1

Capitolo B13
sequenze combinatorie primarie

Contenuti delle sezioni

16 pagine

B130.01 Il capitolo è dedicato all'introduzione di alcune nozioni basilari riguardanti quelle che chiamiamo **sequenze combinatorie primarie** e i corrispondenti cardinali.

Si tratta di strutture discrete che possono considerarsi funzioni finite e che risultano utili per una grande varietà di manipolazioni di espressioni simboliche e di dati numerici ottenuti da osservazioni.

Queste sequenze combinatorie sono entità semplici da definire e relativamente semplici da trattare mediante algoritmi efficaci; di conseguenza risultano in grado di contribuire a risolvere svariati problemi pratici, problemi che vanno da quelli spiccioli della vita quotidiana a quelli che rispondono a grandi interessi dell'industria, della logistica del commercio e delle grandi organizzazioni.

Esse quindi si incontrano spesso nell'informatica, sia per sostenere strumenti applicati di ampio impiego, sia per servire alla ingegneria del software e all'informatica teorica.

Le formule che consentono di contare i numeri degli elementi delle sequenze combinatorie primarie costituiscono il nucleo iniziale del corpo, oggi assai vasto, delle cosiddette **formule enumerative**, gli strumenti che consentono valutazioni quantitative in linea di massima esatte che sono tra gli strumenti primari per molti approcci quantitativi dei sistemi complessi; in particolare sono impiegate nelle elaborazioni statistiche, nella analisi della complessità computazionale e nella progettazione dei sistemi per le comunicazioni.

B13 a. disposizioni

B13a.01 Consideriamo due interi positivi k ed s e un insieme di k oggetti $\mathsf{A} = \{a_1, ..., a_k\}$ da considerare semplici, mutuamente distinguibili e replicabili in tante copie quanto serve che successivamente possono essere giudicate indistinguibili.
Qui interessano soprattutto i casi nei quali A è un alfabeto come $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, ..., \mathtt{k}\}$ o un intervallo di numeri interi come $\{0, 1, ..., k-1\}$ o $\{1, 2, ..., k\}$.
Gli insiemi di questi oggetti si possono rappresentare utilmente con sequenze; tra queste sequenze si possono distinguere le ripetitive dalle nonripetitive; inoltre, essendo facilmente trattabile un ordinamento totale delle lettere e dei numeri si possono distinguere le sequenze crescenti dalle noncrescenti e, dualmente (ossia passando all'ordina opposto), le sequenze decrescenti dalle nondecrescenti.

Segnaliamo anche che queste seguenze di oggetti semplici vengono ampiamente e vantaggiosamente utilizzate per modellizzare oggetti complessi del mondo fisico o di mondi intersoggettivi.

Citiamo in particolare: perline da infilare per farne una collana; tessere da usare in un mosaico; mosse costituenti una partita a carte o a scacchi; basi azotate in una sequenza di RNA o DNA; unità fonetiche, lessicali e sintattiche diun testo; persone classificabili per nazionalità, sesso, reddito o quant'altro; molecole di diverse specie di una miscela gassosa; campioni di terreni coltivabili e di specie vegetali; prodotti di diverse catene di produzioni industriali; beni di consumo destinati a diverse categorie di consumatori.

Questi esempi cercano di suggerire che le sequenze esaminate nelle pagine che seguono trovano importanti applicazioni in settori come lo studio dei giochi e delle decisioni, la sociologia, il marketing, la genetica, l'organizzazione industriale, l'agrimensura e (con il ruolo della mediatrice computazionale) nella programmazione dei computers.

B13a.02 Le sequenze di lunghezza s di elementi sopra un insieme A, cioè gli elementi della potenza cartesiana s-esima di $\mathsf{A} \searrow \mathsf{A}^{\times s}$, le chiamiamo anche **disposizioni con ripetizione** di lunghezza s sopra A.

Le sequenze binarie si possono considerare come casi particolari di queste configurazioni riguardanti il semplice alfabeto $\{0, 1\}$ formato da $k = 2$ caratteri.

Per disporre di scritture omogenee con altre notazioni che stiamo per introdurre, denoteremo l'insieme delle disposizioni con ripetizione di lunghezza s su A anche con la notazione $\mathbf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$; possiamo quindi scrivere $\mathbf{Dspsr}_{\mathsf{A},s} := \mathsf{A}^{\times s}$.

Per il loro numero introduciamo anche la notazione

$$\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s} := \left|\mathsf{A}^{\times s}\right| .$$

Ricordiamo che a notazioni come $\mathbf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s}$, quando l'argomento A o l'argomento s devono essere dati da espressioni elaborate, sono preferibili notazioni come $\mathbf{Dspsr}[\mathsf{A}, s]$ e $\mathsf{DspsrN}[\mathsf{A}, s]$ da considerare del tutto equivalenti alle precedenti.

(1) Prop.: Il numero delle disposizioni con ripetizione di lunghezza s su A è

$$\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s} = |A|^s = k^s .$$

Dim.: Basta descrivere come si può procedere alla costruzione della totalità delle sequenze in esame. Descriviamo queste come sequenze o allineamenti di s "scatole" in ciascuna delle quali si può collocare una replica di un carattere appartenente all'alfabeto A. In ciascuna scatola di un allineamento si può porre uno qualsiasi dei k caratteri dell'alfabeto, indipendentemente dai caratteri che sono presenti nelle altre posizioni. Nella prima posizione si possono porre k caratteri, per le prime due posizioni si hanno k^2 possibili scelte, nelle prime 3 k^3 e così via. Dunque $|\mathsf{A}^{\times}s| = |\mathsf{A}|^s$ ∎

Conviene ricordare che il segno ∎ introdotto sopra abbrevia l'espressione latina "quod erat demonstrandum" (abbreviata con QED), o la equivalente "come dovevasi dimostrare"; esso viene usato preferibilmente per segnalare la conclusione di ogni dimostrazione.

Evidentemente l'espressione precedente generalizza l'espressione 2^s trovata in d04 per il numero delle sequenze binarie di lunghezza s.
Segnaliamo anche la possibilità di descrivere visivamente mediante una delle arborescenze che sono presentate in D30c04 per l'organizzazione del processo costruttivo di tutte le sequenze, processo che si può leggere tra le righe della dimostrazione precedente.

B13a.03 Vediamo alcuni esempi di situazioni chiarite dal risultato precedente.

L'insieme delle notazioni decimali di interi naturali $s = 3$ cifre, quando per gli interi minori di 100 si chiedono scritture con zeri iniziali come quelle mostrate da tanti contatori, è $\textsf{Dspsr}_{10,3}$ e quindi consiste, non sorprendentemente, di 10^3 elementi.

Le scritture decimali formate da 4 cifre dispari costituiscono l'insieme $\textsf{Dspsr}[\{1,3,5,7,9\},4]$ il cui cardinale è $5^4 = 625$. Può essere significativo confrontare questo valore con il numero dei numeri interi compresi tra 1 000 e 9 999 che ammonta a 8 000.

Il numero delle stringhe di 3 caratteri, i trigrammi, sull'alfabeto di 26 caratteri è $26^3 = 17\,576$, mentre le stringhe di lunghezza 26 su un alfabeto di 3 caratteri sono molte di più, $3^{26} = 2\,541\,865\,828\,329$.

A questo proposito segnaliamo che si dimostra che se k ed s sono interi con $2 \le k < s$ si ha l'implicazione $k < s \Longrightarrow s^k < k^s$, con sole due eccezioni.
In particolare si dimostra senza difficoltà che $n > 2 \Longrightarrow n+1^n < n^{n+1}$ e che $1 \le h \Longrightarrow (n+h)^n < n^{n+h}$.
È significativa anche la seguente tabellina dell'esponente con le eccezioni in evidenza.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	$8^<$	$16^=$	32	64	128	256	512	1024
3	$9^>$	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	$16^=$	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390626	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	82353	5764801	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

Si osserva che quando i parametri s e k non sono piccoli gli insiemi della forma $\textsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ sono molto estesi e presentano elementi ciascuno dei quali piuttosto simile a molti altri.
In effetti tali insiemi interessano soprattutto in quanto definiscono ambienti nei quali conviene collocare come sottoinsiemi degli insiemi di oggetti (sequenze) più specifici, cioè dotati di proprietà che li rendono adatti per applicazioni specifiche e quindi presentino buoni motivi di interesse applicativo.

Nel seguito avremo modo di incontrare alcuni di questi insiemi, in particolare in D20 e D33.

Ricordiamo anche che rivestono interesse, in particolare per precisare algoritmi e programmi, i procedimenti che consentono di passare in rassegna tutte le sequenze di insiemi estesi e poco differenziati come $\mathsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$. Procedimenti di questo genere sono chiamati **procedure di visita**; ne incontreremo altri, per esempio in B21j, D30 e C14f.

B13a.04 Alcune considerazioni sui nomi usati per gli elementi di un insieme della forma $\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s}$. Con il termine "disposizioni con ripetizione" non si intende escludere che le componenti di una di tali sequenze siano tutte diverse: a $\mathsf{Dspsr}_{8,4}$ appartengono stringhe come 1234, 2468 e 3574. Il termine più corretto, ma più prolisso, "disposizioni con la possibilità di ripetizioni", non sembra sia usato.

Per queste sequenze sono solitamente usate denominazioni diverse da quella qui proposta: nella maggior parte dei testi si usano termini come "disposizioni con ripetizione di elementi di A di classe s".

La dizione qui preferita intende assegnare al parametro s il ruolo ben definito e ampiamente utilizzabile di lunghezza di una sequenza, mentre l'altra dizione si serve del termine "classe" che in matematica e in informatica viene usato per oggetti, purtroppo più d'uno, che nulla hanno a che fare con le semplici configurazioni qui esaminate (classe di equivalenza, classe come parametro che esprime un livello di complessità, classe entità che generalizza la nozione di insieme per la quale qui preferiamo usare il termine classe.E.

Un'altra denominazione usata è "disposizioni con ripetizione di elementi di A presi ad s ad s"; i tratta di un termine chiaro che ricorre alla metafora del prendere; qui preferiamo servirci della nozione di lunghezza per la sua evidenza negli esempi costituiti da brevi sequenze come *abacbb* o 4321.

Preferenze analoghe rispetto a nomi più diffusi saranno adottate per le configurazioni combinatorie che seguono, in quanto tutte possono vedersi come sequenze di stringhe o di oggetti appartenenti a un insieme finito caratterizzate da una determinata proprietà peculiare e in ogni caso caratterizzabili con la loro evidente lunghezza.

Quando l'insieme A è l'insieme di numeri positivi $\{1, 2, ..., k\}$ useremo le notazioni $\mathsf{Dspsr}_{k,s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{k,s}$ o le rispettive equivalenti $\mathsf{Dspsr}[k, s]$ e $\mathsf{DspsrN}[k, s]$.

B13a.05 Le notazioni $\mathsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{\mathsf{A},s}$ si possono vedere come esempi di notazioni formate da una sigla di lettere (ma useremo anche qualche cifra e qualche altro segno) seguita da parametri o da semplici espressioni che possono essere attribuiti a tipi ben definiti in precedenza.
La sigla vuole essere una abbreviazione di un termine caratterizzante e i parametri consentono di individuare in modo completo l'insieme degli oggetti definiti.

Nella presente *esposizione* viene adottato ampiamente questo genere di notazioni.
Queste notazioni che intendono essere precise ed esaurienti vogliono poter essere usate come **identificatori globali** delle entità che denotano, ossia in grado di essere utilizzati anche in contesti lontani da quelli in cui vengono definiti.

Bisogna tuttavia riconoscere che esse sono piuttosto impegnative alla scrittura e alla lettura.

In contesti nei quali gli insiemi identificati sono frequentemente citate conviene poterle individuare anche con **notazioni locali** più concise e maneggevoli.

In particolare in molti contesti in luogo di $\mathsf{Dspsr}_{k,s}$ e $\mathsf{DspsrN}_{k,s}$ si usano le notazioni $\mathsf{D'}_{k,s}$ e $D'_{k,s}$ che evidentemente consentono di presentare formule ed espressioni localmente più nitide.

In effetti è evidente che se si facesse assumere visibilità globale a una notazione concisa si rischierebbero scritture di bassa distinguibilità e di possibili confusioni.
Per esempio potrebbe accadere che una notazione come $\mathsf{D'}[k, s]$ venga presa per la derivata di una funzione bivariata.

Le notazioni globali tendono ad assumere il ruolo di notazioni standard. Ciò nonostante risulta opportuno usarle con una certa elasticità. Abbiamo già visto che in certi contesti si usa un identificatore di insieme per identificare anche il suo cardinale.

Può anche accadere di individuare insiemi di sequenze appartenenti a un insieme della forma $\mathsf{Dspsr}_{\mathsf{A},s}$ nel quale A e/o s devono essere individuate da espressioni elaborate; in questi casi conviene utilizzare una notazione nella quale queste espressioni non sono costrette a stare a deponente, ma possono collocarsi entro una coppia di parentesi specifiche da usare come delimitatori di espressioni.
Per esempio si potrebbero usare notazioni come

$$\mathsf{Dspsr}\text{–}\Big[\mathsf{E}\,\dot\cup\,(\mathsf{F}\cap\mathsf{G})\ ,\ 3\,n^3+4\,n^2+12\Big]\quad\text{o}\quad \mathsf{DspsrN}\text{–}\left[\mathsf{E}\setminus(\mathsf{F}\cup\mathsf{G})\ ,\ \left\lceil\frac{m!+n^2+144\,m+12}{|K|}\right\rceil\right]\ .$$

Non sono rare le situazioni nelle quali si rendano necessarie notazioni della forma sigla[specificazioni]) con 3 o più specificazioni.

Per queste notazioni talora può essere opportuno adottare semplificazioni locali nelle quali qualche parametro viene meramente ignorato negli sviluppi nei quali non gioca alcun ruolo, confidando che tale abbreviazione sia capita dal lettore anche in assenza di dichiarazione esplicita. In molti di questi casi sarebbe però preferibile introdurre una variante tipografica della sigla in gioco.

Nei casi di 3 o più specificazioni entro una coppia parentesi può risultare vantaggioso servirsi di diversi separatori e anche di successivi nidi delimitati da diverse coppie di parentesi coniugate.

Infine segnaliamo che in presenza di parecchie specificazioni può essere conveniente presentarle non mediante una loro sequenza ma con notazioni che si estendono in due dimensioni. In particolare si usano delle matrici e tabelle simili per le funzioni ipergeometriche e per coefficienti associati a rotazioni di sistemi studiati dalla meccanica quantistica.

B13a.06 Iniziamo ora a occuparci di sequenze che sono disposizioni con ripetizione che devono sottostare a vincoli tendenzialmente semplici. Anche per questi insiemi di configurazioni daremo le caratteristiche principali ed in particolare le espressioni dei loro cardinali.

Le sequenze di data lunghezza s le cui componenti appartengono ad un insieme definito $A = \{a_1, ..., a_k\}$ e che non presentano componenti ripetuti, sono dette anche **disposizioni [senza ripetizioni]** di lunghezza s dei k oggetti a_1, ..., a_k.
Il loro insieme lo denotiamo con $\mathsf{Dsps}_{A,s}$ e per il loro numero scriviamo $\mathsf{DspsN}_{k,s} := |\mathsf{Dsps}_{A,s}|$.
Nel caso l'insieme A sia l'insieme dei primi k interi positivi useremo la notazione più semplice $\mathsf{Dsps}_{k,s} := \mathsf{Dsps}_{(k],s}$ e per il loro cardinale introduciamo $\mathsf{DspsN}_{k,s} := \mathsf{DspsN}_{(k],s}$.
Alcuni esempi

$$\begin{aligned}\mathsf{Dsps}_{\{a,b,c,d\},2} &= \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}\ ;\\ \mathsf{Dsps}_{\{a,b,c,d\},3} &= \{abc, abd, acb, acd, adb, adc,\\ &\quad bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,\ \ cab, cad, cba, cbd, cda.cdb,\ \ dab, dac, dba, dbc, dca, dcb\}\end{aligned}$$

B13a.07 Segnaliamo che in luogo della denominazione "disposizioni senza ripetizioni" comunemente si usano termini come "disposizioni ad s ad s" e "disposizioni di classe s" e che talora si parla di "disposizioni semplici".
Anche per le notazioni utilizzate per le disposizioni senza ripetizioni valgono considerazioni simili a quelle svolte in a04.

Una lista che rappresenta $\mathsf{Dsps}_{A,s}$ si può ottenere scorrendo una lista che presenta il più esteso insieme di sequenze $\mathsf{Dspsr}_{A,s}$ e per ciascuna di esse stabilire se presenta o meno qualche componente ripetuta e conseguentemente rifiutarla o mantenerla. Troveremo tuttavia un procedimento meno inefficiente che permette di individuare le permutazioni senza ripetizioni in modo più diretto.

B13a.08 **(1) Prop.**: Il numero delle delle disposizioni senza ripetizioni di lunghezza s degli elementi dell'insieme $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ è dato da

(1) $$\mathsf{DspsN}_{A,s} = k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-s+1) .$$

Dim.: Pensiamo ancora di procedere alla costruzione di tutte le sequenze di $\mathsf{DspsN}_{A,s}$.
Per occupare la prima posizione si può scegliere liberamente uno dei k elementi di A; per la seconda posizione la scelta è ridotta ai $k-1$ elementi di A diversi dal primo scelto, per la terza si hanno $k-2$ possibili scelte e così via; chiaramente per la s-esima posizione rimangono solo $k-s+1$ possibilità ▮

Per il secondo membro della (1) si usano anche le due seguenti notazioni chiamate, risp., **fattoriale decrescente** dall'intero k per s passi

(2) $$k^{\underline{s}} := k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (k-s+1) = \prod_{i=1}^{s}(k-i+1) = \prod_{i=0}^{s-1}(k-i)$$

e **fattoriale crescente** dall'intero h per s passi

(3) $$h^{\overline{s}} := h(h+1) \cdot \ \cdots \ \cdot (h+s-1) = \prod_{i=1}^{s}(h+i-1) = \prod_{i=0}^{s-1}(h+i) .$$

Si può quindi enunciare

(4) $$\mathsf{DspsN}_{k,s} = k^{\underline{s}} = (k-s+1)^{\overline{s}} .$$

Conviene segnalare esplicitamente che

(5) $$h^{\overline{s}} = (h+s-1)^{\underline{s}} \quad \text{e} \quad k^{\underline{s}} = (k-s+1)^{\overline{s}} .$$

Conviene ricordare che in genere invece delle notazioni qui proposte, ne sono usate alcune altre; per esempio invece della $k^{\underline{s}}$ si usa spesso la scrittura $(k)_s$ chiamata, un po' impropriamente, **simbolo di Pochhammer**.

Nella dimostrazione della (1) abbiamo anche mostrato come, dati l'insieme A di k elementi e il numero s, se $s \leq k$ risulta possibile costruire tutte le sequenze costituenti $\mathsf{DspsN}_{A,s}$. È anche evidente che se $s < k$ non si possono avere sequenze di elementi di A senza componenti ripetute. Si può quindi affermare che esistono disposizioni senza ripetizioni di lunghezza s di k oggetti sse $s \leq k$.

Osserviamo anche che le disposizioni senza ripetizioni di lunghezza s sull'insieme A si possono considerare anche come le funzioni da $(\mathsf{s}\,]$ in A che sono invertibili. In effetti abbiamo già visto che ogni funzione finita è invertibile sse la sequenza dei valori che assume non presenta ripetizioni.

B13 b permutazioni

B13b.01 Quando $s = k$ le disposizioni senza ripetizioni di elementi di A sono le sequenze che presentano ciascuno dei $k = s$ valori una e una sola volta, cioè esprimono le permutazioni degli elementi di A.
L'insieme delle permutazioni dell'insieme A si denota con Perm_A ovvero si ha la definizione

Per ogni insieme finito A si pone $\mathsf{Perm}_A \; := \; \mathsf{Dsps}_{A,|A|}$.

Il numero di queste permutazioni quindi è evidentemente

(1) $$|\mathsf{Perm}_k| \; = \; k! \; := \; \prod_{i=1}^{k} i \; = \; 1^{\overline{k}} \; = \; k^{\underline{k}} \; .$$

Qui abbiamo introdotta l'espressione $k!$ che si legge **fattoriale** dell'intero naturale k, oppure più in breve k fattoriale.

Una alternativa concisa della notazione per l'insieme delle permutazioni dell'insieme A è
$$A! \; := \; \mathsf{Perm}_A \; := \; \mathsf{Dsps}_{A,|A|} \; .$$

Osserviamo anche che eliminando l'ultimo componente delle permutazioni di A si ottengono esattamente le disposizioni senza ripetizioni degli elementi di A di lunghezza $|A| - 1$; questa manovra di eliminazione quindi individua una biiezione tra Perm_A e $\mathsf{Dsps}_{A,|A|-1}$.
In effetti si trasforma una disposizione senza ripetizione di $|A| - 1$ elementi di A in una permutazione di A aggiungendole un elemento la cui scelta è obbligata.

B13b.02 Consideriamo un insieme finito di n elementi $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ed un secondo insieme finito Y. Ricordiamo che ogni funzione finita f del genere $\lceil X \longmapsto Y \rceil$ può essere individuata interamente da una matrice di profilo $2 \times n$ della forma

(1) $$\left\downarrow \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{matrix} \right\downarrow ,$$

la quale mostra che la funzione f associa all'elemento $x_1 \in X$ l'elemento $y_1 \in Y$, ad $x_2 \in X$ l'elemento $y_2 \in Y$, . . . , ad $x_n \in X$ l'elemento $y_n \in Y$.

Si tratta quindi di una espressione matriciale a due righe nel cui prima riga non si hanno componenti ripetute; la chiameremo **notazione a 2 righe delle funzioni finite**. $+$

Va notato che, fissato X, si ha una biiezione costruibile tra le notazioni a 2 righe e le rappresentazioni a matrice binaria quadrata (ciascuna presentabile con una raffigurazione sagittale) delle varie funzioni $f \in \lceil X \longmapsto Y \rceil$.

Infatti si individuano facilmente le due trasformazioni che portano, risp., da una notazione a 2 righe alla sua equivalente rappresentazione di matrice binaria quadrata e viceversa.
Alla generica colonna i-esima della matrice a 2 righe che esprime la trasformazione di $x_i \in X$ in $y_i \in Y$ si fa corrispondere la riga i-esima della matrice binaria che presenta un solo 1 nella posizione (colonna) associata a y_i.
Altrettanto facilmente individuabile è la trasformazione inversa.

La notazione a 2 righe delle funzioni finite si usa vantaggiosamente, in particolare, per ogni permutazione $P \in \lceil X \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright X \rceil$, cioè per ogni endofunzione biiettiva entro l'insieme X.
In questo caso, e solo per le funzioni che sono permutazioni, anche la seconda riga presenta tutti gli elementi di X senza alcuna ripetizione.

B13b.03 Una permutazione di un insieme di n elementi si dice anche, brevemente, **permutazione di grado** n.

Un modello tangibile delle permutazioni di grado n considera n scatole che conviene contrassegnare con gli interi da 1 a n in ciascuna delle quali si trova uno e uno solo degli oggetti costituenti un insieme X di n elementi distinguibili (piccole pietre, conchiglie, foglietti con nomi diversi, ...). Ciascuno di questi oggetti può essere convenientemente contrassegnato con un intero di (n].

Ogni permutazione P di X viene descritta come un meccanismo che sposta il contenuto di ogni particolare scatola in un'altra determinata scatola (senza escludere la possibilità di lasciare qualche oggetto nella scatola iniziale) in modo da ottenere ancora che in ogni scatola si abbia uno e un solo oggetto di X.

Lo spostamento dell'oggetto dalla scatola i corrisponde a una colonna della matrice binaria $n \times n$ che rappresenta P e a una freccia della corrispondente raffigurazione sagittale.

Le scatole si possono presentare allineate, in modo che gli oggetti prima della applicazione di una permutazione risultano disposti in modo ordinato; una permutazione può quindi descriversi come un riordinamento di una sequenza di oggetti distinguibili.

Una permutazione infine può essere presentata mediante la sua cosiddetta raffigurazione digrafica, cioè mediante il digrafo (equivalente a quello della sua raffigurazione sagittale) che presenta una freccia uscente da ogni nodo ν (nel ruolo di scatola iniziale) che termina nel nodo in cui viene ricollocato il contenuto di ν (che assume il ruolo di scatola finale).

B13b.04 Si osserva che gli anagrammi di una parola w che non presenta lettere ripetute si può dire che costituiscono le permutazioni dei caratteri che si incontrano nella stessa w.
Si possono quindi trovare facilmente i numeri degli anagrammi di parole quali: `parole`, `dante`, `rembrandt`, `bach`, `mozart` e `gandhi`; beethoven e boccherini richiedono qualche considerazione in più.

Le permutazioni consentono di valutare i numeri di situazioni che si incontrano nel quotidiano come le seguenti:

le diverse modalità di far sedere a un lato di una lunga tavola con s posti i membri di un gruppo di s persone;

i diversi modi di collocare s libri sopra uno scaffale destinato a questi soli libri;

i diversi modi di disporre le 40 carte di un mazzo usuale in uno schieramento di 4 file di dieci carte ciascuna;

i diversi modi di depositare sopra un binario morto 7 carrozze ferroviarie.

B13b.05 Come si è già detto, le permutazioni di un insieme finito sono configurazioni discrete estremamente importanti nella matematica e in altre problematiche impegnative (ad esempio nella fisica fondamentale) e le incontreremo in molte delle pagine che seguono e in particolare in B41, D35, D48 e D63.

In effetti sulle pernutazioni si basa lo studio delle simmetrie, ossia delle proprietà delle configurazioni e dei sistemi che consentono grandi semplificazioni nello studio dei loro comportamenti.

Per le permutazioni il fatto di essere ampiamente richieste ha comportato la necessità di conoscere a fondo le loro proprietà e di stabilire loro accurate classificazioni.

Vari risultati sulle permutazioni saranno presentati in seguito.

Un punto di vista sulle permutazioni riguarda i loro punti fissi e i loro cicli; esso viene esposto in B16d e B16e.

Un altro punto di vista utile riguarda i cosiddetti sconvolgimenti. trattati in B16f.

B13 c. combinazioni

B13c.01 Altri casi particolari di disposizioni con ripetizioni sono le combinazioni con ripetizioni. Per introdurre queste sequenze, occorre presentare l'insieme $A = \{a_1, ..., a_k\}$ con gli elementi ordinati secondo un ordinamento totale che in linea di principio può scegliersi ad arbitrio, ma che nell'ambito di molte applicazioni viene imposto dalla consuetudine (questo è il caso dei numeri e delle lettere e dei nomi) e che in alcune situazioni viene scelto per poter avere vantaggi organizzativi.

Conveniamo di esprimere la relazione di precedenza tra gli elementi di A con il segno $\prec$ e stabiliamo che valga la catena di relazioni $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_k$.

Dato che ogni insieme finito si può porre in biiezione con un intervallo di numeri interi positivi, può essere vantaggioso ridurre lo studio delle permutazioni di un insieme A assumendo che questo sia l'insieme dei primi k interi positivi $(k]$ considerati nel solito ordine crescente, ossia assumere che $\prec$ sia la relazione numerica $<$. inoltre scriviamo $a \preceq b$ per esprimere che "aut $a \prec b$ aut $a = b$".

Diciamo **combinazione con ripetizioni** di lunghezza s dei k oggetti di A, ogni sequenza $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s}\rangle$ tale che $a_{j_1} \preceq a_{j_2} \preceq ... \preceq a_{j_s}$.
L'insieme di tali sequenze lo denotiamo con $\mathbf{Combr}_{A,s}$ o con $\mathbf{Combr}[A, s]$ e il loro numero con $\mathsf{CombrN}_{A,s}$ o $\mathsf{CombrN}[A, s]$.
Nel caso dei primi s interi positivi scriviamo più semplicemente

$$\mathbf{Combr}_{k,s} := \mathbf{Combr}_{\{1,2,...,k\},s} \quad \text{e} \quad \mathsf{CombrN}_{k,s} := |\mathbf{Combr}_{k,s}| .$$

Per esempio le combinazioni con ripetizioni di lunghezza 3 degli interi 1, 2 e 3 sono:

$$111 \;\; 112 \;\; 113 \;\; 122 \;\; 123 \;\; 133 \;\; 222 \;\; 223 \;\; 233 \;\; 333 \; ;$$

Abbiamo invece

$$\begin{aligned}\mathbf{Combr}_{4,3} = \{&111\,,\,112\,,\,113\,,\,114\,,\,122\,,\,123\,,\,124\,,\,133\,,\,134\,,\,144\,,\\ &222\,,\,223\,,\,224\,,\,233\,,\,234\,,\,244\,,\,333\,,\,334\,,\,344\,,\,444\}\end{aligned} .$$

B13c.02 Si osserva che le combinazioni con ripetizioni di una data lunghezza s degli elementi di un insieme A dotato di un ordine totale si possono interpretare come funzioni da $(\mathrm{s}\,]$ in A nondecrescenti. In effetti le combinazioni con ripetizioni di interi positivi precedentemente usate come esempi sono state presentate come stringhe nondecrescenti di interi.

Si osserva inoltre che per l'insieme delle funzioni finite nondecrescenti di $(\mathrm{s}\,]$ in A si trovano facilmente due biiezioni con l'insieme delle funzioni finite noncrescenti di $(\mathrm{s}\,]$ in A. Per esse conviene dare due trasformazioni involutive applicabili a tutte le funzioni costituenti $\lceil (\mathrm{s}\,] \longmapsto A \rceil$ definendole con le loro rispettive azioni sopra una funzione $f \in \lceil (\mathrm{s}\,] \longmapsto A \rceil$ che rappresentiamo con la sequenza $\phi = \langle a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_s\rangle$.

Definiamo **funzione riflessa** della funzione a dominio finito (e ordinato) f e scriviamo $f^{\leftarrow}$ la funzione che si rappresenta con la sequenza riflessa della precedente $\phi^{\leftarrow} = \langle a_s, a_{s-1}, ..., a_2, a_1\rangle$.

Limitatamente all'insieme delle funzioni finite $\lceil (\mathrm{s}\,] \longmapsto (k] \rceil$ definiamo **funzione complementare** di una funzione f di questo insieme e scriviamo $f^{\complement}$ la funzione che si rappresenta con la sequenza complementare della precedente

$$f^{\complement} := \langle k + 1 - a_1, k + 1 - a_2, ..., k + 1 - a_{s-1}, k + 1 - a_s\rangle .$$

Per esempio la funzione riflessa della $\langle 1,2,2,3,5,7\rangle$ è la $\langle 7,5,3,2,2,1\rangle$ e la complementare nell'ambito di $\lceil (6] \longmapsto (8] \rceil$ è $\langle 8,7,7,6,4,2\rangle$.

Evidentemente queste trasformazioni sono due involuzioni (e quindi sono particolari permutazioni) applicabili all'insieme delle funzioni tra i due insiemi ordinati (s] e $A = (k]$.

Conviene segnalare che queste involuzioni si collegano significativamente alle due endofunzioni che trasformano nell'opposto l'ordine di (s] e l'ordine di $A = (k]$. Introduciamo per esse le notazioni locali

$$J_A \ := \ \lceil a_i \in A \mapsto a_{k-i+1} \rceil \qquad \text{e} \qquad J_s \ := \ \lceil i \mapsto k+1-i \rceil \ .$$

Chiaramente la prima è una involuzione entro il dominio (s] e la seconda una involuzione entro il codominio A ed entrambe trasformano l'ordinamento dell'insieme sul quale agiscono nell'opposto.

Si verificano facilmente le due espressioni

$$f^{\leftarrow} \ = \ \left\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & s-1 & s \\ a_s & a_{s-1} & \ldots & 2 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \ = \ J_s \circ_{lr} f \ = \ f \circ_{lr} J_A \ .$$

Si constata inoltre che entrambe le involuzioni scambiano le funzioni crescenti con le funzioni decrescenti e scambiano le funzioni nondecrescenti con le funzioni noncrescenti.
Quindi in particolare sia il numero delle funzioni nondecrescenti che il numero delle funzioni noncrescenti di $\lceil (s] \longmapsto A = (k] \rceil$ sono dati da $\mathsf{CombrN}_{k,s}$.

B13c.03 Insiemi di sequenze più ridotti degli insiemi di combinazioni con ripetizioni sono gli insiemi delle sequenze che chiamiamo **combinazioni senza ripetizioni**.
Queste spesso sono chiamate "combinazioni semplici", mentre in contesti nei quali non si temono ambiguità esse vengono anche dette semplicemente combinazioni.

Più precisamente diciamo **combinazione [senza ripetizioni]** di lunghezza s di elementi dell'insieme $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ che vengono considerati ordinati secondo la catena-to $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_k$, ogni sequenza $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s}\rangle$ per la quale vale la catena-to $a_{j_1} \prec a_{j_2} \prec ... \prec a_{j_s}$.
L'insieme di tali sequenze lo denotiamo con $\mathbf{Comb}_{A,s}$ o $\mathbf{Comb}[A,s]$ e il loro numero con $\mathsf{CombN}_{A,s}$ o $\mathsf{CombN}[A,s]$.
Più specificamente per $A = \{1,2,...,k\}$ scriviamo

$$\mathbf{Comb}_{k,s} \ := \ \mathbf{Comb}[|(k]|, s] \ \text{ e } \ \mathsf{CombN}[(k], s] \ := \ |\mathbf{Comb}_{A,s}| \ .$$

Per esempio le combinazioni di lunghezza 3 degli interi 1, 2, 3, 4 e 5, sono:

$$123 \ \ 124 \ \ 125 \ \ 134 \ \ 135 \ \ 145 \ \ 234 \ \ 235 \ \ 245 \ \ 345 \ ;$$

si scrive dunque

$$\mathbf{Comb}_{5,3} \ = \ \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\} \ .$$

Si osserva che, mentre le combinazioni con ripetizioni di lunghezza s su $A = (k]$ rappresentano le funzioni nondecrescenti di $\lceil (s] \longmapsto (k] \rceil$, le più specifiche combinazioni senza ripetizioni rappresentano le sole funzioni crescenti.

È importante osservare anche che $\mathbf{Comb}_{A,s}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei sottoinsiemi di A aventi s elementi. In effetti, una scrittura come 125 si può considerare come una semplificazione della scrittura $\{1,2,5\}$ e in generale una combinazione senza ripetizioni di lunghezza s di elementi di un insieme A di $k = |A|$ oggetti che denotiamo con c si può considerare una scrittura semplificata del sottoinsieme di A contenente gli oggetti che si incontrano nella suddetta c.

B13c.04 Il numero $\mathsf{CombN}_{k,s}$ delle combinazioni senza ripetizioni di determinata lunghezza s di k dati oggetti ordinati, per una ben definita ragione che vedremo in D20b, viene chiamato **coefficiente binomiale** k su s e viene denotato con $\binom{k}{s}$, scrittura che presenta vari vantaggi.

Il complesso di questi numeri è molto importante, in quanto gode di molte proprietà conseguentemente consente di affrontare e risolvere molteplici problemi che risultano collegati alle accennate proprietà.

I singoli valori $\binom{k}{s}$ si possono considerare i valori di una funzione di due variabili intere naturali a valori interi positivi e si possono ottenere come numeri dei sottoinsiemi di cardinale s di un insieme di $k \geq s$ elementi.

Troveremo inoltre che sarà utile descrivere questi sottoinsiemi come cammini crescenti nel piano dei punti a coordinate intere [D21b] .

Ora ci limitiamo a trovare un'espressione per i valori $\binom{k}{s}$ collegando le combinazioni senza ripetizioni di k oggetti di lunghezza s alle disposizioni senza ripetizioni degli stessi k oggetti della stessa lunghezza s.

A ciascuna delle suddette disposizioni senza ripetizioni si può quindi associare facilmente la combinazione senza ripetizioni ottenuta disponendo le s componenti in ordine crescente. Per questa trasformazione, ogni combinazione semplice $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s} \rangle$ è ottenibile delle $s!$ disposizioni senza ripetizioni ottenute permutando in tutti i modi le s componenti. Per esempio alla combinazione 2 4 5 9 corrispondono le 24 disposizioni senza ripetizioni

$$\begin{array}{cccccc}
2\,4\,5\,9\,, & 2\,4\,9\,5\,, & 2\,5\,4\,9\,, & 2\,5\,9\,4\,, & 2\,9\,4\,5\,, & 2\,9\,5\,4\,,\\
4\,2\,5\,9\,, & 4\,2\,9\,5\,, & 4\,5\,2\,9\,, & 4\,5\,9\,2\,, & 4\,9\,2\,5\,, & 4\,9\,5\,2\,,\\
5\,2\,4\,9\,, & 5\,2\,9\,4\,, & 5\,4\,2\,9\,, & 5\,4\,9\,2\,, & 5\,9\,2\,4\,, & 5\,9\,4\,2\,,\\
9\,2\,4\,5\,, & 9\,2\,5\,4\,, & 9\,4\,2\,5\,, & 9\,4\,5\,2\,, & 9\,5\,2\,4\,, & 9\,5\,4\,2\,.
\end{array}$$

Abbiamo quindi che il numero delle disposizioni senza ripetizioni di lunghezza s di k elementi è uguale ad $s!$ per il numero delle combinazioni di lunghezza s di k elementi. Dunque per quest'ultimo numero si ha:

$$(1) \qquad \mathsf{CombN}_{k,s} = \binom{k}{s} = \frac{\mathsf{DspsN}_{k,s}}{s!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{s!} .$$

Servendoci delle notazioni fattoriale crescente e fattoriale decrescente introdotte in :a08 e osservando che $k! = k^{\underline{s}}\,(k-s)!$, abbiamo anche

$$(2) \qquad \binom{k}{s} = \frac{k^{\underline{s}}}{s!} = \frac{(k-s+1)^{\overline{s}}}{s!} = \frac{k!}{s!\,(k-s)!} .$$

B13c.05 Anche il numero delle combinazioni con ripetizioni si esprime facilmente servendosi di una espressione già trovata, quella per le combinazioni senza ripetizioni, dopo aver individuata una opportuna biiezione tra questi insiemi di sequenze.

Per questo, per maggiore scorrevolezza, supponiamo che sia $A = \{a_1 = 1, a_2 = 2, ..., a_k = k\}$ e ricordiamo che le sequenze crescenti (in senso stretto) $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_s} \rangle$ di lunghezza s si possono porre in corrispondenza biunivoca con le sequenze $\langle a_{j_1}, a_{j_2}-1, a_{j_3}-2, ..., a_{j_s}-s+1 \rangle$, sequenze nondecrescenti dei $k-s+1$ interi $1, ..., k-s+1$, sequenze che forniscono le combinazioni con ripetizioni di tali numeri.

Per esempio, l'insieme di combinazioni $\mathbf{Comb}(3,5) = \{123, 124, 125, 134, 135, 234, 235, 245, 345\}$ è posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme di combinazioni con ripetizione $\mathsf{Combr}(3, 5-3+1) \; = \; \mathsf{Combr}(3,3)$ dalla funzione

$$\left\downarrow \begin{matrix} 123 & 124 & 125 & 134 & 135 & 234 & 235 & 245 & 345 \\ 111 & 112 & 113 & 122 & 123 & 222 & 223 & 233 & 333 \end{matrix} \right\downarrow .$$

A questo proposito conviene segnalare esplicitamente il meccanismo che a un elenco di sequenze numeriche nondecrescenti associa un elenco di sequenze crescenti: per ogni sequenza di s numeri si lascia invariato il primo, si aumenta di 1 il secondo, si aumenta di 2 il terzo, ... , si aumenta di $i-1$ l'-i-esimo, ..., si aumenta di $s-1$ l'ultimo, quello nellq posizione s.

Si può precisare facilmente anche il meccanismo che effettua la trasformazione inversa della precedente.

Quindi l'insieme delle sequenze nondecrescenti, degli interi $a_1, ..., a_k$ di lunghezza s è in biiezione con l'insieme delle sequenze noncrescenti degli interi $a_1, ..., a_{k+s-1}$ aventi la stessa lunghezza s. Di conseguenza il numero delle suddette sequenze nondecrescenti, è uguale al numero delle suddette sequenze crescenti e si può scrivere:

$$(1) \qquad \mathsf{CombrN}_{\{a_1,...,a_k\},s} \; = \; \mathsf{CombN}_{\{a_1,...,a_k,...,a_{k+s-1}\},s} \; .$$

Diamo anche le espressioni più esplicite

$$(2) \qquad \mathsf{CombrN}_{\{a_1,...,a_k\},s} \; = \; \frac{(k+s-1)(k+s-2)\cdots k}{s!} \; = \; \frac{(k+s-1)!}{s!\,(k-1)!} \; = \; \frac{k^{\overline{s}}}{s!} \; = \; \binom{k+s-1}{s} \; .$$

B13c.06 Ricordando le involuzioni introdotte in `e11` si ha che le funzioni crescenti di $\lceil (\mathsf{s}\,] \longmapsto A \rceil$ si possono facilmente porre in corrispondenza biunivoca con le funzioni decrescenti e in particolare il numero sia delle funzioni crescenti che delle funzioni decrescenti del detto genere è dato da $\binom{k}{s}$.

Usando i termini introdotti, le combinazioni con ripetizioni di lunghezza s di elementi dell'insieme A costituito da k oggetti ordinati si possono definire come le sequenze nondecrescenti di lunghezza s di tali oggetti, mentre le combinazioni senza ripetizioni di lunghezza s di elementi di A si possono definire come le sequenze crescenti di lunghezza s di elementi di A.

B13 **d. multiinsiemi e permutazioni con ripetizione**

B13d.01 Consideriamo un insieme finito ordinato $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e definiamo **multiinsieme sull'insieme** A ogni funzione che a ogni elemento di A fa corrispondere un intero naturale.

Al generico multiinsieme su A si può dare la forma

(1) . $$\mathsf{m} \ = \ \left\downarrow \begin{matrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ m_1 & m_2 & ... & m_n \end{matrix} \right\downarrow$$

L'insieme A è il dominio della funzione multiinsieme m e si dice anche **terreno del multiinsieme**.

Il cardinale del terreno di un multiinsieme si dice lunghezza del multiinsieme; la lunghezza del precedente m è $n := |A|$.
Ogni m_i componente del multiinsieme m si dice **molteplicità dell'elemento del terreno del multiinsieme**; si dice anche per ogni $i = 1, 2, ..., n$ che a_i compare nel multiinsieme m con la molteplicità m_i.
Diciamo **molteplicità complessiva di un multiinsieme**, o **cardinale di un multiinsieme**, attualmente m su A, la somma delle molteplicità degli elementi di A e per essa scriviamo

$$|\mathsf{m}| \ := \ \sum_{i=1}^{n} \mathsf{m}(a_i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} m_i \ = \ s \ .$$

JP Un multiinsieme su A si può pensare come un processo costituito da una sequenza di ostensioni successive degli elementi di A presi secondo un loro ordine, ogni elemento di A potendo essere mostrato più volte consecutive o anche non essere presentato affatto.
Il multiinsieme m si può descrivere anche come una sequenza di repliche degli elementi di A con m_1 repliche di a_1 nella prima posizione, m_2 repliche doi a_2 nella seconda, ..., m_n repliche di $_n$ nell'ultima posizione. Una tale descrizione si può visualizzare efficacemente con un istogramma.
In altro modo un multiinsieme si può pensare come un sistema di oggetti allineati, ciascuno dei quali munito di un peso di un valore intero naturale che esprime una qualche forma della sua importanza, oppure la frequenza di un suo uso.

In particolare interessano i multiinsiemi aventi come terreno un intervallo di interi positivi della forma **(**n **]**, insieme per il quale tende ad imporsi l'ordinamento totale $\leq$.
Un esempio è dato dalla funzione

$$\mathsf{m} \ = \ \left\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \ .$$

A ogni combinazione con ripetizioni di elementi di $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ munito dell'ordinamento espresso dalla catena-to $a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_n$ si può dare la cosiddetta **forma monomiale di una combinazione con ripetizioni**

$$a_1{}^{m_1} \, a_2{}^{m_2} \ldots a_n{}^{m_n} \ ,$$

nella quale per ogni $i = 1, 2, ..., n$ m_i esprime il numero delle occorrenze dell'oggetto a_i nella combinazione.
Si constata facilmente che a essa è associato il multiinsieme su A fornito dalla (1) e che questa associazione è una corrispondenza biunivoca.

Consideriamo in particolare la sequenza 11355579 come elemento di $\mathsf{Combr}_{8,10}$; essa si può identificare come il multiinsieme sul terreno **(**10**]** caratterizzato dalle seguenti molteplicità: all'elemento 1 è assegnata la molteplicità 2, a 3 la molteplicità 1, a 5 la molteplicità 3, a 7 e a 9 la molteplicità 1, ai rimanenti interi 2, 4, 6, 8 e 10 essendo attribuita la molteplicità 0.

Se ad A con $n := |A|$ si assegna l'ordine totale derivante dalla lista $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ con la quale può essere presentato, al multiinsieme m risulta associata la sequenza delle molteplicità $\mathsf{mlcty}(\mathsf{m}) := \langle \mathsf{m}(a_1), \mathsf{m}(a_2), ..., \mathsf{m}(a_k) \rangle$.

Denotiamo con Mset_A o con $\mathsf{Mset}[A]$ l'insieme dei multiinsiemi su A e adottiamo la usuale semplificazione $\mathsf{Mset}_n := \mathsf{Mset}[\{1, 2, ..., n\}]$.

Si constata facilmente che un tale insieme di funzioni è un insieme-B.

B13d.02 Per ogni insieme finito A e per ogni intero positivo w introduciamo la notazione $\mathsf{Mset}_{A,w}$ per l'insieme dei multiinsiemi aventi come terreno A e come molteplicità complessiva w.

Si trova senza difficoltà un algoritmo che da una lista di A e dall'intero positivo w ricava una lista di tutti gli elementi di $\mathsf{Mset}_{A,w}$ e quindi che questo simbolo esprime un insieme ragionevolmente esplicitabile.

Quando avremo ampliata la nozione di insieme ci potremo servire della notazione Mset_A per la totalità dei multiinsiemi aventi come terreno A, entità che non individua un insieme finito ma che già fin d'ora si intuisce possa essere utile per alcuni enunciati.

Non è difficile individuare un procedimento che a ogni sequenza di $\mathbf{Combr}_{A,s}$ associa un multiinsieme su A con molteplicità complessiva s e un meccanismo in grado di effettuare la trasformazione inversa. Quindi le espressioni trovate in f14 forniscono anche i cardinali degli insiemi di multiinsiemi.

Conviene segnalare anche i fatti che seguono.

A ciascuna delle disposizioni con ripetizioni su A si può associare un multiinsieme su A.
La fattorizzazione di un intero positivo n mediante numeri primi si esprime come multiinsieme avente come terreno l'insieme dei primi minori o uguali al massimo divisore primo di n.
Il complesso delle soluzioni di un'equazione polinomiale, stante la possibilità di avere soluzioni multiple, può essere efficacemente presentato come multiinsieme avente come molteplicità complessiva il grado dell'equazione.

B13d.03 Consideriamo ancora un un intero positivo s e un insieme finito A costituito da n elementi ordinati e che presentiamo con la catena-to $\langle a_1 \prec a_2 \prec ... \prec a_n \rangle$.

Consideriamo inoltre una disposizione con ripetizioni di A di lunghezza s d e il multiinsieme associato che denotiamo con $mset(\mathsf{d})$, la cui molteplicità complessiva è uguale alla lunghezza s. Per esempio se $A = abcdefg$ la disposizione $abaccegb$ ha come multiinsieme $\langle 2, 2, 2, 0, 1, 0, 1 \rangle$.

Si dice **permutazione con ripetizioni** di elementi di A di lunghezza s associata alla sequenza di molteplicità $\mathsf{mlcty}(\mathsf{m})$ ogni disposizione con ripetizioni di elementi di A avente m come multiinsieme e quindi avente di lunghezza s.
Si osserva che la definizione permette che si abbiano permutazioni con ripetizioni di elementi di A nelle quali qualche elemento di A non compare.
Se si vuole evitare questa possibilità si può fare riferimento a quelli che chiamiamo **multiinsiemi positivi** su A, multiinsiemi $\langle m_1, m_2, ..., m_n \rangle$ nei quali tutte le molteplicità m_i sono positive e conseguentemente hanno una molteplicità complessiva s maggiore o uguale ad n.

Per ogni $\mathsf{m} \in \mathsf{Mset}_A$ introduciamo le notazioni equivalenti $\mathbf{Permr}_{\mathsf{m}}$ e $\mathbf{Permr}[\mathsf{m}]$ per l'insieme delle permutazioni con ripetizione caratterizzate dal multiinsieme m; inoltre per il loro numero definiamo

$$\mathsf{PermrN}_{\mathsf{m}} := \mathsf{PermrN}[\mathsf{m}] := |\mathbf{Permr}_{\mathsf{m}}| := |\mathbf{Permr}[\mathsf{m}]| \ .$$

Esempi:

$$\mathbf{Permr}[\mathsf{acca}] = \{\mathsf{aacc}, \mathsf{acac}, \mathsf{acca}, \mathsf{caac}, \mathsf{caca}, \mathsf{ccaa}\} \ , \quad \mathsf{PermrN}[\mathsf{acca}] = \frac{4!}{2!\,2!} = 6 \ ,$$

$\mathsf{Permr}[\mathtt{tutto}] \; = \; \{\mathtt{otttu}, \mathtt{ottut}, \mathtt{otutt}, \mathtt{outtt}, \mathtt{tottu}, \mathtt{totut}, \mathtt{toutt}, \mathtt{ttotu}, \mathtt{ttout}, \mathtt{tttou}, \mathtt{tttuo}, \mathtt{ttuot}, \mathtt{ttuto}, \mathtt{tuott}, \mathtt{tutot}, \mathtt{tutto}, \mathtt{uottt}, \mathtt{utott}, \mathtt{uttot}, \mathtt{uttto}\}$,

$\mathsf{PermrN}[\mathtt{tutto}] \; = \; \dfrac{5!}{1!3!1!} = 20$.

Queste sequenze si possono porre in relazione alle permutazioni di s oggetti corrispondenti agli elementi di A distinti per molteplicità; in questa relazione una permutazione con ripetizioni caratterizzata dalla molteplicità m si trova associata tutte le permutazioni che differiscono solo per le posizioni occupate dagli elementi distinti per molteplicità; il numero di queste permutazioni è $\prod_{j=1}^{n} m_j$.
Quindi il numero delle permutazioni con ripetizioni caratterizzate da m è dato da

$$\mathsf{PermrN}_{\mathsf{m}} \; = \; \frac{s!}{m_1!\, m_2! \, \cdots \, m_s!} \; .$$

Questi numeri positivi sono chiamati **coefficienti multinomiali** e su di essi avremo modo di tornare, anche per giustificare il loro nome.

Questi coefficienti sono in grado di fornire, in particolare, i numeri di anagrammi di qualsiasi stringa passando attraverso il relativo multiinsieme.

Esempi: il numero di anagrammi di `newton` è $6!/2 = 360$, come il numero di anagrammi di `peirce`, mentre il numero degli anagrammi di `abracadabra` è $\dfrac{11!}{5!\,2!\,2!} = 83\,160$.

B13d.04 Diciamo composizioni additive o **composizioni-A di un intero naturale** le diverse scritture che esprimono n come somma di interi positivi distinguendo l'ordine di comparsa degli addendi.
Per esempio le composizioni-A di 5 sono:

5 , 4+1 , 1+4 , 3+2 , 2+3 , 3+1+1 , 1+3+1 , 1+1+3 , 2+2+1 , 2+1+2 , 1+2+2 , 2+1+1+1 , 1+2+1+1 , 1+1+2+1 , 1+1+1+2 , 1+1+1+1+1 .

Denotiamo con $\mathbf{CompA}_n$ l'insieme delle composizioni-A di n e poniamo

$$\mathsf{CompAN}_n \; := \; |\mathbf{CompA}_n| \; .$$

Dall'elenco precedente si constata che $\mathsf{CompAN}_5 = 16$.
Si constata facilmente anche che $\left\langle n = 1,2,3,4,5 :| \; \mathsf{CompAN}_n \right\rangle \; = \; \langle 1,2,4,8,16 \rangle$ e questo suggerisce l'enunciato che segue.

(1) Prop.: $\mathsf{CompAN}_n = 2^{n-1}$.

Dim.: L'insieme $\mathbf{CompA}_n$ si bipartisce nell'insieme delle composizioni-A di n che hanno come primo addendo 1 e nell'insieme di quelle che hanno il primo addendo maggiore di 1. La cancellazione del primo addendo dalle prime le pone in biiezione con le composizioni-A di $n-1$; alla biiezione con queste conduce anche l'abbassamento di 1 del primo addendo delle seconde.
Dunque $\mathsf{CompAN}_n \; = \; 2\,\mathsf{CompAN}_{n-1}$ e questa, insieme alla evidente $\mathsf{CompAN}_1 \; = \; 1$, conduce all'enunciato ▮

Segnaliamo subito che se si prescinde dall'ordine degli addendi si hanno le configurazioni chiamate partizioni.i, configurazioni combinatorie di grande importanza che ritroveremo, in particolare, in D23 e in D25.