

Capitolo B20: interi relativi e piano delle coppie di interi

Contenuti delle sezioni

a. interi negativi e interi relativi p.1 b. piano $-ZZ$, rette $-ZZK$ e nozioni elementari collegate p.4 c. somma e differenza di interi p.10 d. prodotto di interi p.12 e. permutazioni degli interi p.15 f. le nozioni di gruppo di simmetria e di gruppo in generale p.19 (pagine 24)

B20:0.01 Questo capitolo riprende l'introduzione dell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi ottenuto come estensione dell'insieme dei naturali motivata dalla opportunità di avere un ambiente numerico nel quale l'operazione di differenza sia definita per ogni coppia di operandi.

Questo ampliamento dell'insieme numerico $\mathbb{N}$ all'insieme $\mathbb{Z}$ viene effettuato un po' paradossalmente passando attraverso $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e la opportunità, evidente sul piano operativo, di estendere l'insieme delle coppie di naturali a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'insieme delle coppie di interi.

In effetti ponendoci in due dimensioni si possono visualizzare meglio le caratteristiche e le esigenze delle operazioni binarie, che svolgono il ruolo maggiore per l'ampliamento.

A questo punto risulta opportuno un primo esame di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, anche al fine di chiarire la struttura di questi insiemi che costituiscono i primi ambienti per la visualizzazione di svariate nozioni e per l'impostazione di basilari nozioni geometriche.

Si mostra anche come per trattare questi ambienti sia opportuno servirsi di un linguaggio che sta fra matematica, fisica e descrizione visiva.

Di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si esaminano anche le traslazioni e le riflessioni, endofunzioni biietive che inducono ad introdurre senza indugi la nozione di gruppo, struttura algebrica vista inizialmente nella versione dei gruppi di trasformazioni, prima di trattarla a livello generale introducendo i gruppi astratti.

Con i gruppi delle traslazioni e delle rotazioni si possono presentare le prime proprietà di simmetria delle figure geometriche, cioè delle configurazioni presentabili agevolmente ed efficacemente mediante loro visualizzazioni.

B20:a. interi negativi e interi relativi

B20:a.01 I numeri interi naturali sono stati introdotti al fine di esprimere quantità di entità di varia natura (oggetti materiali, esseri viventi, entità mentali, ...) caratterizzate dall'essere ciascuna ben individuabile. Nella pratica le entità trattate mediante interi per la maggior parte sono dotate di caratteristiche simili e in talune espressioni colloquiali vengono dette "uguali".

Un'altra importante applicazione dei naturali riguarda la possibilità di esprimere spostamenti su posizioni allineate ed equidistanziate in una direzione scelta come primaria o nella direzione opposta per tratti che hanno lunghezze multiple della distanza fra le posizioni contigue.

La somma di interi naturali è l'operazione che permette di esprimere sia l'accumularsi di entità che il succedersi di spostamenti in una unica direzione.

In B10:d, considerati due interi naturali m ed n con $m \leq n$, si è definita come differenza tra n ed m , e la si è denotata con $n - m$, l'intero naturale d tale che $m + d = n$.

Questa prima definizione della differenza quindi permette di esprimere l'eliminazione da un aggregato di entità di una parte di esse e il succedersi di uno spostamento in una direzione seguito da uno spostamento non superiore nella direzione opposta.

La somma e la differenza di interi naturali si presentano molto intuitivamente mediante un modello cinematico che presenta la raffigurazione piana dei numeri naturali allineati orizzontalmente ed equidistanziati. La somma $n + m$ si collega a due spostamenti: il primo verso destra di n unità dal punto 0 al punto n , il secondo anch'esso verso destra di m unità dal punto n al punto $n + m$. La differenza $n - m$ con $n > m$ si collega invece alla coppia di spostamenti formata ancora da quello verso destra di n unità dal punto 0 al punto n e da un secondo verso sinistra di m unità dal punto n al punto $n - m$.

Si rivela utile considerare anche una presentazione del tutto equivalente che raffigura gli spostamenti in verticale: questa è particolarmente significativa nel caso di interi utilizzati per operazioni finanziarie o attività di magazzino che comportano il sommarsi di crediti o l'accumularsi di beni materiali per l'espressione $n + m$ e il ridursi di un credito a causa di una restituzione o il diminuire di una scorta anche al di sotto di un livello di guardia in conseguenza di un asporto per l'espressione $n - m$.

B20:a.02 La varietà delle situazioni che si possono trattare con numeri interi al fine di descrivere spostamenti secondo una determinata direzione o la sua opposta e di descrivere scambi di denaro suggerisce che sia utile disporre di un'estensione dell'operazione differenza applicabile a numeri n ed m per i quali può accadere che sia $n \geq m$.

Questa operazione si vuole poterla utilizzare anche per spostamenti secondo una direzione che riguardano arretramenti superiori agli avanzamenti e per gli eventi finanziari nei quali un operatore ha debiti superiori ai crediti, ossia abbassamenti delle sue disponibilità maggiori degli innalzamenti.

Per effettuare una tale estensione delle operazioni, come vedremo, si rende necessario disporre di un ambiente più ampio dell'insieme dei naturali. Tale ampliamento risulta pienamente giustificato se fornisce un ambiente operativo più versatile: è opportuno estendere ad esso, oltre alla differenza, le operazioni di somma e prodotto e fare in modo che le operazioni estese mantengano tutte o in gran parte le proprietà che si sono dimostrate utili.

Osserviamo che la differenza fra interi naturali $n - m$ con $n \geq m$ è una funzione del genere $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$ avente come dominio il sottoinsieme "triangolare" di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$T := \text{Arc}(\mathbb{N}, \leq) := \{n \in \mathbb{N}, m \in [n] : \langle n, m \rangle\} = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \geq m\}.$$

La differenza fra naturali viene significativamente presentata con la seguente tabella che, in linea di principio, può essere estesa quanto si vuole:

Da questa tabella risultano evidenti le classi della equivalenza associata canonicamente alla funzione differenza, relazione che denotiamo con E'_- e che riguarda le caselle della T , cioè le coppie di naturali, caratterizzate dalla richiesta $\langle n, m \rangle E'_- \langle p, q \rangle$ sse $n + q = m + p$. Queste classi corrispondono agli insiemi delle caselle di T che sono allineate parallelamente alla diagonale principale.

Questa raffigurazione suggerisce di ampliare la E'_- innanzi tutto all'intero $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aggiungendole come nuove classi di equivalenza gli insiemi di coppie di naturali $\langle n, m \rangle$ con $m > n$ tali che sia costante

$m - n$; questi insiemi sono disgiunti e costituiscono una partizione di $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus T$. L'equivalenza così ottenuta la denotiamo con E''_- .

Gli elementi rappresentativi di maggiore evidenza delle nuove classi di equivalenza sono le coppie $\langle 0, m \rangle$ nelle posizioni più a sinistra nella tabella, come per le classi in T le più in evidenza sono le coppie più in basso $\langle n, 0 \rangle$.

Viene spontaneo contraddistinguere le nuove classi servendosi degli interi m come secondi membri delle coppie $\langle 0, m \rangle$; questi interi positivi m non si possono però utilizzare direttamente, in quanto darebbero classi indistinguibili da quelle rappresentate dagli interi positivi n ricavati dalle caselle $\langle n, 0 \rangle$. Utilizziamo quindi una loro variante tipografica associando a $\langle 0, m \rangle$ la scrittura $\overline{m}$.

B20:a.03 Per rendere utili le classi della equivalenza E''_- non contenute in T si è indotti a trattare le coppie che le rappresentano $\langle 0, m \rangle$, per $m \in \mathbb{P}$ dei nuovi numeri, ovvero le scritture $\overline{m}$, come entità sottoponibili ad operazioni come somma e prodotto che agiscono su due numeri nuovi oppure su un numero nuovo e un intero naturale.

Diciamo che due numeri m e $\overline{m}$ sono l'uno l'**opposto** dell'altro.

In tal modo si ha una tabella della differenza, anch'essa estendibile quanto si vuole, che assume il seguente aspetto:

Definiamo come insieme dei **numeri interi negativi** $\mathbb{Z}_- := \{m \in \mathbb{P} : \overline{m} \in \mathbb{P}\}$ e come insieme dei **numeri interi [relativi]** $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Riferendosi alla presentazione dei numeri naturali allineati orizzontalmente, si è indotti a collocare i numeri $\overline{m}$ a sinistra dello 0; questa operazione corrisponde a ridurre la tabella precedente alla sua prima riga e alla sua prima colonna e a ruotare questa in modo da disporla alla sinistra della suddetta riga.

Risultano utili due raffigurazioni dell'insieme $\mathbb{Z}$, la raffigurazione a punti e la raffigurazione a caselle:

Queste si possono chiamare **raffigurazioni della retta -Z**. La prima rappresenta più efficacemente $\mathbb{Z}$ come primo ambiente per la costruzione della geometria della retta. La seconda suggerisce la presentazione sequenziale delle funzioni aventi come dominio $\mathbb{Z}$.

B20:a.04 Abbiamo introdotto la scrittura “-Z” da usare come suffisso del sostantivo retta. Questo costituisce un esempio di quella che chiamiamo **specificazione sincopata**, elemento linguistico artificioso, ma che useremo spesso in quanto permette di esprimere concisamente la portata di varie qualifiche, espresse soprattutto da sostantivi, ma talora anche da aggettivi, verbi e avverbi.

In seguito incontreremo molte altre specificazioni sincopate, con i ruoli degli aggettivi, degli avverbi e dei complementi. In particolare useremo -N per fare riferimento agli interi naturali, -Z per oggetti concernenti i numeri interi, -NN per richiamare l'insieme delle coppie di naturali, -ZZ per le coppie di interi relativi (e molte sue precisazioni di carattere geometrico: -ZZH, -ZZV, -ZZR, -ZZB, -ZZK, ...), -QQ per riferirsi al piano razionale (B30:, B31:), -RR concernente il piano cartesiano reale (B43:), -CC riguardante il piano sui numeri complessi (B50:).

Accadrà di trattare numerose nozioni di carattere geometrico collocandole di volta in volta in insiemi come quelli delle coppie degli interi, delle coppie dei razionali, delle coppie o delle terne dei reali, delle coppie dei numeri complessi e così via. Le specificazioni sincopate possono risultare piuttosto efficaci per distinguere le diverse ambientazioni nelle quali si collocano gli enunciati ed ancor prima le definizioni.

Specificazioni sincopate saranno utilizzate anche per oggetti geometrici in tre dimensioni. In particolare useremo

- NNN per oggetti in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- ZZZ per oggetti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- ZZN per oggetti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,
- ZZP per oggetti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{P}$,
- RRR per oggetti in $\mathbb{R}^{\times 3}$ (lo spazio tridimensionale reale),
- CCC per oggetti in $\mathbb{C}^{\times 3}$ (lo spazio tridimensionale sui numeri complessi).

Inoltre utilizzeremo svariate specificazioni sincopate per i diversi generi di funzioni che tratteremo. In particolare useremo -N2N per le funzioni del genere $\{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$, -NN2N per le funzioni del genere $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$, -NN2Q per le funzioni del genere $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}\}$, -QQ per le funzioni del genere $\{\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}\}$, -RR per le funzioni del genere $\{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, -RRtR per le funzioni collocabili in $\{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ -CC per le funzioni del genere $\{\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$, -CCtC per le funzioni collocabili in $\{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ (cioè per le funzioni di due variabili complesse con valori complessi).

B20:a.05 Osserviamo anche che l'insieme $\mathbb{Z}_-$ e l'insieme $\mathbb{Z}$ sono numerabili: infatti essi si possono porre in biiezione con $\mathbb{N}$, risp., ad esempio, con le biiezioni seguenti

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -n-1 & \cdots \end{array} \right\downarrow \quad \text{e} \quad \left\downarrow \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots \end{array} \right\downarrow .$$

Cogliamo l'occasione per introdurre altre specificazione sincopate.

Diciamo **semiretta -N** la raffigurazione di $\mathbb{N}$.

Diciamo inoltre:

- funzioni -NN** le funzioni del genere $\{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$;
- funzioni -PP** le funzioni del genere $\{\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}\}$;
- funzioni -ZZ** le funzioni del genere $\{\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\}$;
- funzioni -QQ** le funzioni del genere $\{\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}\}$.

B20:b. piano -ZZ, rette -ZZK e nozioni elementari collegate

B20:b.01 Per estendere le operazioni di somma, prodotto e differenza dagli interi naturali a tutti i numeri interi si rende opportuno fare riferimento all'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ considerandolo un ampliamento di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Il prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, che chiamiamo anche, preferibilmente, **piano -ZZ**, costituisce un ambiente importante per lo sviluppo di molte nozioni matematiche basilari, in particolare nozioni di interesse geometrico, fisico e algoritmico.

In questa sezione introduciamo i primi termini ed i primi fatti che lo riguardano; successivamente, dopo aver trattato somma, differenza e prodotto degli interi, inizieremo un suo studio sistematico che proseguirà in B21:, B22: e D21: .

Il piano -ZZ viene chiamato anche **piano combinatorio**, **piano di Pólya**, e **piano cartesiano a coordinate intere**.

B20:b.02 Ci proponiamo di introdurre il piano -ZZ servendoci di un suo modello fisico che risulta utile e interessante per vari motivi:

- consente di servirsi, per matematica, fisica, programmazione e loro applicazioni, di un linguaggio visivo-cinematico capace di agevolare lo studio delle numerose utili configurazioni che si collocano nel piano -ZZ e nei suoi prevedibili successivi ampliamenti alternando argomentazioni formali e più sbrigative considerazioni intuitive;
- questo modello costituisce un primo passo verso i cosiddetti **modelli geometrico-fisici classici** dello spazio fisico, in sigla **modelli GFC**;
- costituisce un passaggio importante per il chiarimento della portata dei calcoli effettivi e dei loro rapporti con la geometria e la matematica astratta.

Come vedremo in seguito (:h), $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ può essere raffigurato in vari modi. Qui presentiamo il suo modello mediante una sola delle sue raffigurazioni, la cosiddetta raffigurazione geografica mediante punti e successivamente otterremo le restanti raffigurazioni come sue varianti.

B20:b.03 Un modello GFC riguarda oggetti fisicamente idealizzati (punti senza estensione, rette e piani privi di spessore e di estensione infinita, figure perfettamente regolari, ...).

Va ricordato che la geometria classica ha trattato questi oggetti con strumenti formalizzati i quali, nella storia della matematica, sono stati i primi utensili formali usati sistematicamente e con risultati di grande importanza.

Per ragioni di facilità ed efficacia espositiva risulta conveniente descrivere questi modelli in termini di materialità idealizzata.

Dei modelli GFC non diamo descrizioni costruttive dettagliate, ma solo indicazioni di massima su modalità che potrebbero essere seguite per tradurli in oggetti tangibili.

Il modello GFC per il piano -ZZ deve potersi trattare come sistema oggetto di elaborazioni finite e quindi ottenibile con processi finiti che si servono di attrezzi messi punto con risorse finite.

Alla base del modello si pone un “postulato di estendibilità delle risorse”: in relazione ad ogni esigenza di elaborazioni effettive, il modello GFC può essere ulteriormente esteso quanto serve e la precisione dei suoi elementi può essere ulteriormente raffinata quanto si vuole (cfr. B18:a).

Una sua costruzione effettiva richiederebbe estensione e precisione tendenzialmente elevate; senza entrare in alcun dettaglio, ci limitiamo ad enunciare che il modello si potrebbe costruire servendosi di tecniche che permettono di ottenere un modello esteso e preciso tanto da poter essere utile per numerose applicazioni di rilievo e che, per il postulato di estendibilità delle risorse, sia ulteriormente ampliabile e raffinabile.

B20:b.04 Vanno tuttavia subito segnalate le difficoltà che si incontrano per ottenere estensioni e precisioni sufficienti per applicazioni più esigenti di quelle collaudate, difficoltà che portano a limiti di applicabilità del modello a varie situazioni reali.

Questa dichiarazione sui limiti autorizza a procedere nello studio delle caratteristiche del modello al fine di ottenere risultati il più possibile applicabili.

In particolare risulta opportuno servirsi di un linguaggio che presuppone che la estensione e la precisione ottenibili per il modello siano migliorabili quanto si vuole, salvo abbandonare tale presupposto ideale nelle situazioni applicative nelle quali non risulta attuabile. (falsificazione del modello).

In effetti sappiamo dall’inizio del XX secolo, in seguito al consolidarsi della fisica dell’atomo e delle particelle elementari ed ai progressi dell’astrofisica, che la presupposta ipotesi della estensione e della precisione illimitatamente aumentabili incontra limiti invalicabili che possono essere quantificati ricorrendo alle teorie cinetiche, relativistiche e quantistiche. (v. in particolare [[moto browniano]], [[raggi catodici]], modelli per la [[spettroscopia]])

In molti contesti tuttavia la precisione del modello GFC risulta sufficiente, ovvero è sensato assumerla sufficiente; in questi casi risulta accettabile esprimersi confondendo le componenti del modello fisico con gli oggetti spaziali idealizzati e con le entità formali che li rappresentano.

In effetti in molti contesti l'assunzione del modello GFC consente esposizioni scorrevoli, cioè risulta vantaggioso sul piano della esposizione.

B20:b.05 La prima fase costruttiva del modello GFC per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ concerne una linea di riferimento equivalente a una retta -Z che nei fogli o schermi che utilizziamo per comunicare raffiguriamo come orizzontale, senza tuttavia preoccuparci dell'orientazione di questi fogli nello spazio fisico.

Si traccia dunque una linea “orizzontale” sufficientemente rettilinea, sottile ed estesa in grado di dare l'idea di una linea retta ideale “illimitatamente sottile ed estesa”, servendosi di strumenti di elevata precisione, vuoi meccanici, vuoi costituiti da segnali luminosi o da altre radiazioni elettromagnetiche (ad esempio fornita da un laser) per conseguire quella che giudichiamo come buona rettilineità.

Questo è un modello fisico per un primo esempio di linea ideale che chiamiamo **retta di riferimento orizzontale**; anticipando i discorsi che svilupperemo parlando del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (B43:), in breve la denoteremo con Ox_{ZZ} .

Nella seconda fase si fissa, una unità di misura per le lunghezze che servirà per stabilire distanze tra i punti che prenderemo in considerazione.

Per questo si sceglie un “regolo campione” costituito da un solido con proprietà meccaniche e termiche tali da assicurare una sua buona invariabilità allo scorrere del tempo, al variare della sua posizione e della sua orientazione ed anche a contenute variazioni della temperatura; più modernamente potremmo servirci di un procedimento spettroscopico (v. [[Metro]]).

Si cura che la sua estensione possa essere riprodotta ovunque serva mediante un compasso da costruire anch'esso con opportune tecniche di precisione.

Si trascura invece il fatto che la riproducibilità delle lunghezze incontra limiti che emergono dalla [[relatività ristretta]].

B20:b.06 Sulla retta di riferimento orizzontale si fissa un punto che si dice **origine del piano -ZZ** e ad esso si associa l'elemento $\langle 0, 0 \rangle$ di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sulla destra dell'origine alla distanza unitaria fornita dal compasso si individua il punto che si associa alla coppia $\langle 1, 0 \rangle$.

Spostandosi sulla retta di riferimento verso destra con passi unitari determinati dal compasso, si individuano successivamente i punti $\langle i, 0 \rangle$ per $i = 2, 3, \dots, N$ e sulla sinistra i punti $\langle -1, 0 \rangle, \langle -2, 0 \rangle, \langle -3, 0 \rangle, \dots, \langle -N, 0 \rangle$. In tal modo si può avvicinare la definizione del modello dell'insieme $\{i \in \mathbb{Z} : \langle i, 0 \rangle\}$ quanto lo richiedono le applicazioni prospettate. Questo insieme viene chiamato **primo asse -ZZ di riferimento, asse -ZZ orizzontale, asse -ZZH o asse -ZZ delle ascisse**.

A questo punto conviene introdurre la notazione $-\infty$ con due significati: (a) come componente del costruito $(-\infty : k]$ con il quale si individua l'insieme degli interi relativi inferiori o uguali all'intero k ; (b) come elemento di espressioni quale “tendere a $-\infty$ di un intero variabile che va assumendo valori sempre più negativi.

Possiamo anche introdurre la notazione $\pm\infty$ per denotare un oggetto che può essere aut $-\infty$ aut $+\infty$. Essa in particolare può servire a caratterizzare un intero variabile che va assumendo valori sempre più grandi in valore assoluto in espressioni come “intero che tende a $\pm\infty$ ”.

Conviene sottolineare, per il seguito, che sono state effettuate alcune scelte in modo arbitrario, senza curarsi di possibili vincoli pratici o di principio: le scelte dell'unità di misura, dell'orientazione dell'asse di riferimento è stata fatta e dell'origine delle coordinate.

B20:b.07 Utilizziamo ora un compasso dotato di una seconda punta in grado di tracciare curve sottili quanto serve; puntandolo successivamente nei punti $\langle 1, 0 \rangle$ e $\langle -1, 0 \rangle$ e apertura superiore ad 1 (ad esempio pari a 2) si tracciano due archi che si intersecano in due punti come in figura e si individua una retta materiale sufficientemente sottile ed estesa passante per questi due punti; questa retta viene chiamata “seconda retta euclidea di riferimento”.

Su questa retta con il compasso si individuano i punti $\langle 0, 1 \rangle$, $\langle 0, 2 \rangle$, $\langle 0, 3 \rangle$, ... muovendosi al di sopra dell'origine e verso l'alto e i punti $\langle 0, -1 \rangle$, $\langle 0, -2 \rangle$, $\langle 0, -3 \rangle$, ... muovendosi al di sotto dell'origine verso il basso.

In tal modo si viene a definire il modello dell'insieme $\{j \in \mathbb{Z} : \langle 0, j \rangle\}$, insieme detto **secondo asse -ZZ di riferimento**, **asse -ZZ verticale**, **asse -ZZV** o **asse -ZZ delle ordinate**. Esso lo si denota concisamente con Oy_{ZZ} .

Si effettuano successivamente le costruzioni analoghe delle rette verticali passanti per i punti $\langle i, 0 \rangle$ di Ox servendosi del compasso con seconda punta tracciante imperniato nella coppia di punti $\langle i - 1, 0 \rangle$ e nella $\langle i + 1, 0 \rangle$. Su queste rette operando con il compasso con apertura unitaria si individuano quanti si vogliono punti $\langle i, j \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

B20:b.08 Sul piano -ZZ, aiutandoci con il linguaggio del modello GFC, si individuano varie nozioni di natura geometrica.

Due **punti -ZZ** della forma $\langle i, j \rangle$ e $\langle i, j + 1 \rangle$ si dicono **adiacenti -ZZH**; due **punti -ZZ** della forma $\langle i, j \rangle$ e $\langle i + 1, j \rangle$; si dicono **adiacenti -ZZV**; due **punti -ZZ** della forma $\langle i, j \rangle$ e $\langle i + 1, j + 1 \rangle$ si dicono **adiacenti -ZZD1**; due **punti -ZZ** della forma $\langle i, j \rangle$ e $\langle i + 1, j - 1 \rangle$; si dicono **adiacenti -ZZD2**. Abbiamo quindi individuate quattro relazioni fra elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: **adiacenza -ZZH**, **adiacenza -ZZV**, **adiacenza -ZZD1** e **adiacenza -ZZD2**.

L'unione delle due relazioni di adiacenza -ZZH e adiacenza -ZZV e si dice **adiacenza -ZZR**. La lettera R che caratterizza questa specificazione e varie altre notazioni riguardanti $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ richiama i movimenti della torre del gioco degli scacchi, in inglese *rook*.

L'unione delle due relazioni di adiacenza -ZZD1 e adiacenza -ZZD2 e si dice **adiacenza -ZZB**. La lettera B che caratterizza questa specificazione ed altre notazioni concernenti $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ richiama i movimenti dell'alfiere del gioco degli scacchi, in inglese *bishop*.

L'unione delle due relazioni di adiacenza -ZZR e adiacenza -ZZB e si dice **adiacenza -ZZK**. La lettera K che caratterizza questa relazione ed altre nozioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ richiama i movimenti del re del gioco degli scacchi, in inglese *king*.

Tutte queste relazioni sono banalmente decidibili a partire dalle due coordinate caratterizzanti ciascun punto individuato.

B20:b.09 Chiamiamo **lati -ZZ1H** i duetti di punti adiacenti -ZZH, cioè gli insiemi esprimibili come $\{\langle i, j \rangle, \langle i, j + 1 \rangle\}$; diciamo **lati -ZZ1V** i duetti di punti adiacenti -ZZV, cioè gli insiemi aventi la forma $\{\langle i, j \rangle, \langle i + 1, j \rangle\}$; collettivamente questi duetti di punti -ZZ si dicono **lati -ZZ1R** o **segmenti -ZZR elementari**.

Se $\{P, Q\}$ è un lato -ZZ1R, i punti P e Q si dicono **estremità del lato**.

Diciamo **casella -ZZ** l'entità individuata da un quartetto di punti -ZZ della forma

$$\{\langle i, j \rangle, \langle i + 1, j \rangle, \langle i, j + 1 \rangle, \langle i + 1, j + 1 \rangle\}.$$

Questi quattro punti si dicono **vertici della casella**; si dicono invece **lati della casella** i duetti di punti

$$\{\langle i, j \rangle, \langle i + 1, j \rangle\}, \{\langle i + 1, j \rangle, \langle i + 1, j + 1 \rangle\}, \{\langle i + 1, j + 1 \rangle, \langle i, j + 1 \rangle\} \text{ e } \{\langle i, j + 1 \rangle, \langle i, j \rangle\},$$

cioè i duetti di vertici di due caselle adiacenti.

Due vertici di una casella -ZZ che non sono adiacenti -ZZR si dicono **vertici opposti** della casella; due tali punti -ZZ si dicono anche **punti adiacenti -ZZB**.

Gli insiemi di caselle -ZZ si dicono anche **insiemi -ZZC**.

Diciamo **diagonali -ZZD1 elementari** i duetti di punti -ZZ della forma $\{\langle i, j \rangle, \langle i + 1, j + 1 \rangle\}$; chiamiamo **diagonali -ZZD2 elementari** i duetti di punti -ZZ della forma $\{\langle i, j \rangle, \langle i + 1, j - 1 \rangle\}$; collettivamente queste coppie di punti si dicono **segmenti diagonali -ZZ elementari** o **segmenti -ZZB elementari** o **lati -ZZ1B**. Collettivamente i segmenti elementari -ZZ1R ed segmenti elementari -ZZ1B si dicono **segmenti elementari -ZZ1K**.

Due segmenti -ZZ1K si dicono **segmenti -ZZ1K adiacenti** sse hanno un vertice in comune.

Due **caselle -ZZ** si dicono **adiacenti -ZZR** sse hanno un lato -ZZ1R in comune; si dicono **adiacenti -ZZB** sse hanno in comune un solo vertice; si dicono **adiacenti -ZZK** sse sono adiacenti -ZZR o adiacenti -ZZB.

B20:b.10 La struttura costituita da punti -ZZ, caselle -ZZ e lati -ZZ1R verrà chiamata **griglia combinatoria**. Per molti discorsi, ad esempio per definire le nozioni di circuito -ZZ e di area con segno (B21:r), risulta utile servirsi di questo arricchimento dell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Nel modello fisico i lati si possono far corrispondere ad aste sottili che uniscono i loro punti estremità. Si possono invece considerare come rappresentanti materiali delle caselle delle piastrelle quadrate ovvero delle tessere di un mosaico, che siano accuratamente intercambiabili e che abbiano i vertici fisici collocati in punti -ZZ.

Oltre a queste relazioni fra elementi omogenei della griglia combinatoria, risulta utile introdurre in una prima forma una relazione di portata generale, l'**incidenza**, che riguarda duetti di entità che possono essere oggetti geometrici di natura diversa.

Cominciamo a definire l'adiacenza fra punti -ZZ, segmenti elementari -ZZ e caselle -ZZ.

Si dice che un punto -ZZ e un lato -ZZ1R sono incidenti sse il punto è un'estremità del lato. Si dice che un punto -ZZ e una casella -ZZ sono incidenti sse il punto è un vertice della casella. Si dice che un lato -ZZ1R e una casella -ZZ sono incidenti sse il lato è lato della casella.

B20:b.11 Accanto all'asse -ZZH e all'asse -ZZV, introduciamo altri semplici sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Si dice **diagonale principale -ZZ** o semplicemente **diagonale -ZZ**, di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'insieme $\{i \in \mathbb{Z} : \langle i, i \rangle\}$.

Si dice **diagonale secondaria -ZZ** o **codiagonale -ZZ** $\{i \in \mathbb{Z} : \langle i, -i \rangle\}$.

Si introducono senza difficoltà i sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ infiniti, evidentemente numerabili, che generalizzano assi e diagonali:

Per $\forall k \in \mathbb{Z}$, **retta -ZZ orizzontale** o **retta -ZZH**: $\{i \in \mathbb{Z} : \langle i, k \rangle\}$.

Per $\forall h \in \mathbb{Z}$, **retta -ZZ verticale** o **retta -ZZV**: $\{j \in \mathbb{Z} : \langle h, j \rangle\}$.

Collettivamente le rette -ZZH e -ZZV si dicono **rette -ZZR**.

Per $\forall s \in \mathbb{Z}$ si dice retta -ZZD1 o **parallela -ZZ alla diagonale principale**: $\{i \in \mathbb{Z} : \langle i + s, i \rangle\}$;

Per $\forall s \in \mathbb{Z}$ si dice retta -ZZD2 o **parallela -ZZ alla diagonale secondaria**: $\{i \in \mathbb{Z} : \langle i + s, -i \rangle\}$.

Collettivamente le rette -ZZD1 e -ZZD2 si dicono **rette -ZZB**.

Collettivamente le rette -ZZR e -ZZB si dicono **rette -ZZK**.

Ancora le lettere R, B e K che distinguono le specificazioni sincopate attribuite alle precedenti entità derivano, risp., dai termini scacchistici *rook*, *bishop* e *king*.

B20:b.12 Sopra un modello fisico costruito con la adeguata accuratezza si possono verificare sperimentalmente e in buona approssimazione alcuni fatti.

- (1) Due diverse rette verticali non hanno alcun punto in comune (in accordo con il fatto che per i e h interi diversi gli insiemi $\{j \in \mathbb{Z} : \langle i, j \rangle\}$ e $\{j \in \mathbb{Z} : \langle h, j \rangle\}$ sono disgiunti).
- (2) Due diverse rette orizzontali non presentano punti in comune, analogamente a quanto visto in (1).
- (3) Due diverse rette -ZZD1 e due diverse rette -ZZD2 non presentano punti in comune, per motivi analoghi a quello visto in (1).
- (4) Per ogni $i \in \mathbb{Z}$ i punti $\langle i, j \rangle$ al variare di $j \in \mathbb{Z}$, punti di ciascuna delle rette -ZZV, sono otticamente allineati;
- (5) Similmente risultano otticamente allineati i punti di ciascuna delle rette -ZZH, -ZZD1 e -ZZD2.
- (6) Muovendo una sagoma S quadrata di materiale con buone doti di indeformabilità che si può sovrapporre con buona precisione ad una casella -ZZ C in modo da avvicinare il suo vertice -SW al vertice -SW di una qualsiasi altra casella -ZZ C' , si riesce a sovrapporla con buona accuratezza; questo è in accordo con la possibilità di individuare una corrispondenza biunivoca dell'insieme -ZZC con se stesso che mantenga le relazioni di adiacenza -ZZH e -ZZV tra caselle la quale alla C faccia corrispondere la C' (v.a. le considerazioni sulle traslazioni -ZZ in B21:d).
- (7) Analoga possibilità di sovrapporre caselle collocate opportunamente in seguito a a riflessioni rispetto a rette -ZZK (ma non solo) ed a rotazioni di 90° (queste verifiche saranno precisate alla luce di B22:a e B22:c).

B20:b.13 Come accennato, il piano combinatorio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ può essere raffigurato in vari modi, ciascuno dei quali presenta qualche vantaggio. Una distinzione riguarda le raffigurazioni che chiamiamo geografiche e le matriciali; un'altra contrappone le raffigurazioni mediante punti (o nodi) e quelle che si servono di caselle (o tessere).

Nella **raffigurazione geografica mediante punti** le rette orizzontali riguardano i nodi $\langle i, j \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la prima componente variabile e crescente da sinistra a destra e con la seconda componente fissa; le rette verticali riguardano i nodi con la prima componente fissa e la seconda crescente dal basso in alto. Essa spesso viene considerata una riduzione della usuale raffigurazione del piano cartesiano, limitata ai soli punti con entrambe le coordinate intere. Questa raffigurazione è la più usata e sarà chiamata anche **raffigurazione normale**.

La **raffigurazione matriciale mediante punti** si può pensare ottenuta dalla precedente mediante una rotazione del foglio di un quarto di angolo giro nel verso del movimento delle lancette di un orologio.

Nelle **raffigurazioni mediante caselle** i punti sono rimpiazzati da quadratini adiacenti. Queste figure, fin tanto che ci si limita a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sono da considerare elementari, indivisibili, e i loro lati di lunghezza unitaria (grandezza che, va ricordato, si può scegliere in modo arbitrario).

B20:b.14 Per molte considerazioni la scelta della raffigurazione è poco rilevante, in quanto è facile passare dall'una all'altra. Quando si devono introdurre certi dettagli è comunque necessario precisare quale raffigurazione si adotta per evitare ambiguità: espressioni di largo uso come “orizzontale”, “verticale”, “più a destra”, “immediatamente sotto”, “altezza” e “larghezza” usate per la raffigurazione geografica da un lato e per la matriciale dall'altro individuano costruzioni su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ben diverse.

Le raffigurazioni mediante caselle sono convenienti per la presentazione di molte funzioni aventi come dominio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o una sua parte. Questo accade per le matrici finite speciali che vengono presentate come schieramenti dei valori assunti da funzioni di un genere come $\{(m) \times (n)\}$.

Per le raffigurazioni matriciali alle rette -ZZH corrispondono colonne infinite, alle rette -ZZV righe infinite, alle rette -ZZD1 corrispondono gli allineamenti obliqui che vanno dall'alto a sinistra al basso a destra, mentre alle rette -ZZD2 corrispondono gli allineamenti obliqui che vanno dal basso a sinistra all'alto a destra

Nella raffigurazione geografica mediante caselle:

una retta -ZZH si dice anche **riga illimitata**,
 una retta -ZZV si dice anche **colonna illimitata**,
 una retta -ZZD1 si dice anche **scala crescente illimitata**,
 una retta -ZZD2 si dice anche **scala decrescente illimitata**.

Nelle raffigurazioni geografiche la diagonale principale si dice anche **diagonale -ZZ crescente**, mentre la secondaria si dice **diagonale -ZZ decrescente**.

I due aggettivi vanno scambiati quando si fa riferimento alla raffigurazione matriciale.

B20:c. somma e differenza di interi

B20:c.01 Dobbiamo ora estendere a $\mathbb{Z}$ estendendo le operazioni di somma e differenza. Per questo conviene riferirsi a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ confrontandolo con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e sviluppare considerazioni facilmente visualizzabili; queste servono anche per introdurre altri oggetti e termini della geometria.

Vedremo che risulta opportuno mantenere per la differenza la proprietà di invarianza per incremento di una stessa quantità degli operandi espressa dalla

$$\forall k \in \mathbb{N} : (n + k) - (m + k) = n - m .$$

Iniziamo con considerazioni immediatamente visualizzabili. Chiamiamo **successore -N** la relazione che collega un qualsiasi intero naturale al suo successivo, cioè l'insieme di coppie $\{z \in \mathbb{N} : \langle z, z + 1 \rangle\}$.

Inoltre chiamiamo **predecessore -N** la relazione sua trasposta cioè l'insieme di coppie $\{z \in \mathbb{N} : \langle z + 1, z \rangle\}$ e **adiacenza -N** la unione di successore -N e predecessore -N.

Ciascuna di queste tre relazioni, tra di loro strettamente collegate, fornisce la caratterizzazione strutturale di base della retta -Z.

Si osserva innanzi tutto che ogni elemento di $\mathbb{N}$ può essere raggiunto dall'elemento 0 mediante gli spostamenti associabili alle coppie di interi naturali costituenti la relazione successore -N.

Le operazioni di somma e differenza fra interi naturali conservano la relazione successore -N: infatti se a e b sono interi naturali con $b = a + 1$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ sono nella stessa relazione, risp., $a + k$ e $b + k$, $a - k$ e $b - k$; mentre $k - a$ e $k - b$ sono nella relazione predecessore -N (ammesso che queste ultime coppie facciano parte di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Questa conservazione della relazione corrisponde alla osservazione che in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le coppie delle prime due relazioni costituiscono le due semirette -NND1 parallele alla diagonale principale che ad essa sono le più vicine.

B20:c.02 Vogliamo ora estendere queste relazioni al piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ chiedendo che siano relazioni mantenute dalle operazioni di somma e differenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Il mantenimento da parte della somma equivale a dire che questi insiemi di coppie siano invarianti per scorrimento parallelo alla diagonale principale. Quindi definiamo relazione **successore -Z** l'insieme

di coppie $\{z \in \mathbb{Z} : \langle z, z+1 \rangle\}$, relazione **predecessore -Z** l'insieme $\{z \in \mathbb{Z} : \langle z+1, z \rangle\}$ e relazione **adiacenza -Z** l'unione di queste due relazioni.

Queste relazioni visivamente consistono nelle due rette -ZZD1 adiacenti alla diagonale principale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, prolungamenti delle semirette -ZZ concernenti le relazioni omologhe per $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si osserva che le relazioni predecessore -Z e successore -Z sono delle permutazioni di $\mathbb{Z}$. In quanto endofunzioni si possono denotare, risp., con le notazioni funzionali $\prec(n)$ e $\succ(n)$

B20:c.03 Dopo avere esteso $\mathbb{N}$ sulla sinistra, si è indotti ad estendere la differenza prolungando nella direzione SW le rette -ZZD1 e mantenendo in esse i valori d o $\bar{d}$, ottenendo in definitiva la tavola di composizione:

$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0
$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1
$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2
$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3
$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4
$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5
$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6
$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Da questa tabella avente come dominio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si ricava, innanzi tutto, che scambiando i due operandi della differenza si passa da un valore positivo p al numero negativo opposto $\bar{p}$ e viceversa da un intero negativo $\bar{q}$ al suo opposto positivo q .

Il passaggio all'intero opposto risulta quindi una involuzione; per tale permutazione di $\mathbb{Z}$ l'unico punto fisso è l'elemento 0.

Si osserva poi che:

$$\begin{aligned} \forall m, n \in \mathbb{N} : \quad n - \bar{m} &= n + m & \bar{n} - m &= \overline{n + m} & \bar{n} - \bar{m} &= m - n \\ 0 - m &= \bar{m} & n - 0 &= n & 0 - \bar{m} &= m & \bar{n} - 0 &= \bar{n} . \end{aligned}$$

Si può allora osservare che il numero opposto di un qualsiasi intero z si può convenientemente esprimere come $\bar{z}$ e il passaggio da un intero al suo opposto come $\lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto \bar{z} \rceil$. Con questa scrittura il carattere involutorio del passaggio all'opposto si esprime mediante l'identità $\bar{\bar{z}} = z$ e le 4 precedenti uguaglianze si riscrivono come segue:

$$(1) \quad \forall z, w \in \mathbb{Z} : \quad 0 - z = \bar{z} \quad z - 0 = z \quad z - w = \bar{w} - \bar{z} = \overline{w - z} .$$

B20:c.04 Cerchiamo ora di estendere la somma a tutte le coppie di interi; anche per questo procediamo ad una analoga estensione a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ della presentazione geografica su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dell'operazione:

Per mantenere la proprietà espressa dalla $\forall k \in \mathbb{N} : m + n = (m + k) + (n - k)$ basta passare a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e attribuire lo stesso valore a tutte le caselle di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ costituenti ciascuna delle rette -ZZD2, le parallele alla codiagonale: in una prima fase si estendono verso SE e NW i segmenti del primo

quadrante e successivamente si procede ad assegnare i valori $\bar{p}$ per $p = 1, 2, 3, \dots$ alle rette -ZZD2 via via più spostate verso SW. Alla fine si ottiene:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3	4	5
$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3	4
$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3
$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	3	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2
$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	4	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1
$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	5	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0

Si nota che la precedente tavola di composizione si ottiene da quella per la differenza riflettendola rispetto alla retta orizzontale relativa ad $m = 0$, cioè scambiando i valori di m con gli opposti; questo fatto equivale all'uguaglianza $n + m = n - \bar{m}$.

Si osserva anche che l'estensione equivale alle scelte:

$$(1) \quad n + \bar{m} := n - m \quad \bar{n} + m := m - n \quad \bar{n} + \bar{m} := \overline{n + m}.$$

Infine si osserva che estendendo la somma da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si mantengono le sue principali proprietà: la sua simmetria (ovvero la sua commutatività) e la sua associatività.

B20:d. prodotto di interi

B20:d.01 È spontaneo cercare di estendere a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il prodotto di naturali per ampliare la portata della operazione prodotto.

Anche per questa estensione si procede ad ampliare la presentazione tabellare su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dell'operazione: Si rivela utile mantenere per la moltiplicazione di un naturale n per un intero z il compito di esprimere la somma di n addendi uguali a z : quindi si chiede

$$(1) \quad \forall z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : n \cdot z := \underbrace{z + z + \dots + z}_{n\text{-volte}}.$$

In particolare, procedendo per induzione su m , si trova

$$(2) \quad \forall z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : n \cdot \bar{m} = \underbrace{\bar{m} + \bar{m} + \dots + \bar{m}}_{n\text{-volte}} = \overline{n \cdot m}.$$

La precedente richiesta consente applicazioni come quella riguardante il calcolo del debito complessivo di n debitori che devono a un creditore una stessa quantità di denaro m o quella riguardante la valutazione dell'arretramento complessivo dovuto all'applicazione di n arretramenti successivi, tutte della stessa estensione m .

Inoltre si trova decisamente vantaggioso chiedere di mantenere la simmetria dell'operazione definendo

$$(3) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : \bar{n} \cdot m := \overline{n \cdot m}.$$

Seguendo lo stesso criterio di perseguire vantaggi operativi ed espositivi si richiede infine la completa simmetria della tabella del prodotto rispetto al centro $\langle 0, 0 \rangle$ ponendo

$$(4) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} : \bar{n} \cdot \bar{m} := n \cdot m.$$

La presentazione tabellare geografica del prodotto di interi assume allora il seguente aspetto simmetrico (agevolmente controllabile):

$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	0	5	10	15	20	25
$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	0	4	8	12	16	20
$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	0	3	6	9	12	15
$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	0	2	4	6	8	10
$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
10	8	6	4	2	0	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
15	12	9	6	3	0	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$
20	16	12	8	4	0	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$
25	20	15	10	5	0	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$

si osserva che la richiesta di mantenimento del prodotto per simmetria rispetto all'origine equivale al passaggio al prodotto opposto per riflessione riapetto all'assee orizzontale e per riflessione rispettoo all'asse verticale,

L'opportunità della scelta della simmetria si rivelerà pienamente con l'introduzione delle aree con segno per figure -ZZ orientate (B24:d, :h).

B20:d.02 La scrittura $\bar{z}$ si può considerare una semplificazione di una scrittura di forma esponenziale come z^{-e} , scrittura che si serve di un operatore unario in posizione esponenziale. Si può considerare come sua alternativa del tutto equivalente una scrittura che si serve di un operatore unario prefisso come $-_uz$; questo operatore **meno unario** $-_u$ esprime la involuzione $\mathbf{Mirr}_{0,\mathbb{Z}} := \lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto \bar{z} \rceil$, cioè il passaggio all'intero opposto (la notazione $\mathbf{Mirr}_0$ è stata scelta in vista della generalizzazione che introduciamo in :e.03).

La notazione $-_uz$ consente di scrivere le uguaglianze

$$(1) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} : \quad -_u m = (-_u 1) \cdot m \quad , \quad n - m = n + (-_u m) \quad , \quad 0 - m = -_u m .$$

In genere il segno meno unario viene scritto come il binario: questo apre la possibilità di scritture ambigue che però in genere il contesto consente di interpretare con le corrette distinzioni.

B20:d.03 L'ordine $\leq$ si estende dagli interi naturali a tutti gli interi relativi in accordo con la raffigurazione di $\mathbb{Z}$ con i numeri negativi allineati alla sinistra dei numeri naturali.

Per due interi positivi qualsiasi si definisce quanto segue.

$$(1) \quad \forall m, n \in \mathbb{P} : \quad -_u n < 0 < m \quad \text{e} \quad -_u n < -_u m \iff m < n .$$

Le proprietà di antisimmetria e di transitività della relazione “<” si verificano facilmente.

Dopo questa definizione si estendono facilmente dai naturali a tutti gli interi, cioè da $\mathbb{N}$ all'intero $\mathbb{Z}$, le nozioni di intervallo e le funzioni massimo e minimo.

$$\forall w, z \in \mathbb{Z} : \quad [w : z] := \begin{cases} \{w, w+1, \dots, z\} & \text{sse } w < z , \\ \{w\} & \text{sse } w = z , ; \\ \emptyset & \text{sse } w > z ; \end{cases}$$

$$(2) \quad (w : z] := [w : z] \setminus \{w\} \quad , \quad [w : z) := [w : z] \setminus \{z\} \quad , \quad (w : z) := [w : z] \setminus \{w, z\} \quad ;$$

$$\max(w, z) := \begin{cases} z & \text{se } w \leq z , \\ w & \text{se } z \leq w ; \end{cases} \quad \min(w, z) := \begin{cases} w & \text{se } w \leq z , \\ z & \text{se } z \leq w ; \end{cases}$$

Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà ‘

$$\max(w, z) = \max(z, w) \quad , \quad \min(w, z) = \min(z, w) \quad , \quad \max(w, z) = z \iff \min(w, z) = w \quad .$$

Si introducono anche gli intervalli illimitati di interi:

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{Z} \quad : \quad (-\infty : z] &:= \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq z\} = \{\dots, z-1, z\} \quad , \\ (3) \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad : \quad [w : +\infty) &:= \{k \in \mathbb{Z} \mid w \leq k\} = \{w, w+1, \dots\} \quad , \\ &(-\infty : +\infty) := \mathbb{Z} \quad . \end{aligned}$$

(4) Eserc. Per le cardinalità degli intervalli finiti verificare le uguaglianze

- (a) $[m, n]^{\#} = \max(m - n + 1, 0)$;
- (b) $(m, n]^{\#} = [m, n)^{\#} = \max(m - n, 0)$;
- (c) $(m, n)^{\#} = \max(m - n - 1, 0)$.

B20:d.04 Spesso risultano utili due funzioni su $\mathbb{Z}$: il **valore assoluto** di $z \in \mathbb{Z}$ denotato con $\text{abs}(z)$, oppure concisamente mediante delimitatori con $|z|$, ed il **segno** di $z \in \mathbb{Z}$ scritto $\text{sign}(z)$, definite come segue.

$$(1) \quad |z| := \text{abs}(z) := \begin{cases} z & \text{sse } z \geq 0 \quad , \\ -z & \text{sse } z \leq 0 \quad ; \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{sign}(z) := \begin{cases} +1 & \text{sse } z > 0 \quad , \\ 0 & \text{sse } z = 0 \quad , \\ -1 & \text{sse } z < 0 \quad . \end{cases}$$

(3) Eserc. Verificare gli enunciati che seguono.

- (a) $\forall z, w \in \mathbb{Z} \quad : \quad \text{sign}(z \cdot w) = \text{sign}(z) \cdot \text{sign}(w) \quad , \quad \text{sign}(-z) = -\text{sign}(z) \quad , \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
 $, \quad |-z| = |z| \quad .$
- (b) $\forall z, w \in \mathbb{Z} \quad : \quad z = \text{sign}(z) \cdot |z| \quad , \quad z^2 = |z|^2 \quad , \quad z^3 = \text{sign}(z) \cdot |z|^3 \quad .$
- (c) $\forall z, w \in \mathbb{Z} \quad : \quad ||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w| \quad .$

B20:d.05 Anche la definizione delle potenze intere naturali degli interi naturali si estende a tutti gli interi relativi.

$$(1) \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad : \quad z^n := \begin{cases} 1 & \text{sse } n = 0 \quad , \\ z \cdot z^{n-1} & \text{sse } n \in \mathbb{P} \quad . \end{cases}$$

Si dimostrano quindi le seguenti proprietà:

$$(2) \quad \forall y, z \in \mathbb{Z} \quad , \quad m, n \in \mathbb{N} \quad : \quad (y \cdot z)^n = y^n \cdot z^n \quad , \quad z^{m+n} = z^m \cdot z^n \quad , \quad z^{m \cdot n} = (z^m)^n \quad , \\ z^{2n} = |z|^{2n} \quad , \quad z^{2n+1} = \text{sign}(z) \cdot |z|^{2n+1} \quad \blacksquare$$

B20:d.06 Si dice insieme dei multipli (interi) dell'intero z l'insieme $\{f \in \mathbb{Z} : | f \cdot z\}$; questo insieme si denota anche concisamente con $z \cdot \mathbb{Z}$.

Si osserva che

$$(1) \quad 1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad , \quad 0 \cdot \mathbb{Z} = \{0\} \quad \text{e} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad : \quad -z \cdot \mathbb{Z} = z \cdot \mathbb{Z} \quad .$$

Fissato $f \in \mathbb{Z}$, si dice **dilatazione -Z** relativa al fattore f la trasformazione $\mathbf{Dil}_f := \{ z \in \mathbb{Z} \mapsto f \cdot z \}$. Ciascuna di queste trasformazioni associa a ogni intero uno dei suoi multipli.

Mentre $\mathbf{Dil}_1$ non è che l'identità di $\mathbb{Z}$, $\mathbf{Dil}_{-1}$ si constata coincidere con la riflessione rispetto a 0, cioè con $\mathbf{Mirr}_{0,\mathbb{Z}}$.

Queste sono le due sole dilatazioni che sono anche permutazioni di $\mathbb{Z}$.

Tra le altre dilatazioni, evidentemente, $\mathbf{Dil}_0$ è la funzione collasso $\lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto 0 \rceil$.

Infine per ogni $f \in [2 : +\infty)$ la trasformazione $\mathbf{Dil}_f$ ha come codominio l'insieme degli interi multipli di f , $f\mathbb{Z}$ e quindi non è suriettiva ma solo iniettiva.

Trasformazioni analoghe sono le $\mathbf{Dil}_{-f}$, ciascuna relativa ad un fattore negativo appartenente a $(-\infty : -2]$.

(1) Eserc. Verificare le seguenti relazioni, nelle quali si suppone che $\circ$ possa esprimere sia $\circ_{lr}$ che $\circ_{rl}$:

- (a) $\forall f, g \in \mathbb{Z} : \mathbf{Dil}_f \circ \mathbf{Dil}_g = \mathbf{Dil}_{f \cdot g} = \mathbf{Dil}_g \circ \mathbf{Dil}_f$.
- (b) $\forall f \in \mathbb{Z} : \mathbf{Dil}_f = \mathbf{Dil}_{|f|} \circ \mathbf{Dil}_{\text{sign}(f)} = \mathbf{Dil}_{\text{sign}(f)} \circ \mathbf{Dil}_{|f|}$.

B20:e. permutazioni degli interi

B20:e.01 Come avremo ampiamente modo di vedere, per approfondire la conoscenza di molte strutture e delle loro problematiche (soprattutto di quelle esprimibili in termini geometrici) si rivela di grande utilità lo studio delle permutazioni degli insiemi terreno di tali strutture le quali lasciano invariate alcune relazioni che risultano fornire una forte caratterizzazione delle strutture stesse.

In questa sezione prendiamo in esame le trasformazioni biettive dell'insieme $\mathbb{Z}$ che conservano la relazione “successore -Z”. Nella successiva parleremo più in generale degli insiemi di permutazioni di insiemi qualsiasi i quali costituiscono un cosiddetto gruppo.

B20:e.02 Fissato un arbitrario $d \in \mathbb{Z}$, si dice **traslazione -Z** di spostamento d la trasformazione

$$(1) \quad \mathbf{Trsl}_d := \lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto z + d \rceil.$$

L'effetto di una traslazione sopra il numero intero z è esprimibile con le scritture equivalenti

$$(2) \quad z \mathbf{Trsl}_d = \mathbf{Trsl}_d(z) := z + d.$$

Ricordiamo che nella prima espressione compare una terna di unità lessicali: un argomento, il connettivo argomento-funzione “ $\mathbf{\cdot}$ ” e una funzione precisata da un parametro numerico.

Questa terna dice che la funzione esercita un'azione sull'argomento posto in prima posizione ed esprime il risultato di questa azione.

Convien osservare che i costrutti della forma precedente possono essere utilizzati convenientemente per ogni endofunzione e più in generale per ogni funzione. Inoltre costrutti analoghi possono utilizzarsi convenientemente per ogni relazione (v. in partic. B53:).

B20:e.03 Osserviamo alcune caratteristiche delle traslazioni -Z.

Le traslazioni -Z conservano la validità delle relazioni successore -Z, predecessore -Z e adiacenza -Z.

La composizione di due traslazioni -Z è un'altra traslazione -Z:

$$(1) \quad \mathbf{Trsl}_e(\mathbf{Trsl}_d(z)) = z(\mathbf{Trsl}_d \circ_{lr} \mathbf{Trsl}_e) = (z \mathbf{Trsl}_d) \mathbf{Trsl}_e = (z + d) + e = z \mathbf{Trsl}_{d+e} = \mathbf{Trsl}_{d+e}(z).$$

La composizione di traslazioni $-Z$ è commutativa, conseguenza dell'osservazione precedente, ovvero conseguenza della commutatività della somma di interi.

La composizione delle traslazioni $\mathbf{Trsl}_d$ e $\mathbf{Trsl}_{-d}$ lascia invariata $\mathbb{Z}$, cioè

$$(2) \quad \mathbf{Trsl}_d \circ_{lr} \mathbf{Trsl}_{-d} = \mathbf{Trsl}_{-d} \circ_{lr} \mathbf{Trsl}_d = \text{Id}_{\mathbb{Z}} .$$

In altri termini le due traslazioni sono una la trasformazione inversa dell'altra,

$$(3) \quad \mathbf{Trsl}_{-d} = \mathbf{Trsl}_d^{-1} .$$

L'insieme delle traslazioni $-Z$ si è comprensibilmente indotti a denotarlo con $\mathbf{Trsl}_{\mathbb{Z}}$.

$\mathbf{Trsl}_{\mathbb{Z}}$ è un sottoinsieme proprio dell'insieme delle permutazioni di $\mathbb{Z}$, $\mathbf{Trsl}_{\mathbb{Z}} \subset \mathbf{Perm}_{\mathbb{Z}}$.

Infatti nell'insieme $\mathbf{Perm}(\mathbb{Z}) \setminus \mathbf{Trsl}_{\mathbb{Z}}$ si trovano permutazioni come

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & & \\ \cdots & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & \end{array} \right\downarrow \quad \text{e} \quad \left\downarrow \begin{array}{cccccccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & \\ \cdots & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & \cdots & & \end{array} \right\downarrow .$$

Si osserva anche che la funzione $\lceil d \in \mathbb{Z} \mapsto \mathbf{Trsl}_d \rceil$ pone in biiezione $\mathbb{Z}$ con l'insieme delle traslazioni $-Z$. La semplicità della corrispondenza induce a dire che $\mathbb{Z}$ e $\mathbf{Trsl}_{\mathbb{Z}}$ sono in biiezione naturale e rende veniale la identificazione dei due tipi di oggetti, cioè l'utilizzo nell'esposizione dei termini “numero intero” e “traslazione di un intero” come equivalenti.

B20:e.04 Fissato $k \in \mathbb{Z}$ si dice **riflessione $-Z$** di parametro k la trasformazione

$$(1) \quad \mathbf{Mirr}_{[k]} := \lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto k - z \rceil .$$

Si osserva che abbiamo già incontrato $\mathbf{Mirr}_{[0]}$, la permutazione di $\mathbb{Z}$ che scambia il segno degli interi.

Conviene presentare più esplicitamente due riflessioni come le seguenti:

$$\mathbf{Mirr}_{[4]} = \left\downarrow \begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \cdots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots \end{array} \right\downarrow ,$$

$$\mathbf{Mirr}_{[3]} = \left\downarrow \begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots \end{array} \right\downarrow ;$$

Possono essere utili anche le corrispondenti figure.

Si osserva facilmente che tutte le riflessioni sono permutazioni di $\mathbb{Z}$ che mantengono l'adiacenza $-Z$, mentre scambiano le relazioni successore $-Z$ e predecessore $-Z$; inoltre applicando due volte una riflessione si trasforma ogni $z \in \mathbb{Z}$ in se stesso, cioè $\mathbf{Mirr}_{[k]} \circ \mathbf{Mirr}_{[k]} = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$. Le riflessioni $-Z$ sono quindi involuzioni di $\mathbb{Z}$.

B20:e.05 Pensando ad un modello materiale di $\mathbb{Z}$ in cui i punti interi sono piccoli oggetti sostenuti da un'asta soddisfacentemente rettilinea di materiale rigido e sottile, si vede che ogni riflessione corrisponde ad un capovolgimento dell'orientamento dell'asta.

Se il parametro k è pari e scriviamo $k = 2c$, si constata che l'intero c è punto fisso della involuzione. Nel modello materiale si ha il capovolgimento della retta intorno al punto c mantenuto fisso. Una tale trasformazione si dice **riflessione $-Z$** rispetto al punto c e si denota $\mathbf{Mirr}_{c,\mathbb{Z}}$.

Se viceversa k è dispari, scriviamo $k = 2h + 1$, nessun intero è lasciato invariato. Sul modello materiale di $\mathbb{Z}$ si individua la posizione intermedia tra h e $h + 1$ e la riflessione corrisponde al capovolgimento dell'orientamento dell'asta intorno a tale punto.

Abbiamo quindi individuato oggetti, i punti intermedi per le coppie di punti successivi di $\mathbb{Z}$, che sono utili per operare su $\mathbb{Z}$ ma non appartengano a tale insieme. Questo è un primo segnale del fatto che

$\mathbb{Z}$, in quanto ambiente operativo, presenta delle carenze e suggerisce di ampliare $\mathbb{Z}$ in insiemi numerici più versatili.

B20:e.06 Per trattare più comodamente le riflessioni $-Z$ e, come vedremo più avanti, varie altre entità geometriche, è opportuno introdurre i numeri semidispari, entità che formalizzano quelle che, sul modello di $\mathbb{Z}$, abbiamo considerate come posizioni intermedie tra le posizioni di due interi consecutivi. Questo insieme e l'insieme dei numeri seminteri, insieme costituito dai numeri semidispari e dai numeri interi, consentiranno nei prossimi paragrafi di trattare le riflessioni e le rotazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e successivamente le aree delle cosiddette figure $-ZZ$ (v. B24:).

Denotiamo con $n + 1/2$ l'entità numerica che rappresenta la posizione intermedia tra quella dell'intero n e quella di $n + 1$ e per esso chiediamo innanzi tutto che sia $(n + 1/2) + (n + 1/2) := 2n + 1$.

Si definisce come **insieme dei semidispari**

$$(1) \quad \text{Odd}/2 := \mathbb{Z} + 1/2 := \{n \in \mathbb{Z} : | n + 1/2\} .$$

Unendo questo insieme con l'insieme degli interi otteniamo quello che chiamiamo **insieme dei seminteri**:

$$(2) \quad \mathbb{Z}/2 := \mathbb{Z} \cup \text{Odd}/2 .$$

Sopra $\mathbb{Z}/2$ chiediamo siano definite le operazioni somma e differenza dotate delle proprietà che seguono.

- esse estendono le corrispondenti sugli interi;
- la somma è commutativa e associativa ed ha 0 come elemento neutro;
- la differenza è l'operazione binaria inversa della somma, cioè $\forall a, b \in \mathbb{Z}/2 : (a + b) - b = a$.

Queste richieste sono soddisfatte se si chiede la validità delle seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{Z} : \quad (n + 1/2) + m &= n + (m + 1/2) , \quad n + 1/2 + m + 1/2 = n + m + 1 , \\ (3) \quad (n + 1/2) - m &= n - (m - 1 + 1/2) , \quad n - (m + 1/2) = n - m - 1 + 1/2 , \\ (n + 1/2) - (m + 1/2) &= n - m . \end{aligned}$$

Può essere conveniente usare anche la scrittura $n - 1/2 := (n - 1) + 1/2$.

B20:e.07 In termini algebrici possiamo dire che a $\mathbb{Z}/2$ la somma, la differenza e lo zero hanno dato una struttura di gruppo abeliano commutativo (B41:b).

Per ora evitiamo invece di definire il prodotto tra due semidispari, in quanto questa operazione porterebbe a numeri intermedi tra due seminteri palesando una insufficienza di $\mathbb{Z}/2$, difetto cui porremo rimedio con l'ampliamento più rilevante degli interi costituito dall'introduzione dei numeri razionali (v. B30:).

Si possono invece prendere in considerazione fin d'ora le coppie di numeri seminteri, cioè gli elementi dell'insieme $(\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)$ che evidentemente è una estensione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Queste coppie serviranno per definire importanti permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le riflessioni e le rotazioni (e dunque le simmetrie centrali). Osserviamo che queste coppie consentono di individuare sia i punti $-ZZ$, sia le caselle $-ZZ$, sia i segmenti elementari $-ZZR$.

B20:e.08 Mediante i numeri seminteri $h \in \mathbb{Z}/2$ le riflessioni $-Z$ si possono esprimere come

$$(1) \quad \text{Mirr}_h := \text{Mirr}_{[2h]} = \{ z \in \mathbb{Z} \mapsto 2h - z \} .$$

(1) Prop.: La composizione di due riflessioni $-Z$ è una traslazione; più precisamente:

$$\forall h, k \in \mathbb{Z}/2 : \quad \text{Mirr}_h \circ_{lr} \text{Mirr}_k = \text{Trsl}_{2(k-h)} .$$

$$\begin{aligned} \text{Dim.: } \lceil z \in \mathbb{Z} \vdash 2h-z \rceil \circ_{lr} \lceil z \in \mathbb{Z} \vdash 2k-z \rceil / &= \lceil z \in \mathbb{Z} \vdash 2h-z \rceil \circ_{lr} \lceil 2h-z \in \mathbb{Z} \vdash 2k-(2h-z) \rceil \\ &= \lceil z \in \mathbb{Z} \vdash z+2(k-h) \rceil = \text{Trsl}_{2(k-h)} \blacksquare \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Prop.: } \forall h, k \in \mathbb{Z}/2 : \text{Mirr}_k \circ_{lr} \text{Mirr}_h = \text{Trsl}_{2(h-k)} = (\text{Trsl}_{2(k-h)})^{-1} = (\text{Mirr}_h \circ_{lr} \text{Mirr}_k)^{-1} \blacksquare$$

$$(3) \text{ Prop.: } \forall k \in \mathbb{Z}/2, d \in \mathbb{Z} /' : \text{Mirr}_k \circ_{lr} \text{Trsl}_d = \text{Mirr}_{k+d/2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dim.: } \text{Mirr}_k \circ_{lr} \text{Trsl}_d &= \lceil z \in \mathbb{Z} : \lceil 2k-z \rceil \circ_{lr} \lceil 2k-z \in \mathbb{Z} : \lceil 2k-z+d \rceil \rceil = \\ &\lceil z \in \mathbb{Z} : \lceil 2(k+d/2)-z \rceil \rceil = \text{Mirr}_{k+d/2} \blacksquare \end{aligned}$$

$$(4) \text{ Prop.: } \forall k \in \mathbb{Z}/2, d \in \mathbb{Z} : \text{Trsl}_d \circ_{lr} \text{Mirr}_k = \text{Mirr}_{k-d/2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dim.: } \text{Trsl}_d \circ_{lr} \text{Mirr}_k &= \lceil z \in \mathbb{Z} : \lceil z+d \rceil \circ_{lr} \lceil z+d \in \mathbb{Z} : \lceil 2k-z-d \rceil \rceil = \\ &\lceil z \in \mathbb{Z} : \lceil 2(k-d/2)-z \rceil \rceil = \text{Mirr}_{k-d/2} \blacksquare \end{aligned}$$

B20:e.09 Dato che componendo due riflessioni non si ottiene una trasformazione dello stesso genere, le riflessioni $-Z$ non costituiscono un gruppo di trasformazioni.

Si ottiene invece un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{Z}$ considerando l'unione dell'insieme delle traslazioni $-Z$ con quello delle riflessioni $-Z$; esso viene detto **gruppo delle traslo-riflessioni $-Z$** .

Le composizioni degli elementi di questo gruppo vengono indicate dal seguente schema di tabella di composizione

$$(1) \quad \forall d, e \in \mathbb{Z}, h, k \in \mathbb{Z}/2 : \begin{array}{ccc} & \text{Trsl}_e & \text{Mirr}_k \\ \text{Trsl}_d & \text{Trsl}_{d+e} & \text{Mirr}_{k-d/2} \\ \text{Mirr}_h & \text{Mirr}_{h+e/2} & \text{Trsl}_{2(k-h)} \end{array}.$$

Questo schema evidenzia che il gruppo delle traslazioni $-Z$ si distingue all'interno del gruppo delle traslo-riflessioni $-Z$; questo fatto viene chiarito dalla nozione di sottogruppo (v. B41:b).

B20:e.10 Tra le permutazioni di $\mathbb{Z}$ si possono anche considerare quelle che lasciano fissi tutti gli interi che non appartengono all'intervallo $[1 : n]$ per qualche intero positivo n .

Di queste permutazioni di $\mathbb{Z}$ solo $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$ conserva l'adiacenza.

Consideriamo infatti una tale permutazione π ; dato che -1 e 0 vengono trasformati in se stessi, deve essere $\pi(1) = 1$ e con considerazioni analoghe si vede che deve essere $\pi(2) = 2, \dots, \pi(n) = n$.

Queste permutazioni si possono identificare con le permutazioni dell'insieme finito $\{1, 2, \dots, n\}$. Queste costituiscono l'importante insieme di trasformazioni che abbiamo denotato con Sym_n .

Evidentemente l'insieme delle permutazioni che lasciano fissi tutti gli interi estranei all'intervallo $[1 : n]$ sono il terreno di una sottogruppo di $\text{Perm}(\mathbb{Z})$.

B20:e.11 Riprendiamo le operazioni di dilatazione $-Z$ introdotte in :d.06.

Per questo denotiamo con $\text{Dil}_{\mathbb{Z}}$ l'insieme delle dilatazioni $-Z$.

Si è visto che $\forall f, g \in \mathbb{Z} : \text{Dil}_f \circ \text{Dil}_g = \text{Dil}_{f \cdot g}$.

Accade dunque che la maggior parte delle dilatazioni sono trasformazioni non invertibili nell'intero $\mathbb{Z}$; sono invertibili solo $\text{Dil}_1 = \text{Id}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ e $\text{Dil}_{-1} = \text{Mirr}_{[0]}$.

In termini algebrici non si può quindi dire che $\text{Dil}_{\mathbb{Z}}$ costituisca un gruppo di trasformazioni; costituisce invece un esempio di monoide di trasformazioni, specie di struttura che sarà introdotta in B41:a).

B20:f. nozioni di gruppo di simmetria e di gruppo in generale

B20:f.01 Nella sezione precedente abbiamo incontrato insiemi di permutazioni riguardanti $\mathbb{Z}$ che presentano caratteristiche che sono comuni a molti altri insiemi di permutazioni e che le rendono di grande interesse da vari punti di vista.

Questo conduce a individuare una specifica categoria di sistemi formali basati su insiemi di permutazioni alla quale conviene dedicare molta attenzione fin dai primi stadi dell'esposizione, in particolare prima dell'introduzione più sistematica delle svariate strutture algebriche che inizieremo in B41: .

Consideriamo un insieme ambiente S , un insieme G di permutazioni di S , cioè un $G \subseteq \text{Perm}_S$, e l'operazione binaria prodotto di composizione di tali endofunzioni che, per fissare le notazioni, consideriamo nella versione " $\circ_{lr}$ " .

Alle permutazioni costituenti G chiediamo soddisfino le proprietà che seguono.

- (1) Componendo due permutazioni di G si ottiene un'altra permutazione di tale insieme (chiusura di G per il prodotto di composizione).
- (2) G contiene l'identità dell'ambiente S .
- (3) Se G contiene una permutazione T , contiene necessariamente anche la sua inversa T^{-1} .

La quaterna $G := \langle G, \circ_{lr}, {}^{-1}, \text{Id}_S \rangle$ si dice costituire un **gruppo di permutazioni**. Mentre l'insieme G si dice **terreno** del gruppo, l'insieme S , ricavabile da Id_S , si dice **campo d'azione** del gruppo.

La classe dei gruppi di permutazioni viene detto **specie dei gruppi di permutazioni**. I gruppi di permutazioni costituiscono un esempio dei sistemi formali che chiameremo **strutture algebriche** e la specie dei gruppi di permutazioni costituisce un esempio delle cosiddette **specie di strutture algebriche**.

Queste entità e le più generali **strutture matematiche** costituiscono delle classi di riferimento di primaria importanza per le nozioni della matematica e le incontreremo in vari punti di questa esposizione. In particolare alle strutture algebriche dedicheremo il capitolo B41:.

I gruppi di permutazioni, come vedremo, sono una specie di struttura di particolare importanza e ad essa ricorremo spesso per chiarire molte situazioni.

B20:f.02 Per esemplificare cominciamo da due esempi già incontrati.

In B13: e abbiamo introdotto, per ogni n intero positivo, l'insieme delle $n!$ permutazioni dell'insieme finito $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$; esso conduce alla struttura della specie dei gruppi di permutazioni che, secondo la formalizzazione del paragrafo precedente, si denota con $\text{Sym}_n := \langle \text{Sym}_n, \circ_{lr}, {}^{-1}, \text{Id}_{[n]} \rangle$.

Nella sezione precedente abbiamo visto le permutazioni dell'ambiente $\mathbb{Z}$, cioè le sue traslazioni e le sue riflessioni, e lo schema che stabilisce come queste trasformazioni si compongono.

Da quanto si è visto in B13: e in :e si verifica facilmente che le richieste del paragrafo precedente per la specie delle strutture gruppi di permutazioni sono soddisfatte.

Come si è già detto, i due precedenti gruppi di permutazioni sono detti, risp., **gruppo simmetrico** o **gruppo totale** di $\{1, 2, \dots, n\}$ e **gruppo delle traslo-riflessioni** di $\mathbb{Z}$.

B20:f.03 La nozione di gruppo simmetrico si estende senza problemi a quella di gruppo simmetrico di un insieme finito qualsiasi. Inoltre si può introdurre un gruppo simmetrico costituito dalle permutazioni di un qualsiasi insieme ricorsivo come $\mathbb{Z}$ e anche costituito dalle permutazioni di altre entità S che si possono considerare insiemi in quanto si conosce un criterio per stabilire se una data entità è un suo elemento.

Infatti le proprietà :f.01(1,2,3) sono evidentemente soddisfatte dalle permutazioni di S ; quindi si può cercare di trattare il gruppo simmetrico di un qualsiasi insieme.

Come abbiamo già osservato, si individuano varie relazioni tra gli elementi di $(n]$ che si riveleranno interessanti; per ciascuna di esse si può decidere se una qualsiasi permutazione $P \in \text{Perm}_{(n]}$ la rispetta o meno.

Precisiamo questa decisione per una relazione binaria $R \subseteq (n] \times (n]$. Si dice che la permutazione P rispetta o **conserva la relazione** R sse

$$(1) \quad \forall \langle i, j \rangle \in R : \langle P(i), P(j) \rangle \in R .$$

Da questa richiesta segue che rispettano la R anche tutte le potenze di composizione di una permutazione che rispetta la R . Quindi rispetta la R anche la permutazione inversa di una permutazione che la rispetta.

Di conseguenza se $P \in \text{Perm}_{(n]}$ rispetta la R se $\langle h, k \rangle \notin R$ deve essere $\langle P(h), P(k) \rangle \notin R$: infatti in caso contrario, applicando la P^{-1} alla $\langle P(h), P(k) \rangle$ si avrebbe $\langle h, k \rangle \in R$.

Quindi ad una permutazione P di $S = (n]$ che rispetta i nodi della relazione R è associata una permutazione di $S \times S$ che rispetta gli archi della R .

B20:f.04 Consideriamo una relazione R su $(n]$, cioè una $R \subseteq (n] \times (n]$ e denotiamo con $G\text{cons}_R$ il sottoinsieme di $\text{Perm}_{(n]}$ comprendente tutte e sole le permutazioni che conservano la R .

(1) Prop.: $G\text{cons}_R$ fa da sostegno ad un gruppo di permutazioni.

Dim.: Evidentemente l'identità di $(n]$ fa parte del sottoinsieme (f:01(3)); se T fa parte di G_R lo stesso accade alla T^{-1} (f:01(2)); se T_1 e T_2 fanno parte di G_R , lo stesso accade per $T_1 \circ_{lr} T_2$ (f:01(1)) ■

Ad ogni relazione su $(n]$ è quindi associato un gruppo di permutazioni di $(n]$; spesso tale gruppo lo identifichiamo con $G\text{cons}_R$.

In generale, dato un gruppo di permutazioni $G = \langle G, \circ_{lr}, {}^{-1}, \text{Id}_S \rangle$ di un insieme S si dice **sottogruppo di permutazioni** di G ogni gruppo di permutazioni di S della forma $H = \langle H, \circ_{lr}, {}^{-1}, \text{Id}_S \rangle$ con $H \subseteq G$. Si parla di sottogruppo proprio sse $H \subset G$.

Chiaramente l'insieme dei gruppi di permutazioni di un insieme S coincide con l'insieme dei sottogruppi di permutazioni di Sym_S .

B20:f.05 Vediamo alcuni esempi di sottogruppi di Sym_n associati a relazioni su $(n]$.

Lo stesso Sym_n si può considerare il gruppo delle permutazioni di $(n]$ che conserva la relazione $(n] \times (n]$, la relazione ovvia.

Consideriamo le permutazioni che lasciano fisso n ; evidentemente esse costituiscono un gruppo di permutazioni identificabile con Sym_{n-1} . Questo sottogruppo risulta associato alla relazione di equivalenza su $(n]$ corrispondente alla partizione $\{1, 2, \dots, n-1\} \dot{\cup} \{n\}$. Le matrici permutative dei suoi elementi sono quelle dominate dalla matrice della suddetta relazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Le permutazioni che lasciano fisso un altro intero di $(n]$ si ottengono dalle precedenti mediante un semplice riordinamento di $(n]$.

Più in generale ad ogni relazione di equivalenza su $[n]$, ossia ad ogni partizione $[n] = I_1 \dot{\cup} I_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k$, corrisponde il gruppo delle permutazioni che mandano ogni intero appartenente a I_h ($h = 1, 2, \dots, k$) in un altro intero di tale sottoinsieme (o classe dell'equivalenza). Ad esempio alla partizione $\{1, 2, \dots, 8\} = \{1, 4, 6\} \dot{\cup} \{2, 7\} \dot{\cup} \{3, 5, 8\}$ è associato il gruppo delle permutazioni esprimibili come prodotto di una permutazione di $\{1, 4, 6\}$, di una permutazione di $\{2, 7\}$ e di una di $\{3, 5, 8\}$. Le corrispondenti matrici permutative sono quelle dominate dalla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

B20:f.06 Altre interessanti coppie $\langle \text{relazione, gruppo di permutazioni} \rangle$ riguardano relazioni che esprimono digrafi simmetrici, ovvero grafi non orientati; in ciascuno di questi casi il gruppo delle permutazioni individua le simmetrie di queste configurazioni combinatorie.

Un primo esempio è dato dal gruppo Sym_3 esaminato in B13:e. Si vede che esso è il gruppo che lascia invariato il semplice grafo non orientato a forma di triangolo.

Per un secondo esempio consideriamo il grafo non orientato a forma di quadrato individuabile con la matrice delle adiacenze

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le permutazioni dei suoi vertici che trasformano il grafo in se stesso sono: l'identità che denotiamo con e ; le permutazioni circolari $c^k := \langle 1, 2, 3, 4 \rangle^k$ per $k = 1, 2, 3$, le riflessioni $h := (1, 4) \circ (2, 3)$, $v := (1, 2) \circ (3, 4)$, $d1 := (1, 3)$ e $d2 := (2, 4)$. La sua tavola di moltiplicazione è

$$(2) \quad \begin{array}{c|cccccccc} & e & c & c^2 & c^3 & h & v & d1 & d2 \\ \hline e & e & c & c^2 & c^3 & h & v & d1 & d2 \\ c & c & c^2 & c^3 & e & d1 & d2 & v & h \\ c^2 & c^2 & c^3 & e & c & v & h & d2 & d1 \\ c^3 & c^3 & e & c & c^2 & d2 & d1 & h & v \\ h & h & d2 & v & d1 & e & c^2 & c^3 & c \\ v & v & d1 & h & d2 & c^2 & e & c^3 & c \\ d1 & d1 & h & d2 & v & c & c^3 & e & c^2 \\ d2 & d2 & v & d1 & h & c^3 & c & c^2 & e \end{array}.$$

B20:f.07 Si osserva che un gruppo di permutazioni di un insieme finito di n oggetti $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ presenta una tavola di moltiplicazione che ricalca quella di Sym_n .

In altre parole, due **gruppi di permutazioni** si dicono **isomorfi** sse esiste una biiezione fra il terreno del primo e quello del secondo che trasforma il prodotto del primo nel prodotto del secondo.

Più formalmente: la biiezione

$$(1) \quad \beta := \left\downarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \right\downarrow \in \{[n] \longleftrightarrow A\},$$

consente di stabilire la seguente biiezione fra Sym_n e Sym_A

$$(2) \quad \bar{\beta} := \left[P \in \text{Sym}_n \mapsto \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \downarrow a_{P(1)} & \downarrow a_{P(2)} & \cdots & \downarrow a_{P(n)} \end{array} \right] = \left[P \in \text{Sym}_n \mapsto \beta^{-1} \circ_{lr} P \circ_{lr} \beta \right] ,$$

tale che si abbia

$$(3) \quad \forall P, Q \in \text{Perm}_n : \bar{\beta}(P \circ_{lr} Q) = \bar{\beta}(P) \circ_{lr} \bar{\beta}(Q) .$$

Queste espressioni dicono che gli elementi dei due gruppi di permutazioni si compongono in modi strettamente collegati.

Più in generale due gruppi di permutazioni $G = \langle G, \circ_{lr}, {}^{-1}, \text{Id}_S \rangle$ e $H = \langle H, \circ_{lr}, {}^{-1}, \text{Id}_T \rangle$ si dicono **isomorfi** sse si individua una biiezione

$$(4) \quad \bar{\beta} \in \{G \longleftrightarrow H\} \text{ tale che } \forall P, Q \in G : \bar{\beta}(P \circ_{lr} Q) = \bar{\beta}(P) \circ_{lr} \bar{\beta}(Q) .$$

Questa definizione vale quali che siano i campi d'azione dei due gruppi e in particolare se uno o entrambi i gruppi hanno campi d'azione infiniti.

In particolare sono isomorfi il gruppo delle permutazioni del grafo quadrato e il gruppo delle permutazioni del piano sui reali che trasforma il quadrato avente i vertici nei 4 punti le cui coordinate sono date dell'espressione $\langle \pm 1, \pm 1 \rangle$.

Si trovano senza difficoltà anche coppie di gruppi di permutazioni isomorfi, l'uno con campo d'azione finito e l'altro con campo infinito.

B20:f.08 Il fatto che certe caratteristiche essenziali di due gruppi di permutazioni non dipendano dai rispettivi campi d'azione induce a considerare una specie di struttura dei gruppi da intendersi come sistemi della forma $\langle G, *, j, e \rangle$ con G insieme, $*$ operazione binaria su G , j operazione unaria su G e $e \in G$ tali da soddisfare richieste come le seguenti:

- (1) $*$ è operazione associativa, ossia $\forall g, h, k \in G : g * (h * k) = (g * h) * k$;
- (2) e è elemento neutro per l'operazione $*$, ossia $\forall g \in G : e * g = g * e = g$;
- (3) $\forall g \in G : g * j(g) = j(g) * g = e$.

Queste strutture risultano formalmente più maneggevoli. Per esse si possono definire con discorsi molto simili a quelli utilizzati per Sym_n e per i gruppi di permutazioni le nozioni di sottogruppo, carattere abeliano o commutativo e isomorfismo.

La relazione di isomorfismo fra gruppi è chiaramente un'equivalenza. Le classi di equivalenza per isomorfismo le chiameremo **gruppi astratti**. Tali entità possono essere utili in vari momenti della organizzazione delle conoscenze sui gruppi.

B20:f.09 Dopo aver ricavato per astrazione le strutture gruppi dalle strutture gruppi di permutazione, ora stabiliamo una sorta di collegamento inverso mostrando come da ogni gruppo si può ricavare un gruppo di permutazioni.

Consideriamo un generico gruppo $G = \langle G, *, j, e \rangle$; ad ogni suo elemento $h \in G$ si associano le due endofunzioni di G :

- (1) $h^{ltrsl} := \{ g \in G \mapsto h * g \}$ **traslazione da sinistra per h** ,
- (2) $h^{rtrsl} := \{ g \in G \mapsto g * h \}$ **traslazione da destra per h** .

Queste due endofunzioni in effetti sono permutazioni del terreno G del gruppo. Infatti sottoponendo alla traslazione da sinistra due elementi diversi g_1 e g_2 di G si ottengono due elementi di G diversi: se

fosse $h * g_1 = h * g_2$, moltiplicando da sinistra per $j(h)$ i due membri dell'uguaglianza si otterrebbe l'uguaglianza $g_1 = g_2$. Stessa conclusione per la traslazione da destra.

Questa situazione si riconosce facilmente, ad esempio, nella tavola di composizione del gruppo del grafo quadrato :f.06(1): tutte le righe della matrice si ottengono per traslazione a sinistra degli elementi di G e tutte le sue colonne si ottengono per traslazione a destra e sono evidentemente permutazioni della sequenza degli elementi di G che etichettano le righe e le colonne dalla tavola.

Osserviamo anche che le due traslazioni per un dato elemento $h \in G$ possono coincidere; questo evidentemente accade per i gruppi abeliani, ma anche per particolari elementi h di vari gruppi non abeliani.

B20:f.10 Se h e k sono due elementi di G per le rispettive traslazioni da sinistra si trova

$$(1) \quad (h * k)^{ltrsl} = \{ g \in G \mid (h * k) * g \} = \{ g \in G \mid h * (k * g) \} = h^{ltrsl} \circ_{rl} k^{ltrsl} ;$$

Per le traslazioni da destra si ottiene invece

$$(2) \quad (h * k)^{rtrsl} = \{ g \in G \mid g * (h * k) \} = \{ g \in G \mid (g * h) * k \} = h^{rtrsl} \circ_{lr} k^{ltrsl} ;$$

A questo punto accanto al gruppo $G = \langle G, *, j, e \rangle$ possiamo considerare i due gruppi di permutazioni di G chiamati, risp., gruppo delle traslazioni da sinistra di G e gruppo delle traslazioni da destra di G :

$$(3) \quad \langle G^{ltrsl}, \circ_{rl}, \{ h^{ltrsl} \mid (j(h))^{ltrsl} \}, \text{Id}_G \rangle ,$$

$$(4) \quad \langle G^{rtrsl}, \circ_{lr}, \{ h^{rtrsl} \mid (j(h))^{rtrsl} \}, \text{Id}_G \rangle .$$

Grazie alle uguaglianze (1) e (2) si ha che i due gruppi di permutazioni precedenti sono isomorfi al gruppo G . Possiamo quindi concludere con il seguente enunciato.

(5) Teorema di Cayley Ogni gruppo è isomorfo ad un gruppo di permutazioni.

B20:f.11 Gruppi di grande importanza, come vedremo, sono dati da insiemi numerici di uso comune muniti di una delle ordinarie operazioni di somma e prodotto.

Per ora consideriamo l'insieme dei numeri interi munito dell'operazione somma. Si dice **gruppo additivo degli interi** la struttura

$$(1) \quad \mathbb{Z}_{ag} = \langle \mathbb{Z}, \cdot, -_u, 0 \rangle ,$$

ricordando che con $-_u$ abbiamo denotato il meno unario, cioè operazione di passaggio di un intero al suo opposto. Questo è un esempio di gruppo commutativo con terreno numerabile.

Il suo carattere commutativo fa sì che ad esso sia associato un solo gruppo delle traslazioni; questo evidentemente è dato da

$$(2) \quad \langle \text{Trsl}_{\mathbb{Z}} = \{ k \in \mathbb{Z} \mid \{ n \in \mathbb{Z} \mid n + k \} \}, \{ \forall k \in \mathbb{Z} : \text{Trsl}_k \mid \text{Trsl}_{-k} \}, \text{trsl}_0 = \text{Id}_{\mathbb{Z}} \rangle .$$

È interessante individuare l'insieme dei sottogruppi propri di $\mathbb{Z}_{ag}$

(3) Prop.: Il sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ H è terreno di un sottogruppo proprio di $\mathbb{Z}_{ag}$ sse si trova $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$ tale che H è l'insieme dei multipli di m .

Dim.: È evidente che per ogni $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$ l'insieme $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ m}\}$ è terreno di un sottogruppo proprio di $\mathbb{Z}_{ag}$. Per il viceversa, se H è un tale sottogruppo, si individua il suo elemento positivo minimo m ed è evidente che l'insieme dei suoi multipli appartiene ad H ; se in H si trovasse un intero q non multiplo di m lo si può scegliere positivo e dovrebbe appartenere ad H anche $q \% m$, intero positivo inferiore ad m , contro l'ipotesi su m ■

Chiaramente i sottogruppi del sottogruppo dei multipli di un intero k sono tutti e soli i sottogruppi dei multipli dei divisori di k .

Va segnalato che spesso due gruppi isomorfi si identificano; questo accade in particolare per gruppi di permutazioni con lo stesso campo d'azione.

Questo può anche accadere per due gruppi di permutazioni con campi d'azione diversi che denotiamo con $\langle G, S \rangle$ e $\langle H, T \rangle$. Questa identificazione è accettabile quando si presentano risultati che nelle formulazioni accurate che riguardano i due gruppi si possono trasformare gli uni negli altri mediante biiezioni fra S e T e biiezioni fra G e H facili da individuare, tanto da non rendere necessaria la loro distinzione.

B20:f.12 Come si è già osservato, l'insieme delle trasloriflessioni di $\mathbb{Z}$ è l'insieme delle permutazioni di $\mathbb{Z}$ che conservano l'adiacenza fra gli interi. Anche questo gruppo si può quindi considerare un gruppo di permutazioni che conserva una relazione binaria concernente il suo campo d'azione.

Inoltre per entrambi i tipi di gruppi di permutazioni si trova un sistema di relazioni tra elementi di S e/o di proprietà degli elementi di S che vengono conservate da ciascuna delle permutazioni in esame.

Più in generale si osserva che ogni insieme $G_{\mathcal{P}}$ costituito da tutte e sole le permutazioni di S che conservano un sistema $\mathcal{P}$ di relazioni e proprietà concernenti S deve costituire un gruppo di permutazioni. Infatti se T_1 e T_2 appartengono a $G_{\mathcal{P}}$, anche $T_1 \circ_{lr} T_2$ conserva $\mathcal{P}$ e quindi appartiene a $G_{\mathcal{P}}$. Se $T \in G_{\mathcal{P}}$, allora anche T^{-1} conserva $\mathcal{P}$ e quindi deve appartenere a $G_{\mathcal{P}}$. Ovvio poi che Id_S conserva $\mathcal{P}$ e quindi appartiene a $G_{\mathcal{P}}$.

B20:f.13 Ricordiamo la tavola di moltiplicazione per le trasloriflessioni di $\mathbb{Z}$:e.07(1)

Quando un gruppo è formato da permutazioni che commutano si parla di **gruppo di permutazioni commutativo** o **abeliano**. Le traslazioni $-\mathbb{Z}$ forniscono un esempio di gruppo di questo tipo. Non è invece commutativo Sym_3 .

Dato un gruppo di permutazioni $G_{\mathcal{P}}$ di un insieme S associato ad un sistema $\mathcal{P}$ di proprietà degli elementi di S , se si riesce a individuare un sistema di proprietà $\mathcal{Q}$ che implica $\mathcal{P}$, cioè un sistema di proprietà più vincolante di $\mathcal{P}$, il gruppo $G_{\mathcal{Q}}$ delle trasformazioni di S che conservano $\mathcal{Q}$ è un sottogruppo di trasformazioni di $G_{\mathcal{P}}$, in quanto ogni permutazione che rispetta $\mathcal{Q}$ deve rispettare $\mathcal{P}$.

Ad esempio il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{Z}$ si ottiene richiedendo la conservazione della relazione di successore; questa proprietà di conservazione è più vincolante della proprietà di conservazione dell'adiacenza e in effetti il gruppo delle traslazioni è sottogruppo del gruppo delle roto-riflessioni.

Un altro sottogruppo del gruppo delle roto-riflessioni è costituito dalle due sole trasformazioni $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$ e Mirr_0 , endofunzioni che si possono considerare particolari roto-riflessioni.

Entrambi questi sottogruppi del gruppo delle roto-riflessioni, non abeliano, sono gruppi abeliani.

B20:f.14 Eserc. Individuare attraverso la rispettiva tavola di composizione i seguenti gruppi.

- (a) Gruppo delle simmetrie di un foglio rettangolare di carta.
- (b) Gruppo delle rotazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con centro nell'origine per multipli di 90° .
- (c) Gruppo delle permutazioni di un triangolo regolare, da confrontare con Sym_3 .