ZZ ricondotto all'origine del vettore applicato-ZZ $\Big\langle \langle p_x, p_y\rangle, \langle q_x, q_y\rangle \Big\rangle$ il vettore-ZZ $\langle q_x - p_x, q_y - p_y\rangle$.
Tra i vettori applicati-ZZ si distinguono i**vettori.a-ZZ primitivi**, quelli il cui vettore-ZZ ricondotto all'origine è vettore-ZZ primitivo.

I più semplici tra i vettori applicati sono quelli della forma $\Big\langle \langle p_x, 0\rangle, \langle q_x, 0\rangle \Big\rangle$ e quelli della forma $\Big\langle \langle 0, p_y\rangle, \langle 0, q_y\rangle \Big\rangle$; i primi sono chiamati vettori-ZZ applicati orizzontali o vettori applicati-ZZH; i secondi sono detti vettori-ZZ applicati verticali o vettori applicati-ZZV.

Sono definiti semplicemente anche i vettori applicati della forma $\Big\langle \langle p, p\rangle, \langle q, q\rangle \Big\rangle$ detti vettori applicati-ZZD1 e quelli della forma $\Big\langle \langle p, -p\rangle, \langle q, -q\rangle \Big\rangle$ detti vettori applicati-ZZD2.
Usiamo il suffisso "-ZZR" per i vettori applicati-ZZH e per i vettori applicati-ZZV, il suffisso "-ZZB" per i vettori applicati-ZZD1 e per i vettori applicati-ZZD2 ed il suffisso "-ZZK" per i vettori applicati-ZZR e per i vettori applicati-ZZB.

B21 d.02 Procediamo ora per gradi ad associare a ciascun vettore applicato-ZZ $\langle P, Q\rangle$ una sequenza di punti-ZZ che chiamiamo **segmento orientato-ZZ**.
Come nel maggior numero dei casi ci appoggeremo alla raffigurazione geografica a punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Un vettore.a-ZZ $\langle P, Q\rangle$ con $P = Q$ viene detto **vettore applicato degenere** e in genere si può identificare con il semplice punto P.
Al vettore.a-ZZ orizzontale $\Big\langle \langle p_x, 0\rangle, \langle q_x, 0\rangle \Big\rangle$, se $p_x < q_x$ si associa $\Big\langle \langle p_x, 0\rangle, \langle p_x + 1, 0\rangle, ..., \langle q_x, 0\rangle \Big\rangle$, se $p_x > q_x$ si associa $\Big\langle \langle p_x, 0\rangle, \langle p_x - 1, 0\rangle, ..., \langle q_x, 0\rangle \Big\rangle$.

Per dualità-xy a $\Big\langle \langle 0, p_y\rangle, \langle 0, q_y\rangle \Big\rangle$, se $p_y < q_y$ si associa $\Big\langle \langle 0, p_y\rangle, \langle 0, p_y + 1\rangle, ..., \langle 0, q_x\rangle \Big\rangle$, se $p_y > q_y$ si associa $\Big\langle \langle 0, p_y\rangle, \langle 0, p_y - 1\rangle, ..., \langle 0, q_x\rangle \Big\rangle$.

A $\Big\langle \langle p, p\rangle, \langle q, q\rangle \Big\rangle$ se $p < q$ si associa $\Big\langle \langle p, p\rangle, \langle p, p + 1\rangle, .., \langle q, q\rangle \Big\rangle$, se $p > q$ si associa $\Big\langle \langle p, p\rangle, \langle p - 1, p - 1\rangle, .., \langle q, q\rangle \Big\rangle$.

A $\Big\langle \langle p, -p\rangle, \langle q, -q\rangle \Big\rangle$ se $p < q$ si associa $\Big\langle \langle p, -p\rangle, \langle p + 1, -p - 1\rangle, .., \langle q, -q\rangle \Big\rangle$, se $p > q$ si associa $\Big\langle \langle p, -p\rangle, \langle p - 1, -p + 1\rangle, .., \langle q, -q\rangle \Big\rangle$.

Per i vettori applicati-ZZ che non sono qualificabili con "-ZZK", "-ZZB" occorre distinguere quelli primitivi dai rimanenti.

A ciascuno dei primi si associa come segmento orientato la coppia di punti-ZZ coincidente con lo stesso vettore applicato.

Al vettore.a-ZZ non primitivo si può dare la forma $\Big\langle \langle p_x, p_y\rangle, \langle p_x + mh, p_y + mk\rangle \Big\rangle$ con $\langle h, k\rangle$ vettore-ZZ primitivo ed $m \neq 0, 1$.
A esso si associa la sequenza di lunghezza $m + 1$

$$\Big\langle \langle p_x, p_y\rangle, \langle p_x + h, p_y + k\rangle, ..., \langle p_x + mh, p_y + mk\rangle \Big\rangle \ .$$

t

Si dice opposto di un segmento orientato-ZZ la sequenza di punti-ZZ riflessa di quella che costituisce il segmento di partenza. Chiaramente il passaggio al segmento opposto è una involuzione, come accade al passaggio da una sequenza alla riflessa.

B21 d.03 È naturale, ossia giustificato dai conseguenti utilizzi operativi ed espositivi, associare alle varie sequenze di punti-ZZ incontrate i corrispondenti insiemi di punti, insiemi ai quali accade spesso di applicare le classiche operazioni insiemistiche, unione, intersezione, complementazione, prodotto cartesiano, ...

A ciascuno dei vettori applicati-ZZ $\langle P, Q\rangle$ si associa il duetto di punti $\{P, Q\}$. A ciascuno dei segmenti orientati della forma $\Big\langle \big\langle p_x, p_y\big\rangle, \big\langle p_x + h, p_y + k\big\rangle, ..., \big\langle p_x + mh, p_y + mk\big\rangle \Big\rangle$ si associa l'insieme $\big\{\big\langle p_x, p_y\big\rangle, \big\langle p_x + h, p_y + k\big\rangle, ..., \big\langle p_x + mh, p_y + mk\big\rangle\big\}$ che chiamiamo **segmento-ZZ**.

Si osserva che con questi passaggi da sequenze a insiemi si hanno perdite di informazioni. In effetti un vettore.a-ZZ $\langle P, Q\rangle$ si può individuare con il segmento-ZZ $\{P, Q\}$ cui si aggiunge la "preferenza" di P su Q per l'assegnazione del ruolo di estremità iniziale.
In relazione a questo si adottano anche le notazioni $\overline{P, Q}$ come equivalente della $\{P, Q\}$, $\overrightarrow{P, Q}$ come equivalente della $\langle P, Q\rangle$ e $\overrightarrow{Q, P}$ come equivalente della $\langle Q, P\rangle$; la prima di queste notazioni presenta un semplice tratto superiore , le altre con segni di frecce opposte.

Va anche detto che in molti discorsi non è necessario distinguere precisamente tra sequenze e insiemi associati, grazie alla loro stretta connessione che evita di incorrere in ambiguità.

B21 d.04 Presentiamo in dettaglio particolari tipi di segmenti-ZZ.
Nel seguito con h, k, s e t denotiamo numeri interi.

- segmento-ZZ orizzontale o **segmento-ZZH** con inizio in $\langle h, j\rangle$ e di peso s: $\{i = h, ..., h + s - 1 :| \langle i, j\rangle\}$;
- segmento-ZZ verticale o **segmento-ZZV** con inizio in $\langle h, j\rangle$ e di peso t: $\{i = j, ..., k + t - 1 :| \langle h, i\rangle\}$;
- segmento-ZZ diagonale o **segmento-ZZD1** con inizio in $\langle h, k\rangle$ e di peso s:
  $\{i = h, ..., h + s - 1 :| \langle i, k - h + i\rangle\}$;
- segmento-ZZ codiagonale o **segmento-ZZD2** con inizio in $\langle h, k\rangle$ e di peso s:
  $\{i = h, ..., h + s - 1 :| \langle i, k - i + h\rangle\}$.

Collettivamente i segmenti-ZZ orizzontali e verticali si dicono **segmenti-ZZR**; i segmenti-ZZD1 e i segmenti-ZZD2 li chiamiamo collettivamente **segmenti-ZZB**; i segmenti-ZZR e i segmenti-ZZB li diciamo collettivamente **segmenti-ZZK**.

Chiamiamo **estremità di un segmento-ZZK** i due punti-ZZ aventi almeno una delle coordinate con valore o minimo o massimo. Nella figura precedente le estremità sono evidenziate dal segno " • ".

Forse serve sottolineare che ciascuno dei segmenti-ZZ introdotti viene individuato biunivocamente dal duetto dei punti-ZZ sue estremità.

A varie configurazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ capita di attribuire un "peso"; questo termine fa riferimento a modelli materiali del piano-ZZ nei quali i punti-ZZ sono costituiti da cilindretti, tessere o altri piccoli oggetti omogenei e quindi dello stesso peso fisico.

Il piano-ZZ si può raffigurare anche associando a ciascuna coppia $\langle i, j\rangle$ una casella-ZZ, cioè un quadratino; per tale raffigurazione al termine peso sarebbe preferibile il termine "area".

In effetti in seguito riserveremo il termine area per esprimere il cardinale degli insiemi di caselle-ZZ e successivamente per fornire una "misura della estensione di figure" appartenenti a un piano o a qualche altro genere di "superficie".

B21 d.05 Abbiamo visto che un vettore-ZZ $\mathsf{t} = \langle \mathbf{0}_2, T \rangle$ con $T = \langle t_x, t_y \rangle$ si può pensare come una azione o come un meccanismo, traslazione, che sposta o trasla un qualsiasi punto-ZZ $P = \langle p_x, p_y \rangle$ in un altro:

$$P + \mathsf{v} \;:=\; \textbf{\textit{Trsl}}\ _{\mathsf{v}}(P) \;:= \langle \mathbf{0}_2, P \rangle + \langle \mathbf{0}_2, T \rangle \;= \langle \mathbf{0}, P + T \rangle \;= \langle p_x + t_x, p_y + t_y \rangle \;. \tag{1}$$

Tra le traslazioni si possono considerare basilari quelle associate ai vettori-ZZ primitivi, che diciamo **traslazioni-ZZ primitive**; infatti se un vettore=ZZ si può scrivere $\mathsf{t} = m\,\mathsf{u}$, con $\mathsf{u} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm}$ e con $m \in \mathbb{P}$; la corrispondente traslazione è data dalla potenza compositiva m-esima della corrispondente traslazione primitiva:

$$\textbf{\textit{Trsl}}\ _{\mathsf{t}} \;=\; \textbf{\textit{Trsl}}\ _{\mathsf{u}}{}^{m} \;=\; \lceil\!\lceil\, P \mapsto P + \mathsf{t} \,\rceil\!\rceil \;. \tag{2}$$

Mediante le traslazioni possiamo introdurre utili notazioni alternative per i segmenti-ZZ orientati e per i nonorientati.

Segmento orientato relativo al vettore applicato $\big\langle \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle + (m-1)\langle h, k \rangle \big\rangle$ con $\langle h, k \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm}$: $\big\langle i = 0, 1, ..., m-1 :|\ \langle a, b \rangle + i\,\langle h, k \rangle \big\rangle$.

Segmento corrispondente : $\{i = 0, 1, ..., m-1 :|\ \langle a, b \rangle + i\,\langle h, k \rangle\}$; sui tratta di un insieme di m elementi.

Il segmento orientato avente come estremità iniziale $\langle a, b \rangle$ e come estremità finale $\langle c, d \rangle$, quando $a \neq c$ e $b \neq d$ è individuato dall'espressione $\big\langle i = 0, 1, ..., m-1 :|\ \langle a, b \rangle + i\,\langle h, k \rangle \big\rangle$, dove $h := (c-a)/m$ e $k = (d-b)/m$, con $m := \mathrm{MCD}(|c-a|, |d-b|)$.

B21 d.06 A questo punto si possono introdurre alcune fondamentali sequenze e insiemi numerabili di punti-ZZ. Ricordiamo per questo che per successione bilatera di elementi di un insieme S intendiamo una funzione del genere $\lceil\!\lceil\, \mathbb{Z} \longmapsto \mathsf{S} \,\rceil\!\rceil$.

Consideriamo il vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$ ove $Q = P + m\langle h, k \rangle$, $m \in \mathbb{Z}_{nz}$ e $\langle h, k \rangle$ vettore-ZZ primitivo.
Diciamo **retta orientata-ZZ** contenente $\overrightarrow{PQ}$ la successione bilatera $\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ P + i\langle h, k \rangle \big\rangle$.
Diciamo retta orientata opposta della $\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ P + i\,\langle h, k \rangle \big\rangle$ la retta $\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ P + i\langle -h, -k \rangle \big\rangle$
Denotiamo con **OLineZZ** l'insieme delle rette orientate-ZZ.
Se R denota una retta orientata, denotiamo la sua opposta con $\mathsf{R}^{\leftarrow}$.

Diciamo**retta-ZZ associata a una retta orientata**, $\mathcal{R} := \big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ P + i\,\langle h, k \rangle \big\rangle$ l'insieme dei punti $\mathbf{SetY}(\mathcal{R}) := \{i \in \mathbb{Z} :|\ P + i\,\langle h, k \rangle\}$.
Denotiamo con **LinesZZ** l'insieme delle rette-ZZ.

Evidentemente la retta associata a una retta orientata e quella associata alla sua apposta coincidono; in formula

$$\forall \mathcal{R} \in \mathbf{OLineZZ} \;:\; \mathbf{SetY}(\mathcal{R}^{\leftarrow}) = \mathbf{SetY}(\mathcal{R}) \;.$$

È anche evidente la biiezione tra l'insieme delle rette-ZZ e l'insieme dei i duetti costituiti da una retta orientata-ZZ e dalla sua opposta.

Sono casi particolari di rette-ZZ
- l'asse Ox_{ZZ} esprimibile come $\{x \in \mathbb{Z} :|\ \mathbf{0}_2 + x\,\mathbf{e}_x\}$,
- l'asse Oy_{ZZ} esprimibile come $\{y \in \mathbb{Z} :|\ \mathbf{0}_2 + y\,\mathbf{e}_y\}$,
- la diagonale-ZZD1 esprimibile come $\{x \in \mathbb{Z} :|\ \mathbf{0}_2 + x\,(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)\}$,
- la diagonale-ZZD1 esprimibile come $\{x \in \mathbb{Z} :|\ \mathbf{0}_2 + x\,(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)\}$.

B21 d.07 Vediamo casi particolari di rette-ZZ.

Si dice retta-ZZ orizzontale o **retta-ZZH** una retta esprimibile come $\{x \in \mathbb{Z} :| \langle x, y\rangle\}$, per ogni $y \in \mathbb{Z}$.
Si dice retta-ZZ verticale o **retta-ZZV** una retta esprimibile come $\{y \in \mathbb{Z} :| \langle x, y\rangle\}$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$.
Diciamo insieme delle **rette-ZZR** l'unione delle rette-ZZH e delle rette-ZZV.

Si dice retta-ZZ diagonale o **retta-ZZD1** una retta esprimibile come $\{x \in \mathbb{Z} :| \langle x, x + d\rangle\}$, per ogni $d \in \mathbb{Z}$.
Si dice retta-ZZ codiagonale o **retta-ZZD2** una retta esprimibile come $\{x \in \mathbb{Z} :| \langle\langle x, -x + d\rangle\}$, per ogni $d \in \mathbb{Z}$.
Diciamo insieme delle **rette-ZZB** l'unione delle rette-ZZD1 e delle rette-ZZD2.
Diciamo insieme delle **rette-ZZK** l'unione delle rette-ZZB e delle rette-ZZB.

B21 d.08 Si dice che due o più punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono

- **punti allineati-ZZH** sse appartengono a uno stesso segmento-ZZH o a una stessa retta-ZZH ;
- **punti allineati-ZZV** sse appartengono a una stesso segmento-ZZV o a una stessa retta-ZZV ;
- **punti allineati-ZZR** sse appartengono a una stesso segmento-ZZR o a una stessa retta-ZZR ;
- **punti allineati-ZZD1** sse appartengono a una stesso segmento-ZZD1 o a una stessa retta-ZZD1 ;
- **punti allineati-ZZD2** sse appartengono a una stesso segmento-ZZD2 o a una stessa retta-ZZD2 ;
- **punti allineati-ZZB** sse appartengono a una stesso segmento-ZZB o a una stessa retta-ZZB ;
- **punti allineati-ZZK** sse appartengono a una stesso segmento-ZZK o a una stessa retta-ZZK .

Come alternative equivalenti dei termini "punti allineati" e "allineamento" si usano anche, risp., i termini **punti collineari** e **collinearità**.

Abbiamo introdotto delle distinzioni tra entità geometriche piuttosto minuziose ritenendo possano essere utili per talune applicazioni. Per evitare di esporre in modo troppo prolisso queste distinzioni, e come per molti altri insiemi di entità caratterizzati da proprietà specifiche, può risultare conveniente servirsi di metavariabili, cioè di simboli aventi come possibili valori stringhe che entrano come componenti di raggruppamenti di notazioni.

Per gli scopi attuali introduciamo le seguenti metavariabili:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x} \in \mathfrak{X} := \{\mathrm{H}, \mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{D1}, \mathrm{D2}, \mathrm{B}, \mathrm{K}\} \quad ; \quad \mathfrak{w} \in \mathfrak{W} := \{\mathrm{H}, \mathrm{V}, \mathrm{D1}, \mathrm{D2}\} \quad ; \\ &\mathfrak{y} \in \mathfrak{Y} := \{\mathrm{E}, \mathrm{NE}, \mathrm{N}, \mathrm{NW}, \mathrm{W}, \mathrm{SW}, \mathrm{S}, \mathrm{SE}\} \quad ; \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z} := \mathfrak{W} \dot\cup \mathfrak{Y}\} \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Servendoci della prima metavariabile la generica delle precedenti relazioni la chiamiamo **allineamento-ZZ$\mathfrak{x}$** .

Si constata facilmente che le collinearità-ZZ$\mathfrak{w}$ (cioè le collinearità-ZZH, -ZZV, -ZZD1 e -ZZD2) sono relazioni di equivalenza e che, all'opposto, le collinearità-ZZR,-ZZB e-ZZK non sono relazioni transitive.

B21 d.09 L'insieme delle rette-ZZH si dice anche inclinazione orizzontale o **inclinazione-h**. Se sorprende associare il termine inclinazione a un insieme di rette, diciamo più pianamente che l'inclinazione-h e è la caratteristica visuale che accomuna tutte le rette-ZZH e che le distingue dalle altre rette-ZZ del piano-ZZ.

Per l'insieme delle rette-ZZH si usa anche il termine **punto all'infinito orizzontale**. Nel seguito incontreremo altri punti all'infinito associati a insiemi di rette (ed anche rette all'infinito ed entità simili); per dare una prima giustificazione di questo termine possiamo dire che gli insiemi di rette che essi esprimono) hanno taluni comportamenti molto somiglianti a comportamenti omologhi dei punti del piano l finito.

Dalle definizioni si deduce facilmente che due rette-ZZ orizzontali non si intersecano in alcun punto-ZZ (al finito).

Per esprimere questo fatto si dice che questi due insiemi di punti-ZZ sono **rette parallele-ZZH**; alternativamente si dice che due rette-ZZH si incontrano solo nel punto all'infinito-ZZH.
Questa espressione, a prima vista bizzarra, si spiega come equivalente alla affermazione, piuttosto ovvia, che "due rette-ZZH sono elementi della classe delle rette-ZZH".

A favore del termine "punto all'infinito", che può essere giudicato inutilmente stravagante, va segnalato che si rivela notevolmente vantaggioso per la presentazione di molti risultati afferenti alla `geometria proiettiva (wi)`.

Similmente si mostra che non hanno punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in comune:

- due rette-ZZ verticali (che per esprimere questo fatto vengono chiamate **rette parallele-ZZV**);
- due rette-ZZD1 (che per esprimere questo fatto sono dette **rette parallele-ZZD1**);
- due rette-ZZD2 (che per esprimere questo fatto sono dichiarate **rette parallele-ZZD2**).

Corrispondentemente si introducono i termini:

- **inclinazione-v** o **punto all'infinito-ZZV**, per l'insieme delle rette-ZZV;
- **inclinazione-D1** o **punto all'infinito-ZZD1**, per l'insieme delle rette-ZZD1;
- **inclinazione-D2** e **punto all'infinito-ZZD2**, per l'insieme delle rette-ZZD2.

L'unione degli insiemi delle inclinazioni-ZZH e-ZZV del piano-ZZ viene chiamata insieme delle **inclinazioni-ZZR**. L'unione degli insiemi delle inclinazioni-ZZD1 e-ZZD2 del piano-ZZ viene chiamata insieme delle **inclinazioni-ZZB**. L'unione degli insiemi delle inclinazioni-ZZH ,-ZZV,-ZZD1 e-ZZD2 del piano-ZZ viene chiamata insieme delle **inclinazioni-ZZK**.

B21 d.10 Le inclinazioni sono caratteristiche di segmenti e rette nonorientate. Quando, un po' più precisamente, occorre fare riferimento a segmenti e rette orientate, serve caratterizzare queste entità con una informazione un poco più specifica, la orientazione.

Iniziamo con i segmenti orientati e le rette orientate più semplici, entità che per concisione riferiamo alla metavariabile $\mathfrak{x}$ che si chiede variare in $\mathfrak{X} := \{\mathrm{H}, \mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{D1}, \mathrm{D2}, \mathrm{B}, \mathrm{K}\}$.

Un segmento-ZZ$\mathfrak{x}$ si può arricchire con una orientazione attribuendo a una delle sue estremità il ruolo di **estremità iniziale** e assegnando all'altra il ruolo di **estremità finale**.
Un segmento-ZZ$\mathfrak{x}$ munito da una tale scelta viene detto **segmento-ZZ$\mathfrak{x}$ orientato** o anche **vettore-ZZ$\mathfrak{x}$ applicato** .
Un segmento-ZZ$\mathfrak{x}$ orientato si può individuare sia mediante la coppia delle sue estremità, sia con la sua estremità iniziale e con la coppia delle differenze tra le coordinate delle estremità.
Inoltre si può identificare con la sequenza di punti-ZZ ottenuta dall'insieme di punti-ZZ relativa al segmento-ZZ$\mathfrak{x}$ nonorientato a partire dalla sua estremità iniziale.

Per esempio dal segmento-ZZD1

$$\mathsf{s} \;=\; \{i = 0, 1, ..., 4 :|\; \langle 4 + i, -2 + i\rangle\} \;=\; \{\langle 4, -2\rangle, \langle 5, -1\rangle, \langle 6, 0\rangle, \langle 7, 1\rangle, \langle 8, 2\rangle\}$$

si ottengono due segmenti orientati.
Il primo si può individuare con la coppia di estremità $\big\langle \langle 4, -2\rangle, \langle 8, 2\rangle \big\rangle$, oppure con l'estremità iniziale $\langle 4, -2\rangle$, con la differenza delle ascisse 4 e con la differenza delle ordinate 4, oppure con la sequenza $\big\langle \langle 4, -2\rangle, \langle 5, -1\rangle, \langle 6, 0\rangle, \langle 7, 1\rangle, \langle 8, 2\rangle \big\rangle$.
Il secondo, l'opposto del precedente si può individuare con la coppia di estremità $\big\langle \langle 8, 2\rangle, \langle 4, -2\rangle, \big\rangle$, oppure con l'estremità iniziale $\langle 8, 2\rangle$, con la differenza delle ascisse -4 e con la differenza delle ordinate -4, oppure con la sequenza $\big\langle \langle 8, 2\rangle, \langle 7, 1\rangle, , \langle 6, 0\rangle, \langle 5, -1\rangle, \langle 4, -2\rangle \big\rangle$.

Anche le rette-ZZ$\mathfrak{x}$ si possono arricchire per diventare **rette-ZZ$\mathfrak{x}$ orientate** trasformando l'espressione del loro insieme di punti-ZZ in una delle due possibili successioni bilatere di tali punti, cioè in opportune funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\rceil$.

Osserviamo esplicitamente che le corrispondenze tra segmenti e segmenti orientati e le corrispondenze tra rette-ZZ e rette-ZZ orientate sono corrispondenze 2-1: a ogni segmento corrispondono due segmenti orientati e a un duetto di segmenti orientati opposti corrisponde un segmento. Fatto simile per le rette-ZZ.
Non si ha invece un fatto analogo per le semirette-ZZ, in quanto esse sono per la loro definizione delle configurazioni orientate.

B21 d.11 Ogni vettore-ZZ$\mathfrak{x}$ e ogni segmento orientato-ZZ$\mathfrak{x}$ si possono ampliare ad una e una sola retta orientata-ZZ$\mathfrak{x}$, quella ottenuta estendendo l'insieme di variabilità dell'indice da un intervallo-ZZ finito all'intero $\mathbb{Z}$.

Ad esempio il vettore orientato-ZZH $\big\langle \langle 3,7\rangle, \langle 6,7\rangle \big\rangle$ ed il suo segmento orientato $\big\langle i = 3,...,6 :|\ \langle i,7\rangle \big\rangle$ si ampliano alla retta orientata-ZZH $\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \langle i,7\rangle \big\rangle$, mentre il vettore-ZZD2 $\big\langle \langle 3,-3\rangle, \langle -5,5\rangle \big\rangle$ e il corrispondente segmento orientato $\big\langle i = -3,...,5 :|\ \langle -i,i\rangle \big\rangle$ sui ampliano alla retta orientata-ZZD2 $\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \langle -i,i\rangle \big\rangle$.

Similmente a quanto accade ai segmenti-ZZ$\mathfrak{x}$, ogni segmento orientato-ZZ$\mathfrak{y}$ si può ampliare in una e una sola retta-ZZ$\mathfrak{y}$ orientata.
Ad esempio il vettore $\big\langle \langle -4,2\rangle, \langle -6,5\rangle \big\rangle$ si estende alla retta orientata-ZZ $\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \langle -4,2\rangle + i \cdot \langle -2,3\rangle \big\rangle$.

Abbiamo visto come tipica retta orientata-ZZ quella individuata da una espressione della forma

$$\Big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \big\langle p_x + i\,h, p_y + i\,k \big\rangle \Big\rangle \quad \text{con} \quad h \perp k \ .$$

Espressioni equivalenti sono quelle della forma

$$\big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \langle \overline{p}_x + i\,h, \overline{p}_y + i\,k\rangle \ \text{ con } \langle \overline{p}_x, \overline{p}_y\rangle = \langle p_x, p_y\rangle + m\,\langle h,k\rangle \ \text{ per } m \text{ intero qualsiasi.}$$

Queste espressioni le diciamo **espressioni canoniche delle rette-ZZ**.

Ai punti-ZZ di una retta orientata si associa naturalmente l'ordine totale dei numeri interi che fungono da indice corrente in una sua espressione canonica: ad esempio per la retta precedente $\langle -7,6\rangle$ precede $\langle 2,-3\rangle$ e questo precede $\langle 29,-30\rangle$.

Parlando dei punti della retta orientata-ZZ data dalla espressione $\Big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \big\langle p_x + i\,h, p_y + i\,k\big\rangle \ \Big\rangle$ si può comprensibilmente adottare una terminologia cinematica che la vede percorsa da un mobile che si muove a velocità costante e che nell'istante assunto come istante zero si trova in $P = \langle p_x, p_y\rangle$ e nell'istante i intero qualsiasi si trova nel punto $P + i\langle h,k\rangle$.
Ogni processo illimitato di una retta-ZZ orientata in tempi (discreti) che scorrono dal passato al futuro viene riferito a un particolare istante zero che risulta associato a una particolare espressione canonica della retta.
Ad una retta-ZZ orientata si associa come retta orientata opposta quella individuata "capovolgendo lo scorrere del tempo": la opposta della retta individuata dalla espressione precedente viene identificata dalla espressione $\Big\langle i \in \mathbb{Z} :|\ \big\langle p_x - i\,h, p_y - i\,k\big\rangle \Big\rangle$.
Evidentemente il passaggio da una retta orientata alla opposta è una involuzione, come accade al passaggio al vettore opposto e al passaggio al segmento orientato opposto.

È facile ricavare da una retta orientata-ZZ (in concreto da una sua rappresentazione) ciascuno dei segmenti orientati di cui è ampliamento ed in particolare ciascuno dei suoi segmenti orientati ridotti.

Dalla retta fornita dalla espressione precedente si ricava il segmento orientato ridotto

$$\Big\langle \big\langle p_x, p_y \big\rangle, \big\langle p_x + h, p_y + k \big\rangle \Big\rangle \ .$$

Ovviamente l'opposta di una retta orientata-ZZ$\mathfrak{x}$ è anch'essa una retta orientata-ZZ$\mathfrak{x}$.

Per le rette orientate-ZZK basta individuare un suo punto e il suo successivo secondo l'ordine indotto da una sua espressione canonica.

Ad ogni retta orientata-ZZ$\mathfrak{x}$ si associa naturalmente l'orientazione-ZZ$\mathfrak{x}$ di uno (qualsiasi) dei suoi segmenti orientati (facilmente ricavabili).
Ad ogni retta orientata-ZZ$\mathfrak{y}$ si associa naturalmente l'orientazione di uno (qualsiasi) dei segmenti orientati dei quali costituisce l'ampliamento.
Tale orientazione viene identificata dal vettore-ZZ ridotto di ciascuno dei suddetti segmenti orientati.

È naturale associare a ogni semiretta-ZZ$\mathfrak{x}$ la retta orientata che la contiene e attribuire a questa l'orientazione di tale semiretta.

B21 d.12 Una coppia di punti adiacenti-ZZ$\mathfrak{y}$, cioè un segmento orientato-ZZ$\mathfrak{y}$ di cardinale 2, si dice **passo-ZZ$\mathfrak{y}$**. Per ogni punto-ZZ $P = \langle i, j \rangle$ disponiamo dunque di 8 passi aventi P come primo componente.

Facendo evidente riferimento alla rappresentazione geografica di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, introduciamo i seguenti termini:

passo-ZZWE: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i+1, j \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P + \mathbf{e}_x \rangle$;
passo-ZZEW: coppia della forma $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i-1, j \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P - \mathbf{e}_x \rangle$;
passo orizzontale o **passo-ZZH**: passo-ZZWE o passo-ZZEW;
passo-ZZSN: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i, j+1 \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P + \mathbf{e}_y \rangle$;
passo-ZZNS: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i, j-1 \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P - \mathbf{e}_x \rangle$;
passo verticale o **passo-ZZV**: passo-ZZNS o passo-ZZSN;
passo-ZZR: passo-ZZH o passo-ZZV;
passo-ZZNE: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i+1, j+1 \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P + \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \rangle$;
passo-ZZSW: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i-1, j-1 \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P - \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \rangle$;
passo-ZZD1: passo-ZZNE o passo-ZZSW;
passo-ZZSE: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i+1, j-1 \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P - \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \rangle$;
passo-ZZNW: coppia del tipo $\big\langle \langle i, j \rangle, \langle i-1, j+1 \rangle \big\rangle \ = \ \langle P, P + \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \rangle$;
passo-ZZD2: passo-ZZSE o passo-ZZNW;
passo-ZZB o passo diagonale: passo-ZZD1 o passo-ZZD2;
passo-ZZK: passo-ZZR o passo-ZZB.

B21 d.13 Più precisamente si dice **orientazione-E** la caratterizzazione di tutte e sole le semirette-E; più formalmente questa entità è definita come la classe delle semirette-E.

Similmente si definiscono **orientazione-NE**, **orientazione-N**, **orientazione-NW**, **orientazione-W**, **orientazione-SW**, **orientazione-S** e **orientazione-SE**.
Più concisamente si parla di **orientazione-$\mathfrak{y}$**, con $\mathfrak{y} \in \{-\mathrm{E}, -\mathrm{NE}, -\mathrm{N}, -\mathrm{NW}, -\mathrm{W}, -\mathrm{SW}, -\mathrm{S}, -\mathrm{SE}\}$.

Le precedenti 8 orientazioni si possono chiamare collettivamente orientazioni-ZZ$\mathfrak{y}$, in quanto esse sono in biiezione, risp., con i seguenti punti-ZZ:

-E con $\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{e}_x$, -NE con $\langle 1, 1 \rangle \ = eSd_x + \mathbf{e}_y$, -N con $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{e}_y$, -NW con $\langle -1, 1 \rangle = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$, -W con $\langle -1, 0 \rangle = -\mathbf{e}_y$, -SW con $\langle -1, -1 \rangle = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$, -S con $\langle 0, -1 \rangle = -\mathbf{e}_y$, -SE con $\langle 1, -1 \rangle = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$.

Denoteremo con **PV8** l'insieme degli otto punti precedenti, ovvero l'insieme dei vettori primitivi-ZZ aventi quadranza 1 o 2.

Chiaramente i punti-ZZ si possono associare biunivocamente agli spostamenti-ZZ, cioè alle biiezioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in grado di traslare tutti i punti-ZZ. Ogni segmento orientato-ZZ$\mathfrak{y}$ costituito da w punti si può considerare come la sequenza dei punti ottenuti applicando alla sua estremità iniziale $w-1$ volte lo spostamento corrispondente della sua orientazione.

Le 8 orientazioni-ZZ$\mathfrak{y}$ equivalgono agli 8 **punti all'infinito-ZZ$\mathfrak{y}$ orientati**; ciascuno di questi oggetti si può descrivere come la "posizione" nella quale si incontrano tutte e sole le semirette orientate caratterizzate dalla stessa orientazione-ZZ$\mathfrak{y}$.
Ampliando $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con gli 8 punti all'infinito associati a PV8 si viene a disporre di locuzioni vantaggiose in varie circostanze.

Ogni inclinazione-ZZ$\mathfrak{w}$ corrisponde a due orientazioni-ZZ$\mathfrak{y}$ secondo il seguente schema:

-h		-v		-D1		-D2	
-E	-W	-N	-S	-NW	-SE	-NE	-SW

Similmente ogni punto-ZZ$\mathfrak{w}$ all'infinito corrisponde a due punti-ZZ$\mathfrak{y}$ all'infinito orientati.

B21 d.14 Introduciamo ora le semirette-ZZ$\mathfrak{y}$, sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che si possono collocare tra le rette orientate-ZZ e i segmenti orientati-ZZ, oppure si possono considerare rette dimezzate; esse serviranno a introdurre la nozione di angolo per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ [B22b].

Cominciamo introducendo i seguenti casi particolari:
semiretta-E ovvero riga illimitata a destra con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{i \in \mathbb{N} :| \langle h+i,k\rangle\}$;
semiretta-N ovvero colonna illimitata superiormente con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{j \in \mathbb{N} :| \langle h,k+j\rangle\}$;
semiretta-W ovvero riga illimitata a sinistra con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{i \in \mathbb{N} :| \langle h-i,k\rangle\}$;
semiretta-S ovvero colonna illimitata inferiormente con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{j \in \mathbb{N} :| \langle h,k-j\rangle\}$;
semiretta-ZZ orizzontale ovvero **semiretta-ZZH**: semiretta-E o semiretta-W;
semiretta-ZZ verticale ovvero **semiretta-ZZV**: semiretta-N o semiretta-S;
semiretta-ZZR: semiretta-ZZH o semiretta-ZZV;
semiretta-NE con l'estremità in $P = \langle h,k\rangle$: $\{i \in \mathbb{N} :| \langle h+i,k+i\rangle\} = P + \mathbb{N}\langle 1,1\rangle$;
semiretta-NW con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{i \in \mathbb{N} :| \langle h-i,k+i\rangle\}$;
semiretta-SW con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{j \in \mathbb{N} :| \langle h-i,k-i\rangle\}$;
semiretta-SE con l'estremità in $\langle h,k\rangle$: $\{i \in \mathbb{N} :| \langle h+i,k-i\rangle\}$;
semiretta-ZZD1: semiretta-NE o semiretta-SW;
semiretta-ZZD2: semiretta-NW o semiretta-SE;
semiretta-ZZB: semiretta-ZZD1 o semiretta-ZZD2;
semiretta-ZZK: semiretta-ZZR o semiretta-ZZB.

Ogni semiretta-ZZ$\mathfrak{y}$ si può individuare fissando un punto-ZZ e la corrispondente orientazione-ZZ$\mathfrak{y}$, ovvero uno dei versori canonici (particolari vettori-ZZ primitivi) appartenenti a

$$PV8 \;:=\; \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_x-\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_x\}\ .$$

Ad ogni semiretta-ZZ$\mathfrak{w}$ è associata canonicamente una retta orientata-ZZ$\mathfrak{y}$; alla $\{m \in \mathbb{N} :| P + m\ \mathsf{E}\}$ con $\mathsf{E} \in PV8$ è associata la $\{n \in \mathbb{Z} :| P + n\mathsf{E}\}$.

Ad ogni retta orientata-ZZ$\mathfrak{w}$ e a ciascuno dei suoi punti è associata canonicamente una semiretta-ZZ$\mathfrak{y}$; precisamente alla $\{n \in \mathbb{Z} :| P + n\,\mathsf{E}\}$ con $\mathsf{E} \in PV8$ e a P è associata la $\{m \in \mathbb{N} :| P + m\,\mathsf{E}\}$.

Più in generale consideriamo un qualsiasi vettore-ZZ primitivo $\langle h,k\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{prm}$ e diciamo che esso è biunivocamente associato a una cosiddetta **orientazione-ZZ**.
Definiamo allora **semiretta-ZZ** con l'estremità in $P = \langle a,b\rangle$ e orientazione $\mathsf{u} = \langle h,k\rangle$ l'insieme

$$\{i \in \mathbb{N} :|\ P + i\,\mathbf{u}\} = \{i \in \mathbb{N} :|\ \langle a + i\,h, b + i\,k\rangle\}\ .$$

B21 d.15 Spendiamo qualche parola sull'uso in queste pagine e nei testi di matematica dell'aggettivo "naturale", del corrispondente avverbio e della "naturalezza" riguardanti ampliamenti di insiemi, estensioni di relazioni (e di funzioni e di operazioni), potenziamenti di costruzioni e arricchimenti di significati.

Questi termini compaiono in giustificazioni che possono apparire affrettate e poco chiarificanti, quasi degli svicolamenti volti a evitare definizioni più precise ma pignole e tali da rischiare di risultare noiose. Queste accuse per molti discorsi sono fondate. Riteniamo tuttavia che una loro corretta adozione possa essere giustificata; qui ci sforzeremo di usarli o giustificandoli opportunamente o quando una giustificazione può essere colta agevolmente dal lettore.

Una associazione a un oggetto O_1 di una collezione C_1 di un oggetto O_2 di un'altra collezione C_2 vicina (cioè individuata da una definizione poco diversa dalla definizione di C_1) può dirsi naturale *tout court* sse il collegamento di O_2 ad O_1 risulta più semplice da esporre dei collegamenti ad altri oggetti di C_2.

Si incontrano inoltre modifiche naturali di problemi e di procedimenti che possono essere giustificate quando le modifiche si manifestano attraverso analogie o astrazioni facilmente immaginabili e inoltre motivate da qualcuno dei fini generali delle correnti indagini matematiche e computazionali: è naturale passare da un problema o da un procedimento ad uno che si applica con poche varianti a un insieme più esteso di istanze o di dati, oppure a uno che ottenga soluzioni migliori (più complete, oppure più precise, oppure più agevolmente descrivibili, oppure più largamente applicabili.

B21 e. rette, equazioni lineari, disequazioni lineari e semipiani segnati

B21 e.01 Molti interessanti sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e in particolare le rette-ZZ$\mathfrak{w}$, sono convenientemente individuati mediante equazioni o disequazioni nelle quali compaiono due variabili denotate, secondo tradizione, con le lettera x e y.
La x esprime la prima coordinata, cioè l'**ascissa**, di un punto-ZZ P che potrebbe essere considerato come incognita di una equazione da risolvere oppure come variabile in un insieme che si vuole scorrere, visitare per analizzarlo o individuare suoi elementi con particolari doti; a sua volta la y esprime la seconda coordinata di P, cioè la sua **ordinata**.

La x di un punto-ZZ P esprime il numero di passi-h, cioè di spostamenti orizzontali unitari, che portano dal un punto del secondo asse di riferimento assunto come origine al punto in esame; si conviene che sia $x > 0$ se si rappresentano spostamenti verso destra e $x < 0$ se si rappresentano spostamenti verso sinistra.

La y esprime invece il numero di passi-v, di spostamenti verticali unitari che portano da un punto del primo asse di riferimento Ox al punto P in esame; similmente a quanto detto per la x, si conviene che sia $y > 0$ se si rappresentano spostamenti verso l'alto, ma che sia $y < 0$ se si rappresentano spostamenti verso il basso.

In relazione a queste convenzioni, il primo asse di riferimento del piano-ZZ si dice anche **asse delle** x e si denota con Ox, mentre il secondo asse si dice **asse delle** y e si denota con Oy.

Per ogni $h \in \mathbb{Z}$ l'equazione $x = h$ individua la retta-ZZV (verticale) $\{j \in \mathbb{Z} :| \langle h, j\rangle\}$.

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ l'equazione $y = k$ individua la retta-ZZH (orizzontale) $\{i \in \mathbb{Z} :| \langle i, k\rangle\}$.

L'equazione $y = x + s$ individua la retta-ZZD1 $\{i \in \mathbb{Z} :| \langle i, i + s\rangle\}$.

L'equazione $y = -x + s$ individua la retta-ZZD2 $\{i \in \mathbb{Z} :| \langle i, s - i\rangle\}$.

B21 e.02 Vedremo che la soluzione di molti problemi si avvicina o si raggiunge determinndo l'intersezione di sottoinsiemi dell'ambiente nel quale si colloca la soluzione.
Ciascuno di questi sottoinsiemi è costituito dagli oggetti che soddisfano una singola condizione per la soluzione; per molti problemi le soluzioni consistono in sequenze numeriche, ovvero punti di un ambiente fornito da un quadrato cartesiano come $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o più in generale da un prodotto cartesiano di insiemi numerici.
Effettuare l'intersezione tra due insiemi di questi punti (o di oggetti d'altro genere candidati alla soluzione) corrisponde a soddisfare congiuntamente due condizioni, ovvero individuare un insieme di candidati per i quali valgano due proprietà.
Quando i sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono rappresentati da equazioni o disequazioni (come vedremo tra poco), l'intersezione si ottiene considerando il sistema di queste relazioni e mettendo in atto le tecniche per risolverlo.

Le considerazioni sopra soluzioni di problemi che presentano due incognite x e y si possono estendere anche ad ambienti della forma $S \times T$, dove S e T denotano due opportuni insiemi le cui costruzioni formali potrebbero essere molto diverse da quelle di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Z}$.

B21 e.03 Si osserva che una retta-ZZ orizzontale e una verticale si intersecano in uno e un solo punto, immediatamente determinabile a partire dalle due equazioni: la retta $x = h$ e la $y = k$ si intersecano in $\langle h, k\rangle$.

Analogamente anche una retta-ZZR e una retta-ZZB si intersecano sempre in un unico punto facilmente individuabile a partire dalle corrispondenti equazioni. La retta $x = h$ e la $y = x + k$ si intersecano in $\langle h, h + k\rangle$; la retta $y = k$ e la $y = -x + s$ si intersecano in $\langle s - k, k\rangle$.

Per l'intersezione di una retta-ZZD1 e una-ZZD2 si danno due casi distinguibili agevolmente dalle equazioni.
Si richieda ad esempio che valgano entrambe le equazioni $y = x + s$ e $y = -x + t$. Quando s e t sono entrambi pari o dispari si individua il punto-ZZ che soddisfa sia $y = (s + t)/2$ che $x = (t - s)/2$, cioè il punto-ZZ $\left\langle \frac{s-t}{2}, \frac{s+t}{2} \right\rangle$.
Se invece uno dei due interi s e t è pari e l'altro dispari si individua una entità estranea a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che può definirsi "punto con entrambe le coordinate semidispari"; questa entità è visualizzabile come il punto centrale della casella di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avente come vertici $\langle(-s + t - 1)/2, (s + t - 1)/2\rangle$, $\langle(-s + t - 1 + 1)/2, (s + t - 1)/2\rangle$, $\langle(-s + t - 1 + 1)/2, (s + t - 1 + 1)/2\rangle$ e $\langle(-s + t - 1)/2, (s + t + 1 + 1)/2\rangle$.

Si segnala che in circostanze opportune la precedente casella potrebbe essere giudicata una utilizzabile soluzione approssimata del sistema delle due equazioni date.

Vedremo che i punti ottenuti come intersezione di rette servono a varie costruzioni e contribuiscono a risolvere vari problemi; quindi abbiamo trovato una situazione nella quale il piano-ZZ risulta carente come ambiente per costruzioni e soluzioni. Questo ricorda l'insufficienza di $\mathbb{Z}$ per la determinazione delle sue riflessioni [B20e03].

Per passare del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a un ambiente che consente più soluzioni e più costruzioni una strada consiste nel considerarlo parte di ambienti che risultino essere più ricchi di possibilità operative: in effetti troveremo ambienti più vantaggiosi come $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [B31a, B43a] .

B21 e.04 Vediamo ora come ogni retta orientata-ZZK possa essere individuata da un'espressione lineare nella x e nella y, coordinate da considerare variabili che corrono in $\mathbb{Z}$.
Vediamo anche come tale espressione determina una tripartizione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ costituita dalla retta corrispondente e da due cosiddetti semipiani-ZZK.
Introduciamo alcuni tipi di espressioni. Supposto che k denoti un intero qualsiasi, diciamo

espressione lineare-ZZE un'espressione della forma $y - k$;
espressione lineare-ZZNE un'espressione della forma $y - x + k$;
espressione lineare-ZZN un'espressione della forma $x - k$;
espressione lineare-ZZNW un'espressione della forma $y + x - k$;
espressione lineare-ZZW un'espressione della forma $-(y - k)$;
espressione lineare-ZZSW un'espressione della forma $-(y - x + k)$;
espressione lineare-ZZS un'espressione della forma $-(x - k)$;
espressione lineare-ZZSE un'espressione della forma $-(y + x - k)$.
espressione lineare-ZZH un'espressione-ZZE o un'espressione-ZZW;
espressione lineare-ZZV un'espressione-ZZN o un'espressione-ZZS;
espressione lineare-ZZR un'espressione-ZZH o un'espressione-ZZV;
espressione lineare-ZZD1 un'espressione-ZZNE o un'espressione-ZZSW;
espressione lineare-ZZD2 un'espressione-ZZNW o un'espressione-ZZSE;
espressione lineare-ZZB un'espressione-ZZD1 o un'espressione-ZZD2;
espressione lineare-ZZK un'espressione-ZZR o un'espressione-ZZB.

Servendoci degli insiemi di simboli

$$\mathfrak{X} := \{\mathrm{H},\mathrm{V},\mathrm{R},\mathrm{D1},\mathrm{D2},\mathrm{B},\mathrm{K}\} \ , \ \mathfrak{Y} := \{\mathrm{E},\mathrm{NE},\mathrm{N},\mathrm{NW},\mathrm{W},\mathrm{SW},\mathrm{S},\mathrm{SE}\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{Z} := \mathfrak{X} \dot\cup \mathfrak{Y}$$

possiamo affermare di aver definito tutte le espressioni lineari-ZZ$\mathfrak{Z}$.

B21 e.05 Diciamo insieme delle **coppie di interi coprimi** l'insieme $\{\langle p,q\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P} \,\big[\!\big]\, p \perp q\}$ e denotiamo tale relazione con coPRM.
Diciamo invece insieme delle **orientazioni-ZZ** l'insieme

$$\{\langle 1,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle -1,0\rangle,\langle 0,-1\rangle \ \dot\cup \ \{\langle p,q\rangle \in \mathsf{coPRM} :| \ \langle \pm p, \pm q\rangle\} \ .$$

Denotiamo con OrientZZ l'insieme delle orientazioni-ZZ.

Osserviamo che ogni ogni retta orientata-ZZ può essere individuata da un suo punto $\langle a,b\rangle$ e da una orientazione-ZZ $\langle P,Q\rangle$.
L'insieme dei punti di tale retta viene individuato dall'espressione $\{j\in\mathbb{Z} :| \ \langle a,b\rangle + j\,\langle P,Q\rangle\}$.
Questa espressione non è peculiare: infatti la retta suddetta si può individuare con ciascuna delle espressioni $\{j\in\mathbb{Z} :| \ \langle a,b\rangle + (m+j)\,\langle P,Q\rangle\}$ per ciascuno degli $m\in\mathbb{Z}$.

Consideriamo la retta orientata R passante per $A = \langle x_A, y_A\rangle$ ed avente l'orientazione $\langle p,q\rangle \in$ coPRM; consideriamo anche $B := A+\langle p,q\rangle$, punto detto il consecutivo-ZZ di A su R. Questa R viene individuata dall'espressione $A + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$.

Sappiamo [b05(4)] che la retta R_0 ottenuta privando dell'orientazione la R è caratterizzata dall'equazione

$$(y_A - Y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A\,y_B - x_B\,y_A = 0 \ .$$

Questa, introdotti $\alpha := y_A - y_B = -q$, $\beta := x_B - x_A = p$ e $\gamma := x_A\,y_B - x_B\,y_A$ equivale all'equazione $\alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$.
Se introduciamo anche l'espressione, evidentemente dipendente da $\langle a,b\rangle$,

$$\mathcal{L}_{\langle\alpha,\beta\rangle}(x,y) \ := \ \alpha\,x + \beta\,y + \gamma \ ,$$

otteniamo che la retta orientata è associata all'espressione $\mathcal{L}_{\langle\alpha,\beta\rangle}(x,y) = 0$.

L'espressione $\mathcal{L}_{\langle\alpha,\beta\rangle}(x,y)$ può essere vista come la funzione che ad ogni punto $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ associa un numero intero; queste funzioni le attribuiamo al genere delle **funzioni-ZZtZ**

Si osserva che alla retta orientata opposta $\mathsf{R}^{\leftarrow}$ è associata la funzione opposta $-\mathcal{L}_{\langle\alpha,\beta\rangle}(x,y)$.

B21 e.06 Alla retta-ZZ orientata R e alla espressione $\mathcal{L}_{\langle A,B\rangle}(x,y)$ associamo la tripartizione di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ costituita dagli insiemi di punti-ZZ $\langle x,y\rangle$ caratterizzati, risp.,

$$\text{da} \ \ \mathcal{L}_{\langle A,B\rangle}(x,y) < 0 \ , \text{da} \ \ \mathcal{L}_{\langle A,B\rangle}(x,y) = 0 \ \ \text{e da} \ \ \mathcal{L}_{\langle A,B\rangle}(x,y) > 0 \ .$$

I punti della seconda parte sono ovviamente i punti della retta, mentre i punti delle altre due parti sono semipiani visivamente ben distinti. Associamo inoltre il segno assunto dalla $\mathcal{L}(x,y)_{\langle A,B\rangle}$ ai punti di ciascuna delle tre classi e diciamo che in tal modo abbiamo ottenuta una **tripartizione lineare segnata di** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Ad esempio per la coppia di punti consecutivi-ZZ

$$\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\big\rangle \ = \big\langle \mathbf{0}_2, \mathbf{e}_x\big\rangle \ ,$$

per la quale possiamo scrivere $p=1$, $q=0$ e $L(x,y)=y$) , è associata la tripartizione che assegna 0 ai punti dell'asse Ox, assegna $y>0$ ai punti con ordinata positiva e assegna $y<0$ ai punti di ordinata negativa.

Alla coppia $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle\big\rangle = \big\langle \mathbf{0}_2, \mathbf{e}_y\big\rangle$ ($p=0$, $q=1$, , $L(x,y)=-x$) è associata invece la tripartizione che assegna 0 ai punti dell'asse Oy, assegna $x>0$ ai punti con ascissa negativa e assegna $x<0$ ai punti di ascissa positiva.

B21 e.07 Evidentemente si possono definire semplici biiezioni tra le rette-ZZ orientate, i vettori-ZZ orientati primitivi (come $\overrightarrow{AB}$) e le tripartizioni lineari segnate di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Ad ogni segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ sono quindi naturalmente associati, oltre a una retta-ZZ orientata, un semipiano positivo e un semipiano negativo.

Se rappresentiamo materialmente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è facile immaginare un dispositivo mobile che si sposta sopra i punti del segmento $\overrightarrow{AB}$ lasciando il semipiano positivo alla propria sinistra e il negativo alla propria destra.

Ciascuna delle espressioni introdotte in e05, che qui semplifichiamo trascurando la dipendenza dai punti A e B, porta a una tripartizione lineare segnata di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ costituita dalla retta dei punti-ZZ $\langle x,y\rangle$ nei quali $\mathcal{L}(x,y)=0$, dall'insieme dei punti nei quali $\mathcal{L}(x,y)<0$ e dall'insieme dei punti nei quali $\mathcal{L}(x,y)>0$.

Questi due insiemi caratterizzati dalle disequazioni lineari sono chiamati **semipiani-ZZ**.

Conveniamo di associare a ciascuna delle espressioni la retta orientata-ZZ che si ottiene dalla retta dell'annullamento munita del senso di percorrenza che lascia il semipiano $\mathcal{L}(x,y)>0$ alla sinistra e il semipiano $\mathcal{L}(x,y)<0$ alla destra. accettata questa convenzione è fissata una corrispondenza biunivoca tra rette orientate-ZZ e semipiani-ZZ.

Chiaramente al cambiamento di segno dell'espressione corrisponde il passaggio da una retta-ZZ$\mathfrak{Z}$ orientata alla retta con l'orientazione opposta.

B21 f. traslazioni del piano-ZZ

B21 f.01 Buona parte delle conoscenze concernenti il piano-ZZ si ottengono dallo studio di sue particolari permutazioni, cioè di trasformazioni biunivoche di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ con se stesso che rispettano certe proprietà, ovvero lasciano invariate certe figure o certe relazioni. Procederemo dunque allo studio delle simmetrie di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dei suoi sottoinsiemi e delle sue configurazioni, servendoci anche di considerazioni della teoria dei gruppi.

Questo modo di procedere (avviato dal `programma di Erlangen (wi)` da Felix Klein) viene applicato proficuamente allo studio di tutti gli ambienti matematici nei quali si possono sviluppare considerazioni di natura geometrica. Già per il semplice ambiente costituito dal piano-ZZ risulta concreto e fecondo; in effetti con lo studio delle permutazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si riescono a introdurre con relativa facilità e metodi di indagine e procedimenti per l'organizzazione delle conoscenze di portata molto vasta, in particolare applicabili a molti studi geometrici e più oltre alla meccanica, alla fisica, alla chimica, ...

Nella presente sezione introduciamo le traslazioni; in B22c trattiamo le riflessioni, le prime rotazioni e, più in generale, i movimenti rigidi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, cioè le trasformazioni che conservano una sorta di distanza tra i punti-ZZ; inoltre in B22f introdurremo le trasformazioni lineari di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, cioè le trasformazioni che portano le rette-ZZR in rette-ZZR e le rette-ZZB in rette-ZZB.

B21 f.02 Nello studio delle trasformazioni di un ambiente è comodo immaginare le più significative delle sue permutazioni come spostamenti materiali di oggetti collocati in un modello materiale dell'ambiente stesso. Questo punto di vista viene chiamato **punto di vista attivo** ed è quello che si adotta più spesso.

Le permutazioni di un ambiente si possono considerare anche da un secondo cosiddetto **punto di vista passivo**: l'effetto di una trasformazione viene immaginato come un cambiamento di un sistema assunto come riferimento di un modello materiale dell'ambiente che si descrive come immoto e quindi vede fissi gli oggetti in esso collocati, oggetti come linee, configurazioni e figure piane.

Questi due punti di vista risultano equivalenti, ma in diverse circostanze uno può essere preferibile all'altro. Vedremo che passare dall'uno all'altro corrisponde a passare da una permutazione alla sua inversa.

B21 f.03 Introduciamo le trasformazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ considerate secondo il punto di vista attivo facendo riferimento alla raffigurazione geografica; cominciamo con le trasformazioni più semplici, le traslazioni-ZZ.

Per ogni vettore-ZZ $\mathsf{s}=\langle s_1, s_2\rangle$, si dice **traslazione di spostamento s** la trasformazione:

$$(1)\qquad \textit{Trsl}_{\langle s_1,s_2\rangle} := \textit{Trsl}_{\mathsf{s}} := \ulcorner\!\!\ulcorner\ \langle i,j\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle i+s_1, j+s_2\rangle\ \urcorner\!\!\urcorner\ .$$

Talora serve fare riferimento a traslazioni più particolari.

Per ogni intero s si dice **traslazione orizzontale** di passo s: $\textit{Trsl}_{\langle s,0\rangle} := \ulcorner\!\!\ulcorner\ \langle i,j\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle i+s, j\rangle\ \urcorner\!\!\urcorner$.

Per ogni intero t si dice **traslazione verticale** di passo t: $\textit{Trsl}_{\langle 0,t\rangle} := \ulcorner\!\!\ulcorner\ \langle i,j\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle i, j+t\rangle\ \urcorner\!\!\urcorner$.

Più specificamente per ogni $p\in\mathbb{P}$ si dice **traslazione verso est** di p passi la traslazione relativa allo spostamento $\langle p,0\rangle$. Similmente la traslazione relativa allo spostamento $\langle 0,p\rangle$ si dice **traslazione verso nord** di p passi, la traslazione relativa allo spostamento $\langle -p,0\rangle$ si dice **traslazione verso ovest** di p passi e la traslazione relativa allo spostamento $\langle 0,-p\rangle$ si dice **traslazione verso sud** di p passi.

Per completezza introduciamo anche, per ogni $p \in \mathbb{Z}$: la **traslazione verso NE** di p passi: $\mathit{Trsl}_{p,p}$; la **traslazione verso NW** di p passi: $\mathit{Trsl}_{-p,p}$; la **traslazione verso SW** di p passi: $\mathit{Trsl}_{-p,-p}$; la **traslazione verso SE** di p passi: $\mathit{Trsl}_{p,-p}$.

B21 f.04 Dalle definizioni e da raffigurazioni come la seguente

si dimostrano facilmente i seguenti fatti.

(1) Prop.: Ogni traslazione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è una permutazione di tale piano ∎

(2) Prop.: La traslazione inversa della $\mathit{Trsl}_{\mathsf{s}}$ è $\mathit{Trsl}_{-\mathsf{s}}$ ∎

(3) Prop.: La traslazione corrispondente al vettore-ZZ nullo è l'identità di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $\mathit{Trsl}_{\mathsf{0}_2} = \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ∎

(4) Prop.: La composizione delle due traslazioni corrispondenti ai due vettori-ZZ s e t è la traslazione corrispondente alla somma dei due vettori: $\mathit{Trsl}_{\mathsf{s}} \circ_{lr} \mathit{Trsl}_{\mathsf{t}} = \mathit{Trsl}_{\mathsf{s}+\mathsf{t}}$ ∎

(5) Prop.: Tutte le traslazioni commutano, cioè $\forall \mathsf{s}, \mathsf{t} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ \mathit{Trsl}_{\mathsf{s}} \circ_{lr} \mathit{Trsl}_{\mathsf{t}} = \mathit{Trsl}_{\mathsf{t}} \circ_{lr} \mathit{Trsl}_{\mathsf{s}}$ ∎

(6) Prop.: Ogni traslazione del piano si può ottenere dalla composizione di una traslazione orizzontale con una verticale; più precisamente, se si considera il vettore-ZZ $\mathsf{s} = s_x\mathsf{e}_x + s_y\mathsf{e}_y$, si ha

$$\mathit{Trsl}_{\mathsf{s}} = \mathit{Trsl}_{s_x\mathsf{e}_x} \circ_{lr} \mathit{Trsl}_{s_y\mathsf{e}_y} = \mathit{Trsl}_{s_y\mathsf{e}_y} \circ_{lr} \mathit{Trsl}_{s_x\mathsf{e}_x} \ ∎$$

(7) Prop.: Una traslazione qualsiasi si può ottenere applicando una traslazione orizzontale seguita da una verticale o viceversa:

$$\mathit{Trsl}_{\langle s,t\rangle} = \mathit{Trsl}_{\langle s,0\rangle} \circ \mathit{Trsl}_{\langle 0,t\rangle} = \mathit{Trsl}_{\langle 0,t\rangle} \circ \mathit{Trsl}_{\langle s,0\rangle} \ ∎$$

Più compiutamente in termini algebrici possiamo affermare che le traslazioni costituiscono un gruppo commutativo isomorfo al gruppo additivo $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, -, \mathsf{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \rangle$ e che due generatori di questo gruppo sono $\mathit{Trsl}_{\mathsf{e}_x}$ e $\mathit{Trsl}_{\mathsf{e}_y}$.

B21 f.05 Le trasformazioni $\mathit{Trsl}_{\langle s,t\rangle}$, come le riflessioni, le rotazioni e le trasformazioni lineari che introdurremo in B22, si possono utilmente considerare operatori che applicati al simbolo esprimente un sottoinsieme $S \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ forniscono il sottoinsieme trasformato:

$$\mathit{Trsl}_{\langle s,t\rangle}(S) \ = \ S, \mathit{Trsl}_{\langle s,t\rangle} \ = \ \mathit{Trsl}_{\langle s,t\rangle}, S \ = \ \{\langle i,j\rangle \in S :| \ \langle i+s, j+t\rangle\} \ .$$

Si osserva che la somma di interi $\lceil\!\lceil\, i, h \in \mathbb{Z} \ \mapsto \ i+h \,\rceil\!\rceil$ si può assimilare alla traslazione di spostamento $\langle h, 0\rangle$ del punto $\langle i, 0\rangle$. Inoltre la differenza di interi $\lceil\!\lceil\, i, h \in \mathbb{Z} \ \mapsto \ i-h \,\rceil\!\rceil$ si può assimilare alla traslazione di spostamento $-\langle h, 0\rangle$ del punto $\langle i, 0\rangle$.

B21 f.06 Un vettore-ZZ applicato $\big\langle\langle i,j\rangle, \langle m,n\rangle\big\rangle$ si raffigura efficacemente con una freccia, oppure con un altro segno che suggerisce orientamento, che va dalla sua estremità iniziale $\langle i,j\rangle$ alla sua estremità finale $\langle m,n\rangle$. Esso si può pensare come l'azione consistente nello spostamento di un oggetto collocato in $\langle i,j\rangle$ in $\langle m,n\rangle$.

Due vettori-ZZ applicati $\big\langle\langle i,j\rangle, \langle m,n\rangle\big\rangle$ e $\big\langle\langle p,q\rangle, \langle r,s\rangle\big\rangle$ si dicono **equivalenti per traslazione**, e si scrive $\big\langle\langle i,j\rangle, \langle m,n\rangle\big\rangle \ \mathit{AE}_{\mathit{Trsl}} \ \big\langle\langle p,q\rangle, \langle r,s\rangle\big\rangle$, sse $\langle m,n\rangle - \langle i,j\rangle = \langle r,s\rangle - \langle p,q\rangle$, ossia sse $\langle m,n\rangle - \langle r,s\rangle = \langle i,j\rangle - \langle p,q\rangle$. Per esempio si ha $\big\langle\langle 2,5\rangle, \langle 4,8\rangle\big\rangle \ \mathit{AE}_{\mathit{Trsl}} \ \big\langle\langle -3,2\rangle, \langle -1,5\rangle\big\rangle$. Intuitivamente questo significa che spostando il primo vettore senza modificare la sua orientazione lo si può sovrapporre al secondo.

Chiaramente $\big\langle\langle i,j\rangle,\langle m,n\rangle\big\rangle$ $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$ $\big\langle\langle i,j\rangle+\langle a,b\rangle,\langle m,n\rangle+\langle a,b\rangle\big\rangle$ per ogni $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

La relazione $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$ è evidentemente riflessiva, simmetrica e transitiva. ossia è una equivalenza.

Un vettore-ZZ applicato avente come prima estremità $\langle 0,0\rangle$, si dice **vettore-ZZ applicato all'origine**.
Un tale $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle m,n\rangle\big\rangle$ si può identificare naturalmente con il vettore-ZZ (punto-ZZ) $\langle m,n\rangle$

Due diversi vettori applicati aventi la stessa estremità iniziale non possono essere equivalenti per traslazione e in particolare non possono trovarsi nella relazione $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$ due diversi vettori applicati nell'origine.

Più precisamente in ogni classe dell'equivalenza $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$ si trova uno e un solo vettore applicato all'origine: in generale nella classe della equivalenza $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$ contenente $\big\langle\langle i,j\rangle,\langle m,n\rangle\big\rangle$ si trova il vettore applicato nell'origine $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle m-i,n-j\rangle\big\rangle$ e nessun altro.

Dunque i vettori-ZZ applicati nell'origine sono associati biiettivamente alle classi di $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$ e ai vettori-ZZ; questa situazione si esprime dicendo che i vettori-ZZ applicati nell'origine costituiscono un insieme di rappresentati fedeli delle classi dell'equivalenza $\boldsymbol{AE_{Trsl}}$.

B21 f.07 Per ogni $\langle h,k\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la trasformazione $\boldsymbol{Trsl}_{\langle h,k\rangle}$ manda l'origine in $\langle h,k\rangle$ ed è l'unica traslazione che ha tale effetto. È dunque evidente la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e l'insieme delle sue traslazioni.

Come si è visto in B20, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ munito della somma è gruppo abeliano. L'insieme delle traslazioni munito di composizione tra trasformazioni è un gruppo (abeliano) isomorfo al precedente.

Le traslazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, e quindi gli elementi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, si possono interpretare come meccanismi che agiscono su oggetti posti nei diversi punti-ZZ per cambiare la loro posizione.
Per ogni $\mathfrak{w}\in\{\mathrm{H},\mathrm{V},\mathrm{R},\mathrm{NE},\mathrm{SE},\mathrm{B},\mathrm{K}\}$ tutte le traslazioni mandano rette-ZZ$\mathfrak{W}$ in rette-ZZ$\mathfrak{W}$: esse quindi mantengono le relazioni di allineamento-ZZ$\mathfrak{W}$e la relazione di parallelismo.

Esse mantengono anche le orientazioni delle semirette-ZZ e delle rette orientate-ZZ: in altri termini esse lasciano invariati i punti-ZZ all'infinito orientati.

B21 f.08 Ogni gruppo $\boldsymbol{G}=\langle G,*,\boldsymbol{^{-1}},\mathsf{Id}_G\rangle$ si può considerare un gruppo di trasformazioni che agiscono sullo stesso G. Ad ogni elemento g di G si associano le due permutazioni

$$\lceil\, x\in G \mapsto g*x \,\rceil \qquad \text{e} \qquad \lceil\, x\in G \mapsto x*g \,\rceil\ .$$

La prima viene chiamata traslazione da sinistra associata a g, la seconda traslazione da destra associata a g. Le due permutazioni coincidono sse il gruppo è abeliano. Il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è uno di questi gruppi.

B21 f.09 L'operazione binaria di prodotto scalare si può applicare anche ai vettori applicati-ZZ: essa conduce al valore ottenuto effettuando il prodotto scalare dei due vettori-ZZ ricondotti all'origine dei due dati.
In formula: $\overrightarrow{P,Q}\cdot\overrightarrow{S,T}\ :=\ (Q-P)\cdot(T-S)$.
Si osserva che i valori delle espressioni lineari-ZZ$\mathfrak{X}$ introdotti in b04 si possono esprimere mediante prodotto scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$.

B21 g. parallelismo e ortogonalità

B21 g.01 Consideriamo un vettore primitivo-ZZI $\langle p,q\rangle$ e due rette-ZZ aventi la stessa orientazionw, R individuata dalla espressione $\langle h,k\rangle + \mathbb{Z}\,\langle p,q\rangle$ ed S individuata da $\langle m,n\rangle + \mathbb{Z}\,\langle p,q\rangle$.

Si danno due possibilità: aut il punto $\langle m,n\rangle$ appartiene alla R, aut non vi appartiene.
Si ha il primo caso sse $\langle h,k\rangle$ appartiene alla S, ossia sse le due rette coincidono.
Si ha il secondo caso sse le due rette non hanno punti in comune: infatti se vi fosse un punto-ZZ comune $\langle a,b\rangle$ esisterebbero due interi c e d tali che $\langle a,b\rangle = \langle h,k\rangle + c\langle p,q\rangle = \langle m,n\rangle + d\langle p,q\rangle$, cioè sarebbe $\langle m,n\rangle = \langle h,k\rangle + (c-d)\langle p,q\rangle$ contro la non appartenenza di $\langle m,n\rangle$ ad R.
In questo caso si dice che si hanno due **rette-ZZ parallele**.

Il parallelismo delle rette R ed S si esprime scrivendo $\mathsf{R}/\!/\mathsf{S}$, scrittura che non esclude che le due rette coincidano. Queste rette si dicono avere in comune l'inclinazione $\langle p,q\rangle$.

La relazione di parallelismo tra rette-ZZ è chiaramente riflessiva (l'abbiamo richiesto esplicitamente), simmetrica e transitiva, ossia è una relazione di equivalenza.

Nel caso particolare $\langle p,q\rangle = \langle 1,0\rangle = \mathsf{e}_x$, si hanno le rette-ZZH; quando invece $\langle p,q\rangle = \langle 0,1\rangle = \mathsf{e}_y$, si hanno le rette-ZZV; quando $\langle p,q\rangle = \langle 1,1\rangle = \mathsf{e}_x + \mathsf{e}_y$, si hanno le rette-ZZD1; quando $\langle p,q\rangle = \langle -1,1\rangle = \mathsf{e}_x - \mathsf{e}_y$, si hanno le rette-ZZD2.

Consideriamo due rette-ZZ caretterizzate da due equazioni aventi le forme

$$a\,x + b\,y + c \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad a\,x + b\,y + c' \;=\; 0 \qquad \text{con} \quad a^2 + b^2 > 0 \quad \text{e} \quad c \neq c' \;.$$

Esse sono parallele, in quanto nessuna coppia $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ può soddisfarle entrambe le equazioni, ovvero in quanto esse non hanno alcun punto in comune.

B21 g.02 Definiamo ora per ampliamenti successivi la **relazione di ortogonalità** tra rette-ZZ.

Innanzi tutto chiediamo che le rette corrispondenti all'asse Ox e all'asse Oy siano ortogonali.
Consideriamo poi due rette-ZZ $\mathsf{R} = \langle a,b\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ ed $\mathsf{S} = \langle c,d\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle r,s\rangle$, dove $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, mentre $\langle p,q\rangle$ e $\langle r,s\rangle$ sono vettori-ZZI (primitivi).
Esse sono dette **rette-ZZ ortogonali** sse $p\,r = -q\,s$, cioè sse $p\,r + q\,s = 0$; questa situazione si esprime enunciando $\mathsf{R} \perp \mathsf{S}$.

L'ortogonalità è una relazione simmetrica: infatti se si scambiano i parametri che caratterizzano le due rette ortogonali R e S l'equazione $p\,r + q\,s = 0$ non cambia.

Si osserva anche che una retta non può essere ortogonale a se stessa; in quanto dovrebbe essere $p^2 + q^2 = 0$: in effetti per ogni $\mathsf{v} = v_1\mathsf{e}_1 + v_2\mathsf{e}_2 \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, si ha

$$\mathsf{v} \perp \mathsf{v} \iff {v_1}^2 + {v_2}^2 = 0 \iff \mathsf{v} = \mathsf{0} \;.$$

Quindi l'ortogonalità è una relazione antiriflessiva.

Si osserva anche che $\forall \mathsf{v} \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \mathsf{v} \perp \mathsf{0}_2$.

Se due rette $\mathsf{R} = \langle a,b\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ ed $\mathsf{S} = \langle c,d\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle r,s\rangle$ sono ortogonali lo sono anche due rette R' e S' che sono parallele, risp., alla prima e alla seconda; infatti a esse si possono dare le forme $\mathsf{R}' = \langle a',b'\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ e $\mathsf{S}' = \langle c',d'\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle r,s\rangle$ per le quali rimane valida l'uguaglianza caratteristica dell'ortogonalità $p\,r + q\,s = 0$.

L'ortogonalità è anche antitransitiva. Se $\mathsf{R} \perp \mathsf{S}$ ed $\mathsf{S} \perp \mathsf{T}$ si può concludere solo che $\mathsf{R}/\!/\mathsf{T}$. Infatti con le notazioni precedenti e ponendo $\mathsf{T} = \langle e,f\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle t,u\rangle$ con $\langle t,u\rangle$ primitivo si deve avere $pr+qs = 0 = rt+su$ e quindi $t = p$ ed $u = q$ oppure $t = -p$ ed $u = -q$, cioè comunque $\mathsf{R}/\!/\mathsf{T}$.

B21 g.03 Le traslazioni del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ trasformano le rette-ZZ in rette-ZZ; più precisamente la traslazione corrispondente allo spostamento $\mathsf{s}=\langle s_1,s_2\rangle$ trasforma la retta-ZZ della forma $\langle a,b\rangle+\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ nella retta esprimibile come $\langle a+s_1,b+s_2\rangle+\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$. La nuova retta è parallela a quella di partenza. Si può quindi affermare

$$\forall \mathsf{R}\in\mathsf{RtlinZZ}\ ,\ \mathsf{s}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ :\ \ \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{s}}(\mathsf{R})/\!/\mathsf{R}\ .$$

Dunque le traslazioni mantengono l'inclinazione di ciascuna retta-ZZ e la relazione di parallelismo tra rette-ZZ.

Evidentemente l'ortogonalità e il parallelismo sono invarianti per traslazione: in formule

$$\forall \mathsf{R},\mathsf{S}\in\mathsf{RtlinZZ}\ ,\ \mathsf{v}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ :\ \ \begin{array}{l}\lceil\!\lceil\,\mathsf{R}\perp\mathsf{S}\Longrightarrow \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}(\mathsf{R})\perp\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}(\mathsf{S})\,\rceil\!\rceil\\ \lceil\!\lceil\,\mathsf{R}/\!/\mathsf{S}\Longrightarrow \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}(\mathsf{R})/\!/\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{v}}(\mathsf{S})\,\rceil\!\rceil\end{array}\ ,\ .$$

La traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle s_1,s_2\rangle}$ lascia invariate tutte e sole le rette della forma $\langle h,k\rangle+\mathbb{Z}\cdot\mathbf{Orient}(s_1,s_2)$.

B21 g.04 Il sottogruppo generato da $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle h,k\rangle}$ è costituito dalle traslazioni $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle ih,ik\rangle}$ per $i\in\mathbb{Z}$, ed è ragionevole denotarlo con $\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathbb{Z}\langle h,k\rangle}$.
Esso è in biiezione con il sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\{i\in\mathbb{Z}:|\ \langle i\,h,i\,k\rangle\}$.

Per ogni intero c il sottogruppo $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle c\,h,c\,k\rangle}$ è contenuto nel sottogruppo $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle h,k\rangle}$. Tra i sottogruppi di traslazioni della forma $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle h\mathbb{Z},k\mathbb{Z}\rangle}$ Interessano quindi soprattutto i sottogruppi di traslazioni della forma $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle a,b\rangle}$ con $a\perp b$; una tale traslazione viene detta **traslazione-ZZ primitiva**.

Un sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che è l'orbita di una traslazione-ZZ primitiva che contiene l'origine è detto **retta-ZZ per l'origine** ed è caratterizzato dall'equazione $xb=ya$, ovvero dalla equazione $xb-ya=0$, dove x e y variano su $\mathbb{Z}$.
Esso si può identificare con la notazione $\mathsf{RtlinZZ}[xb-ya]$ o con la equivalente $\mathsf{RtlinZZ}_{[xb=ya]}$.

I laterali del sottogruppo $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle h\,\mathbb{Z},k\,\mathbb{Z}\rangle}$ con h e k coprimi sono esprimibili come gli insiemi di traslazioni individuati dalle coppie di interi $\langle r,s\rangle$ $\left\{i\in\mathbb{Z}:|\ \boldsymbol{Trsl}_{\,\langle r+i\,h,s+i\,k\rangle}\right\}$.

Consideriamo a e b coprimi e il laterale $\{i\in\mathbb{Z}:|\ \boldsymbol{Trsl}_{\,\langle r+ia,s+ib\rangle}\}$ ottenibile sottoponendo i punti di $\mathsf{RtlinZZ}[xb-ya]$ alla traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle r,s\rangle}$: questo laterale quindi è il sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,\rceil\!\rceil\,(x+r)b-(y+s)a=0\}\ \text{ ovvero }\ \{\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,\rceil\!\rceil\,xb-ya+(rb-ya)=0\}\ .$$

Un tale sottoinsieme si dice **retta-ZZ** e lo denotiamo con $\mathsf{RtlinZZ}[(x+r)b-(y+s)a]$, ovvero, introdotto $c:=rb-sa$, con $\mathsf{RtlinZZ}[xb-ya+c]$.

Ciascuna delle rette $\mathsf{RtlinZZ}(xb-ya+c)$ è trasformata in se stessa da $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle a,b\rangle}$ ovvero è invariante per le traslazioni di $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle a\,\mathbb{Z},b\,\mathbb{Z}\rangle}$.
La classe delle rette $\mathsf{RtlinZZ}[xb-ya+c]$ al variare di $c\in\mathbb{Z}$ si dice **inclinazione** di tali rette ed è individuata dalla coppia $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; la stessa classe è individuata dal vettore opposto $\langle -a,-b\rangle$.

B21 g.05 Dati due punti diversi $\langle p,q\rangle,\langle r,s\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ esiste una sola retta-ZZ che contiene entrambi. Per individuarla si considerano le differenze $r-p$ e $s-q$, il loro MCD$M:=\mathrm{MCD}(r-p,s-q)$ e i due interi coprimi $a:=(r-p)/M$ e $b:=(s-q)/M$: la retta-ZZ richiesta è dunque determinata da

$$\{i\in\mathbb{Z}:|\ \langle p+i\,a,q+i\,b\rangle\}\ ,$$

ovvero è rappresentata da $\mathsf{RtlinZZ}[x\,b-y\,a+q\,a-p\,b]$.

Una retta-ZZ si può individuare univocamente anche richiedendo che passi per un punto $\langle i,j\rangle$ e che sia invariante per una traslazione-ZZ $\boldsymbol{Trsl}_{\,\langle h,k\rangle}$ non necessariamente primitiva.
Da una espressione di una retta-ZZ $\mathsf{L}=\{n\in\mathbb{Z}:|\ \langle i+na,j+nb\rangle\}$, si ricavano due successioni bilatere

$$\mathsf{L}_1 = \big\langle n \in \mathbb{Z} :|\ \langle i+na, j+nb\rangle \big\rangle \quad \text{e} \quad \mathsf{L}_2 = \big\langle n \in \mathbb{Z} :|\ \langle i-na, j-nb\rangle \big\rangle\ .$$

Gli ordinamenti dei punti di L che ne derivano sono opposti; tutte le successioni bilatere ottenute da L_1 per traslazione presentano lo stesso ordinamento di L_1 e la proprietà omologa vale per L_2.
Questi due ordinamenti costituiscono un arricchimento dell'insieme L e distinguono le **rette-ZZ orientate**.

La relazione che sussiste tra rette-ZZ orientate ottenibili l'una dall'altra per traslazione è evidentemente un'equivalenza. Una classe di rette-ZZ orientate relativa a tale equivalenza si dice **orientazione-ZZ**. Si dice anche che rette-ZZ orientate ottenibili per traslazione hanno in comune un **punto all'infinito orientato-ZZ**.

Evidentemente l'orientazione delle rette orientate-ZZ è un arricchimento dell'inclinazione delle rette-ZZ e a ogni punto all'infinito-ZZ corrispondono due punti orientati all'infinito-ZZ. Al punto all'infinito-ZZ individuato da $\langle a, b\rangle$ (o equivalentemente da $\langle -a, -b\rangle$) corrispondono due punti all'infinito orientati-ZZ; essi possono essere individuati, risp., da lla coppia $\langle a, b\rangle$ e dalla $\langle -a, -b\rangle$.

B21 g.06 Tra i punti che giacciono su una retta-ZZ orientata si definisce naturalmente un ordine totale. Si consideri la retta orientata-ZZ $\overrightarrow{\mathsf{L}} = \langle h, k\rangle + \mathbb{Z}\langle p, q\rangle$ e due suoi punti diversi $P = \big\langle x_P, y_P\big\rangle$ e $Q = \big\langle x_Q, y_Q\big\rangle$, si scrive

$$P < Q \quad \text{sse} \quad P = \langle h, k\rangle + j_P\langle p, q\rangle \ \text{ e } \ Q = \langle h, k\rangle + j_Q\langle p, q\rangle \ \text{ con } j_P < j_Q\ .$$

Dati tre punti allineati diversi può essere utile sapere quale di essi si colloca tra gli altri due.
Dato sulla retta precedente anche un terzo punto $R = \big\langle x_R, y_r\big\rangle \in \overrightarrow{\mathsf{L}}$ diverso da P e Q, si può verificare una delle 6 relazioni ternarie:

$$P<Q<R\ ,\ P<R<Q\ ,\ Q<P<R\ ,\ Q<R<P\ ,\ R<P<Q\ ,\ R<Q<P\ ,$$

chiamate relazioni di **interposizione**.

Data una retta-ZZ e due suoi punti P e Q si dice **segmento-ZZ** avente come estremità P e Q l'insieme dei punti della retta-ZZ passante per P e Q e compresi tra P e Q, estremi compresi.

Data una retta orientata-ZZ e una coppia di suoi punti $\langle P, Q\rangle$, si dice **segmento orientato-ZZ** avente come estremità iniziale P e come estremità finale Q la sequenza dei punti del segmento ordinato-ZZ da P a Q, estremi compresi.

I segmenti orientati-ZZ sono in biiezione naturale con le coppie di punti-ZZ, ossia con gli elementi del quadrato cartesiano di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, ovvero con le quaterne di interi, cioè con gli elementi della quarta potenza cartesiana $\mathbb{Z}^{\times 4}$.

L'azione di una traslazione-ZZ della forma $\boldsymbol{Trsl}_{\langle t,u\rangle}$ sopra un punto-ZZ $\langle i, j\rangle$ si può chiamare **spostamento** e viene individuata dal segmento orietato $\overrightarrow{\langle i, j\rangle, \langle i+t, j+u\rangle}$.

B21 g.07 Le estensioni cartesiane e booleane delle traslazioni sono definite come trasformazioni che agiscono su varie entità geometriche collocate nel piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: vettori applicati, segmenti orientati, segmenti, rette, rette orientate, semirette, angoli, cammini, percorsi, circuiti, poligoni, ...
Nel seguito, con una semplificazione molto usuale, identificheremo queste trasformazioni con le traslazioni dei punti-ZZ e per esse useremo le stesse notazioni.

Si hanno quindi formule come le seguenti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Trsl}_{\,\mathbf{t}}(\overrightarrow{P,Q}) \ &= \ \overrightarrow{P+\mathbf{t}, Q+\mathbf{t}} \quad , \quad \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathbf{t}}\big\langle i\in\mathbb{Z} :|\ \langle a,b\rangle + i\,\langle p,q\rangle\big\rangle \ = \big\langle i\in\mathbb{Z} :|\ \langle a,b\rangle + \mathbf{t} + i\,\langle p,q\rangle\big\rangle \quad ,\\ &\qquad \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathbf{t}}\{i\in\mathbb{N} :|\ \langle a,b\rangle + i\,\langle p,q\rangle\} \ = \ \{i\in\mathbb{N} :|\ \langle a,b\rangle + \mathbf{t} + i\,\langle p,q\rangle\} \quad .\end{aligned}$$

Mediante le traslazioni si può estendere la relazione di parallelismo alle rette orientate, ai segmenti, ai segmenti orientati e alle semirette.

Due rette orientate tali che una di esse e l'opposta dell'altra sono parallele si dicono **rette antiparallele**. Due segmenti orientati tali che uno di essi sia parallelo all'opposto dell'altro si dicono **segmenti antiparalleli**.

B21 g.08 Introduciamo una composizione che a due vettori-ZZ associa un valore numerico intero. Questa è la prima versione di una composizione che si introdurrà anche negli ambienti più estesi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nei quali si collocano tutti gli altri tipi di vettori che incontreremo e che ha grande importanza per il suo significato geometrico e per la sua maneggevolezza.

Si dice **prodotto scalare** dei vettori-ZZ $\mathbf{v}=\langle v_1, v_2\rangle$ e $\mathbf{w}=\langle w_1, w_2\rangle$ il numero (intero)

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \;:=\; v_1\,w_1 + v_2\,w_2\ . \tag{1}$$

Il prodotto scalare su $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è dunque una funzione del genere $\lceil\, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}\,\rceil$.

Cerchiamone il significato cominciando con l'osservare che

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1 \quad , \quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ :\ \mathbf{0}_2\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{0}_2 = 0\ . \tag{2}$$

La prima delle precedenti uguaglianze si generalizza constatando che il prodotto scalare di un vettore nonnullo per se stesso $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = {v_1}^2+{v_2}^2$ è un intero positivo. Questo intero l'abbiamo chiamato **quadranza** di $\mathbf{v}$ [c05]; esso viene detto anche norma al quadrato del vettore $\mathbf{v}$ e si denota con $\mathsf{Qdr}(\mathbf{v})$ o con $||\mathbf{v}||^2$.

Si osserva subito che la quadranza ha un valore tanto maggiore quanto più è "estesa" la raffigurazione del vettore, ovvero quanto più il punto-ZZ corrispondente è "distante" dall'origine.

Si osserva inoltre che $(-\mathbf{v})\cdot(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, cioè che l'opposto di un vettore ha la sua stessa quadranza, mentre $(-\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot(-\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.

B21 g.09 La definizione dice che il prodotto scalare di vettori è una composizione binaria simmetrica:

$$\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ :\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}\ . \tag{1}$$

Dalla definizione segue anche la relazione

$$\forall\mathbf{v}_a,\mathbf{v}_b,\mathbf{w}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ ,\ \alpha_a,\alpha_b\in\mathbb{Z}\ :\ (\alpha_a\,\mathbf{v}_a+\alpha_b\,\mathbf{v}_b)\cdot\mathbf{w}\ =$$

$$(\alpha_a v_{ax}+\alpha_b v_{bx})w_x\ +\ (\alpha_a v_{ay}+\alpha_b v_{by})w_y = \alpha_a(v_{ax}\,w_x+v_{ay}\,w_y)\ +\ \alpha_b(v_{bx}\,w_x\ +\ v_{by}\,w_y)\ = \tag{2}$$

$$\alpha_a\,\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{w}\ +\ \alpha_b\,\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{w}\ .$$

Questa proprietà viene detta **linearità del prodotto scalare** nel suo primo argomento.
Per la simmetria nei due operandi di questa composizione si ha anche la linearità del prodotto scalare nel suo secondo argomento

$$\forall\mathbf{v},\mathbf{w}_a,\mathbf{w}_b\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ ,\ \beta_a,\beta_b\in\mathbb{Z}\ :\ \mathbf{v}\cdot(\beta_a\,\mathbf{w}_a+\beta_b\mathbf{w}_b)\ =\ \beta_a\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_a+\beta_b\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_b\ . \tag{3}$$

A questo punto si conviene di dire che il prodotto scalare è una **funzione bivariata bilineare**.

B21 g.10 Diciamo **quadranza** tra due punti-ZZ $P=\langle x_P, y_P\rangle$ e $Q=\langle x_Q, y_Q\rangle$ l'intero naturale nonnegativo

$$\mathsf{Qdr}(P,Q)\ :=\ \mathsf{Qdr}(\overrightarrow{PQ})\ :=\ (x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2, \tag{1}$$

cioè la quadranza del vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$.
Per esempio $\mathsf{Qdr}(\langle 2,3\rangle,\langle 7,4\rangle)=26$ e $\mathsf{Qdr}(\langle 1,-1\rangle,\langle 3,-3\rangle)=8$.

Evidentemente la quadranza ha il pregio di essere fornita da un numero naturale che si ottiene facilmente dalle coordinate dei due argomenti.

La quadranza tra due punti P e Q si può esprimere anche come quadranza del vettore differenza tra i due punti, cioè come prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$\mathsf{Qdr}(P,Q) = \overrightarrow{Q-P}) \cdot \overrightarrow{Q-P} = ||\overrightarrow{Q-P}||^2 \ . \tag{2}$$

Si può attribuire una quadranza anche a ogni segmento-ZZ definendola come quadranza tra i suoi estremi.
In particolare abbiamo attribuito una quadranza a ogni vettore $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definendola come quadranza tra v e l'origine, ovvero ponendo

$$\mathsf{Qdr}(\mathsf{v}) \ := \ ||\mathsf{v}||^2 \ = \ {v_1}^2 + {v_2}^2 \ . \tag{3}$$

Si osserva che ogni vettore ha la stessa quadranza del suo opposto e che i versori canonici e i loro opposti sono gli unici vettori-ZZ ad avere quadranza pari ad 1.

Inoltre osserviamo esplicitamente che il prodotto scalare di due vettori-ZZ applicati à invariante per le traslazioni. Conseguentemente è invariante per le traslazioni anche la quadranza di due vettori.a-ZZ.

B21 g.11 Evidentemente la quadranza è una funzione simmetrica nei suoi due argomento, cioè

$$\forall P, Q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ \mathsf{Qdr}(Q,P) = \mathsf{Qdr}(P,Q) \ . \tag{1}$$

Inoltre

$$\forall P, Q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ \ \mathsf{Qdr}(P,Q) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathsf{Qdr}(P,Q) = 0 \iff P = Q \ . \tag{2}$$

Per questo si dice che la quadranza è una funzione bivariata in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ simmetrica e definita positiva.

In particolare la quadranza di due punti-ZZ che hanno la stessa ascissa è data dal quadrato del modulo della differenza delle due ordinate, e, per dualità-xy, la quadranza di due punti-ZZ che hanno la stessa ordinata è data dal quadrato del modulo della differenza delle due ascisse.

La dilatazione di fattore d applicata a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ comporta la moltiplicazione per un fattore d^2 di tutte le quadranze di punti-ZZ ottenuti:

$$\mathsf{Qdr}(d\,\mathsf{v}) \ = \ d^2\,\mathsf{Qdr}(\mathsf{v}) \ . \tag{3}$$

In seguito constateremo che la quadranza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è invariante per le riflessioni rispetto a rette-ZZK e per le rotazioni di 90° e dei suoi multipli.

Aggiungiamo una considerazione visiva: se due punti-ZZ presentano una quadranza più elevata appaiono come più lontani. Questo per le applicazioni a situazioni materiali induce a cercare di introdurre delle distanze tra punti-ZZ che crescano quando la quadranza aumenta.

B21 g.12 La quadranza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è dunque una funzione del genere $\lceil\!\lceil \ (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \longmapsto \mathbb{N} \ \rceil\!\rceil$.
Si osserva che non tutti gli interi naturali sono eprimibili come somme di interi al quadrato e quindi il codominio della quadranza è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$. La successione crescente dei valori assunti della quadranza inizia con

$$0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,$$
$$52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, ...$$

B21 g.13 Ci proponiamo ora di chiarire le mutue influenze delle traslazioni e del calcolo del prodotto scalare tra due vettori applicati-ZZ.

Dati quattro punti-ZZ P_i, P_f, Q_i e Q_f, sono individuati i due vettori applicati $\mathsf{P} := \overrightarrow{P_i P_f}$ e $\mathsf{Q} := \overrightarrow{Q_1 Q_f}$ e i corrispondenti vettori-ZZ differenza $\overrightarrow{P_f - P_i}$ e $\overrightarrow{Q_f - Q_i}$.

Come prodotto scalare dei due vettori applicati definiamo $\mathsf{P} \cdot \mathsf{Q} := (\overrightarrow{P_f - P_i}) \cdot (\overrightarrow{Q_f - Q_i})$.
In altri termini si traslano i due vettori applicati da comporre in modo da portare le loro estremità iniziali in $\mathbf{0}_2$ e quindi si calcola il prodotto scalare dei vettori-ZZ così ottenuti.

Dalla definizione discende subito l'invarianza del prodotto scalare di vettori applicati per le traslazioni-ZZ:

$$\forall \mathsf{t} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ \ \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{t}}(\overrightarrow{P_i\, P_f}) \cdot \boldsymbol{Trsl}_{\,\mathsf{t}}(\overrightarrow{Q_i\, Q_f}) \ = \ \overrightarrow{P_i\, P_f} \cdot \overrightarrow{Q_i\, Q_f} \ = \ (\overrightarrow{P_f - P_i}) \cdot (\overrightarrow{Q_f - Q_i}) \ = \ \mathsf{P} \cdot \mathsf{Q} \ .$$

A questo punto si possono definire **vettori applicati ortogonali** due vettori applicati il cui prodotto scalare è nullo.
Si possono invece definire vettori applicati paralleli due vettori applicati tali che le rette orientate che li contengono sono parallele.
Due rette orientate si dicono **rette orientate antiparallele** sse l'opposta dell'una è parallela all'altra.
Similmente si dicono **vettori applicati-ZZ antiparalleli** due vettori applicati le cui rette orientate sono antiparallele. Abbiamo quindi la relazione di **antiparallelismo tra vettori.a-ZZ**; chiaramente si tratta di una relazione antiriflessiva, simmetrica e antitransitiva.

Inoltre si osserva che due rette-ZZ sono ortogonali sse sono ortogonali due arbitrari vettori applicati nonnulli, il primo ricavato da una delle due rette, il secondo dall'altra.

B21 h. griglia combinatoria e sue coordinate

B21 h.01 Definiamo formalmente **griglia combinatoria** o **griglia-ZZ** il sistema

$$\textsf{GridZZ} := \big\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \textsf{CPAH}, \textsf{CPAV}, \textsf{CZZ}\big\rangle \ , \ \text{dove:}$$

$\textsf{CPAH} := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} :| \ \big\langle\langle x,y\rangle, \langle x,y+1\rangle\big\rangle$ è l'insieme dei duetti di punti-ZZ adiacenti orizzontali, detto anche insieme dei lati-ZZ1H;

$\textsf{CPAV} := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} :| \ \big\langle\langle x,y\rangle, \langle x+1,y\rangle\big\rangle$ è l'insieme dei duetti di punti-ZZ adiacenti verticali, detto anche insieme dei lati-ZZ1V;

$\textsf{CZZ} := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} :| \ \big\langle\langle x,y\rangle, \langle x+1,y+1\rangle\big\rangle$ è l'**insieme delle caselle-ZZ**.

Collettivamente i lati orizzontali-ZZ1 e verticali-ZZ1 li chiamiamo lati-ZZ1R della griglia-ZZ.

Le componenti della griglia combinatoria si possono esprimere mediante coordinate in altri modi; si distinguono quindi diverse **coordinatizzazioni delle griglia-ZZ**.

Si individuano facilmente la corrispondenza biunivoca tra i lati-ZZ1R e i loro punti medi del modello materiale del piano-ZZ.

Inoltre ogni casella-ZZ $\big\langle\langle x,y\rangle, \langle x+1,y+1\rangle\big\rangle$ si può individuare anche con il quartetto

$$\big\langle\langle x,y\rangle, \langle x,y+1\rangle, \langle x+1,y\rangle, \langle x+1,y+1\rangle\big\rangle$$

e si può porre in evidente corrispondenza biunivoca con il punto centrale del quadratino corrispondente nel modello materiale del piano-ZZ.

È quindi ragionevole caratterizzare i lati-ZZ orizzontali con le coppie di coordinate $\langle i+1/2, j\rangle \in (\mathbb{Z}+1/2)\times\mathbb{Z}$, i lati verticali con le coppie $\langle i, j+1/2\rangle \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}+1/2)$, e le caselle con le coppie $\langle i+1/2, j+1/2\rangle \in (\mathbb{Z}+1/2)\times(\mathbb{Z}+1/2)$.

Si individua quindi una evidente biiezione tra la griglia combinatoria e il quadrato cartesiano dell'insieme dei numeri semiinteri $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$.

B21 h.02 Raddoppiando tutte le coordinate della precedente coordinatizzazione se ne ottiene una seconda (ovviamente equivalente).
Con questa manovra i vertici della griglia sono caratterizzati da coppie della forma $\langle 2i, 2j\rangle$, i lati orizzontali dalle dalle $\langle 2i+1, 2j\rangle$, i lati verticali dalle $\langle 2i, 2j+1\rangle$ e le caselle $\langle 2i+1, 2j+1\rangle$.

B21 h.03 Utilizzando la coordinatizzazione mediante semiinteri, esaminiamo le tre traslazioni di $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$, risp., di passo $\langle 0,1/2\rangle$, di passo $\langle 1/2,0\rangle$ e di passo $\langle 1/2,1/2\rangle$ considerandole permutazioni della griglia combinatoria.

La trasformazione $\boldsymbol{Trsl}_{\langle 1/2,1/2\rangle}$ scambia i punti-ZZ con le caselle-ZZ e i lati verticali con i lati orizzontali. Essa costituisce un caso particolare di una importante dualità che si riscontra tra i grafi planari, finiti o infiniti [D31] consistente nel rimpiazzare una maglia con un nodo nuovo e collegando con un lato due nodi nuovi sse derivano da maglie aventi un lato in comune.

Le altre due trasformazioni sono un po' meno evidenti. La $\boldsymbol{Trsl}_{\langle 1/2,0\rangle}$ scambia i punti-ZZ con i lati orizzontali e le caselle con i lati verticali. La $\boldsymbol{Trsl}_{\langle 0,1/2\rangle}$ a sua volta scambia i punti-ZZ con i lati verticali e le caselle con i lati orizzontali.

Chiaramente la traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\langle 1/2,1/2\rangle}$ si ottiene componendo queste ultime due. Con il linguaggio della teoria dei gruppi [B41] si ha che le tre trasformazioni e l'identità costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo delle 4 coppie $\langle \pm 1, \pm 1\rangle$.

È anche evidente che l'applicazione della $\boldsymbol{Trsl}_{\langle 1/2,1/2\rangle}$ scambia la raffigurazione geografica del piano-ZZ mediante punti con quella mediante caselle.

B21 h.04 Le precedenti trasformazioni, pur sostanzialmente semplici, modificano le configurazioni costruite sulla griglia in modo non sempre visivamente evidente. La loro presa in considerazione permette di mettere in collegamento quaterne di configurazioni della forma $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{1/2,0} := \mathcal{C}, Trls_{\langle 1/2,0\rangle}$, $\mathcal{C}_{0,1/2} := \mathcal{C}, Trls_{\langle 0,1/2\rangle}$ è $\mathcal{C}_{1/2,1/2} := \mathcal{C}, Trls_{\langle 1/2,1/2\rangle}$, come nell'esempio che segue.

In genere dalle conoscenze sulla prima configurazione, che denotiamo con $\mathcal{K}(0,0)$, si ricavano facilmente quelle sulle tre restanti, $\mathcal{K}_{1/2,0}$, $\mathcal{K}_{0,1/2}$ e $\mathcal{K}_{1/2,1/2}$.

Si può prospettare un complesso di costruzioni di conoscenze raffigurabile con il seguente schema:

Quando si posseggono le conoscenze $\mathcal{K}(0,0)$ e occorre acquisire conoscenze del tipo $\mathcal{K}_{a,b}$, invece che dedurle da $\mathcal{C}_{a,b}$ può essere molto meno oneroso ottenerle trasformando opportunamente le $\mathcal{K}$, cioè come conoscenze rappresentabili come $\mathcal{K}, \boldsymbol{Trsl}_{\langle a,b\rangle}$.

B21 i. cammini, connessioni e distanze per insiemi di caselle

B21 i.01 Torniamo a occuparci di insiemi di caselle di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, cioè di insiemi che chiamiamo anche **insiemi-ZZC**: ancora privilegiamo la raffigurazione geografica di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Bisogna tuttavia osservare che tutte le considerazioni che svolgeremo, grazie alla corrispondenza biunivoca tra punti-ZZ e caselle-ZZ, potrebbero ripetersi per gli insiemi di punti-ZZ.
In genere preferiamo parlare di insiemi-ZZC perché molte conclusioni saranno utilizzate per trattare le aree delle figure definibili in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e successivamente in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Tuttavia in taluni passi espositivi risulta più semplice parlare di nodi, entità che individuiamo con scritture come $\langle i,j\rangle$, e che possono intendersi sia come punti-ZZ $\langle i,j\rangle$ che come caselle-ZZ.

Evidentemente ogni casella di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si può caratterizzare con il suo vertice SW e si può identificare con il suo circuito delimitante (di lunghezza 4) positivo.

Più dettagliatamente la casella avente come vertice SW il punto-ZZ $P=\langle i,j\rangle$, cioè la casella avente come circuito delimitante positivo $\big\langle_{cy}\langle i,j\rangle,\langle i+1,j\rangle,\langle i+1,j+1\rangle\langle i,j+1\rangle\big\rangle$; la denotiamo con bx_P, oppure con $\mathsf{bx}_{i,j}$.

In particolare denotiamo concisamente con bx_O la casella di base di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, cioè $\mathsf{bx}_{0,0}=\mathsf{bx}_{\mathbf{0}}$, la casella che ha l'origine come vertice SW, ossia la casella corrispondente al circuito $\big\langle_{cy}\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 0,1\rangle\big\rangle = \big\langle_{cy}\mathbf{0}_2,\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_1+\mathsf{e}_2,\mathsf{e}_2\big\rangle$.

Ogni $\mathsf{bx}_{i,j}$ si può ottenere applicando a bx_0 la traslazione di spostamento $\overrightarrow{0P}$; quindi si può individuare anche con l'espressione $\mathsf{bx}_{i,j} = \boldsymbol{Trsl}_{\langle i,j\rangle}(\mathsf{bx}_O)$.

La scrittura $\mathsf{bx}_{\langle i,j\rangle}=\mathsf{bx}_P$ ha il pregio di rendere evidente la corrispondenza biunivoca tra punti-ZZ e caselle-ZZ e facilita la traduzione delle proprietà degli insiemi-ZZC in proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Dati due punti-ZZ P e Q, e quindi le due caselle $\mathfrak{C}_P$ e $\mathfrak{C}_Q$, chiaramente si possono collegare mediante una traslazione-ZZ: $\mathfrak{C}_Q = \boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{PQ}}(\mathfrak{C}_P) = \mathfrak{C}_P{,}\boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{PQ}} = \mathfrak{C}_P+\overrightarrow{Q-P}$.

B21 i.02 A questo punto si possono precisare concisamente le relazioni di adiacenza tra caselle del piano-ZZ.
Due caselle $\mathfrak{C}_{\langle i,j\rangle}$ e $\mathfrak{C}_{\langle i,j+1\rangle}$ si dicono **caselle adiacenti-ZZV**.
Due caselle $\mathfrak{C}_{\langle i,j\rangle}$ e $\mathfrak{C}_{\langle i+1,j\rangle}$ si dicono **caselle adiacenti-ZZH**
Se due caselle sono adiacenti-ZZV o adiacenti-ZZH si dicono **caselle adiacenti-ZZR**, ovvero adiacenti per movimenti minimi della torre del gioco degli scacchi.

Due caselle $\mathfrak{C}_{\langle i,j\rangle}$ e $\mathfrak{C}_{\langle i+1,j+1\rangle}$ si dicono **caselle adiacenti-ZZD1**.
Due caselle $\mathfrak{C}_{\langle i,j\rangle}$ e $\mathfrak{C}_{\langle i+1,j-1\rangle}$ si dicono **caselle adiacenti-ZZD2**
Se due caselle sono adiacenti-ZZD1 o-ZZD2 si dicono **caselle adiacenti-ZZB**, ovvero adiacenti per movimenti minimi dell'alfiere del gioco degli scacchi.

Due caselle del piano-ZZ si dicono invece **caselle adiacenti-ZZK**, o adiacenti per movimenti del re degli scacchi, sse sono adiacenti-ZZR oppure adiacenti-ZZB.

Evidentemente una data casella (• nella figura che segue) possiede otto caselle adiacenti-ZZK: di questi quattro sono adiacenti-ZZR (di queste le due segnate con una `H` sono adiacenti-ZZH e le due segnate con una `V` sono adiacenti-ZZV), mentre quattro sono adiacenti-ZZB (contraddistinti da una `B`.

In termini di coordinate intere, due diversi punti-ZZ $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ sono adiacenti-ZZK sse $|i - h| \leq 1$ e $|j - k| \leq 1$.

B21 i.03 Due punti-ZZ qualsiasi $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ si possono collegare con cammini-ZZR: supposto per esempio che $i < h$ e $j < k$ uno di tali cammini è $\big\langle\langle i, j\rangle, \langle i + 1, j\rangle, ..., \langle h, j\rangle, \langle h, j + 1\rangle, ..., \langle h, k\rangle\big\rangle$.
Vi sono invece coppie di punti-ZZ che non si possono collegare con un cammino-ZZB. Infatti si osserva che l'insieme di tutti i nodi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si bipartisce nell'insieme dei punti $\langle i, j\rangle$ per i quali $i + j$ è pari e nell'insieme dei punti $\langle i, j\rangle$ con $i + j$ dispari. I punti del primo tipo si dicono **punti-ZZ pari** e quelli del secondo, **punti-ZZ dispari**. Ogni passo-ZZR collega un punto pari con uno dispari, mentre ogni passo-ZZB collega aut due punti pari aut due dispari.
Mediante un cammino-ZZB si possono collegare due punti pari qualsiasi e due punti dispari qualsiasi, ma non un punto pari con un punto dispari, ossia, come si dice due punti-ZZ delle due diverse classi di parità.

Nelle considerazioni sopra nodi pari e dispari è utile servirsi di raffigurazioni mediante punti o caselle bicolori, mostrando i nodi di un tipo come caselle bianche e quelli dell'altro come caselle nere. La parità delle caselle viene evidenziata in questo modo nelle usuali scacchiere.

B21 i.04 Con il termine **figura-Bx** intendiamo un qualsiasi sottoinsieme di CZZ, l'insieme delle caselle-ZZ.
I diversi cammini-ZZK su caselle permettono di individuare proprietà di connessione delle figure-Bx.
Una figura-Bx F si dice:

- **figura-Bx connessa-ZZCR** sse due sue caselle qualsiasi si possono collegare con un cammino-ZZCR contenuto in F;
- **figura-Bx connessa-ZZCB** sse due sue caselle qualsiasi si possono collegare con un cammino-ZZCB entro F;
- **figura-Bx connessa-ZZCK** sse due sue caselle qualsiasi si possono collegare con un cammino-ZZCK entro F.

B21 i.05 Gli insiemi connessi-ZZCR si dicono anche **poliòmini** e gli insiemi connessi-ZZCK si dicono anche **pseudopoliòmini**.
Tra i poliòmini si considerano anche i cosiddetti **monòmini**, figure-Bx costituite da una sola casella; i poliòmini con due caselle sono detti **dòmini** e sono costituiti da due caselle adiacenti-ZZCR, delle quali, necessariamente, una è pari e l'altra dispari.
I poliòmini formati da tre caselle si dicono **tròmini**: sono tròmini le barre e i triangoli-ZZCathR di area 3. I poliòmini di area 4 si dicono invece **tetròmini**. I tetròmini costituiscono i pezzi del videogioco `Tetris (we)`.

Per gli pseudopoliòmini delle diverse aree si parla di **pseudodòmini**, **pseudotròmini**, **pseudotetròmini** e così via; per esempio:

I poliòmini, gli pseudo-poliòmini e altre loro generalizzazioni sono studiati in relazione a problemi di pavimentazione e di enumerazione.

B21 i.06 Evidentemente l'unione della collezione delle figure connesse-ZZCR con la collezione delle figure connesse-ZZCB è contenuta propriamente nella collezione delle figure connessi-ZZCK, mentre la loro intersezione si riduce all'insieme dei monòmini.
I dòmini sono connessi-ZZCR e nonconnessi-ZZCB.
Più in generale le barre, i ganci, i quadrati, i rettangoli, i vari triangoli rettangoli e i trapezi di Eulero sono figure connesse-ZZCR, mentre se non sono monòmini contengono sia caselle pari che dispari e non possono essere connesse-ZZCB.

Viceversa sono figure connesse-ZZCB e nonconnesse-ZZCR le scale che non siano monòmini e più in generale gli pseudopoliòmini costituiti solo da caselle pari o solo da caselle dispari (sulla scacchiera solo da caselle dello stesso colore).

Gli pseudotetròmini connessi-ZZCB sono

Tra i più semplici pseudopoliòmini che non sono né connessi-ZZCR, né connessi-ZZCB, ma solo connessi-ZZCK, ci sono l'ultimo pseudotròmino disegnato in j05 ed i seguenti pseudotetròmini:

B21 i.07 Interessanti parametri estensivi delle figure piane-ZZC sono i diametri-ZZC; essi sono collegati alla importante nozione generale di distanza.

Consideriamo un insieme-ZZC F e due sue caselle P e Q. Se F è connesso-ZZR si dice **distanza-ZZCR** in F tra P e Q la lunghezza del minimo cammino-ZZCR contenuto in F che collega P e Q; si dice poi **diametro-ZZCR** di F la massima delle distanze-ZZCR tra due sue caselle.

Parallelamente, se G è una figura connessa-ZZCB si dice **distanza-ZZCB** in G tra P e Q la lunghezza del minimo cammino-ZZCB che collega P e Q e si dice **diametro-ZZCB** di G la massima delle distanze-ZZCB tra due sue caselle.

Similmente, se G è una figura connessa-ZZCK si dice **distanza-ZZCK** in G tra P e Q la lunghezza del minimo cammino-ZZCK che collega P e Q, mentre si dice invece **diametro-ZZCK** di G la massima delle distanze-ZZCK tra due sue caselle.

Evidentemente i diametri di una figura-BxK danno un'idea di quanto essa "si estende" nel piano-ZZ. Per le tre funzioni di insieme definite in precedenza useremo, risp., le scritture $DiamR(\mathsf{F})$, $DiamB(\mathsf{F})$ e $DiamK(\mathsf{F})$.

B21 i.08 Non è difficile verificare le seguenti affermazioni riguardanti i diametri di alcuni degli insiemi introdotti in precedenza.
I segmenti-ZZC di lunghezza s hanno diametro-ZZCR e diametro-ZZCK uguali a $s-1$.
I rettangoli $s \times t$ hanno diametro-ZZCR uguale ad $r+s-2$ e diametro-ZZCK pari a $\max(r,s)-1$.
I triangoli rettangoli-ZZCCathR di larghezza s hanno come diametro-ZZCR $2s-2$ e come diametro-ZZCK $s-1$.
Accade poi che il diametro-ZZCR dei triangoli 2-allargati e dei trapezi di Eulero è dato dalla somma di larghezza e di altezza diminuite di 2.
Quindi il diametro-ZZCR del triangolo 2-allargato di larghezza s e quello del trapezio di Eulero di larghezza s coincidono con $s+\lceil s/2 \rceil - 2$.
Il diametro-ZZCR del triangolo rettangolo-ZZCCathB di larghezza s è invece pari a $s-1$.

Tutti i precedenti insiemi se non si riducono a un monòmino, non sono connessi-ZZCB. Questo accade per la maggior parte degli insiemi piani che si studiano e rende il diametro-ZZCB di scarso interesse.

B21 i.09 Un quadrato di lato dispari $2r+1$ può caratterizzarsi come l'insieme delle caselle che hanno distanza-ZZCK dal suo centro minore o uguale ad r.
Un **quadrato** typB di diametro dispari $2r+1$ viene definito come l'insieme delle caselle-ZZ che hanno distanza-ZZCR dal suo centro minore o uguale ad r.

Si dice **disco** typB di raggio $r = 0, 1, 2, ..$ e centro $\langle i, j\rangle$, l'insieme delle caselle che hanno distanza-ZZCB dal centro minore o uguale ad r. I dischi typB aventi, risp., raggio 0, 1 e 2 sono

B21 i.10 Data una arbitraria figura-Bx connessa-ZZCR F e una sua casella qualsiasi C, è possibile determinare la distanza-ZZCR tra C e una qualsiasi altra casella D. A questo fine si può organizzare un procedimento di assegnazione a ciascuna delle altre caselle D della F della distanza tra D e C che chiameremo **procedimento di progressiva invasione**.
Nella prima fase si assegna la distanza 1 a tutte le caselle adiacenti-ZZCR alla data C. In una successiva fase i all'inizio della quale sono state individuate tutte le caselle la cui distanza dalla C è minore o uguale ad $i-1$, scorrendo le caselle C' distanti $i-1$ dalla C si assegna i come distanza da C a tutte le caselle adiacenti-ZZCR alle C' alle quali non è stata ancora assegnata una distanza dalla C. Con tale processo, sicuramente finito, a tutte le caselle della F, figura connessa-ZZCR, viene assegnata la distanza richiesta.

Applicando con opportuni accorgimenti tali procedimenti di progressiva invasione a una figura-Bx qualsiasi si riesce a stabilire se esso è connesso-ZZCR e in caso contrario a determinarne le sue diverse componenti connesse-ZZCR. Inoltre si riesce a stabilire il diametro-ZZCR di ogni figura-Bx e di ogni componente connessa-ZZCR di una figura-Bx nonconnessa-ZZCR.
Se con il procedimento di progressiva invasione di una figura-Bx a partire da una sua casella non sono raggiungibili tutte le altre, mediante progressive invasioni che partono da caselle non raggiungibili si possono individuare tutte le diverse componenti connesse-ZZCR della figura.

Le considerazioni precedenti possono poi essere ripetute secondo lo stesso canovaccio per la connessione-ZZCB, le distanze-ZZCB e il diametro-ZZCB, nonché per la connessione-ZZCK, le distanze-ZZCK e il diametro-ZZCK.

B21 i.11 Quando si fa riferimento alla raffigurazione geografica mediante caselle un segmento-ZZH si dice anche **barra orizzontale**, un segmento-ZZV si dice anche **barra verticale**, un segmento-ZZD1 si dice anche **scala crescente**, o scala ascendente. un segmento-ZZD2 si dice anche **scala decrescente** o scala discendente.

Ricordiamo che oltre che peso di una figura, si usa anche il termine "area di una figura".

B21 i.12 Si osserva che gli insiemi di punti-ZZ si possono far corrispondere biunivocamente a insiemi di caselle. In effetti, come vedremo meglio in :t, si può raffigurare $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ modificando le figure con lo scambio dei punti-ZZ con le caselle-ZZ, cioè associando alle coppie $\langle i, j\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, non i punti del piano con le due coordinate intere, ma le caselle il cui centro presenta le due coordinate intere. In tal modo si ottiene quella che chiamiamo **raffigurazione mediante caselle di** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Con questa raffigurazione i segmenti-ZZR assumono l'aspetto delle barre del piano formate da quadratini allineati orizzontalmente o verticalmente.

Il cardinale di un S sottoinsieme finito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la raffigurazione mediante punti è stato chiamato suggestivamente **peso**, in quanto le relative immagini dei punti richiamano palline aventi tutte una certa massa.
Quando invece si utilizza la raffigurazione mediante caselle, un insieme di caselle abbastanza vicine richiama un frammento di un mosaico e il suo cardinale può chiamarsi significativamente **area**.
Evidentemente l'area di una barra orizzontale di larghezza s e l'area di una barra verticale di altezza s sono uguali ad s.

Con la raffigurazione a caselle, tra i più semplici sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, oltre alle barre orizzontali e verticali, vanno segnalati i rettangoli-ZZC, sottoinsiemi più generali dei precedenti, e i quadrati-ZZC, casi particolari dei rettangoli-ZZC.

B21 i.13 Le operazioni sui numeri interi hanno interessanti interpretazioni geometrico -cinematiche nell'ambito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Più in generale in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e in suoi particolari sottoinsiemi, come $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$, $\mathbb{N} \times$ **[**m**)**, **[**n **)** $\times \mathbb{P}$ ed **(**n **]** $\times$ **(**m**]**, si possono vantaggiosamente presentare molte configurazioni discrete e molti problemi computazionali.
Qui presentiamo alcuni dei suoi aspetti più semplici; altri vengono presentati nei capitoli B21, B22, B24 e D21 .

B21 j. cammini, percorsi e circuiti sui punti-ZZ

B21 j.01 Introduciamo ora la nozione di cammino-ZZK come ampliamento della nozione di passo-ZZ. Per **cammino-ZZK** intendiamo una sequenza di passi-ZZK nel piano-ZZ tali che l'estremità finale di ogni passo che non sia l'ultimo coincida con l'estremità iniziale del successivo. Denoteremo con **WalkZZK** l'insieme di questi cammini.
Esempi di cammini-ZZK sono:

$$\big\langle\langle\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 0,2\rangle,\langle -1,2\rangle\big\rangle\big\rangle$$
$$\big\langle\big\langle\langle -1,-1\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,-1\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 1,-1\rangle,\langle 2,0\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 2,0\rangle,\langle 1,1\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 1,3\rangle,\langle 0,2\rangle\big\rangle\big\rangle$$
$$\big\langle\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle\big\rangle,\big\langle\langle 0,2\rangle,\langle -1,1\rangle\big\rangle,\big\langle\langle -1,1\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle\big\rangle$$

Un cammino-ZZK risulta equivalente a una sequenza di punti-ZZ tale che ogni coppia di punti consecutivi è costituita da punti adiacenti-ZZK.

Per esempio i cammini precedenti sono presentati più semplicemente mediante le sequenze:

$$\big\langle\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle -1,2\rangle\big\rangle.$$
$$\big\langle\langle -2,2\rangle,\langle -1,1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\langle 1,3\rangle,\langle 0,2\rangle\big\rangle.$$
$$\big\langle\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\big\rangle.$$

Di un cammino le estremità dei passi si dicono **vertici del cammino** o **nodi del cammino** e i passi si dicono **archi del cammino**.

Come è ragionevole, per **estremità iniziale di un cammino** si intende l'estremità iniziale del suo primo passo e per **estremità finale di un cammino** si intende l'estremità finale del suo ultimo passo.

Un cammino-ZZK si dice **cammino-ZZK chiuso** o **circuito puntato-ZZK** sse le sue estremità iniziale e finale coincidono; si dice invece **cammino-ZZK aperto** se si hanno estremità diverse. Tra i circuiti puntati-ZZK si distinguono i **circuiti puntati-ZZR** e e i **circuiti puntati-ZZB**.

Molti cammini-ZZK possono essere presentati efficacemente con raffigurazioni mediante punti.

Occorre osservare che nelle raffigurazioni di taluni cammini alcune caratteristiche che contano solo per particolari applicazioni possono non risultare chiare. Per esempio la raffigurazione del quinto cammino non indica esplicitamente il punto di partenza e di arrivo. Inoltre la definizione non esclude che un vertice o un arco di un cammino possano essere toccati più volte e la raffigurazione di alcune di tali situazioni richiede appositi accorgimenti.

B21 j.02 Si constata che la definizione di cammino-ZZ come sequenza di vertici ammetta che si possa ridurre a un solo nodo; in tal caso si avrebbe una sequenza di archi vuota ed il cammino viene detto **cammino-ZZ nodo**. La definizione consente anche cammini con vertici successivi ripetuti; questi sono chiamati **cammini ripetitivi**. Cammini nodo e cammini ripetitivi vanno presi in considerazione solo per precisare particolari situazioni che sono le uniche che richiedono certe accurate distinzioni.

Si dice **sottocammino** di un dato cammino-ZZK Γ un cammino la cui sequenza di passi è sottosequenza della sequenza costituente Γ.
Diciamo **cammino-ZZK indeciso** un cammino del quale fa parte un sottocammino seguito dal suo opposto.

Per talune esigenze questa indecisione si può eliminare cancellando i due sottocammini; due cammini-ZZK che si possono ricondurre in tal modo allo stesso cammino privo di indecisioni si dicono **equivalenti-modDcsn**.

I cammini indecisi risultano utili per la definizione delle aree delle figure-ZZ. e

B21 j.03 Chiameremo **cammino-ZZR** ogni cammino-ZZK che presenta solo passi-ZZR, cioè passi-ZZH o-ZZV. Denoteremo con **WalkZZR** l'insieme di questi cammini.
Chiameremo **cammino-ZZB** un cammino-ZZK formato solo da passi-ZZB, cioè da passi-ZZD1 o-ZZD2. Denoteremo con **WalkZZB** l'insieme di questi cammini.

Dei cammini della figura in j01 i primi due sono cammini-ZZR, il terzo e il quarto cammini-ZZB.

Si osserva che un cammino-ZZB ha come nodi solo punti-ZZ pari (come il terzo dei precedenti) oppure solo punti-ZZ dispari (come il quarto).
Descrivendo il gioco degli scacchi si può dire scacchi le torri possono percorrere cammini-ZZR, gli alfieri cammini-ZZB, re e regina cammini-ZZK. Osserviamo che i cammini-ZZR e i cammini-ZZB sono costituiti da almeno un passo, cioè presentano almeno due nodi.

Insieme dei cammini-ZZR e insieme dei cammini-ZZB sono disgiunti e la loro unione è contenuta propriamente nell'insieme dei cammini-ZZK; infatti i cammini-ZZK che presentano sia passi-ZZR che passi-ZZB non sono né cammini-ZZR né cammini-ZZB.

Il quinto dei cammini della figura precedente è un circuito-ZZK non circuito-ZZR e non circuito-ZZB.

B21 j.04 Come si è detto, in un cammino-ZZK possono ripetersi o meno alcuni vertici, alcuni passi possono ripetersi e possono presentarsi sia un passo che il suo riflesso.

Per $\mathfrak{u} \in \{R, B, K\}$ diremo **cammino-ZZ$\mathfrak{u}$ hamiltoniano** o **cammino-ZZ$\mathfrak{u}$ elementare** un cammino-ZZ$\mathfrak{u}$ nel quale nessun nodo viene toccato più volte, salvo il caso dei cammini chiusi per i quali si ha la replica del nodo iniziale nel nodo finale e solo quella.

Diciamo invece **cammino-ZZ$\mathfrak{u}$ euleriano** o **cammino-ZZ$\mathfrak{u}$ semplice** un cammino nel quale nessun passo viene ripetuto.

Chiaramente i cammini-ZZ$\mathfrak{u}$ hamiltoniani ed euleriani non sono ridondanti, un cammino-ZZ$\mathfrak{u}$ hamiltoniano deve essere anche euleriano, mentre esistono cammini-ZZ$\mathfrak{u}$ euleriani nonhamiltoni.
Tutti i cammini in j01 sono hamiltoniani. Nella figura che segue compaiono un cammino-ZZR aperto hamiltoniano, un circuito-ZZR euleriano nonhamiltono ed un circuito noneuleriano.

Diciamo **lunghezza-K di un cammino-ZZK** il numero dei passi che lo compongono; per un cammino aperto tale numero coincide con il numero delle occorrenze dei nodi che il cammino presenta diminuito di 1, per un cammino chiuso coincide con il numero delle occorrenze di vertici. Per i cammini nonhamiltoni o noneuleriani si deve intendere che ogni passo percorso più volte e ogni nodo toccato più volte viene contato altrettante volte. I cammini delle due figure precedenti per la lunghezza-K presentano, risp., i valori 5, 5, 7, 10 e 6.

B21 j.05 Per trattare i cammini in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e le configurazioni associate conviene fare riferimento a intuitivi modelli materiali di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sui cui nodi e archi si possono muovere dei meccanismi di controllo.

Un passo-ZZK $\overrightarrow{PQ}$ [a06] corrisponde allo spostamento che effettua un tale meccanismo dalla sua estremità iniziale P alla finale Q.

Ad un tale automatismo talora si dà il nome di **turtle**, tartaruga, e si discute di `turtle graphics` (we).

È stato anche sviluppato un linguaggio di programmazione per studenti anche giovanissimi che consente di controllare i movimenti di questa tartaruga, chiamato LOGO; una sua descrizione in `http://http://c2.com/cgi/wiki?LogoLanguage`.
Il fine di questo linguaggio è lo stimolo a comprendere la geometria del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mediante la messa in moto di meccanismi virtuali che tracciano i cammini rendendo concretamente verificabili alcune proprietà geometriche.

B21 j.06 Risulta evidente che ogni cammino-ZZK si può individuare fornendo il suo nodo iniziale e una sequenza di segni in corrispondenza con i tipi dei passi che costuiscono il cammino stesso.
Per esempio il secondo cammino-ZZR raffigurato in i01 si può codificare con il punto $\langle 3, 1\rangle$ e con la sequenza di comandi `NWSWW` che si serve solo delle maiuscole esprimenti i 4 possibili passi-ZZR. Il terzo cammino-ZZB si può codificare fornendo $\langle -1, -1\rangle$ e la sequenza di comandi di spostamento `SE SE NE NW NE NW SW` . Il quinto fornendo, per esempio, il punto $\mathbf{0}_2$, assunto come iniziale e finale, e la sequenza di comandi `E NE NW W SW SE` .

B21 j.07 In generale si dice **cammino-ZZ** ogni sequenza di segmenti tali che l'estremità finale di ciascuno di essi (che non sia l'ultimo) coincida con l'estremità iniziale del successivo.

Anche per i cammini-ZZ si parla di nodi e di archi.
Anche i cammini-ZZ si possono esprimere mediante sequenze di nodi: un cammino-ZZ si può presentare con un'espressione $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s\rangle \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^s$ per qualche $s \in \mathbb{N}$; questo intero si dice **lunghezza-A del cammino-ZZ**.

Un cammino-ZZ avente l'estremità iniziale coincidente con la finale si dice **cammino-ZZ chiuso** o **circuito puntato-ZZ**.

B21 j.08 Denotiamo con WalkZZ_s l'insieme dei cammini-ZZ aventi lunghezza-A pari ad s e scriviamo

$$\mathsf{WalkZZ} := \dot{\bigcup}_{s\in\mathbb{N}} \mathsf{WalkZZ}_s \ .$$

Consideriamo un cammino-ZZ $\overset{\searrow}{\Gamma} = \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s\rangle$. Per la sua lunghezza-A si scrive $\mathsf{len}_A(\Gamma) = s$; i punti-ZZ che lo compongono sono detti **vertici del cammino** Γ; il primo di essi si dice essere la sua **estremità iniziale** e l'ultimo la sua **estremità finale**; i segmenti-ZZ (o vettori-ZZ applicati) della forma $\langle P_{j-1}, P_i\rangle$ per $i = 1, 2, ..., s$ sono chiamati **archi di un cammino**, Γ. La lunghezza-A di un cammino è quindi data dal numero degli archi che lo compongono; essa si ottiene anche dal numero delle occorrenze dei vertici che intervengono nella sua definizione diminuito di 1.

Osserviamo che la definizione consente che si abbiano cammini nodo costituiti da un solo vertice, cammini ripetitivi con vertici successivi coincidentie, e quindi con archi di lunghezza nulla, e cammini ridondanti. Questi che servono solo in situazioni particolari e in genere si tratta di situazioni di scarso interesse che conviene marginalizzare.
In effetti risulta facile eliminare le ripetizioni di vertici e le ridondanze e quindi in genere risulta conveniente trattare cammini da intendersi nonripetitivi e nonridondanti, salvo avviso contrario.

B21 j.09 Si dice **cammino-ZZ primitivo** un cammino-ZZ i cui archi sono solo segmenti primitivi.
Si dice invece **cammino-ZZ coprimitivo** un cammino-ZZ che tendenzialmente si esprime in forma più concisa che non presenta archi successivi della stessa inclinazione.

Dato un cammino-ZZ Γ è facile sostituire ciascuno dei suoi eventuali archi non primitivi in più archi primitivi con la stessa inclinazione e trasformare Γ in un cammino-ZZ primitivo. È facile anche fondere i suoi eventuali archi successivi con la stessa inclinazione in un unico arco, in modo da trasformare Γ in un cammino-ZZ coprimitivo.

Due cammini-ZZ si dicono **cammini equivalenti-SF** se si possono trasformare l'uno nell'altro attraverso manovre di separazione o di fusione. In ciascuna delle classi della equivalenza-SF si trova uno e un solo circuito-ZZ primitivo ed uno e uno solo circuito-ZZ coprimitivo.
Nella figura che segue compare un cammino-ZZ preceduto dal suo equivalente-SF primitivo e seguito dal suo equivalente-SF coprimitivo.

Per molte costruzioni due cammini-ZZ equivalenti-SF si possono sostituire senza creare problemi. In effetti in talune circostanze è utile trattare un cammino coprimitivo in quanto ha la forma più concisa, in altre conviene servirsi dei cammini primitivi in quanto costituiti da archi più semplici.

Si dice **cammino riflesso** di un cammino-ZZ $\Gamma\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{s-1}, P_s\rangle$ il cammino-ZZ

$$\Gamma^{\leftarrow} \ := \ \langle P_s, P_{s-1}, ..., P_2, P_1, P_0\rangle \ ;$$

evidentemente $\Gamma^{\leftarrow}$ ha la stessa lunghezza-A di Γ e $(\Gamma^{\leftarrow})^{\leftarrow} = \Gamma$.
In previsione di una sorta di algebra dei cammini [i07], in luogo di $\Gamma^{\leftarrow}$ scriveremo anche $\ominus\Gamma$.

Chiaramente i riflessi dei cammini di una classe di equivalenza-SF costituiscono un'altra classe di equivalenza-SF. Si può quindi parlare di classi di equivalenza-SF mutuamente riflesse. Nella definizione della ridondanza per i cammini-ZZ conviene consentire che si susseguano due sottocammini appartenenti a due classi di equivalenza-SF mutuamente riflesse.

B21 j.10 Un cammino-ZZ si dice **cammino-ZZ hamiltoniano** o **cammino iniettivo sui vertici** sse non presenta vertici ripetuti, fatta eccezione la coincidenza della estremità iniziale con la finale nel caso di cammino chiuso.
Si osserva che ogni cammino-ZZ hamiltoniano non può avere archi di lunghezza nulla, non può essere ripetitivo sui vertici e non può essere ridondante.

Un cammino-ZZ su $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si dice **cammino-ZZ euleriano** o **cammino-ZZ iniettivo sugli archi** sse non presenta archi ripetuti, né duetti di archi mutuamente riflessi (cioè dati da vettori applicati l'uno l'opposto dell'altro), né archi di lunghezza nulla.
Denotiamo con **WalkZZ***Eul* la collezione dei cammini-ZZ euleriani e con **WalkZZ***Ham* la collezione dei cammini-ZZ hamiltoniani.

Un cammino noneuleriano non può essere hamiltoniano: ogni cammino hamiltoniano, non potendo presentare vertici ripetuti diversi dalle estremità eventualmente coincidenti non può presentare archi ripetuti né duetti di archi mutuamente riflessi.
Spesso interessa ripartire l'insieme dei cammini su $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nonripetitivi e nonridondanti in tre classi: l'insieme dei cammini-ZZ hamiltoniani, l'insieme dei cammini-ZZ euleriani nonhamiltoni e l'insieme dei cammini-ZZ noneuleriani.

Anche tra i circuiti puntati-ZZ serve distinguere tra gli hamiltoniani, gli euleriani nonhamiltoni e i noneuleriani.

B21 j.11 Una coppia di cammini-ZZ tale che l'estremità finale del primo coincida con l'estremità iniziale del secondo si dice **coppia di cammini-ZZ giustapponibili**.

Consideriamo una tale coppia c e denotiamo i suoi componenti, risp., con $\Gamma_\sigma = \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s\rangle$ e $\Gamma_\tau = \langle P_s, P_{s+1}, P_{s+2}, ..., P_{s+t}\rangle$. Si dice **giustapposizione di due cammini-ZZ**, Γ_σ e Γ_τ, il cammino-ZZ $\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s, P_{s+1}, P_{s+2}, ..., P_{s+t}\rangle$. Tale composizione la denotiamo con $\Gamma_\sigma \oplus \Gamma_\tau$.

Ricordando la notazione $\ominus\Gamma$ per l'opposto del cammino Γ, diciamo cammino-ZZ palindromo un cammino della forma $\Gamma \oplus (\ominus\Delta)$, nella quale Δ è un cammino equivalente-SF a Γ.
L'espressione $\Gamma \oplus (\ominus\Delta)$ si può sostituire con la più concisa $\Gamma \ominus \Delta$.

In una scrittura esprimente una giustapposizione di cammini come $\Gamma \oplus \Delta$ non compare il punto P_s di contatto tra i due cammini; questo non deve far dimenticare che la giustapposizione tra cammini è una composizione binaria parziale, cioè che si può definire solo per particolari coppie di cammini di **WalkZZ**.

Si può comunque affermare che la giustapposizione di cammini-ZZ è un'operazione (parziale) associativa.
Conviene osservare esplicitamente che il cammino ottenuto come giustapposizione di due cammini hamiltoniani può essere nonhamiltono e il cammino giustapposizione di due cammini euleriani può essere noneuleriano.

Va notato che, mentre la giustapposizione di due cammini-ZZ primitivi è anch'essa un cammino primitivo, la giustapposizione di due cammini-ZZ coprimitivi potrebbe non essere un cammino coprimitivo.

Va rilevato che di due cammini Γ e Δ si possono ottenere entrambe le giustapposizioni $\Gamma \oplus \Delta$ e $\Delta \oplus \Gamma$ sse essi hanno le forme $\Gamma = \langle P, P_1, ...P_{s-1}, P_s = Q\rangle$ e $\Delta = \langle Q, Q_1, ..., Q_{t-1}, Q_t = P\rangle$. In tal caso $\Gamma \oplus \Delta = \langle P, P_1, ...P_{s-1}, Q, Q_1, ..., Q_{t-1}, P\rangle$ e $\Delta \oplus \Gamma = \langle Q, Q_1, ..., Q_{t-1}, P, P_1, ...P_{s-1}, Q\rangle$.
Questi due cammini coincidono sse $\Delta = \ominus\Gamma$. Queste constatazioni si esprimono sbrigativamente dicendo che la giustapposizione tra cammini-ZZ (ma non solo) non è un'operazione parziale commutativa.

B21 j.12 I cammini-ZZ forniscono modelli di eventi reali nei quali si ha una sequenza di spostamenti su posizioni rappresentabili con punti-ZZ; questi spostamenti potrebbero riguardare persone, merci, veicoli, denaro, informazioni, stimoli fisiologici, ...
Questo giustifica l'utilizzo di termini e metafore collegati con gli accennati processi concreti. In particolare lo scorrere degli archi di un cammino si descrive efficacemente riferendosi allo scorrere del tempo, o meglio al crescere di 1 a ogni passo di una variabile a valori interi naturali che chiamiamo tempo discreto.

La composizione binaria di giustapposizione riguarda invece la possibilità di effettuare l'una dopo l'altra due sequenze di spostamenti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tali che la prima termini dove inizia la seconda.

La giustapposizione viene utilizzata anche per esaminare la possibilità di decomporre un dato cammino tendenzialmente elaborato come giustapposizione di cammini più corti quando questi sono più trattabili o malleabili. Spesso le proprietà di un cammino-ZZ della forma $\Gamma \oplus \Delta$ sono desumibili da quelle di Γ e da quelle di Δ.

Un cammino generico si può esprimere come giustapposizione di cammini euleriani e ciascuno di questi si può decomporre mediante cammini hamiltoniani.

B21 j.13 Una configurazione più generica dei cammini-ZZ è costituita dai percorsi-ZZ. Formalmente si definisce **percorso-ZZ** o **poligonale-ZZ** un duetto costituito da un cammino-ZZ e dal suo riflesso. Osserviamo che fa eccezione il caso del cammino coincidente con il proprio riflesso, caso nel quale non si ha un duetto ma un singoletto.
Consideriamo un percorso della forma $\{\Gamma, \ominus\Gamma\}$; Γ e $\ominus\Gamma$ si dicono **cammini rappresentanti del percorso**.

Nei modelli che rappresentano spostamenti un percorso consente di rappresentare un collegamento (stradale, ferroviario, documentale, telematico, amministrativo, fisiologico, ...) che consente trasferimenti nelle due direzioni opposte.

Un percorso-ZZ va considerato come un impoverimento di un cammino-ZZ. Viceversa un cammino-ZZ si può ottenere da un percorso arricchendolo con una informazione che stabilisce un suo senso di percorrenza, ovvero che permette di distinguere tra estremità iniziale e finale.
Di conseguenza ai percorsi si possono attribuire molte delle relazioni, delle proprietà e delle distinzioni trovate per i cammini-ZZ.
A molti tipi di cammini caratterizzati da proprietà di rilievo sono associati tipi di percorsi. Possiamo quindi prendere in considerazione configurazioni come i percorsi primitivi, coprimitivi, hamiltoniani, euleriani nonhamiltoni, noneuleriani, chiusi hamiltoniani, ...

B21 j.14 Due circuiti-ZZ puntati $\langle p_1, p_2, ..., p_s, p_1 \rangle$ e $\langle q_1, q_2, ..., q_t, q_1 \rangle$ si dicono **ciclicamente equivalenti** sse $s = t$ e $\langle q_1, q_2, ..., q_s \rangle$ risulta essere una permutazione circolare di $\langle p_1, p_2, ..., p_s \rangle$.

Il precedente termine è giustificato dal fatto che fa riferimento ad una relazione tra circuiti puntati evidentemente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Chiamiamo **circuito-ZZ** ogni classe di circuiti puntati-ZZ ciclicamente equivalenti.

Si osserva che la riflessa della sequenza degli archi componenti di un circuito $\mathcal{C}$ costituisce un'altro circuito; esso viene detto **circuito riflesso** di $\mathcal{C}$. Si nota anche che i due circuiti puntati $\Gamma_s \oplus \Gamma_t$ e $\Gamma_t \oplus \Gamma_s$ visti in i07 sono ciclicamente equivalenti e conducono allo stesso circuito-ZZ.

Per molte considerazioni sono più essenziali i circuiti dei singoli circuiti puntati che li compongono.
Va anche detto che in molti discorsi i termini circuito puntato e circuito vengono confusi confidando che il contesto consenta di evitare ambiguità.

B21 j.15 Finora abbiamo considerato cammini i cui vertici sono punti-ZZ. Le stesse definizioni e proprietà possiamo presentarle per cammini forniti da sequenze di caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
In effetti tra i punti-ZZ e le caselle della griglia combinatoria si possono definire facilmente alcune biiezioni, ad esempio quella data da $\lceil \langle x, y \rangle \mapsto \langle x + 1/2, y + 1/2 \rangle \rceil$, che rendono l'insieme dei punti-ZZ logicamente scambiabile con l'insieme delle caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Osserviamo esplicitamente che si ha criptomorfismo tra la coppia costituita da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e l'insieme delle sue caselle con la coppia riflessa.
Si può anche dire che la disponibilità delle suddette biiezioni è in sintonia con la possibilità di visualizzare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e le configurazioni basate su tale piano presentando le coppie di interi sia come punti, sia come caselle.

Per le caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parleremo di duetti di caselle adiacenti-ZZCR nel caso di caselle con un lato comune e di caselle adiacenti-ZZB sse esse hanno in comune un solo vertice.
Si trattano inoltre i **cammini su caselle**, i **percorsi su caselle** e i **circuiti su caselle**.
Tra questi percorsi cui attribuiamo la qualificazione-ZZC, distingueremo i percorsi-ZZCR attuabili con duetti di caselle adiacenti-ZZCR, dai percorsi-ZZCB attuabili con duetti di caselle adiacenti-ZZCB.

Parleremo anche di connessioni-ZZCR, realizzabili con percorsi-ZZCR e di connessioni-ZZCB, realizzabili con percorsi-ZZCR.

B21 j.16 Casi particolari dei cammini-ZZ sono i cammini-ZZK, cammini nei quali gli archi possono collegare solo caselle adiacenti-ZZCK; casi particolari dei cammini-ZZK sono i cammini-ZZR nei quali gli archi possono collegare solo caselle adiacenti-ZZCR ed i cammini-ZZB nei quali gli archi possono collegare solo caselle adiacenti-ZZCB.

Nelle figure seguenti sono mostrati alcuni circuiti-ZZ hamiltoniani.

Altri semplici circuiti-ZZR sono i circuiti-ZZR rettangolari, con i casi particolari dei circuiti-ZZR quadrati e dei circuiti -ZZR delle barre orizzontali e delle barre verticali.

A molti circuiti-ZZR hamiltoniani, in particolare ai rettangolari con lunghezze dei lati non inferiori a 3, si possono associare circuiti-ZZCR costituenti le cosiddette cornice esterna e cornice interna della figura-Bx delimitata rettangolare.

B21 j.17 Nelle prossime pagine ci occuperemo soprattutto di cammini e circuiti-ZZR.

Consideriamo un arbitrario circuito-ZZR hamiltoniano Γ. Ad esso associamo la relazione tra caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di essere collegabili attraverso un percorso-ZZCR che non attraversa lati di Γ. Tale relazione la chiamiamo **connessione-ZZCR non ostruita** da Γ e la denotiamo con $\boldsymbol{AE}\mathsf{ZZCR}_\Gamma$.

(1) Prop.: Ogni relazione della forma $\boldsymbol{AE}\mathsf{ZZCR}_\Gamma$ è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè è una equivalenza.

Dim.: Riflessività e simmetria discendono dal ruolo dei percorsi-ZZCR nella definizione della relazione e dal fatto che si consente che questi percorsi abbiano lunghezza-A nulla e sono invarianti per riflessione. La transitività discende dal fatto che giustapponendo due percorsi-ZZR che non toccano Γ si ottiene un percorso con le stesse proprietà ∎

(2) Prop.: L'equivalenza $\boldsymbol{AE}\mathsf{ZZCR}_\Gamma$ ripartisce l'insieme delle caselle su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in due classi: l'insieme finito che denotiamo con $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$ e chiamiamo classe delle caselle interne a Γ e l'insieme infinito $\mathsf{Extrn}(\Gamma)$ che diciamo classe delle caselle esterne a Γ.

Dim.: Si individua facilmente il rettangolo minimo R_0 che include Γ: basta prendere per le coordinate dei suoi quattro vertici gli accoppiamenti dei valori minimo e massimo tra le ascisse dei vertici di Γ con i valori minimo e massimo delle ordinate dei vertici di Γ.
Tutte le caselle esterne ad R_0 sono $\boldsymbol{AE}\mathsf{ZZCR}$-equivalenti e vanno assegnate alla classe $\mathsf{Extrn}(\Gamma)$.

In una seconda fase, dopo aver etichettate tutte le caselle all'interno di R_0 come possibili elementi di $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$, si completa $\mathsf{Extrn}(\Gamma)$ procedendo a etichettare come suoi elementi le caselle entro R_0 che risultano connesse-ZZR con almeno un elemento già assegnato a $\mathsf{Extrn}(\Gamma)$ da un lato non appartenente a Γ.
Questa attività si può portare avanti, per esempio, procedendo su rettangoli R_1, ..., R_i, ... , R_i essendo ottenuto dal rettangolo precedente R_{j-1} eliminando le caselle della sua cornice di caselle interna [i12]. Le caselle di ciascuna cornice sono visitate, per esempio, considerando nell'ordine i suoi lati E, N, W e S.
Questa attività si conclude con una cornice che non fornisce nuovi elementi a $\mathsf{Extrn}(\Gamma)$ o con un rettangolo R_i di area nulla.

Evidentemente l'insieme $\mathsf{Extrn}(\Gamma)$ è connesso mediante percorsi-ZZCR che non attraversano Γ. Si ha connessione-ZZCR anche tra le caselle rimaste assegnate a $Intrn(\Gamma)$, come si può constatare scorrendo le sue caselle a partire da una qualsiasi di esse e procedendo a esaminare sue successive cornici interne. Va notato che procedendo attraverso successive eliminazioni di cornici di $Intrn(\Gamma)$ può accadere che si incontrino cornici sconnesse-ZZCR, ma questo non porta ad alcuna sconnessione per $\mathsf{Intrn}(\Gamma)$ nel suo complesso ∎

B21 k. figure-Bx specifiche e loro cardinali

B21 k.01 Introduciamo ora alcuni semplici insiemi piani-ZZ facendo riferimento alla raffigurazione geografica mediante caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; le figure piane-ZZ si possono allora immaginare ottenute disponendo sopra le caselle di una scacchiera, limitata o illimitata, **tessere** quadrate da mosaico con le stesse dimensioni delle caselle e si può adottare un linguaggio visivo particolarmente intuitivo.

Nel seguito useremo le lettere i, j, h e k per denotare degli interi e le lettere s, t, u e v per denotare degli interi positivi.

B21 k.02 Una generalizzazione dei monòmini, figure-Bx costituite da una sola casella, sono i quadrati; un **quadrato-ZZR** di lunghezza laterale s, ossia di lato s, è

$$\{j = h, ..., h + s - 1; j = k, ..., k + s - 1 :| \langle i, j\rangle\} .$$

Una generalizzazione dei quadrati è data dai rettangoli; si dice

rettangolo-ZZR di larghezza s e altezza t:

$$\{j = h, ..., h + s - 1; j = k, ..., k + t - 1 :| \langle i, j\rangle\} .$$

Un quadrato-ZZR si può individuare dando un suo vertice, tipicamente il vertice-SW cioè il suo vertice in basso a sinistra, e la lunghezza dei suoi lati, oppure dando uno dei suoi lati e specificando se si tratta dell'inferiore, del più a destra, del superiore o del più a sinistra.
Un rettangolo-ZZR si può individuare dando un suo vertice, tipicamente il vertice-SW, e le lunghezze dei suoi lati orizzontali e verticali, oppure dando due suoi vertici opposti, tipicamente il vertice-SW e il - vertice-NE.

B21 k.03 Un **gancio-ZZ** con vertice retto in basso a destra in $\langle h, k\rangle$, larghezza s e altezza t è

$$\{j = h, ..., h + s - 1 :| \langle i, k\rangle\} \cup \{j = k, ..., k + t - 1 :| \langle h, j\rangle\} .$$

La raffigurazione della configurazione precedente rende ovvie le definizioni per gli analoghi ganci-ZZ con vertice retto in alto a destra, in basso a sinistra e in basso a destra. Per le quattro posizioni del vertice retto vengono usati anche le specificazioni "-SW", "-SE", "-NW" ed "-NE".

In generale a un insieme piano-ZZ generico F si attribuiscono una **larghezza esterna** e una **altezza esterna**, due parametri estensivi definiti, risp., come la larghezza e l'altezza del più piccolo rettangolo-ZZR che contiene tutte le sue caselle.

B21 k.04 Definiamo **triangolo rettangolo isoscele-ZZCathR** avente cateti-R, cioè un cateto orizzontale uno verticale, di larghezza s e vertice retto SE, cioè in basso a sinistra, in $\langle h, k\rangle$:

$$\{j = h, ..., h + s - 1; j = k, ..., k + s - 1; i + j < h + k + s :| \langle i, j\rangle\} .$$

Sono prevedibili le definizioni per gli analoghi triangoli aventi il vertice retto in basso a destra, in alto a sinistra e in alto a destra. Più oltre vedremo altri tipi di triangoli rettangoli.

B21 k.05 Come abbiamo già osservato, il cardinale di un insieme piano $C \subset_\varphi \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $|C|$, quando si adotta una raffigurazione mediante piastrelle, viene detta anche **area** e può denotarsi utilmente anche

con $\boldsymbol{Area}(C)$; quando si usa una raffigurazione mediante punti è preferibile chiamarla peso e denotarla con $\mathrm{wgt}(C)$.
Evidentemente l'area di una barra di lunghezza s è s, come quella di una scala di larghezza s, l'area di un quadrato con lato di lunghezza s è s^2 e per l'area di un rettangolo di larghezza s e altezza t $\boldsymbol{Area}\{j = h, ..., h + s - 1; j = k, ..., k + t - 1 :| \langle i, k + i - h\rangle\} = s \cdot t$.

B21 k.06 È un po' meno evidente che l'area dei triangoli rettangoli-ZZCathR di lato s sia $s(s + 1)/2$. Questo fatto si può dimostrare per induzione; alternativamente si ha la seguente dimostrazione visiva, che si serve del modello a piastrelle quadrate.

Consideriamo accanto a un triangolo rettangolo-ZZCathR T con vertice retto in basso a sinistra una sua replica. Facciamo ruotare questo complesso di piastrelle di 180° ed accostiamolo all'originale affiancando al cateto orizzontale in basso di T la piastrella "vertice" ora in basso a destra.

I due complessi di piastrelle combaciano e formano un rettangolo di larghezza $s + 1$ e altezza s, cioè di area $s(s + 1)$. L'area di T è evidentemente la metà della precedente, cioè $\frac{s(s+1)}{2}$ ∎

Come vedremo oltre, le figure piane come le precedenti si possono caratterizzare utilmente anche attraverso altri parametri estensivi.

B21 k.07 Le precedenti definizioni degli insiemi piani più semplici si sono servite di espressioni insiemistiche cartesiane. Vogliamo ora presentare altre configurazioni abbastanza intuitive per le quali si avrebbero espressioni insiemistiche cartesiane piuttosto elaborate. Qui le introduciamo in modo discorsivo rinunciando alla massima generalità.

Per **triangolo rettangolo 2-allargato** di larghezza s con vertice retto in basso a destra si intende una figura ottenuta affiancando s barre verticali con le caselle inferiori sulla stessa retta orizzontale, le prime due barre di lunghezza 1, terza e quarta di altezza 2, e così via. L'altezza della i-esima barra è data da $\left\lfloor \frac{j+2}{2} \right\rfloor$. I primi elementi della successione di tali figure sono i seguenti:

Denotiamo con $Tr2(s)$ l'area del triangolo rettangolo normale di larghezza s
Per la successione di tali aree si ha $\langle s = 1, ..., 7, ... :| Tr2(s)\rangle = \langle 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, ...\rangle$.

B21 k.08 Prop. $Tr2(s) = \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$ sse s è dispari, mentre $Tr2(s) = \frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} + 1\right)$ sse s è pari.

Dim.: Ancora si può procedere per induzione e visivamente.
Osserviamo preliminarmente che le due formule precedenti si possono riscrivere

$$\forall u \in \mathbb{P} \quad : \quad Tr2(2u - 1) = u^2 \quad , \quad Tr2(2u) = u(u + 1) \ .$$

La prima formula si dimostra per induzione per osservando che

$$Tr2(2u + 1) = Tr2(2u - 1) + 2u + 1 \quad \text{e} \quad u^2 = (u - 1)^2 + 2u + 1 \ .$$

La seconda formula riguardante le larghezze dispari si può spiegare confrontando due figure come le seguenti

Si ottiene la dimostrazione per induzione per la seconda formula anche osservando che

$$Tr2(2u) = Tr2(2u-2) + 2u \quad \text{e} \quad u(u+1) = (u-1)u + 2u \ .$$

L'ultima considerazione e la stessa formula per le larghezze pari si può visualizzare confrontando figure come le seguenti

La seconda formula si collega facilmente anche a quella per le aree dei triangoli rettangoli-ZZCathR.

B21 k.09 Osserviamo anche che la successione enumerativa $Tr2(s)$ fornisce anche le aree dei **triangoli rettangoli isosceli-ZZCathB**, cioè dei triangoli rettangoli con cateti obliqui. I triangoli rettangoli-ZZCathB con ipotenusa inferiore ed aventi diametri (lunghezze dell'ipotenusa) da 1 a 7 sono indicati in figura. È chiaro come possano ottenersi dai triangoli precedenti mediante scorrimenti orizzontali di caselle.

B21 k.10 Oltre ai **triangoli rettangoli 2-allargati**, si possono considerare i **triangoli rettangoli 2-allungati**, ottenibili dai precedenti con una rotazione di 90°. Collettivamente triangoli rettangoli 2-allargati e 2-allungati si dicono **triangoli rettangoli 2-elongati**. È anche prevedibile come si possano definire i **triangoli rettangoli** e**-elongati** con $e = 3, 4, \ldots$.

B21 k.11 Abbiamo definito [ILi09] come quadrato typB di diametro d la figura che si ottiene da due triangoli rettangoli-ZZCathB di diametro d uno a ipotenusa inferiore, l'altro a ipotenusa superiore, sovrapponendo le loro ipotenuse. Nella figura che segue sono presentate le prime 7 di tali figure.

(1) Eserc. Dimostrare che l'area del quadrato typB di diametro pari a $2\,r$ è $2r^2 + 2r$ e che l'area del quadrato typB di diametro dispari $2\,r + 1$ è $(r+1)^2 + r^2 = 2r^2 + 2r + 1$.

B21 k.12 Diciamo **ottagono-ZZ** con estensioni s e t la figura ottenuta a partire dal quadrato-ZZ di lato $2s + t$ Q eliminando i quattro triangoli rettangoli isosceli CathR aventi vertici retti nei 4 vertici di Q e cateti di lunghezza s.

(1) Eserc. Verificare che i quadrati typB di diametro $2\,s + 1$ sono ottagoni con estensioni s e 1 e che i quadrati typB di diametro $2s + 2$ sono ottagoni con estensioni s e 2. Mostrare che l'area di tali figure è $(2s+t)^2 - 2s(s+1) = 2s^2 + 2s(2t-1) + t^2$.

B21 k.13 Consideriamo ora la successione dei **trapezi-ZZ pentagonali**, detti anche **trapezi di Eulero** aventi vertice acuto nella posizione SE:

Ciascuna di queste figure è contraddistinta dalla sua larghezza, cioè dall'area del segmento formato delle sue componenti più in basso.
Si osserva che ogni trapezio di lunghezza $2u - 1$, dispari, si può ottenere affiancando alla destra di un quadrato di lato u un triangolo rettangolo-ZZCathR di larghezza $u - 1$; ogni trapezio di lunghezza $2u$, pari, si può ottenere affiancando alla destra di un quadrato di lato u un triangolo rettangolo-ZZCathR di larghezza u.

(1) Prop.: Se denotiamo con $trpz(s)$ l'area del trapezio di lunghezza s, si ottiene

$$trpz(2u-1) = u^2 + \frac{u(u-1)}{2} = \frac{u(3u-1)}{2} \quad \text{e} \quad trpz(2u) = u^2 + \frac{u(u+1)}{2} = \frac{u(3u+1)}{2}$$ ∎

B21 k.14 Per altre successioni di figure piane la valutazione dell'area e dei diametri può essere più impegnativa. Il problema delle valutazione di aree e diametri per successioni di insiemi piani regolari fa parte di una tematica enumerativa di una certa importanza.

Questa tematica riguarda la valutazione di un parametro estensivo di configurazioni di un dato genere o equivalentemente la valutazione deli cardinali di certi insiemi piani.

B21 k.15 Uno dei compiti più importanti della Matematica discreta riguarda proprio la soluzione di problemi enumerativi, problemi che rivestono una notevole importanza all'interno della matematica, per l'analisi degli algoritmi e in molte applicazioni (in fisica, chimica, biologia, ...).

Quando si indaga sopra un nuovo tipo di struttura discreta, è naturale porsi subito problemi enumerativi e in particolare chiedersi quante sono le strutture con date caratteristiche. Evidentemente il cardinale di un insieme costituisce la prima informazione quantitativa atta a caratterizzarlo.

Dal punto di vista delle applicazioni, il modello a tessere quadrate delle configurazioni piane suggerisce naturalmente situazioni pratiche nelle quali la conoscenza delle aree può essere utile: si pensi a piastrellature, mosaici e altri tipi di rivestimenti. La raffigurazione a punti delle configurazioni piane suggerisce invece applicazioni nelle quali si devono decidere punti di avvitamento, di saldatura, di perforazione, ...

B21 k.16 I punti del piano possono essere associati anche a oggetti di interesse pratico non immediatamente visualizzabili; i casi più importanti si incontrano nelle attività di programmazione.
Spesso un programmatore deve sottoporre a elaborazioni automatiche insiemi di situazioni caratterizzate da due indici interi che possono ricondursi a sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abbastanza regolari.
Si pone quindi il problema della **visita di una figura-ZZ**, ciocioè il problema dello scorrimento di tutti i suoi componenti da ottenere con comandi espressi in un linguaggio di programmazione.

Serviamoci del linguaggio C. Per visitare il rettangolo-ZZ di `t02` si possono utilizzare due cicli annidati con la seguente forma:

```
for(i=h;i<h+s;i++) {
    for(j=k;j<k+t;j++) {
        .  .  .  .  .  .  .  .
        }
    }
```

Si può visitare il secondo triangolo rettangolo-ZZCathR di `t04` servendosi di due cicli con la seguente forma:

```
for(i=h;i<h+5;i++) {
    for(j=k;j<= k+i-h;j++) {
        .  .  .  .  .  .  .  .
        }
    }
```

Si può visitare un triangolo 2-allargato di larghezza `s` [`t07`] servendosi di un frammento di programma come il seguente:

```
for(i=h;i<h+s;i++) {
    for(j=k;j<= k+(i-h+2)/2;j++) {
        .  .  .  .  .  .  .  .
        }
    }
```

Si può visitare un triangolo rettangolo-ZZCathB di larghezza `s` [t.09] servendosi di due cicli con la seguente forma:

```
for(i=h;i<h+s;i++) {
    for(j=k;j<= k+min(i-h,h+s-i);j++) {
        .  .  .  .  .  .  .  .
        }
    }
```

La visita di un trapezio di Eulero di larghezza `s` [t13] può effettuarsi con due cicli della seguente forma:

```
for(i=h;i<h+s;i++) {
    for(j=k;j<= k+min((s+1)/2,s-i+1);j++) {
        .  .  .  .  .  .  .  .
        }
    }
```

(1) Eserc. Scrivere un frammento in linguaggio C per la visita di un quadrato typB .

(2) Eserc. Scrivere un frammento in linguaggio C per la visita di un ottagono-ZZ con generiche estensioni s e t.

B21 k.17 La riformulazione nel piano combinatorio delle situazioni operative del tipo accennato e la familiarità con frammenti di programma esemplari come i precedenti possono essere molto utili nella stesura e nella manutenzione di varie procedure.

Queste e molte altre considerazioni fatte in questo capitolo possono ripetersi per gli insiemi di terne di numeri interi, insiemi interpretabili come insiemi di punti di un graticcio tridimensionale o come insiemi di cubetti di lato unitario disposti nello spazio.
Lo studio di queste configurazioni spaziali si presenta in genere sensibilmente più complesso e spesso cerca di avvalersi di risultati dello studio delle configurazioni piane (il quale a sua volta si serve di nozioni sulle sequenze). Discorsi analoghi si possono fare per gli insiemi di quaterne, quintuple, ... , n-uple di numeri interi.

B21 k.18 Molti interessanti insiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si individuano vantaggiosamente mediante disequazioni nelle variabili x e y.
I primi insiemi che conviene introdurre in questo modo sono i **semipiani-ZZ**, insiemi associati a disequazioni lineari. I semipiani più semplici da individuare sono associati a disequazioni riguardanti una sola variabile come $x > 0$ e $y \leq k$; sono facili da individuare anche i semipiani determinati da disequazioni come $y > x + h$ o $y \leq k - x$
Disequazioni lineari leggermente più complesse da trattare sono quelle delle forme $hx + ky + r < 0$, $hx + ky + r > 0$, $hx + ky + r \leq 0$, $hx + ky + r \geq 0$ con $h, k, r \in \mathbb{Z}$.
Osserviamo che due insiemi associati a relazioni opposte sono complementari; per esempio

$$\{\langle x, y\rangle \,\S\, hx + ky + r < 0\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{\langle x, y\rangle \,\S\, hx + ky + r \geq 0\}$$

B21 k.19 Vi sono poi sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definibili con sistemi di disequazioni lineari. Le figure più semplici di questo tipo sono le intersezioni di due semipiani-h o di due semipiani-v.
Si dice **fascia orizzontale illimitata** di altezza t:

$$\{i \in \mathbb{Z}\ ,\ j = k, ..., k + t - 1\ \ :|\ \ \langle i, j\rangle\}\ .$$

Intersecando una fascia con un semipiano definito da una retta ortogonale alle rette di frontiera si ottengono semplici generalizzazioni delle semirette-ZZH.

fascia orizzontale illimitata a destra di altezza t:

$$\{i = h, ...\ ,\ j = k, ..., k + t - 1\ \ :|\ \ \langle i, j\rangle\}\ .$$

fascia orizzontale illimitata a sinistra di altezza t:

$$\{i = ..., h\ ,\ j = k, ..., k + s - 1\ \ :|\ \ \langle i, j\rangle\}\ .$$

Similmente si definiscono le **fasce verticali** completamente o parzialmente illimitate e di date larghezze che generalizzano rette-ZZV e semirette-ZZV. In particolare si dice **fascia verticale illimitata** di larghezza s:

$$\{i = h, ..., h + s - 1\ ,\ j \in \mathbb{Z}\ \ :|\ \ \langle i, j\rangle\}\ .$$

Si possono poi definire fasce che generalizzano rette-ZZB e semirette-ZZB.

Con altre disequazioni si definiscono figure come triangoli-ZZ, rombi-ZZ, trapezi-ZZ e poligoni-ZZ convessi.

Si osserva che l'intersezione di figure convesse è ancora una figura convessa: quindi con sistemi di disequazioni lineari si individuano molti tipi di poligoni convessi.

B21 k.20 Molte figure si possono definire con disequazioni polinomiali: le più semplici sono i **cerchi-ZZ** della forma

$$\{\langle x, y\rangle\ \ \shortmid\!\!\shortmid\ \ x^2 + y^2 \leq r^2\}\ .$$

Simili alle precedenti figure sono le **ellissi-ZZ** della forma

$$\{\langle x, y\rangle\ \ \shortmid\!\!\shortmid\ \ h^2x^2 + k^2y^2 \leq s^2\}\ .$$

Si possono poi considerare settori di parabole, cubiche e altre curve polinomiali che riprenderemo per associare le loro aree alle somme dei quadrati, cubi e altre potenze di interi.
Queste figure sono considerate nella computer grafica per le operazioni di riempimento di aree.

Altre figure si possono individuare mediante equazioni: esse possono essere utilizzate per illustrare le equazioni diofantee e descrivere alcuni risultati (raramente per sviluppare dimostrazioni).

B21 I. costruzioni sul piano-ZZ

B21 I.01 Diciamo **configurazione-ZZ** ogni struttura che presenta come componente primaria un insieme di punti-ZZ e una o più componenti consistenti in funzioni e relazioni riguardanti tali elementi.

Segnaliamo alcune configurazioni-ZZ particolarmente significative.

Battaglia navale è un gioco per due giocatori piuttosto banale che richiede che ciascun contendente indovini le posizioni occupate entro una scacchiera quadrata da alcune barre-ZZ di poche caselle, con il fine di "FFONDARLE".

Tetris è invece un gioco solitario, che richiede al giocatore, dotato di colpo d'occhio, di far cadere in un pozzo che continua a sprofondare delle tessere costituenti tetròmini delle 5 forme in modo da non lasciare spazi vuoti, con l'obiettivo di sistemare il maggior numero possibile di tessere.

`Game of Life (we)` di John Conway riguarda un insieme di caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che si evolvono secondo regole che riguardano il successore di ogni casella e dipendono dalle sue caselle circostanti; risulta interessante cercare gli insiemi di partenza che presentano evoluzioni particolari.

I sottoinsiemi costruibili di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ saranno chiamati **insiemi-ZZ** o "insiemi piani-ZZ"; gli insiemi di caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ saranno detti **insiemi-ZZC** o anche **figure-ZZ**.

Ricordiamo che il suffisso-ZZ svolge il ruolo di specificazione sincopata; parlando di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ faremo largo uso di elementi espositivi di questo genere.

Si tratta di precisazioni utili, ma pesanti alla lettura. Talora il contesto consente di sottintendere questi suffissi, ma alcune situazioni li richiedono.

B21 I.02 Molte importanti configurazioni sono riconducibili a funzioni il cui dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se questo dominio è un prodotto cartesiano di due insiemi numerabili come l'intero piano, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ si parla di **matrici.I**; nel caso di funzioni il cui dominio è un rettangolo finito come $\{0, ..., m-1\} \times \{0, ..., n-1\}$ o $\{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$, si parla invece di matrici.
Di solito le matrici sono presentate nella raffigurazione matriciale mediante caselle.
Conviene rilevare che buona parte delle considerazioni sulle matrici sono di natura combinatoria.

Per presentare concretamente una funzione f definita nel piano combinatorio o in un suo sottoinsieme di solito si fornisce un quadro (variante di una raffigurazione a caselle) nel quale in corrispondenza delle posizioni di alcuni nodi $\langle i, j \rangle$ si pongono i valori $f(i, j)$; nel caso di funzioni a valori interi, razionali o reali si parla di **presentazione in pianta** della funzione.
Per raffigurare efficacemente talune di queste funzioni spesso si pongono sui nodi costituenti il suo dominio colori o segni come cerchietti, crocette, piccole figure, ...

Sono ben noti molti giochi che si basano su una scacchiera a caselle quadrate (scacchi, dama, campo minato, tris (o tic-tac-toe), ...); uno svolgimento di uno di questi giochi può considerarsi come l'evoluzione discreta di una funzione avente come dominio la scacchiera. Il "Gioco del quindici" fornisce esempi ben tangibili di evoluzioni di questo genere.

B21 I.03 Molti importanti risultati enumerativi sono esprimibili mediante funzioni a valori costruibili (in genere interi o razionali) aventi come dominio il quadrante $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o un insieme triangolare illimitato come $TRcan_{\mathbb{N}} := \{j = 0, ...; j = 0, ..., i :| \langle i, j \rangle\}$.
In particolare si trattano i triangoli di Tartaglia-Pascal [B55d08], di Stirling, di Eulero, di Bernoulli [v.a. D20].

Entità fondamentalmente equivalenti sono fornite da importanti sequenze di polinomi dei successivi gradi e sequenze di opportune serie formali [I35]. Per esempio si hanno le due seguenti rappresentazioni per i primi 7 polinomi di Hermite [W60c07]:

$64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$	-120	0	720	0	-480	0	64
$32x^5 - 160x^3 + 120x$	0	120	0	-160	0	32	
$16x^4 - 48x^2 + 12$	12	0	-48	0	16		
$8x^3 - 12x$	0	-12	0	8			
$4x^2 - 2$	-2	0	4				
$2x$	0	2					
1	1						

B21 I.04 Le funzioni con dominio in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ forniscono i modelli matematici di molte situazioni concrete. Gli schermi degli apparecchi televisivi, dei computers, degli smart phones e di tanti altri dispositivi elettronici sono rappresentabili mediante matrici i cui nodi sono i pixels, cioè *picture elements*; una immagine si può considerare una funzione che ha la suddetta matrice come dominio e come codominio l'insieme dei colori disponibili.
Tipiche estensioni sdi questi domini ono 320×480, 768×1024, 1080×1280, mentre i colori potrebbero essere 2 (schermi in bianco e nero dal 1995 sempre meno usati), alcune decine o anche molte migliaia. Nel piano combinatorio quindi si possono ambientare vari studi utili alla odierna grafica con il computer.

Altre configurazioni discrete piane che avremo modo di vedere in seguito sono costituite da funzioni costruibili aventi come dominio una sequenza di interi e codominio nel piano combinatorio. In particolare incontreremo sequenze di nodi che formano cammini [D21].

B21 m. validità del piano-ZZ come modello fisico

B21 m.01 Sulla adeguatezza del piano-ZZ come modello per la realtà fisica si devono fare alcune osservazioni.

Parallelismo e ortogonalità tra rette-ZZ fisiche sono da considerare valide con elevata precisione, ma non pretendono di esserlo perfettamente.

Il parallelismo viene verificato per rette reali molto lunghe, su distanze terrestri; in effetti su distanze astronomiche si trova che le traiettorie dei raggi luminosi vengono curvati dalla presenza di grandi masse gravitazionali, fatto spiegabile nell'ambito della teoria della `relatività generale (wi)`: questo fa sì che la nozione di allineamento non sia da considerare assoluta.

La simmetria degli angoli materiali nei punti di incontro vale con grande precisione nonostante certe dissimmetrie del mondo reale come quelle dovute alla rotazione terrestre e alla distribuzione non isotropa delle masse celesti.

La uguaglianza dei lati delle caselle ottenuti muovendo il compasso trova dei limiti nell'effetto spiegato dalla `relatività speciale (wi)` della contrazione delle lunghezze di corpi che si muovono con velocità vicina a quella della luce.

Inoltre le nozioni di punto senza estensioni e di retta senza spessore trovano limiti nella descrizione dei sistemi che compongono la materia al livello microscopico (molecole, atomi, particelle subatomiche, particelle subnucleari), descrizione fornita dalla meccanica quantistica che in particolare sottolinea il carattere convenzionale della nozione di corpo puntiforme e che, nell'ambito della teoria delle stringhe, considera semplicistica la stessa attribuzione di tre dimensioni allo spazio fisico.

Da ultimo l'infinitezza delle rette (e di $\mathbb{Z}$) si trova in conflitto con i modelli cosmologici che sostengono un universo finito (e in espansione).

B21 m.02 Quindi non è opportuno insistere sui modelli più rivoluzionari della fisica moderna, meno vicini all'intuizione, ma conviene sottolineare che i punti, le rette e le figure che si cominciano a studiare con il piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sono delle idealizzazioni da utilizzare per modellizzare il mondo fisico senza pretese di esprimere nozioni assolute, come si è pensato fino a Kant, e come hanno cominciato a smentire Lobachevsky, Janos Bolyai e Gauss , ma nell'ambito di limiti che oggi sono piuttosto ben definiti.

Lo spazio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si può assumere come primo passo di un modello dello spazio fisico che si può dire classico e che, volendo personalizzare, si può associare ai nomi di Euclide , Archimede , Galileo e Newton .

Accanto ai limiti di questo modello non possono però essere ignorati i suoi meriti storici e didattici:

- i successi che ha ottenuto in particolare nel periodo aureo della geometria greco-ellenistica (V secolo a.C. - 150 a.C.), presso gli indiani e gli arabi e nei secoli dello sviluppo della rifondazione moderna della scienza dal 1600 all'ultima metà del XIX secolo;
- il fatto che sia indispensabile come punto di partenza anche per gli sviluppi più recenti (geometrie non euclidee dall'inizio del 1800, teorie relativistiche dal primo 1900, teorie quantistiche dagli anni intorno al 1925).

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php