# Capitolo B15:
# funzioni finite e sequenze specifiche

## Contenuti delle sezioni

a. funzioni finite p.2
b. presentazioni delle funzioni finite p.8
c. endofunzioni finite p.16
d. sequenze binarie p.23
e. funzioni finite tra interi naturali p.27
f. sequenze combinatorie [1] p.31

42 pagine

---

B15:**0.01** Il capitolo è dedicato all'introduzione di molte nozioni basilari riguardanti gli insiemi finiti, le funzioni finite e i corrispondenti cardinali.

Si inizia con un esame classificazione delle funzioni finite, cioè degli insiemi di coppie facenti parte di un prodotto cartesiano di due ben determinati insiemi finiti.
Di queste importanti entità si danno due generi di raffigurazioni, ciascuno in grado di chiarire alcune delle loro caratteristiche.

Le prime funzioni finite di tipo particolare che sono esaminate sono le endofunzioni, le corrispondenze che a ciascuno degli elementi di un dato insieme finito associano un elemento dello stesso insieme.

Sono poi trattate le sequenze binarie, entità molto semplici ma molto utili; infatti esse forniscono rappresentazioni facilmente maneggevoli degli insiemi finiti e dei numeri interi e razionali utilizzati dagli odierni onnipresenti dispositivi elettronici. Esse, oltre ad essere utilizzate per molti problemi pratici in parte accennati nelle prossime pagiene, servono a una prima organizzazione dei sistemi di enunciati nel cosiddetto "calcolo roposizionale" [B60].

Nell'ultima sezione di questo capitolo sono esaminate quelle che chiamiamo sequenze combinatorie primarie, strutture che possono considerarsi funzioni finite e che risultano utili per un gran numero di manipolazioni di dati numerici ottenuti da osservazioni.
Anche le sequenze combinatorie sono entità semplici da definire e risultano completamente trattabili mediante algoritmi; di conseguenza risultano in grado di contribuire a risolvere svariati problemi pratici spiccioli e ad entrare in molti strumenti algoritmici di ampio impiego.

Le formule che consentono di contare i numeri degli elementi delle sequenze combinatorie primarie costituiscono il nucleo iniziale del corpo, oggi assai vasto, delle cosiddette **formule enumerative**, gli strumenti che consentono valutazioni quantitative in linea di massima esatte che costituiscono strumenti primari per molti approcci quantitativi dei sistemi complessi e che sono impiegati, in particolare, in molti problemi riguardanti la programmazione e le elaborazioni statistiche.

## B15:a. funzioni finite

B15:**a.01** Prima di esaminare le funzioni finite per giungendo a costruzioni e risultati che in buona parte valgono per altri generi di funzioni, per maggiore autonomia di queste pagine riprendiamo alcune nozioni introdotte in precedenza.

Diciamo **funzione finita** ogni insieme finito di coppie funzionale, cioè tale che i primi membri delle varie coppie sono tutti distinti.

Più concretamente diciamo **funzione esplicita** ogni insiemerappresentabile da una lista di coppie della forma $\{\langle x_1, y_1\rangle, ..., \langle x_n, y_n\rangle\}$ per qualche intero positivo $n$, tale che $i \neq j \leq n$ implica $x_i \neq x_j$.

Evidentemente ogni funzione esplicita è una funzione finita; viceversa di fronte a una funzione indubbiamente finita chi si occupa della possibilità di utilizzarla effettivamente la giudica una funzione esplicita solo quando dispone di una lista che la rappresenti, e la giudica una funzione esplicitabile quando dispone di un algoritmo condivisibilmente ben definito che permetterebbe di ottenere una sua lista senza difficoltà di principio; molti di questi algoritmi che in molte circostanze pratiche non vengono eseguiti perché giudicato troppo costoso in termini di consumo di tempo o di memoria.

Una funzione esplicita $\{\langle x_1, y_1\rangle, ..., \langle x_n, y_n\rangle\}$ può essere presentata mediante una tabella a due righe o mediante una tabella a due colonne che evidentemente le è equivalente:

$$\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{matrix}\right\downarrow \qquad\qquad \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{matrix}\right| .$$

Per esempio la funzione che a ogni naturale in $[12]$ associa il resto della sua divisione per 7 è data da

$$f_1 := \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right\downarrow ,$$

mentre la funzione che a ogni positivo di $(12]$ associa il numero dei suoi divisori è presentata da:

$$\mathsf{numDiv} := \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{matrix}\right\downarrow .$$

Queste espressioni mostrano in modo evidente che una funzione esplicita equivale a una coppia di sequenze della stessa lunghezza, la prima delle quali priva di ripetizioni.

B15:**a.02** Consideriamo un intero positivo $n$ e si abbia una lista di $n$ stringhe $\mathsf{s} = \langle s_1, s_2, ..., s_n\rangle$ nella quale non si esclude la possibilità di ripetizioni. Nelle applicazioni in genere questo elenco serve a individuare una sequenza di $n$ oggetti (numeri, insiemi, relazioni, ...) che può presentare repliche, ciascun esemplare di questi tipi di oggetti essendo rappresentato da una sua stringa identificativa. Questa potrebbe riguardare un nome significativo, un codice convenzionale, una espressione numerica, un algoritmo da applicare a una istanza di problema precisata da un parametro e molto altro.

Dato che da ogni intero $i = 1, 2, ..., n$ ogni lista $\mathsf{s}$ di lunghezza $n$ consente di ricavare la sua componente che occupa la posizione $i$, si possono rendere disponibili meccanismi in grado di associare a ogni elemento $i$ dell'intervallo $(n]$ una specifica stringa $s_i$, e quindi lo specifico oggetto individuato da tale scrittura.

Questo collegamento tra interi positivi e oggetti che vengono presentati in molte liste $\mathsf{s}$ ciascuna delle quali riguardanti un insieme di oggetti tendenzialmente omogenei nell'ambito di considerazioni riguardanti argomenti circoscritti consente di maneggiare con semplici interi grandi varietà di oggetti.

Questa possibilità presenta vantaggi pratici, soprattutto quando si opera con liste nonripetitive; in questi casi il suddetto collegamento impone all'insieme $\mathsf{SetY}(\mathsf{s})$ un ordinamento che si rivela molto utile e anche indispenzabile per molti trattamenti algoritmici.

Segnaliamo due conseguenze del fatto che ogni stringa $w$ su un alfabeto $\mathsf{A}$ si può considerare una lista di $|w|$ caratteri di $\mathsf{A}$ espressa concisamente o come una biiezione tra $\{1, 2, ..., |w|\}$ ed $\mathsf{A}$.
Ad ogni intero positivo di $\mathbf{(}6\mathbf{]}$ la stringa consente di associare un carattere; per esempio nel caso della stringa "`string`" all'intero $i = 4$ fa corrispondere la lettera "`i`".
Inoltre ogni carattere di un alfabeto ordinato $\mathsf{A}$, oggetto che può essere individuato da una stringa nonripetitiva, risulta associato biunivocamente a un intero dell'intervallo $\mathbf{(}|\mathsf{A}|\mathbf{]}$ o dell'intervallo $\mathbf{[}|\mathsf{A}|\mathbf{)}$; quindi le stringhe su ogni alfabeto in molte considerazioni si possono sostituire con sequenze di interi.

B15:**a.03** Data una funzione finita $\{\langle x_1, y_1\rangle, ..., \langle x_n, y_n\rangle\}$, l'insieme di $n$ elementi $\{x_1, ..., x_n\}$ si dice costituire il suo **dominio** o anche la sua Ns coimmagine.

L'insieme formato dalle seconde componenti delle sue coppie $\mathsf{SetY}(\langle y_1, ..., y_n\rangle)$ , si dice invece **codominio** o **immagine** della funzione.

Si individuano facilmente algoritmi che permettono di individuare nei modi più convenienti sia il dominio che il codominio di ogni funzione esplicita.

Per una funzione esplicitabile la possibilità di individuare il dominio e il codominio si può "affermare solo in linea di principio". Con questa espressione si vuole segnalare che per ogni singola istanza di questo problema la individuazione di dominio e codominio è condizionata dai meccanismi che si trovano consentire la esplicitazione e dalle risorse che le circostanze rendono effettivamente disponibili.

La nozione di funzione, come la nozione più generale di relazione, si può estendere agli insiemi-E di coppie funzionali, che chiamiamo funzioni-E, agli insiemi-P di coppie funzionali, che chiamiamo funzioni-P e agli iinsiemi-B di coppie funzionali, che chiamiamo funzioni-B.

Se $f$ denota una funzione-E denotiamo con $\mathsf{dom}(f)$, con $coim(f)$ o con $f^{\vdash}$ il suo dominio e con $\mathsf{cod}(f)$, con $\mathrm{img}(f)$ o con $f^{\dashv}$ il suo codominio; questi si possono considerare insiemi-E.

Se in particolare $f$ è una funzione-P $\mathsf{dom}(f)$ e $\mathsf{cod}(f)$ sono insiemi-P. Se $f$ è una funzione-B $\mathsf{dom}(f)$ e $\mathsf{cod}(f)$ sono insiemi-B. Se $f$ è una funzione finita $\mathsf{dom}(f)$ e $\mathsf{cod}(f)$ sono insiemi finiti.

Per le funzioni numeriche finite introdotte in a04 abbiamo

$$\mathsf{dom}(f_1) = \mathbf{[}12\mathbf{]}\ ,\ \ \mathsf{cod}(f_1) = \mathbf{[}7\mathbf{)}\ ,\ \ \mathsf{dom}(\mathsf{numDiv}) = \mathbf{(}12\mathbf{]}\ ,\ \ \mathsf{cod}(\mathsf{numDiv}) = \{1, 2, 3, 4, 6\}\ .$$

Per molte funzioni esplicite, come per le precedenti $f_1$ e $\mathsf{numDiv}$, accade che le sequenze delle seconde componenti delle coppie che le costituiscono presentino ripetizioni; quindi il codominio di ciascuna di queste funzioni presenta meno elementi del dominio.

In generale si può affermare che per ogni funzione finita $f$ si ha

$$|\mathsf{cod}(f)| \ \leq\ |\mathsf{dom}(f)|\ . \tag{1}$$

Per ogni funzione esplicita è possibile calcolare il numero dei valori ripetuti $|\mathsf{dom}(f)| - |\mathsf{cod}(f)|$.
Questa possibilità si può affermare solo in linea di principio per le funzioni finite.

B15:**a.04** Denotiamo ancora con $f$ una funzione, non necessariamente finita, e sia $x_i$ un elemento del suo dominio.

Si dice **valore assunto dalla funzione** $f$ in corrispondenza di $x_i$, oppure immagine di $x_i$ fornita dalla $f$ l'oggetto $y_i$ che costituisce la seconda componente della coppia $\langle x_i, y_i\rangle$, unica coppia delle $f$ che presenta $x_i$ come sua prima componente.

Per identificare tale elemento del codominio della $f$ si possono utilizzare diverse notazioni:

la **notazione funzionale usuale** o notazione analitica $f(x_i)$, la più utilizzata;

la **notazione esponenziale** ${x_i}^f$;

la **notazione argomento-funzione** $x_i \urcorner f$;

la **notazione funzione-argomento** $f \vdash x_i$.

Nella terza e nella quarta delle precedenti notazioni compaiono, risp., il segno " $\urcorner$ " chiamato **connettivo argomento-funzione** e il segno " $\vdash$ " chiamato **connettivo funzione-argomento**. Queste due notazioni sono poco usate, ma sono qui proposte in quanto possono essere inserite in alcune espressioni che in loro assenza e senza precise avvertenze rischiano di essere male interpretate.

Si dice **controimmagine** di un elemento $y_i$ del codominio della funzione $f$ l'insieme degli elementi che compaiono come prima componente delle coppie di $f$ che hanno $y_i$ come seconda componente.
La notazione tradizionale di tale controimmagine è $f^{-\mathbf{1}}(y_i)$. Per esempio controimmagine di 3 per numDiv è $\mathsf{numDiv}^{-\mathbf{1}}(3) = \{4, 9\}$.

Si osserva che in generale $f^{-\mathbf{1}}$ è una funzione che associa a ogni elemento di $\mathsf{cod}(f)$ un sottoinsieme di $\mathsf{dom}(f)$

In alternativa alla scrittura $f^{-\mathbf{1}}(y_i)$ proponiamo la notazione relazione-argomento $f^{-\mathbf{1}} {}_{\mathrm{R}} y_i$ .

B15:**a.05** Osserviamo che si sono introdotte la notazione $\mathsf{dom}(f)$ che esprime la associazione a una funzione dell'insieme degli oggetti che la funzione trasforma e la notazione $\mathsf{cod}(f)$ che esprime la associazione a una funzione dell'insieme degli oggetti che la funzione fornisce.

Nel caso in cui $f$ è una funzione esplicita si individuano facilmente due algoritmi che, a partire da una lista di coppie che individua la $f$, costruiscono, risp., la lista degli elementi di $\mathsf{dom}(f)$ e la lista degli elementi di $\mathsf{cod}(f)$. Il primo algoritmo deve effettuare solo delle cancellazioni, il secondo cancellazioni ed eliminazioni di ripetizioni.

I due simboli dom e cod, quando applicati a funzioni esplicite, si possono associare a due meccanismi che a ogni lista funzionale di coppie di stringhe associano una lista di stringhe; con l'astrazione che prescinde dagli ordinamenti questi due meccanismi individuano due entità che a una funzione esplicita associano un insieme esplicito e che denotiamo, risp., con dom e cod.

Queste due entità sono insiemi di coppie funzionali, cioè con la proprietà di non presentare ripetizioni tra i primi componenti: data una funzione esplicita sono deteminati sia il suo domonio che il suo codominio.

Quindi dom e cod si possono considerare funzioni.

Essi evidentemente non possono essere considerati funzioni esplicite, in quanto si applicano a oggetti, le funzioni esplicite, la cui totalità non può essere considerata un insieme esplicito. In effetti lo stesso insieme degli insiemi espliciti, anche se limitato agli insiemi di stringhe su un alfabeto finito (anche nel caso dell'alfabeto $\{\mathsf{I}\}$) non può essere considerato un insieme esplicito.

La totalità degli insiemi espliciti delle stringhe su un dato alfabeto A si può collocare tra gli insiemi-B, e di conseguenza anche la totalità delle funzioni esplicite su un dato alfabeto va considerata un insieme-B nell'ambito di un ambiente della forma $\mathsf{B}^*$ con B alfabeto ottenuto ampliando A con opportuni caratteri di scansione.

Le funzioni dom e cod applicate a funzioni esplicite fanno parte delle funzioni-B.
Se considerate applicabili a funzioni-P possono considerarsi solo funzioni-P.

L'insieme di queste funzioni effettivamente controllabili da una squadra di agenti, evidentemente, va pensato come insieme esplicitabile e quindi finito, ma in divenire, come l'attività del loro controllo effettivo.

B15:**a.06** Le precedenti considerazioni forniscono un primo motivo per estendere la gamma delle entità da chiamare funzioni.
Provvisoriamente introduciamo il termine "funzioni-B" per caratterizzare le entità esprimibili come "insiemi-B" di coppie i primi membri delle quali non presentano ripetizioni.
Si tratta quindi di entità per le quali si può parlare di entità-elementi che a una tale entità appartengono.
Non ci azzardiamo quindi a precisare l'estensione e i confini di ciascuna di queste totalità.

In effetti incontreremo una grande varietà di entità alle quali si può attribuire la qualifica di insiemi e numerose di entità qualificabili come funzioni. Queste entità sono da considerare nuove, in quanto non rispettano le proprietà di esplicitabilità degli insiemi e delle funzioni definite finora.

Esse comunque, come vedremo, rivestono grande interesse in quanto danno un robusto contributo all'assetto della matematica e alla definizione di strumenti che consentono di risolvere importanti problemi.

Gli insiemi-B e le funzioni-B si possono considerare generalizzazioni, risp., degli insiemi finiti e delle funzioni finite.
Osserviamo anche che gli insiemi-B dei quali si sente la necessità sono insiemi di elementi omogenei: in effetti è ragionevole pensare che per fini applicativi solo per questi insiemi abbia senso cercare definizioni maneggevoli.

Può rendersi necessario introdurre funzioni-B $F$ non esplicite per le quali a un certo punto del loro esame non si riesce a indicare con precisione il dominio e il codominio. Alcune di queste funzioni $F$ potrebbero essere definite solo in termini vaghi, attraverso considerazioni solo intuitive.
Risulta comunque opportuno definire con la maggiore precisione possibile l'ambiente del quale il dominio $\mathsf{dom}(F)$ deve sicuramente far parte e l'ambiente nel quale il codominio $\mathsf{cod}(F)$ deve sicuramente essere contenuto. È inoltre ragionevole pretendere che questi ambienti siano costituiti da elementi omogenei.

Per denotare questi insiemi useremo la notazione $\mathsf{domEnv}(F)$ per l'insieme dei presumibili sovrainsiemi del dominio e la notazione $\mathsf{codEnv}(F)$ per l'insieme dei presumibili insiemi entro i quali si devono trovare gli oggetti ottenibili dalla applicazione della $F$.

Per talune di queste funzioni $F$ dopo la loro definizione si aprono i problemi della precisazione di dominio e codominio. Questi problemi in taluni casi possono essere risolti soddisfacentemente con la individuazione relativamente precisa di $\mathsf{dom}(F)$ e di $\mathsf{cod}(F)$, ma in altri casi riescono solo a ridurre le estensioni di $\mathsf{domEnv}(F)$ e di $\mathsf{codEnv}(F)$.

B15:**a.07** Abbiamo visto in a04 due funzioni, $f_{mod7}$ e $\mathsf{numDiv}$, finite e dotate di dominio e codominio costituiti da interi naturali. Come loro molte funzioni hanno come dominio un insieme che possiede un ordinamento totale che può essere utilizzato per affrontare interessanti applicazioni.
Per queste funzioni le presentazioni tabellari sono particolarmente convenienti.
Un ordinamento totale del dominio di una funzione che viene adottato prevalentemente viene chiamato "naturale" e in questi casi si usa dire che la presentazione tabellare della funzione "si impone naturalmente".

Inoltre nei contesti nei quali il dominio della funzione può ritenersi implicito e può essere sottinteso, la funzione esplicita può essere definita soltanto della segnalazione sintetica del dominio e dalla lista dei valori corrispondentemente assunti della forma $\big\langle y_1, ..., y_n \big\rangle$ .
In effetti una sequenza come la precedente può considerarsi una funzione esplicita avente come dominio l'insieme ordinato per grandezza $\langle 1, 2, ..., n\rangle$.

B15:**a.08** Nella prtica si possono individuare molti meccanismi che a ogni elemento di un intervallo di numeri interi della forma $(n]$, della forma $[n)$ o anche di un'altra forma di intervallo di $n$ numeri interi, associano senza ambiguità una entità che viene presentata come item di una lista non ripetitiva chiaramente definita e potrebbe (una stringa, un numero, un'espressione, un enunciato, un abbonato a una rivista, un iscritto a una associazione, un comune italiano, ...).

Innanzi tutto si hanno meccanismi ciascuno dei quali rispecchia una espressione che si basa su risultati di operazioni aritmetiche (somma, differenza, prodotto, potenza, quoziente, resto, ...) e che può assumere come valori dei numeri interi naturali o positivi.

Per esempio è facile individuare meccanismi che, operando su notazioni unadiche o posizionali degli interi naturali, a ogni $i \in (n]$ associano il suo quadrato $i^2$, il suo cubo $i^3$ o il valore dato da espressioni come $3\,i + 2\,i^4$ o come "minore tra $100\,i$ e $4\,i^2 - 3\,i^3$" .

Altri meccanismi si servono anche di combinazioni di costruzioni numeriche ottenute mediante selezioni condizionate da qualche clausola numerica (ad esempio chiedendo che sia soddisfatta la relazione $3\,i^2 < 40$) e mediante iterazioni (ad esempio richiedendo di accumulare i valori forniti dall'espressione $2\,i^2 - 5\,i + 7$ in corrispondenza dei valori $i = 3, 4, ..., 9$).

Come viene detto in **C47**, risulta utile individuare scale di complessità concernenti valutazioni delle risorse impiegate nelle attività computazionali. I meccanismi del secondo tipo sopra accennato è opportuno collocarli su un gradino di queste scale più elevato di quello occupato dai meccanismi numerici del primo tipo.

Nella pratica si incontrano spesso elenchi di entità contraddistinte mediante numeri interi successivi (o loro semplici varianti): elenchi di denominazioni in ordine alfabetico o cronologico (i re Luigi di Francia, i papi di nome Giovanni, ...), le versioni principali di un prodotto software, i blocchi di biglietti di una lotteria, ... .
Per questi numeri con funzione ordinale si usano termini come "progressivi", "numeri d'ordine" e "numeri di matricola".
Qui comunque non cerchiamo di classificare i meccanismi che consentono di definire sequenze riferibili a interi naturali, ma intendiamo soltanto dare una prima idea della loro varietà.

Per ciascuno di tali meccanismi si dice che consente di calcolare i **valori assunti da una funzione** definita sopra un intervallo di numeri interi, oppure, equivalentemente, diciamo che consente di **valutare una funzione** definita sopra un intervallo di interi.

B15:**a.09** Più in generale si incontrano algoritmi, procedure o regole, che supponiamo definite in modo sufficientemente preciso, le quali a partire da uno qualsiasi degli elementi di un insieme finito consentono di costruire un oggetto di consistenza nota al quale risulta attribuita una individualità formale.

Si possono prospettare meccanismi che operano su stringhe, in particolare sulle notazioni posizionali dei numeri naturali (e di altri numeri), su liste (e quindi su insiemi finiti) e su altre costruzioni finite.
Li incontreremo in successive considerazioni matematiche, sempre chiedendo che siano definiti con una precisione sufficiente a garantire la possibilità di determinare affidabilmente i valori che assumono.

In particolare nell'ambito delle stringhe sono ben definiti i meccanismi che trasformano una qualsiasi stringa $w$ sulle lettere `a` e `b` di lunghezza minore di 100 nella $w^3$, oppure nella riflessa $w^{\leftarrow}$, nella lista delle sue permutate circolari, nella lista dei suoi infissi, nel risultato della applicazione di una sostituzione.

Tra questi meccanismi si possono includere anche procedimenti che si servono di liste o di tabelle di origine empirica che si possano precisare dettagliatamente senza indecisioni.

Per esempio si possono proporre meccanismi che fanno individuare il prodotto di un listino in base alle sue maggiori vendite in un dato periodo.

Da questi meccanismi decidiamo invece di non includere i procedimenti che si svolgono senza la completa determinatezza dei comportamenti dei dispositivi interni, per esempio meccanismi che si servono di estrazioni casuali o su operazioni caratterizzate da imprevedibilità derivanti da condizioni sperimentali non completamente sotto controllo o determinate da fattori dipendenti da situazioni eventi esterni; non si esclude che queste imprevedibilità siano state ricercate in quanto si intende studiare la loro casualità.

Per esempio non si prendono in considerazione i meccanismi finalizzati alla scelta dei vincitori di una lotteria o di un concorso di natura promozionale tra gli acquirenti di un prodotto di ampia popolarità.

B15:**a.10** Per la organizzazione delle conoscenze sono ampiamente utilizzate molte funzioni esplicite. Dovendo trattare per qualche fine pratico una funzione esplicita per il cui dominio non si impone (per valore, per posizione spaziale o temporale, per tradizione, ...) un ordine sequenziale, in genere risulta conveniente (e anche necessario) scegliere per tale insieme un ben definito ordinamento convenzionale.

In genere conviene che un tale ordinamento sia scelto in modo da facilitare le manipolazioni prevedibili della funzione e spesso anche in modo da facilitare la sua presentazione.

Per esempio una tabella che fornisce il numero di abitanti dei comuni italiani spesso è ragionevole che presenti i comuni in ordine alfabetico; in qualche circostanza potrebbe essere più utile presentarli suddivisi per regioni e/o province e all'interno di queste procedere in ordine alfabetico.
È anche prevedibile che per taluni fini risulti più conveniente presentare i comuni secondo l'ordine decrescente del numero dei loro abitanti.

In qualche contesto potrebbe invece essere opportuno presentarli secondo un ordine che rispetti la prossimità geografica, ma questa esigenza non può essere soddisfatta da una unica soluzione agevolmente condivisibile.

Ciascuna di queste scelte porta a estese tabelle aventi lo stesso dominio; quando risultano interessanti diversi ordinamenti del dominio servono dei meccanismi che facilitino i collegamenti tra le diverse tabelle. Tutti questi collegamenti si servono delle permutazioni che collegano i diversi ordinamenti delle tabelle.

Le tabelle di interesse pubblico come quelle accennate sopra è opportuno siano facilmente consultabili in forma aggiornata e certificata dagli organismi incaricati di promuovere la circolazione aperta a tutti delle conoscenze di interesse generale.
Attualmente il mezzo di comunicazione che si impone come canale più vantaggioso per la circolazione largamente aperta delle informazioni di dominio pubblico è il Web.
Può essere interessante osservare molti contenuti utili del web dai punti di vista delle liste, degli insiemi espliciti e delle funzioni esplicite.

## B15:b. presentazioni delle funzioni finite

B15:**b.01** Consideriamo una lista funzionale della forma $\mathsf{L} := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix}$ e la funzione finita che essa rappresenta che denotiamo con $f := \mathsf{SetY}(\mathsf{L})$ .

Questa funzione spesso viene descritta efficacemente in termini meccanici, ricorrendo a quella che chiamiamo **metafora cinematica discreta**, secondo la quale un operatore o un dispositivo che controlla due nastri contenenti il dominio e il codominio della funzione scorre i due nastri con spostamenti sincroni e prendendo visione contemporaneamente di un $x_i$ e del corrispondente valore $y_i$.

In relazione a questi movimenti si parla di **variabile indipendente della funzione** $f$ che "corre" sugli elementi $x_i$ del dominio e di **variabile dipendente della funzione** che si sposta in sincrono sugli elementi $y_i$ del codominio.

Adottando questa terminologia cinematica e si parla di valori che la funzione va assumendo in "istanti successivi": in tal modo alle due liste che forniscono il dominio e i valori vengono associati i tempi di una scala temporale discreta che semplificando viene associata a una sequenza di numeri naturali consecutivi. Questo si dice anche se le stringhe $x_i$ rappresentano oggetti fisici non implicitamente sequenziabili, per esempio località sparse in una regione estesa o persone che per indole si opporrebbero a ogni richiesta di mettersi in fila.

Il precedente scenario meccanicistico si trova in sintonia con la pratica delle persone (scribi, contabili, amministratori, sperimentatori, ...) che operano quotidianamente su funzioni esplicite, e quindi scorrono elenchi, servendosi di registrazioni su papiri, tavolette d'argilla, fogli di carta, lavagne, spreadsheets, telefoni smart, ... .
Questo scenario si adatta con maggiore evidenza alle situazioni nelle quali si ha una funzione gestita con uno strumento informatico o con un dispositivo sequenziale (file sequenziale, nastro trasportatore, binario ferroviario, sequenza di diapositive, sequenza di tracce musicali o sequenza degli episodi di una fiction registrate su una memoria elettronica, ...).

B15:**b.02** Una funzione $f$ che possiede sia il dominio $D$ che il codominio $C$ dotati di ordinamenti sequenziali (espliciti o implicitamente prevalenti) si può vantaggiosamente visualizzare anche servendosi di una raffigurazione matriciale o geografica mediante caselle del prodotto cartesiano $D \times C$ e distinguendo con repliche di un segno di buona evidenza le caselle corrispondenti alle varie coppie costituenti la funzione stessa.

Questo si impone in particolare per le funzioni numeriche.
Queste funzioni finite, ma anche quelle con il solo codominio numerico, possono essere efficacemente presentate mediante istogrammi ottenibili come accostamenti di rettangoli di opportune estensioni.

//input pB15b02

Se $f$ è una funzione avente come dominio $D$ e come codominio $C$, la presentazione visiva dell'insieme delle coppie

(1) $$\{x \in D :| \langle x, f(x) \rangle\} \subseteq D \times C .$$

viene chiamata **grafico della funzione** $f$ (in inglese *graph*).

B15:**b.03** Molte caratteristiche di una funzione esplicita con dominio poco esteso sono presentate efficacemente anche attraverso la sua **raffigurazione sagittale**.
Questa presentazione visiva è costituita da due sequenze di contrassegni disposti su due linee verticali parallele, il primo rappresentante il suo dominio, il secondo il suo codominio; tipicamente i punti del dominio sono incolonnati sulla sinistra della figura e i punti del codominio sulla destra; a ciascuna coppia $\langle x_i, y_i \rangle$ costituente la funzione si fa corrispondere una freccia che inizia nel segno di $x_i$ del dominio e termina nel segno $y_i$.

Se il numero delle coppie costituente la funzione non è elevato, la raffigurazione sagittale fornisce chiaramente le proprietà della funzione stessa che non dipendono dalle peculiarità degli elementi in gioco, peculiarità che nella raffigurazione vengono intenzionalmente ignorate. In particolare si vede se accade che due frecce terminano nello stesso elemento del codominio o meno.

//input pB15b03

Se non si hanno due frecce che terminano nello stesso elemento del codominio e tutti gli elementi in gioco sono toccati da qualche freccia il codominio ha lo stesso cardinale del dominio e a ogni elemento del codominio $y_i$ risulta associato l'unico elemento del dominio $x_i$ cui la funzione associa $y_i$.
La sequenza delle coppie riflesse di quelle costituenti la $f$ $\Big\langle \langle y_1, x_1 \rangle, ..., \langle y_n, x_n \rangle \Big\rangle$ individua quindi la funzione chiamata **funzione inversa** della $f$ e denotata con $f^{-\mathbf{1}}$, notazione compatibile con la notazione usuale per la controimmagine [a06].
In questo caso la $f$ viene chiamata **funzione invertibile**; essa viene anche chiamata **funzione biiettiva**, **biiezione** o **corrispondenza biunivoca** tra $\mathsf{dom}(f)$ e $\mathsf{cod}(f)$.

Si osserva che una funzione esplicita $f$ è invertibile sse $|\mathsf{cod}(f)| = |\mathsf{dom}(f)|$. Inoltre se $f$ è una funzione invertibile, anche la sua funzione inversa $f^{-\mathbf{1}}$ è invertibile e la sua inversa è la stessa $f$; si può quindi scrivere

$$(f^{-\mathbf{1}})^{-\mathbf{1}} \;=\; f \;.$$

Se invece a più elementi del dominio di una funzione $g$ corrisponde uno stesso elemento del codominio, non è possibile definire una sua funzione inversa; se è necessario individuare una funzione inversa occorre ridurre il dominio $\mathsf{dom}(g)$.

Osserviamo che la trasformazione che a ogni funzione esplicita invertibile associa la sua inversa può considerarsi una endofunzione-B che ha come dominio e codominio l'insieme-B delle funzioni esplicite invertibili.

B15:**b.04** In molte attività della matematica e delle sue applicazioni risultano utili corrispondenze biunivoche specifiche.
Un primo tipo che abbiamo già segnalato in riguarda biiezioni tra insiemi delle forme $(n]$ e $[n)$:

$$\left\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \end{matrix} \right\downarrow \;.$$

Un altro riguarda il passaggio da un ordinamento sequenziale all'opposto, come per quello fornito dalla permutazione entro $\{a, b, c, ..., x, y, z\}$ che costituisce una riflessione

$$\left\downarrow \begin{matrix} a & b & c & \dots & x & y & z \\ z & y & x & \dots & c & b & a \end{matrix} \right\downarrow \;.$$

Altre biiezioni utili sono quelle che consentono di identificare somme, prodotti, unioni, intersezioni, di tre operandi grazie alla associatività di queste operazioni.

Un'altra utile biiezione è quella che riguarda le sequenzializzazioni delle entrate delle matrici ottenute scorrendole per righe, per colonne o secondo qualche criterio controllabile algoritmicamente.
Ogni sequenzializzazione di una matrice si può trasformare in una corrispondenza biunivoca tra un lista di coppie di interi di un prodotto cartesiano come $[m) \times [n)$ con una lista di singoli interi appartenenti a un intervallo $[1 : m \cdot n)$.
In particolare si hanno le due seguenti biiezioni

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccccc} \langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \dots & \langle 0,n-1\rangle & \dots & \langle i,j\rangle & \dots & \langle m-1,n-1\rangle \\ 0 & 1 & \dots & n-1 & \dots & i\cdot n+j & \dots & m\cdot n-1 \end{array} \right\downarrow ,$$

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccccc} \langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \dots & \langle 0,n-1\rangle & \dots & \langle i,j\rangle & \dots & \langle m-1,n-1\rangle \\ 0 & m & \dots & (n-1)m & \dots & i+j\cdot m & \dots & m\cdot n-1 \end{array} \right\downarrow ;$$

esse sono descritte in termini cinematici come scorrimento del prodotto cartesiano $[m) \times [n)$, risp., per righe successive e per colonne successive.

Nel seguito incontreremo altre manovre descrivibili come scorrimenti di configurazioni discrete visualizzabili ma non esplicitamente sequenzializzate: oltre ai prodotti cartesiani di due o più fattori, per molte applicazioni sono importanti le sequenzializzazioni di insiemi di punti che rappresentano discretamente superfici nello spazio e insiemi di nodi di strutture grafiche. Per queste manovre si usa il termine **visite di configurazioni discrete**.

**(1) Eserc.** Precisare le biiezioni che riguardano le visite (sequenziali) di tabelle quadrate e poi di tabelle rettangolari più alte che larghe, visite che vedono movimenti di successive linee diagonali.

B15:**b.05** La presentazione esplicita di una funzione con il dominio molto esteso è evidentemente onerosa. Se una tale funzione esprime fatti del mondo reale, come dati di un censimento, elenchi telefonici, misurazioni per il monitoraggio ambientale, dati di una indagine epidemica o dati forniti da un acceleratore di particelle o da un sistema di grandi telescopi, si deve ricorrere a opportuni supporti di dati come dischi magneto-ottici, memorie a stato solido ed anche a sistemi di memorie distribuite connesse da specifici canali di trasmissione a larga banda (cloud).

Vi sono invece funzioni $f$ aventi un dominio $D$ molto esteso ma ben definito che possono essere individuate da meccanismi (espressioni, regole o algoritmi) dei quali si possono dare descrizioni (possibilmente concise) le quali a ogni elemento $x$ di $D$ riescono ad associare il corrispondente valore $f(x)$.
Per esse possono risultare convenienti scritture della forma

$$f \;=\; \lceil\, x \in D \mapsto \mathcal{F}(x) \,\rceil \ ,$$

dove con $\mathcal{F}$ si denota una rappresentazione del meccanismo per la determinazione dei valori e con $\mathcal{F}(x)$ si intende esprimere l'oggetto che il meccanismo è in grado di far corrispondere ad un qualsiasi elemento $x$ del dominio $D$. Queste funzioni possono essere chiamate **funzioni con costruzione esplicita**.
Va segnalato che spesso le scritture $f(x)$ ed $\mathcal{F}(x)$ si possono identificare senza portare a fraintendimenti.

Molto importanti e maneggevoli sono le funzioni per le quali la rappresentazione del meccanismo è fornita da una espressione $\mathcal{E}(x)$ contenente il simbolo $x$, operatori, delimitatori, separatori e altri segni che un esecutore di procedure umano o artificiale sappia interpretare operativamente [v.a. C14].
Esempi di queste funzione numeriche sono:

$$\lceil\, x \in (10] \mapsto 3\cdot x + x^2 \,\rceil \;=\; \left\downarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 4 & 10 & 18 & \cdots & 3\,n+n^2 \end{array} \right\downarrow \quad \text{e}$$

$$\lceil\, x \in (10] \mapsto \max(4\,(x-3)^2), 60-5\,x) \,\rceil \;=\; \left\downarrow \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 55 & 50 & 45 & 40 & 35 & 36 & 64 & 100 & 144 & 196 \end{array} \right\downarrow .$$

B15:**b.06** Talora due insiemi (finiti) $X$ e $Y$ tra i quali si è stabilita una corrispondenza biunivoca $\beta$ hanno in comune molte proprietà e molte considerazioni sopra tali proprietà si possono presentare più concisamente e più efficacemente effettuando la cosiddetta identificazione dei due insiemi; questa operazione consiste nell'argomentare trattando ogni $x \in X$ come se fosse non diverso da $\beta(x)$.
Una tale identificazione porta a fenomeni ampiamente diffuse nei linguaggi naturali: in sostanza vengono sottintese corrispondenze biunivoche anche tra i costrutti effettuati sopra elementi $x_i \in X$ e gli omologhi costrutti effettuati sopra elementi $\beta(x_i) \in Y$.

Queste identificazioni riguardano in particolare insiemi $X$ e insiemi di loro rappresentazioni di largo uso: i numeri interi specifici sono identificati con le loro scritture decimali, gli elementi chimici con i loro simboli, le province italiane con le loro sigle, ... .
Questo atteggiamento si riscontra anche per vari tipi di prodotti identificati con loro misure o con loro contenitori (mezzo litro di latte, un barile di petrolio, ...).
Inoltre in molti discorsi di tono colloquiale si confondono classi di equivalenza con loro elementi rappresentativi, nazioni con le loro città capitali o con i loro leaders politici del momento, istituzioni con gli edifici nei quali hanno sede, ...).

In molti contesti matematici e scientifici queste confusioni sono da considerare **abusi di linguaggio veniali**, cioè improprietà perdonabili in quanto portano solo a fraintendimenti risolvibili osservando il contesto, mentre consentono esposizioni più concise e meno macchinose, in quanto consentono giri di parole più brevi e quindi più scorrevoli.

Osserviamo che talora vengono posti in corrispondenza biunivoca insiemi di entità paradossalmente distanti (ad esempio uragani e nomi femminili che rievocano amabili personaggi).

B15:**b.07** Nella matematica e in molte sue applicazioni rivestono grande interesse le corrispondenze biunivoche stabilite tra oggetti di generi diversi, cioè individuati con procedimenti diversi, ma che un esame approfondito consente di porre in collegamento e/o di ricondurre a caratteristiche formali comuni. In genere il chiarimento di questi collegamenti ha conseguenze computazionali e conoscitive assai vantaggiose.

La scoperta di una biiezione tra due insiemi di oggetti ottenuti con costruzioni diverse porta a una loro visione più comprensiva, spesso sensibilmente più chiara.

Un caso particolarmente suggestivo è fornito delle decine di insiemi di oggetti ottenuti da definizioni diverse che sono enumerati dai numeri di Catalan ($_e$Catalan number) [v.a. D20]. Altre situazioni degne di nota si trovano nelle definizioni delle $_i$matroidi [D48].

Conviene inoltre segnalare il procedimento del calcolare il cardinale di un insieme $S$ mediante la precisazione di una biiezione tra di esso e un insieme $T$ il cui cardinale sia già noto o che si riesca a valutare a partire da caratteristiche di $T$, in particolare partizioni, atte a facilitare le enumerazioni.

Spesso trovare una tale biiezione porta a individuare una presentazione nuova dell'insieme $S$ che riesce a rivelare sue proprietà legate a caratteristiche non riconducibili al suo cardinale.

B15:**b.08** Si dice **funzione costante** una funzione con il codominio costituito da un solo elemento.
La funzione che a ogni elemento di $D$ associa l'oggetto $v$ si denota efficacemente con la scrittura

(1) $$\ulcorner d \in D \,\not\mapsto\, v \urcorner \;.$$

L'aspetto della raffigurazione sagittale di una funzione costante è semplice e tipico.

//input pB15b08

B15:**b.09** Consideriamo due insiemi espliciti $D$ ed $C$.

Denotiamo con $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$ l'insieme delle funzioni aventi tutto $D$ come dominio e tutto $C$ come codominio; queste entità le chiamiamo anche **funzioni di** $D$ **in** $C$ e per il loro insieme si usa anche la cosiddetta notazione esponenziale $C^D$.

Se $D$ e $C$ sono insiemi esplicitabili anche $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$ è un insieme esplicitabile: infatti preciseremo un algoritmo che a partire da due liste esplicite, la prima per $D$ e la seconda per $C$, fornisce una lista esplicita di tutte e sole le funzioni in $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$. Questa procedura viene chiamata algoritmo che visita $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$.

La totalità delle funzioni di $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$ per le quali ogni elemento di $C$ è ottenuto da un solo elemento di $D$, cioè la totalità delle biiezioni tra $C$ e $D$, si denota con $\lceil D \triangleleft\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$; ovviamente esso costituisce un sottoinsieme di $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$.
Se $C$ è esplicitabile e si conosce una funzione esplicitabile di $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$, allora sono insiemi esplicitabili anche $D$ e $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$, in quanto si possono definire un algoritmo che visita $C$ ed uno che visita $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$.

Abbiamo visto che due insiemi finiti $D$ e $C$ possono essere posti in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno uguai cardinali: questo fatto ora si può esprimere con la formula:

$$\lceil D \triangleleft\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |D| = |C| \ . \tag{1}$$

Se conosciamo un algoritmo che visita un insieme esplicito $S$ e se $R$ è un sottoinsieme di $S$ costituito dagli elementi $r \in S$ che soddisfano una proprietà algoritmicamente decidibile per tutti gli elementi di $S$, allora si può precisare un algoritmo che visita $R$ in modo che anche questo si può dichiarare insieme esplicitabile.
Segnaliamo che, all'opposto, se un insieme soddisfa una proprietà non è garantito che un suo sottoinsieme qualsiasi la soddisfi: dipende dalla formunlazione della proprietà.

B15:**b.10** In molte indagini accade di dover esaminare funzioni ottenute con costruzioni ben definite, ma elaborate per le quali il dominio e/o il codominio non sono insiemi completamnte individuati a priori.

Denotiamo con $\lceil D \longrightarrow C \rceil$ l'insieme delle funzioni aventi come dominio un sottoinsieme (proprio o improprio) di $D$ e come codominio un sottoinsieme (proprio o improprio) di $C$.

Se $D$ e $C$ sono insiemi finiti lo è $\lceil D \longrightarrow C \rceil$; inoltre se $D$ e $C$ non sono vuoti si ha $\lceil D \longrightarrow C \rceil \subset \lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright C \rceil$.

Denotiamo poi con $\lceil D \longmapsto C \rceil$ l'insieme delle funzioni aventi come dominio $D$ e come codominio un sottoinsieme (proprio o improprio) di $C$.

Scriviamo invece $\lceil D \relbar\!\!\triangleright C \rceil$ l'insieme delle funzioni aventi come dominio un sottoinsieme (proprio o improprio) di $D$ e come codominio $C$.

Infine con $\lceil D \longleftrightarrow C \rceil$ denotiamo l'insieme delle funzioni invertibili aventi come dominio un sottoinsieme di $D$ e come codominio un sottoinsieme di $C$.

Se $D$ e $C$ sono insiemi esplicitabili anche i suddefiniti insiemi di funzioni vanno considerati esplicitabili.

Più precisamente per ciascuno di tali insiemi di funzioni, come vedremo, si individua un algoritmo che, utilizzando due procedimenti in grado di elencare gli elementi di $C$ e $D$ secondo ordini determinati genera tutti gli insiemi di coppie di elementi di $C \times D$ che costituiscono l'insieme in esame.

B15:**b.11** Tutti gli insiemi di funzioni definiti nel paragrafo precedente sono sottoinsiemi di $\lceil D \longrightarrow C \rceil$.

Più precisamente si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

(1) $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\rhd C \rceil \subset \lceil D \longmapsto C \rceil$ se $|C| > 1$ , $\lceil D \vdash\!\!\relbar\!\!\rhd C \rceil \subset \lceil D \relbar\!\!\rhd C \rceil$ se $|D| > 1$ ,

(2) $\lceil D \relbar\!\!\rhd C \rceil \subset \lceil D \longrightarrow C \rceil$ se $|C| > 1$ , $\lceil D \longmapsto C \rceil \subset \lceil D \longrightarrow C \rceil$ se $|D| > 1$ ,

(3) $C \subset B \implies \lceil D \longmapsto C \rceil \subset \lceil D \longmapsto B \rceil$ , $\lceil D \longrightarrow C \rceil \subset \lceil D \longrightarrow B \rceil$ ,

(4) $D \subset A \implies \lceil D \longrightarrow C \rceil \subset \lceil A \longrightarrow C \rceil$ , $\lceil D \relbar\!\!\rhd C \rceil \subset \lceil A \relbar\!\!\rhd C \rceil$ .

Per enunciare che una funzione fa parte di un insieme di funzioni $\mathsf{F}$ al quale si può dare la forma $\lceil D \longrightarrow C \rceil$ o la forma di uno dei suoi sottoinsiemi sopra introdotti, diremo anche che essa è una **funzione che appartiene a un genere**, $\mathsf{F}$.

B15:**b.12** **(1) Esempio** L'insieme $\lceil \{1,2,3\} \longmapsto \{\mathtt{a},\mathtt{b}\} \rceil$ è costituito dalle 8 funzioni rappresentabili concisamente con le stringhe `aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba` e `bbb`.

**(2) Esempio** $\lceil \{1,2,3\} \lhd\!\!\longrightarrow \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\} \rceil$ è costituito dalle 24 funzioni rappresentabili con le stringhe `abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca` e `dcb`.

**(3) Eserc.** Precisare dei meccanismi che individuano tutte le funzioni degli insiemi sopra introdotti con $A$, $B$, $C$ e $D$ insiemi numerici della forma $(m]$, $(n]$, $(p]$ e $(q]$, oppure $[m)$, $[n)$, $[p)$ e $[q)$.

B15:**b.13** Accenniamo ad alcuni esempi di funzioni finite di interesse applicativo.

Nel gioco del 15 ogni configurazione si può rappresentare con una funzione biiettiva di

$$\lceil (4] \times (4] \lhd\!\!\relbar\!\!\rhd \{1,2,...,15,b\} \rceil$$

(ove $b$ contrassegna la casella attualmente non occupata, detta bianca o vuota).
Equivalentemente si può rappresentare con una funzione iniettiva di

$$\lceil \{1,2,...,15\} \lhd\!\!\longrightarrow (4] \times (4] \rceil \ .$$

B15:**b.14** Nel gioco degli scacchi ogni configurazione può essere individuata da una funzione iniettiva facente parte dell'insieme

$$\lceil \textit{insieme dei pezzi} \longleftrightarrow (8] \times (8] \rceil \ .$$

La precedente affermazione è tutt'altro che stringente: in effetti le regole del gioco degli scacchi riducono fortemente l'insieme delle accennate funzioni, pur lasciando una enorme estensione alle possibili sequenze di configurazioni derivabili dalla configurazione iniziale nel rispetto delle regole.
In particolare non sono ammesse configurazioni con entrambi gli alfieri di un dato colore su due caselle dello stesso colore. Questa restrizione è facilmente verificabile; altri vincoli sono molto più complessi da controllare.

Vi sono moltissimi giochi di carte (scopa di qualche tipo, briscola, scala quaranta, pinnacola, ...) che vedono 4 giocatori effettuare a turno delle scelte che fanno modificare le configurazioni del gioco esprimibili con insiemi (disgiunti e taluni ordinati) formati dalle 40 o 108 carte da gioco.

A ciascuna delle carte va attribuito una delle seguenti collocazioni:

carta (coperta) nella sequenza da cui pescare ;
carta scoperta sul banco o in cima alla pila o nella sequenza delle carte scartate ;
carta in mano al giocatore i, per $i = 1, 2, .3, 4$ ;
carta guadagnata dal giocatore i, per $i = 1, 2, .3, 4$

Si ha una distribuzione iniziale delle carte che determina un complesso di collocazioni di alcune carte (ad esempio 12 o 40).
Ogni scelta di un giocatore riguarda il cambiamento della collocazione di una sua carta e in conseguenza di altre .
Ogni configurazione di una sequenza costituente una partita, dall'avvio alla conclusione, corrisponde a una sequenza di scelte da parte di una sequenza dei giocatori fissata inizialmente.
Prima di ogni scelta il giocatore di turno si deve impegnare nel valutare i vantaggi che può conseguire nel progressivo ottenimento di un punteggio suo personale o in comune con un compagno, anche in relazione alla riduzione dei possibili guadagni degli avversari.

B15:**b.15** Accenniamo anche alla impostazione mediante funzioni finite del goico solitario, con un solo giocatore che effettua scelte, chiamato FreeCell.

Il gioco riguarda un insieme di un mazzo di $13\,4 = 52$ carte i cui valori sono da considerare ordinati dalla lista ⟨ 1,2,...,10,J,Q,K ⟩, e con l'equivalenza tra ciascuna carta con quella dello stesso valore

Il campo del gioco nel quale si vengono trovare le carte è costituito da:

- 8 pile di lavoro, pile-L, formate da caselle nelle quali inizialmente vengono collocate tutte le carte (6 in 4 pile, 7 nelle 4 rimanenti);
- 4 celle, caselle temporanee ciascuna delle quali può essere vuota o contenere una carta;
- 4 pile obiettivo, pile-O, inizialmente vuote e che dovranno esssere riempite, ciascuna con le carte di un seme (cuori, quadri, fiori, picche) ordinate per valori crescenti allo scopo di raggiungere la configurazione finale di successo.

Il gioco si sviluppa con una sequenza di configurazioni, ciascuna delle quali ottenibile dalla precedente con uno spostamento legale di una carta (trascuriamo la possibilità di scegliere una modifica che equivale a due o più successive mosse legali).

Ogni mossa legale vede il giocatore spostare una carta sul campo di gioco in una diversa casella ammissibile con una delle seguenti mosse:

- dalla testa di una pila-L (le caselle di testa sono presentate più in basso) in una casella ammissibile di un'altra pila-L, casella al di sopra di una carta del colore opposto e con valore immadiatamente inferiore o casella di una pila-L vuota;
- dalla testa di una pila-L in una casella ammissibile di una pila-O, casella al di sopra della carta dello stesso seme con valore immediatamente inferiore o casella in una pila-O vuota se la carte è un asso;
- dalla testa di una pila-L in una cella vuota;
- da una cella in una casella ammissibile di una pila-L o di una pila-O;
- dalla testa di una pila-O in una casella ammissibile di una pila-L o in una cella. Si osserva che le pile-L vengono arricchite con carte di valori inferiori di quelle precedentemente in testa, mentre le pile-O vengono arricchite con carte di valori progressivamente crescenti

La configurazione iniziale del gioco è stabilita da un algoritmo che esclude le distribuzioni delle 52 carte dalle quali è impossibile raggiungere una conclusione di successo.

Il giocatore deve realizzare una sequenza di configurazioni successive che dalla configurazione iniziale che gli viene proposta raggiunga una configurazione di successo.

Egli può conoscere le posizioni di tutte le carte, nulla è nascosto e quindi lasciato al caso e le sue decisioni per le successive mosse sono potenzialmente completamente libere, vincolate solo dalle regole e in particolare dalla possibilità di servirsi solo di 4 celle inizialmente libere.

Tuttavia i possibili sviluppi del gioco sono moltissimi e questo rende impegnativo tenerli sotto controllo per evitare di trovarsi in una situazione di stallo nella quale, con l'occupazione di tutte le celle, non risulta possibile proseguire con il progressivo riempimento delle pile-O.

La sua abilità consiste nell'individuare una strategia di gioco che gli permetta di ridurre progressivamente le pile-L e di arricchire le pile-O senza incorrere nella mancanza di celle libere.

## B15:c. endofunzioni finite

B15:**c.01** La definizione consente che il dominio e il codominio di una particolare funzione abbiano elementi in comune e, in particolare, consente che coincidano.

Si dice **funzione entro un insieme**, $D$ ogni funzione di $\lceil D \longrightarrow D \rceil$.
Per caratterizzare ogni funzione di $\lceil D \longmapsto D \rceil$ si usa anche dire che è una **endofunzione** di $D$ .

L'insieme delle endofunzioni entro il dominio $D$ si denota con $\mathsf{Endo}_D$.

Consideriamo in particolare le funzioni invertibili entro $D$, cioè le funzioni appartenenti a $\lceil D \longleftrightarrow D \rceil$ .

Casi particolari di queste sono le funzioni invertibili aventi come dominio l'intero $D$, cioè le funzioni del genere $\lceil D \triangleleft\!\!\longleftrightarrow D \rceil$ .
Nel caso in cui $D$ è un insieme finito le endofunzioni invertibili di $D$ devono avere come codominio l'intero $D$ in quanto deve essere $\mathsf{dom}(p) = |D$.
Quindi le endofunzioni invertibili di un insieme finito su $D$ sono le funzioni in $\lceil D \triangleleft\!\!\longleftrightarrow\!\!\triangleright D \rceil$ , cioè sono le **permutazioni** di $D$, ossia le corrispondenze biunivoche di $D$ con se stesso.

L'endofunzione di un insieme $D$ più semplice da descrivere è la la **trasformazione identica** o **identità** di $D$, cioè la particolare permutazione che a ogni elemento del suo dominio fa corrispondere se stesso.

L'identità dell'insieme $D$ si denota con $\mathsf{Id}_D$ e si può introdurre scrivendo

$$\mathsf{Id}_D \;:=\; \lceil x \in D \nrightarrow x \rceil \;=\; \{x \in D :| \langle x, x\rangle\} \;.$$

Altre semplici endofunzioni di un insieme $D$ sono le endofunzioni costanti, funzioni che fanno corrispondere a ogni elemento di $D$ un unico punto $c \in D$

Ogni endofunzione costante entro un insieme di almeno 2 elementi non è invertibile.

B15:**c.02** Le raffigurazioni sagittali delle endofunzioni di un insieme finito $D$ presentano due allineamenti verticali di segni che raffigurano gli elementi di $D$ posti in corrispondenza da rispettive frecce orizzontali on corrispondenti a punti che risultano sovrapponibili in conseguenza di una traslazione orizzontale; in una tale raffigurazione ogni coppia di punti collocati sulla stessa linea orizzontale rappresenta uno stesso elemento di $D$ nei suoi due ruoli di elemento del dominio al quale si applica la funzione (punto a sinistra) e di elemento del codominio ottenibile come valore della funzione (punto a destra).

//input pB15c02

La prima delle precedenti endofunzioni è una identità, la seconda non è invertibile, ovvero non è iniettiva, e la terza lo è, ovvero è una permutazione.

Una endofunzione di un insieme finito $D$ si può descrivere come un meccanismo tangibile o come una manovra eseguibile materialmente che agisce su $D$ pensato come contenitore dotato di $|D|$ piccoli alloggiamenti ciascuno dei quali inizialmente contiene un diverso elemento di $D$; l'effetto della azione di una endofunzione si descrive come spostamento di ciascuno degli elementi di $D$ dal suo alloggiamento iniziale in un nuovo alloggiamento, senza escludere la possibilità che qualche elemento non venga mosso.

Seguendo questa descrizione risulta efficace usare per le endofunzioni il termine **trasformazioni**; questa terminologia è particolarmente adatta alle endofunzioni relative a domini che sono descritti efficacemente in termini visivi. In particolare descrive efficacemente eventi come una partita del gioco delle tre carte e le modifiche che subiscono i vertici di un corpo rigido con una forma regolare (una piastrella esagonale, un solido cubico, ...) quando questo viene sottoposto a rotazioni e/o riflessioni, manovre che portano il corpo a una nuova posizione che a un osservatore esterno non appare distinguibile dalla sua posizione iniziale.

B15:**c.03** Si dice **punto fisso** di una endofunzione $\eta$ del genere $\lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow D \rceil$ ogni elemento di $D$ che essa trasforma in se stesso.

Va segnalato che la soluzione di molti interessanti problemi si riconduce alla individuazione dei punti fissi di una opportuna endofunzione.

Per l'identità di $D$ sono punti fissi tutti gli elementi di $D$. Una endofunzione costante presenta un unico punto fisso, il punto che da solo costituisce il suo codominio.
Per una tale endofunzione si usano i termini **collasso**, piuttosto drammatico, e **reset**, di derivazione elettromeccanica ed elettronica.

Nella figura che segue, accanto a un reset viene presentata una endofunzione con due punti fissi che costituiscono il suo codominio.

//input pB15c03

B15:**c.04** Ricordiamo che la raffigurazione sagittale, può essere usata anche per funzioni che non sono endofunzioni, in particolare per funzioni aventi il dominio e il codominio disgiunti. Anche questa raffigurazione, nel caso di funzione con dominio poco esteso in genere consente di visualizzare efficacemente varie caratteristiche.
Vedremo che questa raffigurazione può servire a descrivere varie composizioni di funzioni [c05].

Consideriamo due generiche funzioni finite $f_1 \in \lceil D_1 \longmapsto C_1 \rceil$ ed $f_2 \in \lceil D_2 \longmapsto C_2 \rceil$ i cui domini siano disgiunti. Si dice **unione funzionale** di $f_1$ ed $f_2$ la funzione fornita dalla unione dei due insiemi disgiunti di coppie che costituiscono le due funzioni e che denotiamo con $f_1 \,\dot\cup\, f_2$.

Per questa funzione valgono le seguenti relazioni:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_1 \,\dot\cup\, f_2 \;&=\; f_2 \,\dot\cup\, f_1 \;=\; \lceil x \in D_1 \mid\!\!\rhd f_1(x) \rceil \,\dot\cup\, \lceil x \in D_2 \mid\!\!\rhd f_2(x) \rceil \\ &=\; \{x \in D_1 :\mid \langle x, f_1(x) \rangle\} \,\dot\cup\, \{x \in D_2 :\mid \langle x, f_2(x) \rangle\} \;\in\; \lceil D_1 \dot\cup D_2 \longmapsto C_1 \cup C_2 \rceil \ . \end{aligned}$$

Le raffigurazioni sagittali delle unioni funzionali si ottengono per semplice accostamento delle rappresentazioni sagittali delle due funzioni che costituiscono gli operandi (disgiunti) di questa operazione binaria.

In particolare si possono considerare le unioni funzionali di due endofunzioni aventi disgiunti sia i domini $D_1$ e $D_2$ che i codomini $C_1$ e $C_2$. Queste unioni disgiunte sono funzioni del genere $\lceil D_1 \dot\cup D_2 \longmapsto D_1 \dot\cup D_2 \rceil$ .

B15:**c.05** La operazione binaria di unione funzionale si può applicare più volte e si constata facilmente che gode della proprietà associativa.
Quindi si possono considerare senza difficoltà anche le unioni funzionali di tre o più funzioni con i domini mutuamente disgiunti e in particolare unioni funzionali di più endofunzioni che hanno i domini mutuamente disgiunti.

Viceversa data una endofunzione $\eta$ di un insieme $D$, può essere utile individuare sottoinsiemi di $D$ $D_1$, $D_2$, ..., $D_k$ mutuamente disgiunti tali che $D = D_1 \dot\cup D_2 \dot\cup ... \dot\cup D_k$ e tali che $\eta$ si possa esprimere come unione funzionale di $k$ endofunzioni $\eta_h$ entro $D_h$ per $h = 1, 2, ..., k$.

Una tale decomposizione porta a endofunzioni più semplici della originaria e in linea di massima conviene sia portata avanti il più possibile, cioè fino a ottenere sottoinsiemi $D_h$ non ripartibili ulteriormente in sottoinsiemi in grado di essere domini di endofunzioni.

Ciascuna delle funzioni con dominio $D_h$ è un sottoinsieme della endofunzione $\eta$ e si può dire che è una sua **sottoendofunzione**.

La convenienza di analisi che consentono di servirsi di decomposizioni si riscontra in molte altre situazioni analoghe.
Data una struttura matematica o una procedura relativamente complessa (una funzione, una struttura algebrica, uno spazio, una trasformazione, ...) tendenzialmente risulta vantaggioso riuscire a esprimerla come costruibile con composizioni di tipi sufficientemente semplici riguardanti strutture o procedure più semplici, collocabili in insiemi meno estesi.

Dal punto di vista dello studio sistematico di questi oggetti, quando si sono chiarite le caratteristiche delle strutture più semplici e si sanno ricondurre a queste le caratteristiche delle strutture composite, in genere si realizzano notevoli economie di pensiero e si ottengono conoscenze più organiche.
Questo si riscontra in particolare in teoria dei gruppi e in algebra lineare.

B15:**c.06** Introduciamo ora una importante costruzione riguardante le endofunzioni cominciando da due endofunzioni finite.

Definiamo come **prodotto di composizione** di due endofunzioni $\eta_1, \eta_2 \in \mathsf{Endo}_D$ le due funzioni corrispondenti alla costruzione presentata nella seguente formula:

(1) $$\eta_1 \circ_{lr} \eta_2 \;:=\; \eta_2 \circ_{rl} \eta_1 \;:=\; \lceil x \in D \;\not\mapsto\; (x_{;}\eta_1)_{;}\eta_2 \rceil \;=\; \lceil x \in D \;\not\mapsto\; \eta_2(\eta_1(x)) \rceil \;.$$

La rappresentazione sagittale consente di presentare con chiarezza il prodotto di composizione di due endofunzioni entro domini poco estesi.

L'azione della endofunzione presentata con le prime due espressioni si raffigura efficacemente con tre allineamenti verticali di punti contrassegnati rappresentatnti gli elementi del dominio $D$: con il primo e il secondo degli allineamenti da sinistra si ha la raffigurazione sagittale di $\eta_1$, mentre il secondo e il terzo (il più a destra) degli allineamenti forniscono la raffigurazione sagittale di $\eta_2$.

L'effetto della endo funzione composizione $\eta_1 \circ_{lr} \eta_2$ è dato dai collegamenti tra alcuni dei punti $x$ sulla sinistra con il punto sulla destra ottenuto percorrendo il primo arco da $x$ a $\eta_1(x)$ e successivamente l'arco da $\eta_1(x)$ a $\eta_2(\eta_1(x))$.

Si constata che si può ottenere la raffigurazione della funzione $\eta_2 \circ_{rl} \eta_1$ riflettendo rispetto a una linea verticale la raffigurazione precedente (e quindi invertendo anche la direzione delle frecce).

Il prodotto di composizione di endofunzioni si può reiterare senza difficoltà e la rappresentazione sagittale applicata al prodotto di composizione di tre endofunzioni rende evidente che questa operazione binaria gode della proprietà associativa.

B15:**c.07** Occorre segnalare che il prodotto di composizione può definirsi anche per due funzioni qualsiasi con la seguente formula riguardante due insiemi funzionali di coppie $f$ e $g$

$$f \circ_{lr} g \;:=\; \{\langle x, z\rangle \in \mathsf{dom}(f) \times \mathsf{cod}(g) \;\;\forall y \in \mathsf{cod}(f) \cap \mathsf{dom}(g) \;\colon\; \langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g\} \;.$$

Si osserva che questo insieme di coppie è vuoto sse $\mathsf{cod}(f) \Diamond \mathsf{dom}(g)$.

Se si considerano tre funzioni $f$, $g$ e $h$ con $\mathsf{cod}(f) \cap \mathsf{dom}(g) \neq \emptyset$, $\mathsf{cod}(g) \cap \mathsf{dom}(h) \neq \emptyset$ e almeno un $x \in \mathsf{dom}(f)$ tale che $((x_{;}f)_{;}g) \in \mathsf{dom}(h)$, si constata che l'espressione $(f \circ_{lr} g) \circ_{lr} h$ fornisce una funzione con dominio in $\mathsf{dom}(f)$ e codominio in $cod(h)$.

Inoltre si constata che anche l'espressione $f \circ_{lr} (g \circ_{lr} h)$ fornisce una funzione con dominio in $\mathsf{dom}(f)$e codominio in $cod(h)$ e più precisamente fornisce la stessa funzione.
Abbiamo quindi l'uguaglianza

$$(f \circ_{lr} g) \circ_{lr} h \; = \; f \circ_{lr} (g \circ_{lr} h) \; ,$$

la quale esprime la associatività del prodotto di composizione delle funzioni. Essa consente di semplificare le due espressioni precedenti ponendo

$$f \circ_{lr} g \circ_{lr} h \; := \; (f \circ_{lr} g) \circ_{lr} h \; = \; f \circ_{lr} (g \circ_{lr} h) \; .$$

La precedente uguaglianza risulta evidente dalla rappresentazione sagittale nel caso in cui $f$, $g$ e $h$ siano funzioni finite, cioè nel caso di funzioni con domini e codomini finiti.

Il prodotto di composizione di due relazioni esplicite $f$ e $g$ fornisce un insieme di coppie esplicito ottenibile con il seguente algoritmo relativamente semplice.

Esso organizza due iterazioni su $\mathsf{dom}(f)$ e su $\mathsf{cod}(g)$ con ciascuna fase con il compito di decidere se la coppia $\langle x, y\rangle \in \mathsf{dom}(f) \times \mathsf{cod}(g)$ appartiene o meno al prodotto $f \circ_{lr} g$.

Questa decisione si ottiene con una iterazione su $\mathsf{dom}(f)$ volta a cercare un suo elemento $x$ tale che $\langle x, y\rangle \in f$ e $\langle y, z\rangle \in g$.

Conviene segnalare fin da ora che questo algoritmo ha una organizzazione complessiva che equivale a quella dell'algoritmo per il calcolo di un prodotto di matrici binarie.

B15:**c.08** Le raffigurazioni sagittali delle endofunzioni finite aiutano a rendersi conto delle conclusioni che seguono.

Il prodotto di due reset è uguale al secondo reset applicato:

(1) $$\lceil x \in D \not\mapsto x_1 \rceil \circ_{lr} \lceil x \in D \not\mapsto x_2 \rceil \; = \; \lceil x \in D \not\mapsto x_2 \rceil \; .$$

Il prodotto di due biiezioni è una biiezioni: infatti esaminando due sistemi invertibili di archi il primo sistema che collega un primo allineamento verticale di punti ad un secondo e il secondo sistema che collega il secondo allineamento verticale a un terzo è evidente che si individua un un sistema invertibile di collegamenti tra il primo allineamento ed il terzo. In particolare il prodotto di due permutazioni è una permutazione. Per esempio

$$\downarrow\!\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}\!\downarrow \circ_{lr} \downarrow\!\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\!\downarrow \; = \; \downarrow\!\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}\!\downarrow \; .$$

Si possono considerare anche le composizioni di una endofunzione con se stessa.
In generale per ogni $m$ intero positivo si definisce potenza $m$-sima di composizione della endofunzione $\eta \in \lceil D \longmapsto D \rceil$ con le seguenti richieste:

$$\eta^{\circ 1} \; := \; \eta \qquad , \qquad \eta^{\circ(n+1)} \; := \; \eta^{\circ n} \circ \eta \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad .$$

Tutte le potenze di composizione della endofunzione $\eta$ sono endofunzioni con lo stesso dominio $D$ e con i codomini sottoinsiemi del dominio.

Per maggiore generalità spesso risulta conveniente definire la potenza 0 di una endofunzione entro un insieme $D$ ponendo:

$$\eta^{\circ 0} \; := \; \mathsf{Id}_D \; .$$

Si trova facilmente che

$$\eta^{\circ k} \circ \eta^{\circ m} \; = \; \eta^{\circ m} \circ \eta^{\circ k} \; = \; \eta^{\circ(k+m)} \qquad \text{per } k, m = 0, 1, 2, 3, ... \quad .$$

Spesso le espressioni della forma $\eta^{\circ n}$ si possono semplificare nelle corrispondenti $\eta^n$ senza rischio di fraintendimenti da parte del lettore in grado di inquadrare nel contesto l'abbreviazione stessa.

B15:**c.09** Introduciamo alcuni altri tipi di endofunzioni entro un insieme $D$.

Una endofunzione si dice **involuzione** sse coincide con la propria inversa.
Evidentemente le involuzioni entro un insieme $D$, essendo endofunzioni invertibili, sono particolari permutazioni di $D$.

Si dice **scambio** o **trasposizione** di due elementi $x_i$ e $x_j$ di $D$ l'endofunzione che vede scambiarsi questi due elementi e lascia i rimanenti invariati, cioè la permutazione con soli due punti modificati (e necessariamente scambiati).

L'operazione di scambio può essere effettuata utilmente fra due entità qualsiasi, purché omogenee tanto da poter essere scambiate in enunciati significativi.
Chiaramente gli scambi sono particolari involuzioni.
Lo scambio fra due entità $A$ e $B$, ammesso che abbia senso, si denota con $[A \longleftrightarrow B]$.
In particolare lo scambio fra due elementi $x_i$ e $x_j$ sui quali si eeffettuano delle permutazioni si denota con $[x_i \longleftrightarrow x_j]$.

Un esempio di scambio fra interi positivi è

$$\left\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{matrix}\right\downarrow = [2 \longleftrightarrow 4] \; .$$

Una semplice permutazione che non è un'involuzione è

$$\left\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}\right\downarrow$$

Le permutazioni di insiemi finiti si distinguono, significativamente e in particolare, per il numero dei loro elementi che rimangono fissi e per il complementare numero di elementi che vengono spostati.
La prima delle precedenti permutazioni ha 3 punti fissi e $5 - 3$ elementi spostati; la seconda presenta 2 punti fissi e $5 - 2 = 3$ spostati.
In generale uno scambio entro l'insieme finito $D$ presenta 2 elementi spostati e $|D| - 2$ punti fissi.

B15:**c.10** Consideriamo una generica involuzione $\mathcal{I}$ entro un insieme $D$. Se possiede un punto non fisso $q$, cioè se $\mathcal{I}(q) \neq q$, allora $\mathcal{I}(\mathcal{I}(q)) = \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(q)) = q$ . Quindi i punti non fissi si ripartiscono in duetti di punti che l'involuzione scambia. Un esempio di involuzione che presenta due duetti di punti scambiati e tre punti fissi è

$$\left\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ a & c & b & g & e & f & d \end{matrix}\right\downarrow \; .$$

Di conseguenza una involuzione entro un insieme finito si può ottenere come unione funzionale di un certo numero $k$ di trasposizioni disgiunte e dell'identità relativa al sottoinsieme di $D$ costituito dai $|D| - 2\,k$ elementi che sono punti fissi.
In altre parole, per una involuzione $\mathcal{I}$ entroun insieme finito $D$ gli elementi del suo dominio si ripartiscono in un certo numero $k$ di duetti di elementi che vengono scambiati e nel sottoinsieme dei restanti $|D| - 2\,k$ punti fissi.

In particolare si ha $k = 0$ sse $\mathcal{I} = \mathsf{Id}_D$, mentre $|D| = 2\,k$ sse non vi sono punti fissi.

Ogni involuzione entro un insieme con un numero dispari di elementi presenta almeno un punto fisso; più precisamente essa presenta un numero dispari di punti fissi. Equivalentemente possiamo affermare che la parità del numero dei punti fissi della $\mathcal{I}$ coincide con la parità di $|D| = |\mathsf{dom}(D)|$.

Si dice **permutazione circolare** di un insieme $D$ di $n$ elementi fornito dalla lista $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n \rangle$ una endofunzione di $D$ della forma

$$\left\lfloor \begin{matrix} a_{j_1} & a_{j_2} & ... & a_{j_{n-1}} & a_{j_n} \\ a_{j_2} & a_{j_3} & ... & a_{j_n} & a_{j_1} \end{matrix} \right\rfloor .$$

Tre esempi di permutazioni circolari sono:

$$\left\lfloor \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{matrix} \right\rfloor \quad , \quad \left\lfloor \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ c & e & f & a & d & b \end{matrix} \right\rfloor \quad , \quad \left\lfloor \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ d & f & a & e & b & c \end{matrix} \right\rfloor .$$

La prima delle precedenti permutazioni presenta due punti fissi, mentre le due restanti non presentano punti fissi. Si osserva che la terza delle precedenti permutazioni circolari è l'inversa della seconda.
Più in generale si ha che l'inversa di una permutazione circolare deve essere anch'essa e una permutazione circolare.
Si constata anche che le sole permutazioni circolari che riguardano 2 elementi sono gli scambi.
Si constata anche che una permutazione che non è un'involuzione deve presentare almeno una permutazione circolare che modifica 3 o più elementi.

Va segnalato che le permutazioni degli insiemi finiti rivestono grandissima importanza e saranno riprese, in particolare, in B14d B14e e D25.

B15:**c.11** Si dice **endofunzione idempotente** entro $D$ una endofunzione $\eta$ che coincide con il proprio quadrato di composizione, cioè una endofunzione $\eta$ tale che

(1) $$\eta \circ_{lr} \eta \ = \ \eta \ .$$

Ogni reset è una endofunzione idempotente ed ovviamente è idempotente anche ogni endofunzione identità.

Diciamo **reset.P** (reset parziale) una endofunzione che trasforma tutti gli elementi di un $R$ sottoinsieme proprio di $D$ in un suo elemento e lascia invariati tutti gli elementi di $D \setminus R$. Anche i resets.P sono idempotenti. Conviene considrare i reset come casi particolari di reset.P .

Ogni endofunzione idempotente di un insieme finito $D$ è esprimibile come unione funzionale di endofunzioni reset di sottoinsiemi di $D$ (disgiunti) e di una eventuale identità per l'insieme dei suoi eventuali restanti punti fissi.
In altre parole ogni endofunzione idempotente di $D$ è esprimibile come unione funzionale di resets.P che agiscono su sottoinsiemi di $D$ mutuamente disgiunti e della endofunzione identità dell'insieme complementare dell'unione dei suddetti insiemi disgiunti

Si possono prendere in considerazione anche quelle che chiamiamo **resets.PM**, endofunzioni idempotenti non necessariamente finite il cui dominio si ripartisce in più sottoinsiemi mutuamente disgiunti in ciascuno dei quali si riduce a una funzione reset; tali sottoinsiemi li chiamiamo **sottoinsiemi collassanti** della funzione. Conviene considerare i resets.P come particolari resets.PM

Si constata che due resets.PM concernenti sottoinsiemi collassanti mutuamente disgiunti presentano i due loro prodotti di composizione coincidenti e costituenti un altro reset.PM.

In senso opposto si può porre il problema di fattorizzare un reset.PM come prodotto di composizione di due o più resets.PM con collezioni di sottoinsiemi collassanti più ridotte e anche come prodotto di composizione di più resets.P .

Si osserva che ogni funzione idempotente si può porre in biiezione con una trasformazione di un insieme che vede ciascuno dei suoi sottoinsiemi collassanti mutuamente disgiunti che si riduce a un suo unico elemento.

B15:**c.12** La raffigurazione sagittale di una endofunzione può trasformarsi nella equivalente **raffigurazione a digrafo**, più compatta e talora più significativa.

Questa si può immaginare ottenuta passando a un simulacro tangibile della raffigurazione sagittale che presenta archi in un materiale flessibile che vengono deformati fino a far combaciare ogni punto del dominio con il punto rappresentante lo stesso oggetto formale in quanto elemento del codominio. Le raffigurazioni a digrafo dell'identità su $\{1,2,3,4\}$ e delle due permutazioni in c09 diventano:

//input pB15c12

Come vedremo, mediante le raffigurazioni a digrafo si arriva a una ben definita classificazione di tutte le endofunzioni finite.

## B15:d. sequenze binarie

B15:**d.01** Quando si esamina un insieme risulta spesso necessario tenere sotto controllo i suoi sottoinsiemi; può quindi essere utile esaminare l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di un dato insieme.

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme $E$ viene detto **booleano** o **insieme delle parti** di $E$ e lo denotiamo con $\mathfrak{P}(E)$ o con $E^{\mathfrak{P}}$ . Questo insieme si dice anche **potenza di un insieme**, $E$, e si denota anche con $2^E$; questa notazione è una particolarizzazione semplificata della notazione esponenziale degli insiemi di funzioni:

$$2^E \ := \ \{0,1\}^E \ = \ \lceil E \longmapsto \{0,1\} \rceil \ .$$

Più avanti chiariremo costruttivamente che l'insieme delle parti di un insieme finito è un insieme finito e daremo un'altra giustificazione della notazione esponenziale.

Per gli insiemi **S** i cui elementi sono a loro volta degli insiemi $S_1$, $S_2$, ... useremo spesso il termine "collezioni di insiemi"; in tal modo si cerca di facilitare la percezione della differenza tra gli insiemi $S_i$, da considerare relativamente semplici, dal più elaborato insieme **S**.
Per facilitare questa distinzione cercheremo di usare simboli di fonti diverse (come abbiamo fatto nella frase precedente).
Nel seguito, per ogni $n$ intero naturale, useremo i termini sequenza-$n$ e insieme-$n$ come abbreviazioni, risp., di sequenza di lunghezza $n$ e di insieme di $n$ elementi.

B15:**d.02** Nel seguito denoteremo con $\mathbb{B}$ l'insieme $\{0,1\}$ delle due cifre binarie, cifre che [B02c08] abbiamo chiamate **bits**, contrazione di "*binary digits*".

Se $s$ è un intero positivo, si dice **sequenza binaria** di lunghezza $s$, o sequenza-$n$ binaria, ogni stringa di $s$ bits. Con $\mathsf{SeqB}_s$ denotiamo il loro insieme.

Una sequenza binaria si può associare a una funzione esplicita appartenente a $\lceil (n] \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ : ad esempio 011010 si associa alla funzione $\{\langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 6,0\rangle\}$

Questa associazione evidentemente è una biiezione ed è tale che tutti gli sviluppi conoscitivi ed elaborativi riguardanti le sequenze-$n$ binarie si possono riformulare per le corrispondenti funzioni di $\lceil (n] \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ e viceversa.

In casi di questo genere si parla di **intercambiabilità logica** tra i due generi di entità che vengono ottenute con costruzioni diverse; la biiezione che associa gli elementi dei due generi si dice **criptomorfismo** e i due insiemi di entità si dicono costituire due **strutture criptomorfe**.

In buona parte degli sviluppi espositivi con finalità generali due entità criptomorfe si possono identificare senza incorrere in pericolose ambiguità.
All'opposto in molti sviluppi applicativi ed elaborativi due entità criptomorfe richiedono implementazioni diverse che spesso presentano caratteristiche operative dissimili.
Quando si confrontano due tali implementazioni in relazione alle varie esigenze applicative in genere si trovano dei vantaggi e degli svantaggi parziali.

B15:**d.03** Nel seguito prendiamo in esame sequenze binarie che identifichiamo con stringhe della forma $b_1\, b_2 \ldots b_n$ , e funzioni binarie finite che qualifichimo con scritture della forma $\lceil \{x_1, ..., x_n\} \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ e che presentiamo dettagliatamente con scritture della forma $b_{x_1} b_{x_2} ... b_{x_n}$ .

Le sequenze-$n$ binarie e le funzioni di $\lceil (n) \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ risultano criptomorfe a funzioni appartenenti al genere $\lceil S \longmapsto \mathbb{B} \rceil$, ove $S$ denota un qualche insieme-$n$ esplicito tra i cui elementi si sia fissato un determinato ordinamento totale atto a rendelo conoscitivamente equivalente a una sequenza-$n$.
In effetti, fissato $n$, tutti questi insiemi di funzioni (o di sequenze) si possono utilizzare intercambiabilmente.

Ad una sequenza-$n$ binaria $b_1b_2...b_n$ si associa naturalmente il sottoinsieme di $(n]$ costituito da tutti e soli gli interi $i \in (n]$ tali che $b_i = 1$.
Per esempio alla 011010 si associa $\{2, 3, 5\}$, alla 1111111 l'intero $(7]$ e ad ogni sequenza costituita da $n$ zeri si associa $\emptyset$, ottenendo oggetti da considerare sottoinsiemi di un insieme-$n$.

Viceversa a ogni sottoinsieme $S$ di $(n]$ si associa la sequenza-$n$ binaria che nella posizione $i \in (n]$ presenta 1 sse $i \in S$, mentre presenta 0 sse $i \notin S$. La sequenza-$n$ ottenuta si dice **sequenza indicatrice** o sequenza caratteristica di $S$ nell'ambito di $(n]$.

Si vede facilmente che la trasformazione da sottoinsiemi di $(n]$ a sequenze-$n$ binarie e la sua inversa costituiscono un duetto di biiezioni l'una inversa dell'altra e che esse determinano un criptomorfismo tra $\mathfrak{P}((n])$ e $\mathsf{SeqB}_n$ .

B15:**d.04** Un criptomorfismo più generale del precedente consiste nell'associare ad ogni sottoinsieme $S$ di un insieme esplicito $U$ la funzione che fa corrispondere 1 a ogni $x_i \in S$ e 0 a ogni elemento di $U \setminus S$. Questa funzione appartenente a $\lceil U \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ si dice **funzione indicatrice** o funzione caratteristica di $S$ nell'ambito di $U$ e per essa si usa la notazione

$$\mathcal{I}_U(S) \;:=\; \lceil x \in S \mapsto 1 \rceil \,\dot{\cup}\, \lceil x \in U \setminus S \mapsto 0 \rceil \;.$$

Viceversa a ogni $I \in \lceil U \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ si associa canonicamente l'insieme degli elementi $x \in U$ per i quali $I(x) = 1$, cioè l'insieme $I^{-1}(1)$ delle controimmagini di 1.

Chiaramente la trasformazione da funzione binaria a sottoinsieme e la sua inversa costituiscono un duetto di biiezioni mutuamente inverse che determinano un criptomorfismo tra $\lceil U \longmapsto \mathbb{B} \rceil$ e $\mathfrak{P}(U)$.

Le sequenze-$n$ binarie, essendo in biiezione con gli elementi della potenza cartesiana $\mathbb{B}^{\times n}$, sono in numero di $|\mathbb{B}|^n$, cioè $|\mathsf{SeqB}_n| = 2^n$.

Il precedente criptomorfismo comporta che anche il numero dei sottoinsiemi di $(n]$ o di ogni altro insieme-$n$ sia $2^n$, cioè che sia

$$|\mathfrak{P}((n])| \;=\; |\mathfrak{P}\{x_1, x_2, ..., x_n\}| \;=\; 2^n \;.$$

Questa formula numerica va considerata la corrispondente enumerativa della formula insiemistico-funzionale che riguarda la totalità dei sottoinsiemi di un intervallo $J$ di $n$ interi $\mathfrak{P}(J) \;=\; 2^{(n]}$ . $J$ potrebbe essere $(n]$, $[n)$ o un $[k : k + n - 1]$ per qualche $k$ intero qualsiasi.

Le funzioni caratteristiche permettono di effettuare abbastanza efficacemente molte operazioni sui sottoinsiemi di un insieme $U$ al quale si è assegnato un ordine ben determinato, ovvero un insieme $U$ che si può presentare mediante una lista nonripetitiva dei suoi elementi, lista che in considerazioni generiche si può presentare anche con una scrittura della forma $\langle i = 1, ..., k :| \, x_i \rangle$ .

B15:**d.05** Consideriamo un ambiente $U$ di $n$ elementi in casi nei quali il cardinale $n$ sia elevato.
Esaminiamo tre casi: (a) $n = 1024 = 2^{10}$, (b) $n = 1\,048\,576 = 2^{20}$ e (c) $n = 2\,147\,483\,648 = 2^{31}$.

Vogliamo confrontare le due modalità di rappresentazione dei sottoinsiemi di $U$, quella che si serve delle sequenze-$n$ binarie che fanno da funzioni indicatrici e quella che si avvale delle liste dei numeri progressivi assegnati agli elementi.

Ciascuno dei sottoinsiemi di $U$ è rappresentabile:

nel caso (a) con 1024 bits, ovvero con 128 bytes (ottetti) di memoria, pari a 32 words di memoria (da 32 bits);

nel caso (b) servono $2^{20}$ bits, ovvero con $2^{17} = 131\,072$ bytes, ovvero con $2^{14} = 32\,768$ words;

nel caso (c) servono $2^{31}$ bits, pari a $2^{26}$ words.

Pensando di rappresentare i singoli elementi di $U$ dedicando una word a ciascun elemento (il modo spesso più comodo) abbiamo che:

nel caso (a) si richiede meno memoria per rappresentare i sottoinsiemi con al più 32 elementi,

nel caso (b) per i sottoinsiemi con al più 32 768 elementi

e nel caso (c) per i sottoinsiemi con al più 67 108 864 elementi.

Un elenco di progressivi degli elementi risulta più conveniente anche per sottoinsiemi i cui complementari hanno "pochi elementi" (risp., 32, 32 768 e 67 108 864, pur di usare l'accorgimento di elencare gli elementi di $U \setminus S$; per i sottoinsiemi con i cardinali appartenenti all'intervallo intermedio, la grande maggioranza, risulta meno ingombrante la funzione indicatrice.
Aumentando il cardinale di $U$ i sottoinsiemi per i quali è preferibile la funzione indicatrice diventano molto più prevalenti di quelli che conviene elencare.

Volendo essere più precisi occorre valutare anche le due percentuali dei sottoinsiemi dei due tipi, cosa che faremo più avanti.

**(() Eserc.** 1) Per $n = 8, 12, 20$, distinguere i sottoinsiemi di $(2^n]$ che conviene presentare attraverso un elenco degli elementi dai sottoinsiemi che conviene fornire con una sequenza binaria.

B15:**d.06** Le operazioni insiemistiche sopra i sottoinsiemi di un insieme ambiente $U$ si possono effettuare efficientemente servendosi delle rispettive sequenze indicatrici.

Per questo occorre introdurre le cosiddette **operazioni booleane elementari**; la prima, chiamata "not" è unaria, le rimanenti, "or", "and" e "xor" binarie.

L'operazione unaria **not**, detta anche **negazione**, scambia i due valori binari; essa si può denotare con il simbolo suffisso a esponente $^{\sim}$ o con il simbolo prefisso $\neg$, .

L'operazione binaria **and**, detta anche **congiunzione**, viene denotata con il simbolo connettivo infisso $\wedge$, e fornisce 1 sse entrambi i suoi operandi valgono 1.

L'operazione **or**, chiamata anche **disgiunzione** denotata con il simbolo connettivo infisso $\vee$, fornisce 1 sse almeno uno dei due operandi vale 1.

L'operazione **xor**, che bbrevia **exclusive or**, che denotiamo con il simbolo connettivo infisso $+_2$, fornisce 1 sse uno solo dei due operandi vale 1.

Le operazioni introdotte sono definite dalle seguenti tavole di composizione.

//input pB15d06

Si osserva che i risultati delle precedenti operazioni binarie non cambiano se si scambiano i loro operandi: questo equivale ad affermare che si tratta di operazioni binarie commutative:

(1) $$\forall b_1, b_2 = 0, 1 \quad \vdots \quad b_1 \wedge b_2 = b_2 \wedge b_1 \quad , \quad b_1 \vee b_2 = b_2 \vee b_1 \quad , \quad b_1 +_2 b_2 = b_2 +_2 b_1 \quad .$$

B15:**d.07** Le operazioni booleane elementari si possono estendere alle sequenze binarie chiedendo che ogni componente della sequenza risultato sia il risultato dell'operazione applicata alla corrispondente bit componente dell'unico operando o applicata ai corrispondenti bits componenti dei due operandi.

Un esempio di complementazione è $11001010^{\sim} = 00110101$; esempi di operazioni and, or e xor applicate a coppie di sequenze binarie della stessa lunghezza sono:

$$01011110 \wedge 00110010 = 00010010 \ , \ 01011110 \vee 00110010 = 01111110 \ , \ 01011110 +_2 00110010 = 01101100 \ .$$

Le precedenti estensioni delle operazioni sui bits a operazioni sulle sequenze binarie costituiscono esempi delle cosiddette **estensioni cartesiane di operazioni algebrhe**, costruzioni formali sulle quali avremo modo di tornare.

Le precedenti operazioni si possono interpretare in modo semplice e significativo quando si considerano le sequenze-$n$ binarie come sequenze indicatrici dei sottoinsiemi di un insieme-$n$ $U$ (finito) presentato secondo un ordine ben definito e conseguentemente rappresentabile con una sequenza-$n$ come $U = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ .

La complementazione della sequenza indicatrice $\mathcal{I}_U(S)$ porta alla sequenza indicatrice dell'insieme complementare di $S$:

$$(\mathcal{I}_U(S))^{\sim} \ = \ \mathcal{I}_U(U \setminus S) \ .$$

La congiunzione, and, delle sequenze indicatrici di due insiemi $S$ e $T$ porta alla sequenza indicatrice dell'insieme intersezione $S \cap T$:

$$(\mathcal{I}_U(S)) \wedge (\mathcal{I}_U(T)) \ = \ \mathcal{I}_U(S \cap T) \ .$$

La disgiunzione, or, delle sequenze indicatrici di due insiemi $S$ e $T$ porta alla sequenza indicatrice dell'insieme unione $S \cup T$:

$$(\mathcal{I}_U(S)) \vee (\mathcal{I}_U(T)) = \mathcal{I}_U(S \cup T) \ .$$

La xor delle sequenze indicatrici di due insiemi $S$ e $T$ porta alla sequenza indicatrice dell'insieme differenza simmetrica $S \ominus T$:

$$(\mathcal{I}_U(S)) +_2 (\mathcal{I}_U(T)) = \mathcal{I}_U(S \ominus T) \ .$$

## B15:e. funzioni finite tra interi naturali

B15:**e.01** Questa sezione esamina gli insiemi di funzioni numeriche della forma $\mathsf{F} = \lceil D \longmapsto C \rceil$ , dove $D$ e $C$ denotano due insiemi di numeri interi naturali. Di questi interi si tiene conto dell'ordinamento determinato dalla relazione d'ordine totale $\leq$.

Al dominio $D$ e al codominio $C$ si possono dare, risp., la forma $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ e la forma $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ , con $s$ ed $n$ interi positivi; si assume inoltre che valgano le catene di relazioni $a_1 < a_2 < ... < a_s$ e $b_1 < b_2 < ... < b_n$.

Per varie considerazioni risulta comodo assumere che $D$ e $C$ siano sequenze dei primi interi positivi, cioè che sia $D = (s]$ e $C = (n]$ .

Tra questi insiemi di funzioni si collocano gli insiemi di sequenze binarie, in quanto totalità delle funzioni aventi dominio $D = \{1, 2, ..., s\}$ e codominio $C = \{0, 1\}$.

Si osserva che le funzioni aventi come codominio un insieme di $n$ caratteri da considerare ordinati da una stringa predeterminata, in particolare da un tradizionale ordinamento alfabetico, godono di proprietà associabili biunivocamente a quelle delle funzioni del genere $\lceil (s] \longmapsto (n] \rceil$ .

Sono svariati gli esempi delle funzioni finite tra interi naturali che rivestono interesse pratico.

La funzione che a ogni mese di un dato anno fa corrispondere il numero dei sui giorni è una sequenza di 12 interi appartenente a $\{28, 29, 30, 31\}$.

La funzione che a ogni giorno di un anno fa corrispondere il progressivo della settimana nell'ambito del dato anno è una sequenza di 365 o 366 interi appartenenti a $\{1, 2, ..., 53\}$.

L'insieme degli anagrammi della parola `anagrammi` sono un insieme di 30 240 stringhe di lunghezza 9 aventi come codominio $\{\mathtt{a}, \mathtt{g}, \mathtt{i}, \mathtt{m}, \mathtt{n}\}$.

L'elenco dei numeri forniti da una particolare estrazione del gioco del lotto per la ruota di Napoli è una sequenza di quintuple di numeri diversi appartenenti all'insieme $(90]$.

B15:**e.02** Consideriamo un insieme di funzioni finite tra interi naturali al quale diamo la forma $\mathsf{F} := \lceil D \longmapsto C \rceil$. Spesso tra queste funzioni serono distinzioni come quelle derivanti dalle particolarizzazioni che seguono.

Una funzione $f \in \mathsf{F}$ si dice:

**funzione crescente** sse $i < j \Longrightarrow f(i) < f(j)$ ;
**funzione decrescente** sse $i < j \Longrightarrow f(i) > f(j)$ ;
**funzione nondecrescente** sse $i < j \Longrightarrow f(i) \leq f(j)$ ;
**funzione noncrescente** sse $i < j \Longrightarrow f(i) \geq f(j)$ .

Una funzione nondecrescente si dice anche funzione crescente in senso lato; se si usa questo termine invece che di funzione crescente si dovrebbe parlare di funzione crescente in senso stretto.
Una funzione noncrescente si dice anche funzione decrescente in senso lato; se si usa questo termine invece che di funzione decrescente si dovrebbe parlare di funzione decrescente in senso stretto.

B15:**e.03** e.03 Per gli insiemi di funzioni numeriche introdotti introduciamo le notazioni che seguono concernenti il dominio $D$ e il codominio $C$ con $|D|, |C| > 1$ .

Con $\lceil D \longmapsto_< C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ in $C$ crescenti.

Con $\lceil D \longmapsto_> C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ in $C$ decrescenti.

Con $\lceil D \longmapsto_\leq C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ in $C$ nondecrescenti.

Con $\lceil D \longmapsto_{\geq} C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ in $C$ noncrescenti.
Abbiamo inoltre le varianti delle precedenti notazioni che riguardano il codominio $C$.
Con $\lceil D \longmapsto\!\triangleright_{<} C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ su $C$ crescenti.
Con $\lceil D \longmapsto\!\triangleright_{>} C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ su $C$ decrescenti.
Con $\lceil D \longmapsto\!\triangleright_{\leq} C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ su $C$ nondecrescenti.
Con $\lceil D \longmapsto\!\triangleright_{\geq} C \rceil$ denoteremo l'insieme delle funzioni di $D$ su $C$ noncrescenti.
Per gli insiemi delle funzioni da una parte dell'insieme $D$ sopra una parte dell'insieme $C$, si usano le notazioni della forma $\lceil D \longrightarrow_{\boldsymbol{R}} C \rceil$ con $\boldsymbol{R} \in \{<, \leq, >, \geq\}$.
Per gli insiemi delle funzioni che da una parte dell'insieme $D$ sopra l'intero insieme $C$, si usano notazioni che presentano la forma $\lceil D \longrightarrow\!\triangleright_{\boldsymbol{R}} C \rceil$ con $\boldsymbol{R} \in \{<, \leq, >, \geq\}$ .
Infine per gli 8 insiemi di funzioni invertibili che sono, risp., sottoinsiemi degli 8 precedenti si usano le notazioni delle forme $\lceil D \longleftrightarrow_{\boldsymbol{R}} C \rceil$ e $\lceil D \longleftrightarrow\!\triangleright_{\boldsymbol{R}} C \rceil$ , ancora con $\boldsymbol{R} \in \{<, \leq, >, \geq\}$ .

B15:**e.04** Chiaramente ogni funzione crescente in senso stretto è anche funzione crescente in senso lato, mentre esistono funzioni crescenti in senso lato che non sono crescenti in senso stretto: un esempio è dato dalla stringa di cifre decimali 24468.
Simmetricamente ogni funzione decrescente in senso stretto è anche funzione decrescente in senso lato, mentre esistono funzioni decrescenti in senso lato che non sono decrescenti in senso stretto: un esempio è dato dalla stringa `rocca`.

Facciamo riferimento all'insieme di funzioni $\mathsf{F} = \lceil D \longmapsto C \rceil$ con $|D|, |C| > 1$. Sono disgiunti il sottoinsieme delle sue funzioni crescenti e quello delle sue funzioni noncrescenti, come pure il sottoinsieme delle sue funzioni decrescenti e quello delle sue funzioni nondecrescenti. L'intersezione tra insieme delle funzioni noncrescenti e insieme delle nondecrescenti è l'insieme delle funzioni costanti $\{c \in C :| \lceil s \in D \mapsto c \rceil\}$ .

B15:**e.05** Vogliamo precisare che le distinzioni viste sopra per le funzioni numeriche naturali e per le stringhe di caratteri su un alfabeto ordinato valgono più estesamente per funzioni riguardanti dominio e codominio dotati di un ordinamento totale che non sono necessariamente insiemi di numeri naturali; per questo basta sostituire nelle definizioni i segni delle relazioni $<$, $\leq$, $>$ e $\geq$ con i segni delle relazioni d'ordine corrispondenti riguardanti gli oggetti non numerici.

In particolare queste si applicano al caso delle stringhe sopra un alfabeto munito di un ordinamento totale ben definito e ben noto, come gli alfabeti italiano e inglese (qualche incertezza potremmo invece incontrare con alfabeti come il danese, il cirillico e tanti altri). Infatti le stringhe possono essere considerate funzioni appartenenti a insiemi della forma $\lceil (s] \longmapsto \mathsf{A} \rceil$ con $\mathsf{A}$ alfabeto dotato di un ben definito ordinamento totale.

Le distinzioni per il comportamento degli ordinamenti si possono estendere senza difficoltà anche al caso degli elenchi di stringhe sopra un alfabeto con ordinamento ben definito; le stringhe infatti possono essere munite canonicamente dell'ordine lessicografico subordinato all'ordinamento delle lettere dell'alfabeto.
Per esempio la parola `acino` si può considerare una funzione crescente, la parola `accenno`, si può giudicare una funzione nondecrescente e la lista

$$\langle \texttt{Viterbo}, \texttt{Roma}, \texttt{Napoli}, \texttt{Milano}, \texttt{Bari}, \texttt{Aosta} \rangle$$

può vedersi come una funzione decrescente.

Segnaliamo inoltre che, come vedremo, le distinzioni riguardanti il comportamento degli ordinamenti si applicano utilmente a tutti gli insiemi di funzioni che coinvolgono come dominio e codominio due insiemi ordinati, non solo totalmente, ma più in generale ordinati parzialmente [v. in particolare B14c].

B15:**e.06** Ci proponiamo ora di esaminare come si ottiene il comportamento delle funzioni tra insiemi totalmente ordinati rispetto agli ordinamenti quando si effettuano composizioni di tali funzioni. Anche per queste considerazioni limitate a domini e codomini finiti è sufficiente focalizzarsi sulle sequenza di interi naturali.

Innanzi tutto si trova facilmente che sommando due funzioni crescenti o una funzione crescente e una nondecrescente si ottiene una funzione crescente (in senso stretto).

Sommando due funzioni nondecrescenti si ottiene invece una funzione nondecrescente.

Simmetricamente sommando due funzioni decrescenti o una funzione decrescente e una noncrescente si ottiene una funzione decrescente (in senso stretto).

Inoltre sommando due funzioni noncrescenti si ottiene una funzione noncrescente.

Per quanto riguarda la composizione di funzioni prendiamo in considerazione un intero positivo $s$ e la sequenza $\mathsf{d} := \langle s, s-1, ..., 3, 2, 1\rangle$, da considerare equivalente alla funzione decrescente in senso stretto $d := \{\langle 1, s\rangle, \langle 2, s-1\rangle, ..., \langle s-1, 2\rangle, \langle 1, s\rangle\}$.
Sia inoltre $f$ una funzione tra interi naturali la quale supponiamo abbia dominio in grado di intersecare l'insieme $\mathsf{dom}(d) = \mathsf{cod}(d) = \{1, 2, ..., s-1, s\}$.

Se $f$ è una funzione crescente, allora $f(\mathsf{d}(i)$ e $\mathsf{d}(f(i))$ sono funzioni decrescenti, mentre se $f$ è una funzione decrescente allora $f(\mathsf{d}(i)$ e $\mathsf{d}(f(i))$ sono funzioni crescenti.
Similmente se $f$ è una funzione nondecrescente, allora $f\big(\mathsf{d}(i)\big)$ e $\mathsf{d}\big(f(i)\big)$ sono funzioni nondecrescenti, mentre se $f$ è una funzione noncrescente, allora $f\big(\mathsf{d}(i)\big)$ e $\mathsf{d}\big(f(i)\big)$ sono funzioni nondecrescenti.

B15:**e.07** Mostriamo ora che ogni insieme di funzioni finite al quale diamo la forma $\mathsf{G} := \lceil X \longmapsto Y \rceil$ si può collegare ad un insieme di funzioni della forma $\mathsf{F} := \lceil D \longmapsto C \rceil$ , dove il dominio $D$ e il codominio $C$ sono intervalli di interi positivi cui diamo la forma $D = (s]$ e $C := (n]$.

Innanzi tutto l'intero $s$ si assume uguale al cardinale di $X$; quindi si associa biunivocamente a ogni $x \in X$ un intero $i \in \{1, 2, ..., s\}$.

Denotiamo con $\kappa$ la corrispondente biiezione: per ogni $x \in X$ si ha dunque $i = \kappa(x)$, ovvero si ha la definizione

$$\kappa \ := \ \lceil x \in X \not\mapsto i \rceil \in \lceil X \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright (n] \rceil \ .$$

Inoltre, essendo $\kappa$ una biiezione si può scrivere $x = \kappa^{-\mathbf{1}}(i)$ . per ogni $i \in (n]$ .
La funzione $\kappa$ viene detta funzione di codifica del dominio $X$.

Una costruzione "speculare" si effettua tra $Y$ e $C := (n]$. dove l'intero $n$ si assume uguale al cardinale di $Y$.
Quindi si associa biunivocamente a ogni $y \in Y$ un intero $j \in \{1, 2, ..., k\}$ e se denotiamo con $\chi$ la corrispondente biiezione poniamo la definizione

$$\chi := \lceil y \in Y \not\mapsto j \rceil \in \lceil Y \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright (s] \rceil \ .$$

Essendo anche $\chi$ una biiezione, si può scrivere $y = \chi^{-\mathbf{1}}(j)$ per ogni $y \in Y$.
La funzione $\chi^{-\mathbf{1}}$ viene detta funzione di decodifica del codominio $Y$.

Esaminando le due costruzioni si trova facilmente che

$$\forall \phi \in \lceil X \longmapsto Y \rceil \quad : \quad \text{introdotta } \ f := \kappa^{-\mathbf{1}} \circ_{lr} \phi \circ_{lr} \chi \ \text{ si ha } \quad \phi = \kappa \circ_{lr} f \circ_{lr} \chi^{-\mathbf{1}}$$

Gli effetti di una codifica e di una decodifica vengono chiariti dallo schema che segue che qualifichiamo come esempio di **diagramma funzionale**.

$$\begin{array}{cccc} & & \kappa & & \\ & X & \Leftrightarrow & (s] & \\ \phi & \downarrow & & \downarrow & f \\ & Y & \Leftrightarrow & (n] & \\ & & \chi & & \end{array}$$

Conviene osservare esplicitamente che le definizioni delle biiezioni $\kappa$ e $\chi$ hanno l'effetto di imporre ordinamenti sequenziali agli elementi degli insiemi $X$ e $Y$.

B15:**e.08** Forse le considerazioni precedenti possono essere giudicate inutili complicazioni.
In realtà esse aprono la possibilità di ottenere alcune proprietà di funzioni rappresentate dalla $\phi$ dallo studio delle proprietà di corrispondenti funzioni sopra rappresentate dalla $f$, quando quest'ultima presenta alcune caratteristiche più semplici di quelle che presenta la $\phi$, grazie al fatto che riguarda solo interi positivi facenti parte di intervalli semplici come $(s]$ ed $(n]$.

La possibilità di ricondursi a operare su numeri interi, eventualmente solo su naturali, in genere comporta due vantaggi.
Si può utilizzare facilmente l'ordinamento di tali numeri per organizzare varie manovre, anche manovre con fini di orientamento sperimentale.
Quando occorre effettuare delle manovre automatiche è agevole e normale servirsi delle operazioni, delle espressioni e di tante manovre collaudate che riguardano i numeri interi.

Le funzioni di codifica e decodifica possono essere scelte in molti modi. Quando le costruzioni prospettate servono a specifiche applicazioni le dette scelte saranno effetuate in base a considerazioni di convenienza concernenti il modello applicativo da adottare e la semplificazione dei calcoli che dovessero essere eseguiti.

## B15:f. sequenze combinatorie [1]

B15:**f.01** Consideriamo due interi positivi $k$ ed $s$ e un insieme di $k$ oggetti $\mathsf{A} = \{a_1, ..., a_k\}$ da pensare distinguibili e semplici; $\mathsf{A}$ potrebbe essere un alfabeto.

Le sequenze di lunghezza $s$ di elementi sopra $\mathsf{A}$, cioè gli elementi della potenza cartesiana $s$-esima di $\mathsf{A} \searrow \mathsf{A}^{\times s}$, le chiamiamo anche **disposizioni con ripetizioni** di lunghezza $s$ sopra $\mathsf{A}$.

Le sequenze binarie si possono considerare come casi particolari di queste configurazioni riguardanti il semplice alfabeto $\{0, 1\}$ formato da $k = 2$ caratteri.

Per disporre di scritture omogenee con altre notazioni che stiamo per introdurre, denoteremo l'insieme delle disposizioni con ripetizioni di lunghezza $s$ su $\mathsf{A}$ anche con la notazione $\mathsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ ; possiamo quindi scrivere $\mathsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s} := \mathsf{A}^{\times s}$ .

Per il loro numero introduciamo anche la notazione

$$\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s} := \left|\mathsf{A}^{\times s}\right| .$$

Segnaliamo che a notazioni come $\mathsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s}$, quando l'argomento $\mathsf{A}$ o l'argomento $s$ devono essere dati da espressioni elaborate, sono preferibili notazioni come $\mathsf{Dspsr}[\mathsf{A}, s]$ e $\mathsf{DspsrN}[\mathsf{A}, s]$ da considerare sinonime, risp., alle precedenti.

**(1) Prop.**: Il numero delle disposizioni con ripetizioni di lunghezza $s$ su $\mathsf{A}$ è

$$\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s} = |A|^s = k^s .$$

**Dim.**: Basta descrivere come si può procedere alla costruzione della totalità delle sequenze in esame. Descriviamo queste come sequenze o allineamenti di $s$ "scatole" in ciascuna delle quali si può collocare una copia di un carattere appartenente all'alfabeto $\mathsf{A}$. In ciascuna scatola di un allineamento si può porre uno qualsiasi dei $k$ caratteri dell'alfabeto, indipendentemente dai caratteri che sono presenti nelle altre posizioni. Nella prima posizione si possono porre $k$ caratteri, per le prime due posizioni si hanno $k^2$ possibili scelte, nelle prime 3 $k^3$ e così via. Dunque $|\mathsf{A}^{\times} s| = |\mathsf{A}|^s$ ▮

Va ricordato che il segno ▮ introdotto sopra abbrevia l'espressione latina "quod erat demonstrandum" (abbreviata con QED), o la equivalente "come dovevasi dimostrare"; esso viene usato preferibilmente per segnalare la conclusione di ogni dimostrazione.

Evidentemente l'espressione precedente generalizza l'espressione $2^s$ trovata in d04 per il numero delle sequenze binarie di lunghezza $s$.
Segnaliamo anche la possibilità di descrivere visivamente mediante una delle arborescenze che sono presentate in D30c04 per l'organizzazione del processo costruttivo di tutte le sequenze, processo che si può leggere tra le righe della dimostrazione precedente.

B15:**f.02** Vediamo alcuni esempi di situazioni chiarite dal risultato precedente.

L'insieme delle notazioni decimali di interi naturali $s = 3$ cifre, quando per gli interi minori di 100 si chiedono scritture con zeri iniziali come per tanti contatori, è $\mathsf{Dspsr}_{10,3}$ e quindi consiste, non sorprendentemente, di $10^3$ elementi.

Le scritture decimali formate da 4 cifre dispari costituiscono l'insieme $\mathsf{Dspsr}_{\{1,3,5,7,9\},4}$ il cui cardinale è $5^4 = 625$. Può essere significativo confrontare questo valore con il numero dei numeri interi compresi tra 1 000 e 9 999 che ammonta a 8 000.

Il numero delle stringhe di 3 caratteri, i trigrammi, sull'alfabeto di 26 caratteri è $26^3 = 17\,576$ , mentre le stringhe di lunghezza 26 su un alfabeto di 3 caratteri sono molte di più, $3^{26} = 2\,541\,865\,828\,329$ .

A questo proposito segnaliamo che si dimostra che se $k$ ed $n$ sono interi con $2 \leq k < n$ si ha l'implicazione $k < n \Longrightarrow n^k < k^n$ con sole due eccezioni.
In particolare si dimostra senza difficoltà che $n > 2 \Longrightarrow n + 1^n < n^{n+1}$ e che $1 \leq h \Longrightarrow (n+h)^n < n^{n+h}$.
È significativa anche la seguente tabellina dell'esponente con le eccezioni in evidenza.

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | $8^<$ | $16^=$ | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| 3 | $9^>$ | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 |
| 4 | $16^=$ | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 | 262144 | 1048576 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390626 | 1953125 | 9765625 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 | 10077696 | 60466176 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 | 82353 | 5764801 | 40353607 | 282475249 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 | 134217728 | 1073741824 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 | 387420489 | 3486784401 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 | 10000000 | 100000000 | 1000000000 | 10000000000 |

Si osserva che quando i parametri $s$ e $k$ non sono piccoli gli insiemi della forma $\mathsf{\textbf{Dspsr}}_{\mathsf{A},s}$ sono molto estesi e presentano elementi ciascuno dei quali piuttosto simile a molti altri.
In effetti tali insiemi interessano soprattutto in quanto definiscono ambienti nei quali conviene collocare come sottoinsiemi degli insiemi di oggetti (sequenze) più specifici, cioè dotati di proprietà che li rendono adatti per applicazioni specifiche e quindi presentino buoni motivi di interesse applicativo.

Già nei paragrafi che seguono avremo modo di incontrare alcuni di questi insin particolare in D20 e D33.

Ricordiamo anche che rivestono interesse, in particolare per precisare algoritmi e programmi, i procedimenti che consentono di passare in rassegna tutte le sequenze di insiemi estesi e poco differenziati come $\mathsf{\textbf{Dspsr}}_{\mathsf{A},s}$. Procedimenti di questo genere sono chiamati **procedure di visita**; ne incontreremo altri, per esempio in B21j, D30 e C14f.

B15:**f.03** Alcune considerazioni sui nomi usati per gli elementi di un insieme della forma $\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s}$.
Con il termine "disposizioni con ripetizioni" non si intende escludere che le componenti di una di tali sequenze siano tutte diverse: a $\mathsf{\textbf{Dspsr}}_{8,4}$ appartengono stringhe come 1234, 2468 e 3574. Il termine più corretto, ma più prolisso, "disposizioni con la possibilità di ripetizioni", non sembra sia usato.

Per queste sequenze sono solitamente usate denominazioni diverse da quella qui proposta: nella maggior parte dei testi si usano termini come "disposizioni con ripetizioni di elementi di A di classe $s$".

La dizione qui preferita intende assegnare al parametro $s$ il ruolo ben definito e ampiamente utilizzabile di lunghezza di una sequenza, mentre l'altra dizione si serve del termine "classe" che in matematica viene usato per oggetti, purtroppo più d'uno, che nulla hanno a che fare con le semplici configurazioni qui esaminate (classe di equivalenza, classe come parametro che esprime un livello di complessità, classe entità che generalizza la nozione di insieme per la quale qui preferiamo usare il termine classe.E.

Un'altra denominazione usata è "disposizioni con ripetizioni di elementi di A presi ad $s$ ad $s$"; qui viene giudicata meno chiara di quella che ricorre alla lunghezza.

Preferenze analoghe rispetto a nomi più diffusi saranno adottate per le configurazioni combinatorie che seguono, in quanto tutte possono vedersi come sequenze di stringhe o di oggetti appartenenti a un insieme finito caratterizzate da una determinata proprietà peculiare e in ogni caso caratterizzabili con la loro lunghezza.

Quando l'insieme $\mathsf{A}$ è l'insieme di numeri positivi $\{1, 2, ..., k\}$ useremo le notazioni $\mathbf{Dspsr}_{k,s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{k,s}$ o le rispettive equivalenti $\mathbf{Dspsr}[k, s]$ e $\mathsf{DspsrN}[k, s]$ .

B15:**f.04** Le notazioni $\mathbf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s}$ si possono vedere come esempi di notazioni formate da una sigla di lettere (ma useremo anche qualche cifra e qualche altro segno) seguita da parametri o da semplici espressioni che possono essere attribuiti a tipi ben definiti in precedenza.
La sigla vuole essere una abbreviazione di un termine caratterizzante e i parametri intendono individuare in modo completo l'insieme degli oggetti definiti.

Nella presente *esposizione* viene adottato ampiamente questo genere di notazioni.
Queste notazioni che intendono essere precise ed esaurienti vogliono poter essere usate come **identificatori globali** delle entità che denotano, utilizzabili anche in contesti lontani da quelli in cui vengono definiti.

Esse però sono piuttosto impegnative alla scrittura e alla lettura.

In contesti nei quali gli insiemi identificati sono frequentemente citate conviene poterle individuare anche con **notazioni locali** più concis e maneggevoli.

In particolare in molti contesti in luogo di $\mathbf{Dspsr}_{k,s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{k,s}$ si usano le notazioni $\mathsf{D}'_{k,s}$ e $D'_{k,s}$ che evidentemente consentono di presentare formule ed espressioni più nitide.

In effetti è evidente che se si facesse assumere visibilità globale a una notazione concisa si rischierebbero momenti di bassa distinguibilità e possibili confusioni.
Per esempio potrebbe accadere che una notazione come $\mathsf{D}'[k, s]$ venga presa per la derivata di una funzione bivariata.

Le notazioni globali tendono ad assumere il ruolo di notazioni standard. Ciò nonostante risulta opportuno usarle con una certa elasticità. Abbiamo già visto che in certi contesti si usa un identificatore di insieme per identificare anche il suo cardinale.

Può anche accadere di individuare insiemi di sequenze appartenenti a un insieme della forma $\mathbf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ nel quale $\mathsf{A}$ e/o $s$ devono essere individuate da espressioni elaborate; in questi casi conviene utilizzare una notazione nella quale queste espressioni non sono costrette a stare a deponente, ma possono collocarsi entro una coppia di parentesi specifiche da usare come delimitatori di espressioni.
Per esempio si potrebbero usare notazioni come

$$\mathbf{Dspsr}\text{–}\left[\mathsf{E}\,\dot{\cup}\,(\mathsf{F}\cap\mathsf{G})\ ,\ 3\,n^3+4\,n^2+12\right] \quad \text{o} \quad \mathsf{DspsrN}\text{–}\left[\mathsf{E}\setminus(\mathsf{F}\cup\mathsf{G})\ ,\ \left\lceil\frac{m!+n^2+144\,m+12}{|K|}\right\rceil\right]\ .$$

Non sono rare le situazioni nelle quali si rendano necessarie notazioni della forma sigla[specificazioni]) con 3 o più specificazioni.

Per queste notazioni talora può essere opportuno adottare semplificazioni locali nelle quali qualche parametro viene meramente ignorato negli sviluppi sui quali non ha alcuna influenza, confidando che tale abbreviazione sia capita dal lettore anche in assenza di dichiarazione esplicita. In molti di questi casi sarebbe però preferibile introdurre una variante tipografica della sigla in gioco.questi

Nei casi di 3 o più specificazioni entro una coppia parentesi può risultare vantaggioso servirsi di diversi separatori e anche di successivi nidi delimitati da diverse coppie di parentesi coniugate.

Infine segnaliamo che in presenza di parecchie specificazioni può essere conveniente presentarle non mediante una loro sequenza ma con notazioni che si estendono in due bidimensioni. In particolare si usano delle matrici e tabelle simili per le funzioni ipergeometriche e per coefficienti associati a rotazioni di sistemi studiati dalla meccanica quantistica.

B15:**f.05** Iniziamo ora a occuparci di sequenze che sono disposizioni con ripetizione che devono sottostare a vincoli tendenzialmente semplici. Anche per questi insiemi di configurazioni daremo le caratteristiche principali ed in particolare le espressioni dei loro cardinali.

Le sequenze di data lunghezza $s$ le cui componenti appartengono ad un insieme definito $A = \{a_1, ..., a_k\}$ e che non presentano componenti ripetuti, sono dette anche **disposizioni [senza ripetizioni]** di lunghezza $s$ dei $k$ oggetti $a_1$, ..., $a_k$.
Il loro insieme lo denotiamo con $\mathsf{Dsps}_{A,s}$ e per il loro numero scriviamo $\mathsf{DspsN}_{k,s} := |\mathsf{Dsps}_{A,s}|$ .
Nel caso l'insieme A sia l'insieme dei primi $k$ interi positivi useremo la notazione più semplice $\mathsf{Dsps}_{k,s} := \mathsf{Dsps}_{(k],s}$ e per il loro cardinale introduciamo $\mathsf{DspsN}_{k,s} := \mathsf{DspsN}_{(k],s}$ .
Alcuni esempi

$$\begin{aligned}\mathsf{Dsps}_{\{a,b,c,d\},2} &= \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\} ;\\ \mathsf{Dsps}_{\{a,b,c,d\},3} &= \{abc, abd, acb, acd, adb, adc,\\ &\quad bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,\ cab, cad, cba, cbd, cda.cdb,\ dab, dac, dba, dbc, dca, dcb\}\end{aligned}$$

B15:**f.06** Segnaliamo che in luogo della denominazione "disposizioni senza ripetizioni" comunemente si usano termini come "disposizioni ad $s$ ad $s$" e "disposizioni di classe $s$" e che talora si parla di "disposizioni semplici".
Anche per le notazioni utilizzate per le disposizioni senza ripetizioni valgono considerazioni simili a quelle svolte in f04.

Una lista che rappresenta $\mathsf{Dsps}_{A,s}$ si può ottenere scorrendo una lista che presenta il più esteso insieme di sequenze $\mathsf{Dspsr}_{A,s}$ e per ciascuna di esse stabilire se presenta o meno qualche componente ripetuta e conseguentemente rifiutarla o mantenerla. Troveremo tuttavia un procedimento meno inefficiente che permette di individuare le permutazioni senza ripetizioni in modo più diretto.

B15:**f.07** **(1) Prop.**: Il numero delle delle disposizioni senza ripetizioni di lunghezza $s$ degli elementi dell'insieme $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ è dato da

$$(1) \qquad \mathsf{DspsN}_{A,s} = k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-s+1) .$$

**Dim.**: Pensiamo ancora di procedere alla costruzione di tutte le sequenze di $\mathsf{DspsN}_{A,s}$.
Per occupare la prima posizione si può scegliere liberamente uno dei $k$ elementi di $A$; per la seconda posizione la scelta è ridotta ai $k-1$ elementi di $A$ diversi dal primo scelto, per la terza si hanno $k-2$ possibili scelte e così via; chiaramente per la $s$-esima posizione rimangono solo $k-s+1$ possibilità ▮

Per il secondo membro della (1) si usano anche le due seguenti notazioni chiamate, risp., **fattoriale decrescente** dall'intero $k$ per $s$ passi

$$(2) \qquad k^{\underline{s}} := k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-s+1) = \prod_{i=1}^{s} (k-i+1) = \prod_{i=0}^{s-1} (k-i)$$

e **fattoriale crescente** dall'intero $h$ per $s$ passi

$$(3) \qquad h^{\overline{s}} := h(h+1) \cdot \cdots \cdot (h+s-1) = \prod_{i=1}^{s} (h+i-1) = \prod_{i=0}^{s-1} (h+i) .$$

Si può quindi enunciare

$$(4) \qquad \mathsf{DspsN}_{k,s} = k^{\underline{s}} = (k-s+1)^{\overline{s}} .$$

Conviene segnalare esplicitamente che

$$(5) \qquad h^{\overline{s}} = (h+s-1)^{\underline{s}} \quad \text{e} \quad k^{\underline{s}} = (k-s+1)^{\overline{s}} .$$

Conviene ricordare che in genere invece delle notazioniqui proposte, ne sono usate molte altre; per esempio invece della $k^{\underline{s}}$ si usa spesso la scrittura $(k)_s$ chiamata, un po' impropriamente, **simbolo di Pochhammer**.

Nella dimostrazione della (1) abbiamo anche mostrato come, dati l'insieme $A$ di $k$ elementi e il numero $s$, se $s \leq k$ risulta possibile costruire tutte le sequenze costituenti $\mathsf{DspsN}_{A,s}$. È anche evidente che se $s < k$ non si possono avere sequenze di elementi di $A$ senza componenti ripetute. Si può quindi affermare che si hanno disposizioni senza ripetizioni di lunghezza $s$ di $k$ oggetti sse $s \leq k$.

Osserviamo anche che le disposizioni senza ripetizioni di lunghezza $s$ sull'insieme $A$ si possono considerare anche come le funzioni da $(s]$ in $A$ che sono invertibili. In effetti abbiamo già visto che ogni funzione finita è invertibile sse la sequenza dei valori che assume non presenta ripetizioni.

B15:**f.08** Quando $s = k$ le disposizioni senza ripetizioni di elementi di $A$ sono le sequenze che presentano ciascuno dei $k = s$ valori una e una sola volta, cioè esprimono le permutazioni degli elementi di $A$.
L'insieme delle permutazioni dell'insieme $A$ si denota con $\mathsf{Perm}_A$ e si può definire

Per ogni insieme finito $A$ si pone $\mathsf{Perm}_A \; := \; \mathsf{Dsps}_{A,|A|}$ .

Il numero di queste permutazioni quindi è evidentemente

$$(1) \qquad |\mathsf{Perm}_k| \;=\; k! \;:=\; \prod_{i=1}^{k} i \;=\; 1^{\overline{k}} \;=\; k^{\underline{k}} \,.$$

Qui abbiamo introdotta l'espressione $k!$ che si legge **fattoriale**dell'intero naturale $k$, detto anche in breve $k$ fattoriale.

Osserviamo anche che eliminando l'ultimo componente delle permutazioni di $A$ si ottengono esattamente le disposizioni senza ripetizioni degli elementi di $A$ di lunghezza $|A| - 1$; questa manovra di eliminazione quindi individua una biiezione tra $\mathsf{Perm}_A$ e $\mathsf{Dsps}_{A,|A|-1}$. In effetti si trasforma una disposizione senza ripetizione di $|A| - 1$ elementi di $A$ in una permutazione di $A$ aggiungendole un elemento la cui scelta è obbligata.

Come si è già detto, le permutazioni di un insieme finito sono configurazioni discrete estremamente importanti che incontreremo in molte delle pagine che seguono e in particolare in B41, D35, D48 e D63.

B15:**f.09** Si osserva che gli anagrammi di una parola $w$ che non presenta lettere ripetute si può dire che costituiscono le permutazioni dei caratteri che si incontrano nella stessa $w$.
Si possono quindi trovare facilmente i numeri degli anagrammi di parole come `parole`, `dante`, `rembrandt`, `bach`, `mozart` e `gandhi`.

Le permutazioni consentono di valutare i numeri di situazioni come le seguenti:

le diverse modalità di far sedere a un lato di una lunga tavola con $s$ posti i membri di un gruppo di $s$ persone;

i diversi modi di collocare $s$ libri sopra uno scaffale destinato a questi soli libri;

i diversi modi di disporre le 40 carte di un mazzo usuale in uno schieramento di 4 file di dieci carte ciascuna;

i diversi modi di depositare sopra un binario morto 7 carrozze ferroviarie.

B15:**f.10** Altri casi particolari di disposizioni con ripetizioni sono le combinazioni con ripetizioni.
Per introdurre queste sequenze, occorre presentare l'insieme $A = \{a_1, ..., a_k\}$ con gli elementi ordinati secondo un ordinamento totale che in linea di principio può scegliersi ad arbitrio, ma che nell'ambito di certe applicazioni viene imposto da una convenzione o viene privilegiato dalla consuetudine.

Conveniamo di esprimere la relazione di precedenza tra gli elementi di $A$ con il segno $\prec$ e stabiliamo che valga la catena di relazioni $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_k$ .
In particolare può essere vantaggioso assumere che $\mathsf{A}$ sia l'insieme dei primi $k$ interi positivi $(k]$ considerati nel solito ordine crescente, cioè si può assumere che $\prec$ sia la relazione numerica $<$; inoltre scriviamo $a \preceq b$ per esprimere che "aut $a \prec b$ aut $a = b$".

Diciamo **combinazione con ripetizioni** di lunghezza $s$ dei $k$ oggetti di $A$, ogni sequenza $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s}\rangle$ tale che $a_{j_1} \preceq a_{j_2} \preceq ... \preceq a_{j_s}$ .
L'insieme di tali sequenze lo denotiamo con $\mathbf{Combr}_{A,s}$ o $\mathbf{Combr}[A, s]$ e il loro numero con $\mathsf{CombrN}_{A,s}$ o $\mathsf{CombrN}[A, s]$.
Nel caso dei primi $s$ interi positivi scriviamo più semplicemente

$$\mathbf{Combr}_{k,s} := \mathbf{Combr}_{\{1,2,...,k\},s} \text{ e } \mathsf{CombrN}_{k,s} := |\mathbf{Combr}_{k,s}| .$$

Per esempio le combinazioni con ripetizioni di lunghezza 3 degli interi 1, 2 e 3 sono:

$$111 \ \ 112 \ \ 113 \ \ 122 \ \ 123 \ \ 133 \ \ 222 \ \ 223 \ \ 233 \ \ 333 \ ;$$

Abbiamo invece

$$\begin{aligned}\mathbf{Combr}_{4,3} = \{&111 , 112 , 113 , 114 , 122 , 123 , 124 , 133 , 134 , 144 , \\ &222 , 223 , 224 , 233 , 234 , 244 , 333 , 334 , 344 , 444\} \end{aligned} .$$

B15:**f.11** Si osserva che le combinazioni con ripetizioni di una data lunghezza $s$ degli elementi di un insieme $A$ dotato di un ordine totale si possono interpretare come funzioni da $(s]$ in $A$ nondecrescenti. In effetti le combinazioni con ripetizioni di interi positivi precedentemente usate come esempi sono state presentate come stringhe nondecrescenti di interi.

Si osserva inoltre che per l'insieme delle funzioni finite nondecrescenti di $(s]$ in $A$ si trovano facilmente due biiezioni con l'insieme delle funzioni finite noncrescenti di $(s]$ in $A$. Per esse conviene dare due trasformazioni involutive applicabili a tutte le funzioni costituenti $\lceil (s] \longmapsto A \rceil$ definendole con le loro rispettive azioni sopra una funzione $f \in \lceil (s] \longmapsto A \rceil$ che rappresentiamo con la sequenza $\phi = \langle a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_s\rangle$.

Definiamo come **funzione riflessa** della funzione a dominio finito $f$ e scriviamo $f^{\leftarrow}$ la funzione che si rappresenta con la sequenza riflessa della precedente $\phi^{\leftarrow} = \langle a_s, a_{s-1}, ..., a_2, a_1\rangle$ .

Definiamo **funzione complementare** della funzione a valori interi limitati $f \in \lceil (s] \longmapsto (k] \rceil$ e scriviamo $f^{\complement}$ la funzione che si rappresenta con la sequenza complementare della precedente

$$\phi^{\complement} := \langle k+1-a_1, k+1-a_2, ..., k+1-a_{s-1}, k+1-a_s\rangle .$$

Per esempio la funzione riflessa della $\langle 1, 2, 2, 3, 5, 7\rangle$ è la $\langle 7, 5, 3, 2, 2, 1\rangle$ e la complementare nell'ambito di $\lceil (6] \longmapsto (8] \rceil$ è $\langle 8, 7, 7, 6, 4, 2\rangle$ .

Evidentemente queste trasformazioni sono due involuzioni (e quindi sono particolari permutazioni) applicabili all'insieme delle funzioni tra i due insiemi ordinati $(s]$ e $A = (k]$.
Conviene segnalare che queste involuzioni si collegano significativamente alle due endofunzioni che trasformano nell'opposto l'ordine di $(s]$ e l'ordine di $A = (k]$. Introduciamo per esse le notazioni locali

$$J_A := \lceil a_i \in A \mapsto a_{k-i+1} \rceil \qquad \text{e} \qquad J_s := \lceil i \mapsto k+1-i \rceil .$$

Chiaramente la prima è una involuzione entro il dominio $(s]$ e la seconda una involuzione entro il codominio $A$ ed entrambe trasformano l'ordinamento dell'insieme sul quale agiscono nell'opposto.

Si verificano facilmente le due espressioni

$$f^{\leftarrow} \;=\; \left\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & ... & s-1 & s \\ a_s & a_{s-1} & ... & 2 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \;=\; J_s \circ_{lr} f \;=\; f \circ_{lr} J_A \ .$$

Si constata inoltre che entrambe le involuzioni scambiano le funzioni crescenti con le funzioni decrescenti e scambiano le funzioni nondecrescenti con le funzioni noncrescenti.
Quindi in particolare sia il numero delle funzioni nondecrescenti che il numero delle funzioni noncrescenti di $\lceil (s] \longmapsto A = (k] \rceil$ sono dati da $\mathsf{CombrN}_{k,s}$.

B15:**f.12** Insiemi di sequenze più ridotti degli insiemi di combinazioni con ripetizioni sono gli insiemi delle sequenze che chiamiamo **combinazioni senza ripetizioni**.
Queste spesso sono chiamate “combinazioni semplici”, mentre in contesti nei quali non si temono ambiguità esse vengono anche dette semplicemente combinazioni.

Più precisamente diciamo **combinazione [senza ripetizioni] di lunghezza** $s$di elementi dell'insieme $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ che vengono considerati ordinati secondo la catena-to $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_k$ , ogni sequenza $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s} \rangle$ per la quale vale la catena-to $a_{j_1} \prec a_{j_2} \prec ... \prec a_{j_s}$ .
L'insieme di tali sequenze lo denotiamo con $\mathbf{Comb}_{A,s}$ o $\mathbf{Comb}[A, s]$ e il loro numero con $\mathsf{CombN}_{A,s}$ o $\mathsf{CombN}[A, s]$.
Più specificamente per $A = \{1, 2, ..., k\}$ scriviamo

$$\mathbf{Comb}_{k,s} \;:=\; \mathbf{Comb}[|(k]|, s] \;\text{ e }\; \mathsf{CombN}[(k], s] \;:=\; |\mathbf{Comb}_{A,s}| \ .$$

Per esempio le combinazioni di lunghezza 3 degli interi 1, 2, 3, 4 e 5, sono:

$$123 \;\; 124 \;\; 125 \;\; 134 \;\; 135 \;\; 145 \;\; 234 \;\; 235 \;\; 245 \;\; 345 \ ;$$

si scrive dunque

$$\mathbf{Comb}_{5,3} \;=\; \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\} \ .$$

Si osserva che, mentre le combinazioni con ripetizioni di lunghezza $s$ su $A = (k]$ rappresentano le funzioni nondecrescenti di $\lceil (s] \longmapsto (k] \rceil$, le più specifiche combinazioni senza ripetizioni rappresentano le sole funzioni crescenti.

È importante osservare anche che $\mathbf{Comb}_{A,s}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei sottoinsiemi di $A$ aventi $s$ elementi. In effetti, una scrittura come 125 si può considerare come una semplificazione della scrittura $\{1, 2, 5\}$ e in generale una combinazione senza ripetizioni di lunghezza $s$ di elementi di un insieme $A$ di $k = |A|$ oggetti che denotiamo con $\mathsf{c}$ si può considerare una scrittura semplificata del sottoinsieme di $A$ contenente gli oggetti che si incontrano nella suddetta $\mathsf{c}$.

B15:**f.13** Il numero $\mathsf{CombN}_{k,s}$ delle combinazioni senza ripetizioni di determinata lunghezza $s$ di $k$ dati oggetti ordinati, per una ben definita ragione che vedremo in D20b, viene chiamato **coefficiente binomiale** $k$ su $s$ e viene denotato con $\binom{k}{s}$, scrittura che presenta vari vantaggi.
Il complesso di questi numeri è molto importante in quanto gode di molte proprietà conseguentemente consente di affrontare e risolvere molteplici problemi che risultano collegati alle accennate proprietà.

I singoli valori $\binom{k}{s}$ si possono considerare i valori di una funzione di due variabili intere naturali a valori interi positivi e si possono ottenere come numeri dei sottoinsiemi di cardinale $s$ di un insieme di $k \geq s$ elementi.

Troveremo inoltre che sarà utile descrivere questi sottoinsiemi come cammini crescenti nel piano dei punti a coordinate intere [D21b] .

Ora ci limitiamo a trovare un'espressione per i valori $\binom{k}{s}$ collegando le combinazioni senza ripetizioni di $k$ oggetti di lunghezza $s$ alle disposizioni senza ripetizioni degli stessi $k$ oggetti della stessa lunghezza $s$.

A ciascuna delle suddette disposizioni senza ripetizioni si può quindi associare facilmente la combinazione senza ripetizioni ottenuta disponendo le $s$ componenti in ordine crescente. Per questa trasformazione, ogni combinazione semplice $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s}\rangle$ è ottenibile delle $s!$ disposizioni senza ripetizioni ottenute permutando in tutti i modi le $s$ componenti. Per esempio alla combinazione $2\ 4\ 5\ 9$ corrispondono le 24 disposizioni senza ripetizioni

$$\begin{array}{cccccc}
2\,4\,5\,9\,, & 2\,4\,9\,5\,, & 2\,5\,4\,9\,, & 2\,5\,9\,4\,, & 2\,9\,4\,5\,, & 2\,9\,5\,4\,,\\
4\,2\,5\,9\,, & 4\,2\,9\,5\,, & 4\,5\,2\,9\,, & 4\,5\,9\,2\,, & 4\,9\,2\,5\,, & 4\,9\,5\,2\,,\\
5\,2\,4\,9\,, & 5\,2\,9\,4\,, & 5\,4\,2\,9\,, & 5\,4\,9\,2\,, & 5\,9\,2\,4\,, & 5\,9\,4\,2\,,\\
9\,2\,4\,5\,, & 9\,2\,5\,4\,, & 9\,4\,2\,5\,, & 9\,4\,5\,2\,, & 9\,5\,2\,4\,, & 9\,5\,4\,2\ .
\end{array}$$

Abbiamo quindi che il numero delle disposizioni senza ripetizioni di lunghezza $s$ di $k$ elementi è uguale ad $s!$ per il numero delle combinazioni di lunghezza $s$ di $k$ elementi. Dunque per quest'ultimo numero si ha:

$$(1) \qquad \mathsf{CombN}_{k,s} = \binom{k}{s} = \frac{\mathsf{DspsN}_{k,s}}{s!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{s!}\ .$$

Servendoci delle notazioni fattoriale crescente e fattoriale decrescente introdotte in e02 e osservando che $k! = k^{\underline{s}}\,(k-s)!$, abbiamo anche

$$(2) \qquad \binom{k}{s} = \frac{k^{\underline{s}}}{s!} = \frac{(k-s+1)^{\overline{s}}}{s!} = \frac{k!}{s!\,(k-s)!}\ .$$

B15:**f.14** Anche il numero delle combinazioni con ripetizioni si esprime facilmente servendosi di una espressione già trovata, quella per le combinazioni senza ripetizioni, dopo aver individuata una opportuna biiezione tra questi insiemi di sequenze.

Per questo, per maggiore scorrevolezza, supponiamo che sia $A = \{a_1 = 1, a_2 = 2, ..., a_k = k\}$ e ricordiamo che le sequenze crescenti (in senso stretto) $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s}\rangle$ di lunghezza $s$ si possono porre in corrispondenza biunivoca con le sequenze $\langle a_{j_1}, a_{j_2}-1, a_{j_3}-2, ..., a_{j_s}-s+1\rangle$, sequenze nondecrescenti dei $k-s+1$ interi $1, ..., k-s+1$, sequenze che forniscono le combinazioni con ripetizioni di tali numeri.

Per esempio, l'insieme di combinazioni $\mathbf{Comb}(3,5) = \{123, 124, 125, 134, 135, 234, 235, 245, 345\}$ è posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme di combinazioni con ripetizione $Combr(3, 5-3+1) = Combr(3,3)$ dalla funzione

$$\left\downarrow\begin{array}{ccccccccc}
123 & 124 & 125 & 134 & 135 & 234 & 235 & 245 & 345\\
111 & 112 & 113 & 122 & 123 & 222 & 223 & 233 & 333
\end{array}\right\downarrow\ .$$

A questo proposito conviene segnalare esplicitamente il meccanismo che a un elenco di sequenze numeriche nondecrescenti associa un elenco di sequenze crescenti: per ogni sequenza di $s$ numeri si lascia invariato il primo, si aumenta di 1 il secondo, si aumenta di 2 il terzo, ... , si aumenta di $i-1$ l'-$i$-esimo, ..., si aumenta di $s-1$ l'ultimo.

Si esplicita facilmente anche il meccanismo che effettua la trasformazione inversa della precedente.

Quindi l'insieme delle sequenze nondecrescenti, degli interi $a_1, ..., a_k$ di lunghezza $s$ è in biiezione con l'insieme delle sequenze noncrescenti degli interi $a_1, ..., a_{k+s-1}$ aventi la stessa lunghezza $s$. Di conseguenza il numero delle suddette sequenze nondecrescenti, è uguale al numero delle suddette sequenze crescenti e si può scrivere:

(1) $$\mathsf{CombrN}_{\{a_1,\ldots,a_k\},s} \;=\; \mathsf{CombN}_{\{a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_{k+s-1}\},s}\ .$$

Diamo anche le espressioni più esplicite

(2) $$\mathsf{CombrN}_{\{a_1,\ldots,a_k\},s} \;=\; \frac{(k+s-1)(k+s-2)\cdots k}{s!} \;=\; \frac{(k+s-1)!}{s!\,(k-1)!} \;=\; \frac{k^{\overline{s}}}{s!} \;=\; \binom{k+s-1}{s}\ .$$

B15:**f.15** Ricordando le involuzioni introdotte in e11 si ha che le funzioni crescenti di $\lceil (s] \longmapsto A \rceil$ si possono facilmente porre in corrispondenza biunivoca con le funzioni decrescenti e in particolare il numero sia delle funzioni crescenti che delle funzioni decrescenti del detto genere è dato da $\binom{k}{s}$ .

Usando i termini introdotti, le combinazioni con ripetizioni di lunghezza $s$ di elementi dell'insieme $A$ costituito da $k$ oggetti ordinati si possono definire come le sequenze nondecrescenti di lunghezza $s$ di tali oggetti, mentre le combinazioni senza ripetizioni di lunghezza $s$ di elementi di $\mathsf{A}$ si possono definire come le sequenze crescenti di lunghezza $s$ di elementi di $A$.

B15:**f.16** Consideriamo un insieme finito ordinato $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e definiamo **multiinsieme** su $A$ ogni funzione che a ogni elemento di $A$ fa corrispondere un intero naturale.

Al generico multiinsieme su $A$ si può dare la forma

(1) . $$\mathsf{m} \;=\; \left\downarrow \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n \end{matrix} \right\downarrow$$

L'insieme $A$ è il dominio della funzione multiinsieme $\mathsf{m}$ e si dice anche **terreno del multiinsieme**.

Il cardinale del terreno di un multiinsieme si dice lunghezza del multiinsieme; la lunghezza del precedente $\mathsf{m}$ è $n := |A|$.
Considerando ancora $\mathsf{m}$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$ l'intero naturale $m_i$ si dice **molteplicità nel multiinsieme** assegnata all'elemento $a_i$ del suo terreno; si dice anche per ogni $i = 1, 2, ..., n$ che $a_i$ compare nel multiinsieme $\mathsf{m}$ con la molteplicità $m_i$.
Diciamo **molteplicità complessiva di un multiinsieme**, o **cardinale di un multiinsieme**, attualmente $\mathsf{m}$ su $A$, la somma delle molteplicità degli elementi di $A$ e per essa scriviamo

$$|\mathsf{m}| \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \mathsf{m}(a_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} m_i \;=\; s\ .$$

JP Un multiinsieme su $A$ si può pensare come un processo costituito da una sequenza di ostensioni successive degli elementi di $A$ presi secondo un loro ordine, ogni elemento di $A$ potendo essere mostrato più volte consecutive o anche non essere presentato affatto.
Il multiinsieme $\mathsf{m}$ si può descrivere anche come una sequenza di repliche degli elementi di $A$ con $m_1$ repliche di $a_1$ nella prima posizione, $m_2$ repliche doi $a_2$ nella seconda, ..., $m_n$ repliche di $_n$ nell'ultima posizione. Una tale descrizione si può visualizzare efficacemente con un istogramma.
In altro modo un multiinsieme si può pensare come un sistema di oggetti allineati, ciascuno dei quali munito di un peso di un valore intero naturale che esprime una qualche forma della sua importanza, oppure la frequenza di un suo uso.

In particolare interessano i multiinsiemi aventi come terreno un intervallo di interi positivi della forma $(n]$, insieme per il quale tende ad imporsi l'ordinamento totale $\leq$.

Un esempio è dato dalla funzione

$$\mathsf{m} \;=\; \left\downarrow\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1\end{matrix}\right\downarrow \;.$$

A ogni combinazione con ripetizioni di elementi di $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ munito dell'ordinamento espresso dalla catena-to $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_n$ si può dare la cosiddetta **forma monomiale di combinazione con ripetizioni**

$$a_1{}^{m_1}\, a_2{}^{m_2} \,...\, a_n{}^{m_n} \;,$$

nella quale per ogni $i = 1, 2, ..., n$ $m_i$ esprime il numero delle occorrenze dell'oggetto $a_i$ nella combinazione.
Si constata facilmente che a essa è associato il multiinsieme su $A$ fornito dalla (1) e che questa associazione è una corrispondenza biunivoca.

Consideriamo in particolare la sequenza 11355579 come elemento di $\mathsf{Combr}_{8,10}$; essa si può identificare come il multiinsieme sul terreno $\mathbf{(}10\mathbf{]}$ caratterizzato dalle seguenti molteplicità: all'elemento 1 è assegnata la molteplicità 2, a 3 la molteplicità 1, a 5 la molteplicità 3, a 7 e a 9 la molteplicità 1, ai rimanenti interi 2, 4, 6, 8 e 10 essendo attribuita la molteplicità 0.

Se ad $A$ con $n := |A|$ si assegna l'ordine totale derivante dalla lista $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ con la quale può essere presentato, al multiinsieme $\mathsf{m}$ risulta associata la sequenza delle molteplicità $\mathsf{mlcty}(\mathsf{m}) := \langle \mathsf{m}(a_1), \mathsf{m}(a_2), ..., \mathsf{m}(a_k)\rangle$ .

Denotiamo con $\mathsf{Mset}_A$ o $\mathsf{Mset}[A]$ l'insieme dei multiinsiemi su $A$ e adottiamo la usuale semplificazione $\mathsf{Mset}_n := \mathsf{Mset}[\{1, 2, ..., n\}$.

Si constata facilmente che un tale insieme di funzioni è un insieme-B.

B15:**f.17** Per ogni insieme finito $A$ e per ogni intero positivo $w$ introduciamo la notazione $\mathsf{Mset}_{A,w}$ per l'insieme dei multiinsiemi aventi come terreno $A$ e come molteplicità complessiva $w$.

Si trova senza difficoltà un algoritmo che da una lista di $A$ e dall'intero positivo $w$ ricava una lista di tutti gli elementi di $\mathsf{Mset}_{A,w}$ e quindi che questo simbolo esprime un insieme ragionevolmente esplicitabile.

Quando avremo ampliata la nozione di insieme ci potremo servire della notazione $\mathsf{Mset}_A$ per la totalità dei multiinsiemi aventi come terreno $A$, entità che non individua un insieme finito ma che già fin d'ora si intuisce possa essere utile per alcuni enunciati.

Non è difficile individuare un procedimento che a ogni sequenza di $\mathsf{Combr}_{A,s}$ associa un multiinsieme su $A$ con molteplicità complessiva $s$ e un meccanismo in grado di effettuare la trasformazione inversa.
Quindi le espressioni trovate in f14 forniscono anche i cardinali degli insiemi di multiinsiemi.

Conviene segnalare anche i fatti che seguono.

A ciascuna delle disposizioni con ripetizioni su $A$ si può associare un multiinsieme su $A$.
La fattorizzazione di un intero positivo $n$ mediante numeri primi si esprime come multiinsieme avente come terreno l'insieme dei primi minori o uguali al massimo divisore primo di $n$.
Il complesso delle soluzioni di un'equazione polinomiale, stante la possibilità di avere soluzioni multiple, può essere efficacemente presentato come multiinsieme avente come molteplicità complessiva il grado dell'equazione.

B15:**f.18** Consideriamo ancora un un intero positivo $s$ e un insieme finito $A$ costituito da $n$ elementi ordinati e che presentiamo con la catena-to $\langle a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_n\rangle$ .

Consideriamo inoltre una disposizione con ripetizioni di $A$ di lunghezza $s$ $\mathsf{d}$ e il multiinsieme associato che denotiamo $mset(\mathsf{d})$, la cui molteplicità complessiva è uguale alla lunghezza $s$. Per esempio se $A = abcdefg$ la disposizione $abaccegb$ ha come multiinsieme $\langle 2, 2, 2, 0, 1, 0, 1\rangle$.

Si dice **permutazione con ripetizioni** di elementi di $A$ di lunghezza $s$ associata alla sequenza di molteplicità $\mathsf{mlcty}(\mathsf{m})$ ogni disposizione con ripetizioni di elementi di $A$ avente $\mathsf{m}$ come multiinsieme e quindi avente di lunghezza $s$.
Si osserva che la definizione permette che si abbiano permutazioni con ripetizioni di elementi di $A$ nelle quali qualche elemento di $A$ non compare.
Se si vuole evitare questa possibilità si può fare riferimento a quelli che chiamiamo **multiinsiemi positivi** su $A$, multiinsiemi $\langle m_1, m_2, ..., m_n\rangle$ nei quali tutte le molteplicità $m_i$ sono positive e conseguentemente con una molteplicità complessiva $s$ maggiore o uguale ad $n$.

Per ogni $\mathsf{m} \in \mathsf{Mset}_A$ introduciamo le notazioni equivalenti $\mathbf{Permr}_{\mathsf{m}}$ e $\mathbf{Permr}[\mathsf{m}]$ per l'insieme delle permutazioni con ripetizione caratterizzate dal multiinsieme $\mathsf{m}$; inoltre per il loro numero definiamo

$$\mathsf{PermrN}_{\mathsf{m}} \ := \ \mathsf{PermrN}[\mathsf{m}] \ := \ |\mathbf{Permr}_{\mathsf{m}}| \ := \ |\mathbf{Permr}[\mathsf{m}]| \ .$$

Esempi:

$\mathbf{Permr}[\mathtt{acca}] \ = \ \{\mathtt{aacc}, \mathtt{acac}, \mathtt{acca}, \mathtt{caac}, \mathtt{caca}, \mathtt{ccaa}\}$ , $\quad \mathsf{PermrN}[ttacca] \ = \ \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ ,

$\mathbf{Permr}[\mathtt{tutto}] \ = \ \{\mathtt{otttu}, \mathtt{ottut}, \mathtt{otutt}, \mathtt{outtt}, \mathtt{tottu}, \mathtt{totut}, \mathtt{toutt}, \mathtt{ttotu}, \mathtt{ttout}, \mathtt{tttou}, \mathtt{tttuo}, \mathtt{ttuot}, \mathtt{ttuto}, \mathtt{tuott}, \mathtt{tutot}, \mathtt{tutto}, \mathtt{uottt}, \mathtt{utott}, \mathtt{uttot}, \mathtt{uttto}\}$ ,

$\mathsf{PermrN}[\mathtt{tutto}] \ = \ \dfrac{5!}{1!3!1!} = 20$ .

Queste sequenze si possono porre in relazione alle permutazioni di $s$ oggetti corrispondenti agli elementi di $A$ distinti per molteplicità; in questa relazione una permutazione con ripetizioni caratterizzata dalla molteplicità $\mathsf{m}$ si trova associata tutte le permutazioni che differiscono solo per le posizioni occupate dagli elementi distinti per molteplicità; il numero di queste permutazioni è $\prod_{j=1}^{n} m_j$.
Quindi il numero delle permutazioni con ripetizioni caratterizzate da $\mathsf{m}$ è dato da

$$\mathsf{PermrN}_{\mathsf{m}} \ = \ \frac{s!}{m_1!\, m_2! \, \cdots \, m_s!} \ .$$

Questi numeri positivi sono chiamati **coefficienti multinomiali** e su di essi avremo modo di tornare, anche per giustificare il loronome.

Questi coefficienti sono in grado di fornire, in particolare, i numeri di anagrammi di qualsiasi stringa passando attraverso il relativo multiinsieme.

Esempi: il numero di anagrammi di `newton` è $6!/2 = 360$, come il numero di anagrammi di `peirce`, mentre il numero degli anagrammi di `abracadabra` è $\dfrac{11!}{5!\,2!\,2!} = 83\,160$ .

B15:**f.19** Diciamo composizioni additive o **composizioni-A di un intero naturale** $n$ le diverse scritture che esprimono $n$ come somma di interi positivi distinguendo l'ordine di comparsa degli addendi.
Per esempio le composizioni-A di 5 sono:

$$5 \ , \ 4+1 \ , \ 1+4 \ , \ 3+2 \ , \ 2+3 \ , \ 3+1+1 \ , \ 1+3+1 \ , \ 1+1+3 \ , \ 2+2+1 \ , \ 2+1+2 \ ,$$
$$1+2+2 \ , \ 2+1+1+1 \ , \ 1+2+1+1 \ , \ 1+1+2+1 \ , \ 1+1+1+2 \ , \ 1+1+1+1+1 \ .$$

Denotiamo con $\mathbf{CompA}_n$ l'insieme delle composizioni-A di $n$ e poniamo

$$\mathsf{CompAN}_n \ := \ |\mathbf{CompA}_n| \ .$$

Dall'elenco precedente si constata che $\mathsf{CompAN}_5 = 16$.
Si constata facilmente anche che $\langle n = 1,2,3,4,5 :| \ \mathsf{CompAN}_n\rangle \ = \ \langle 1,2,4,8,16\rangle$ e questo suggerisce l'enunciato che segue.

**(1) Prop.:** $\quad \mathsf{CompAN}_n = 2^{n-1}$ .

**Dim.**: L'insieme $\mathsf{CompA}_n$ si bipartisce nell'insieme delle composizioni-A di $n$ che hanno come primo addendo 1 e nell'insieme di quelle che hanno il primo addendo maggiore di 1. La cancellazione del primo addendo dalle prime le pone in biiezione con le composizioni-A di $n-1$; alla biiezione con queste conduce anche l'abbassamento di 1 del primo addendo delle seconde.
Dunque $\mathsf{CompAN}_n = 2\,\mathsf{CompAN}_{n-1}$ e questa, insieme alla evidente $\mathsf{CompAN}_1 = 1$, conduce all'enunciato ▮

Segnaliamo subito che se si prescinde dall'ordine degli addendi si hanno le configurazioni chiamate partizioni.i, configurazioni combinatorie di grande importanza che ritroveremo, in particolare, in D23 e in D25.