1

Capitolo B08
insiemi finiti, insiemi-P, insiemi-B

Contenuti delle sezioni

52 pagine

B080.01 In queste pagine si comincia a sviluppare la fondamentale nozione di insieme, definendo gli insiemi finiti e discutendo due tipi generali di insiemi, gli insiemi-P e gli insiemi-B caratterizzati solo con richieste molto generiche.
Nel successivo capitolo B18 verrà introdotto un terzo tipo generico, quello degli insiemi-G caratterizzati con la loro possibilità di essere generati illimitatamente da macchineaffidabili.

La nozione di insieme verrà resa formalmente precisa solo più avanti [B66] con la sua definizione assiomatica che trascura le possibilità di utilizzo concreto degli insiemi e quindi ignora le esigenze che conducono a definire gli insiemi specifici e le modalità che possono essere seguite per esaminarli e utilizzarli.

Abbiamo già visto a livello intuitivo come adottare il termine insieme-E per le entità con le quali si possono trattare come un tutt'uno raggruppamenti di oggetti che sono stati precedentemente introdotti e che in genere presentano caratteristiche simili o che si presume potranno essere introdotti per esigenze successive dotate di caratteristiche simili a quelle di oggetti precedentementi già giudicati assimilabili.

Un insieme-E S quindi serve a dare una unica caratterizzazione a più oggetti definiti o prospettabili e ai quali viene assegnato il ruolo di elementi dello stesso S.

Ogni insieme viene introdotto prendendo in considerazione contemporaneamente i suoi elementi e la relazione di appartenenza che collega ad esso ciascuno dei suoi elementi e nient'altro.

Vediamo in sintesi come introdurremo i diversi tipi di insiemi alle quali faremo riferimento.

B080.02 Per primi vengono definiti gli insiemi espliciti di stringhe, entità ciascuna delle quali individuata da una lista nonripetitiva e da quelle ottenibili sottoponendole a permutazioni.
Le permutazioni vengono discusse preliminarmente sottolineando che si possono considerare trasformazioni e che, oltre a contribuire alla definizione degli insiemi più semplici, conducono alla importante nozione di simmetria.

Ogni insieme esplicito può essere rappresentato da una lista nonripetitiva di stringhe e quindi basta un algoritmo operante su strighe per decidere se un oggetto qualsiasi è o non è elemento di un insieme.

B080.03 Gli insiemi espliciti si possono considerare astrazioni delle più concrete liste, rispetto alle quali risultano vantaggiosi negli enunciati che servono a fini conoscitivi generali.
Questi enunciati possono essere conseguenze di attività dimostrative (deduttive) riconducibili alla logica, oppure provengono da considerazion induttive che a partire da risulati di elaborazioni specifiche propongono leggi di portata tendenzialmente ampia, in grado di inquadrare i detti risultati, oppure sono ottenute dalle attività chiamate abduttive che da determinate constatazioni portano a congetture assunte come probabili e proposte come oggetto di verifiche.

L'astrazione da liste a insiemi deve convivere con il fatto che quando si rende necessaria una elaborazione su uno specifico raggruppamento di oggetti con caratteristiche simili si deve ricorrere necessariamente ad una sua lista.

Si constaterà facilmente che la nozione di insieme esplicito consente di procedere speditamente nella introduzione delle relazioni esplicite (casi particolari di insiemi espliciti), delle loro categorie particolari (ordini, equivalenze, funzioni, biiezioni, ...) e dei vari tipi di operazioni concernenti gli insiemi espliciti e quindi anche le operazioni su relazioni esplicite e funzioni esplicite.

Successivamente si passa dalla nozione di insieme esplicito a quella di insieme finito, insieme caratterizzato dalla impossibilità di essere posto in biiezione con una sua parte propria.

La possibilità di parlare di elementi appartenenti a un insieme, anche quando si trattano solo gli insiemi finiti, consente di alleggerire molte considerazioni generali svincolandole dalla necessità di fare riferimenti dettagliati alla effettiva disponibilità di liste tangibili.

B08004 Procedendo nella trattazione dei problemi che si risolvono ricorrendo a insiemi finiti costruibili emerge la opportunità di servirsi di nozioni di insieme più comprensive, nozioni che consentano di trattare come singole entità raggruppamenti di oggetti ragionevolmente assimilabili che non si possono considerare insiemi finiti, ma che sono anch'essi caratterizzati dalla possibilità di gestire con efficacia formale oggetti che è possibile e opportuno considerare loro elementi, in quanto si può ritenere che godano di proprietà comuni.

Questi insiemi vengono introdotti con richieste solo programmatiche, richieste che riguardano entità la cui trattazione rigorosa viene rinviata, ma cherisulta opportuno introdurre anticipatamente con semplici considerazioni intuitive per avere la possibilità di portare avanti la presentazione di nozioni che rafforzano la percezione della portata della matematica, della gamma delle situazioni tangibili che essa consente di modellizzare e della efficacia dei procedimenti risolutivi che essa garantisce e inquadra in un contesto organico.

Quando parliamo di questi raggruppamenti li chiamiamo insiemi-E. Ha senso prenderli in considerazione in quanto si ritiene possano essere utili per gli sviluppi delle argomentazioni e in quanto contiamo su una consolidata teoria assiomatica degli insiemi che consente di trattarli in modo logicamente fondato servendosi di strumenti della logica formale [B665] che in stadi iniziali della *esposizione* non vogliamo far intervenire giudicandoli non ancora ben motivati per le persone con interessi prevalentemente applicativi.

Entro la collezione degli insiemi-E, più comprensiva della collezione degli insiemi finiti, per primi conviene definire i cosiddetti insiemi ambiente primari, così chiamati in quanto per tutte le attività volte alla soluzione affidabile dei problemi si utilizzano oggetti collocabili in questi raggruppamenti o in ambienti derivabili da questi.

Si assumono come **insiemi ambiente primari** l'insieme dei numeri naturali e, più comprensivamente, gli insiemi che raggruppano le totalità delle stringhe si vari alfabeti.
Per ciascuno degli ambienti primari si trova qualche semplice algoritmo che, data una stringa w di caratteri riconoscibili dagli esecutori, consente di decidere se la w esprime un suo elemento.

A partire dagli ambienti primari attraverso l'applicazione ripetuta di prodotti cartesiani, di passaggi alla collezione dei sottoinsiemi finiti e di passaggi alla collezione dei sottoinsiemi cofiniti si può procedere a introdurre quelli che chiamiamo ambienti compositi o secondari .

La loro utilità si basa sulla possibilità di trovare algoritmi che consentono di decidere se una stringa qualsisi esprime uloro elemento.

Si trova inoltre che ogni insieme ambiente composito non finito è infinito, cioè tale da potersi porre in biiezione con qualche suo sottoinsieme proprio.

B080.05 Nella collezione degli insiemi-E si individuano collezioni di insiemi più ridotte alle quali conviene fare riferimento.

Si definisce insieme-B ogni raggruppamento B di elementi appartenenti a un insieme ambiente **E** di stringhe su un alfabeto A per il quale si dispone di un algoritmo che, data una qualsiasi stringa su A è in grado di decidere se esprime un elemento di B o un elemento estraneo a B.

Risulta utile servirsi di insiemi delle coppie, delle terne,..., delle liste di elementi di un insieme-B; evidentemente anche questi sono insiemi-B.
La collezione degli esempi espliciti di insiemi-B, esempi eventualmente caratterizzati da parametri che corrono su insiemi-B, è finita, in quanto costituita da definizioni dettagliate. Essa tuttavia si può continuamente ampliare con raggruppamenti ottenuti studiando sistemeticamente nuove restrizioni che è opportuno siano sufficientemente maneggevoli.
È lecito considerare gli ambienti come particolari insiemi-B. Viceversa a ogni insieme-B può essere opportuno attribuire il ruolo di ambiente, in quanto è possibile stabilire con algoritmi gli elementi che ne fanno parte.

È quindi di grande interesse individuare insiemi-B costituenti relazioni tra tra insiemi-B più semplici e piùin particolare funzioni tra insiemi-B e ed endofunzioni entro insiemi-B.

Inoltre sugli insiemi-B si possono definire relazioni e operazioni che estendono le corrispondenti entità definite sugli insiemi finiti, molte delle quali consentono di individuare altri insiemi-B.

B080.06 Un ampliamento della collezione degli insiemi-B che costituisce una restrizione della collezione degli insiemi-E è dato dagli insiemi-P, gli insiemi di elementi appartenenti a un ambiente ben definito che devono soddisfare proprietà alle quali si chiede, senza approfondire, di essere definite con una precisione ampiamente condivisibile.

Su questi insiemi-P sono doverose alcune osservazioni.
Innanzi tutto si osserva che gli insiemi-B sono da considerare casi particolari di insiemi-P, in quanto ciascuno di essi soddisfa la proprietà di avere come elementi gli oggetti dell'ambiente che sono accettati dall'algoritmo per l'appartenenza che lo caratterizza.
Dato che la definizione non precisa le proprietà che richiede, ha senso invocare un insieme-P solo quando in esso si vogliono collocare oggetti che presentino buoni motivi di interesse; in questo caso l'insieme-P serve per individuare efficientemente questi oggetti con semplici scritture della forma $x \in \mathsf{P}$ chiedendo al lettore di dare fiducia alla promessa di una successiva definizione più fondata della proprietà da soddisfare e quindi dell'insieme **P** stesso.

In effetti gli insiemi-P vengono introdotti come nozioni provvisorie con l'intesa che verranno ridefiniti ed esaminati con maggiore rigore grazie alla prospettata disponibilità di strumenti logici più incisivi e soprattutto di una teoria assiomatica degli insiemi.

Si può affermare che gli insiemi-P vengono introdotti adottando un modo di procedere euristico consistente nel servirsi di entità (nello specifico gli insiemi) non compiutamente definite che facilitino la introduzione di nuove nozioni in grado di far procedere unben definito filone di conoscenze.

Un vantaggio degli insiemi-P consiste nella possibilità di combinarli mediante operazioni insiemistiche booleane (unioni, intersezioni, complementazioni, ...) servendosi delle rispettive composizioni booleane delle proprietà (congiunzioni, disgiunzioni, negazioni, ...).

B08 a. liste nonripetitive e insiemi espliciti

B08a.01 Consideriamo un alfabeto A di n caratteri che supponiamo fornito da una lista di segni della forma $\mathsf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$, e le liste nonripetitive di n caratteri appartenenti ad A, cioè le liste nelle quali ciascuno dei caratteri compare una e una sola volta.

Esse sono dette **permutazioni** dei caratteri nella **a** e alla permutazione generica di **a** diamo la forma

$$\langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n} \rangle \ ;$$

Si osserva che anche la corrispondente lista dei deponenti $\langle j_1, j_2, ..., j_n \rangle$ deve essere nonripetitiva.

Per esempio considerando l'alfabeto dato dalla lista $\mathbf{4} := \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$; si trova facilmente che le permutazioni delle sue cifre sono le seguenti 24 che presentiamo in forma concisa come stringhe di 4 caratteri:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

.

Tra le liste di caratteri di interesse applicativo conviene segnalarne alcune ampiamente utilizzate.

Le prime lettere minuscole dell'alfabeto, per esempio $\langle a, b, c, d, e, f \rangle$, sono utilizzate in molte argomentazioni generali sulle stringhe per denotare dei caratteri.

Le dieci cifre decimali eventualmente accompagnate da "," "(", ")" e dai segni delle operazioni aritmetiche sono utilizzate estesamente per considerazioni su numeri interi.

Per considerazioni più avanzate sui numeri reali in genere risulta opportuno servirsi anche di altre lettere (h, k, m, n, ϵ, δ, ...) che esprimono numeri o reali che possono essere considerati prefissati o variabili.

Per talune considerazioni sugli interi implementati in dispositivi elettronici binari inferiori a 2^{16}, a 2^{32} o a 2^{128} sono utilizzate le lettere A, B, C, D, E ed F per rappresentare gli interi 10, 11, 12 ,13, 14 e 15 secondo le cosiddette notazioni esadecimali.

Nei linguaggi di programmazione si usano alfabeti di caratteri comprendenti, oltre alle cifre decimali e le lettere minuscole e maiuscole, gruppi di caratteri con ruoli lessicali e sintattici ben definiti che in genere fanno parte del cosiddetto codice ASCII [`ASCII (we)`, B70c01].

B08a.02 La lista dei quadrigrammi nel paragrafo precedente si può ottenere modificando l'algoritmo per la generazione sequenziale delle disposizioni con possibili ripetizioni applicato alle cifre 1, 2, 3 e 4 con l'aggiunta di una semplice manovra conclusiva che evita l'emissione dei quadrigrammi con cifre ripetute.

Evidentemente questo meccanismo generativo non è efficiente, in quanto nel caso sopra prospettato genera e prende in esame $4^4 = 256$ stringhe per emetterne solo 24.

In presenza di preoccupazioni di efficienza conviene precisare un algoritmo di generazione sequenziale delle permutazioni più essenziale.

Presentiamo questo algoritmo di generazione delle permutazioni in modo che possa operare sopra un generico alfabeto ordinato espresso dalla stringa $\mathtt{a} := a_1\, a_2 \ldots a_n$ il cui ordine totale qui possiamo associare al connettivo relazionale $\prec_{\mathtt{I}}$ e possiamo rappresentiamo con la scrittura

$$a_1 \prec_{\mathtt{I}} a_2 \prec_{\mathtt{I}} \ldots \prec_{\mathtt{I}} a_n \ .$$

La prima fase dell'algoritmo stabilisce che si considera come prima stringa corrente la prima in ordine lessicografico $a_1\, a_2 \ldots a_n$ e si incarica di emetterla come prima permutazione.

Le fasi successive cercano di trasformare la permutazione corrente che scriviamo $a_{j_1}\, a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ nella successiva secondo l'ordine lessicografico derivato da $\preceq$, ordine che denotiamo con $\preceq_{lxg}$.

Se $aj_{n-1} \prec a_{j_n}$, ovvero se $j_{n-1} < j_n$, la richiesta permutazione successiva si ottiene scambiando gli ultimi due caratteri.

Se invece $aj_n \prec a_{j_{n-1}}$ si arretra sulla stringa corrente per individuare la coppia di caratteri consecutivi più a destra che presenta il secondo carattere superiore al primo.

Supponiamo che questa "coppia crescente" si trovi; per la parte finale della permutazione da modificare si può scrivere

$a_{j_h} \prec a_{j_{h+1}} \succ a_{j_{h+2}} \succ \ldots \succ a_{j_{n-1}} \succ a_{j_n}$,

dove $\succ$ denota il connettivo trasposto di $\prec$.

In tal caso si trasforma la permutazione corrente nella successiva lasciando invariati i caratteri nelle posizioni (eventuali) a sinistra della h, ponendo nella posizione h il minimo tra i caratteri trovati nelle posizioni che seguono la h il quale superi a_{j_h} e collocando nelle posizioni a destra della h i caratteri restanti in ordine crescente.

Una coppia crescente di caratteri consecutivi non si trova nella permutazione da modificare nella fase corrente se e solo se si tenta di ottenere una stringa successiva all'ultima secondo l'ordine $\preceq_{lxg}$, cioè successiva alla $a_n \ldots a_2\, a_1$.

In tale caso l'algoritmo non fa che segnalare la conclusione della generazione.

L'algoritmo descritto genera in ordine lessicografico tutte le stringhe permutazioni della $a_1\, a_2 \ldots a_n$.

Questa affermazione segue da tre constatazioni.

La prima permutazione emessa è la prima in ordine lessicografico, fatto ovvio.

L'ultima permutazione emessa è l'ultima in ordine lessicografico, evidentemente.

Tra una permutazione corrente e quella modificata dall'algoritmo non si può trovare nessun'altra permutazione intermedia secondo l'ordine $\preceq_{lxg}$.

B08a.03 La lista di tutte le permutazioni dei caratteri forniti da una lista nonripetitiva di caratteri a, cioè da un preciso elenco dei caratteri di un alfabeto, si dice insieme esplicito dei caratteri forniti dalla a.

Questa entità può essere dichiarata entità unificante, in quanto può comparire nelle argomentazioni che la riguardano come unità lessicale con il compito di identificare una entità composita.

Questa, come molte altre entità unificanti che incontreremo, può essere individuata da uno suo specifico contrassegno convenzionale, cioè da un segno o da un simbolo che può essere scelto liberamente, con la sola preoccupazione che sia facilmente distinguibile dagli altri simboli in gioco.

Si può facilmente intuire quanto le entità unificanti possano risultare vantaggiose nelle formulazioni di argomentazioni che si vogliono chiaramente comprensibili e in particolare per le argomentazioni matematiche.

In particolare può essere conveniente identificare l'insieme definito con le 24 permutazioni con una semplice lettera mediante la definizione

$$A := \mathsf{SetY}(\mathsf{a}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} .$$

In essa l'espressione $\mathsf{SetY}(\mathsf{a})$ ha il compito di affermare che l'insieme esplicito che stiamo identificando con A si individua partendo dalla lista a e sottoponendola a un algoritmo che nel precedente caso particolare effettua la generazione di tutte le permutazioni della stessa a.

Il segno semplice A si da il compito di identificare l'intera lista delle permutazioni; è quindi manifesto che A esercita una azione unificante e che favorisce la concisione.

I caratteri presentati dalla lista **a** si dicono **elementi appartenenti all'insieme** A e l'espressione che abbiamo rappresentata con la scrittura $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ segnala quali sono gli elementi che appartengono a tale insieme.

Due qualsiasi delle permutazioni ottenute da una lista nonripetitiva vanno qualificate come **stringhe equivalenti per permutazione**.

Evidentemente dato un carattere qualsiasi non può che trovarsi (occorrere) in entrambe oppure non trovarsi in entrambe.
In questo secondo caso il carattere si dice **estraneo** all'insieme A.

Si può anche dire che il precedente algoritmo di generazione è partito da una lista nonripetitiva di caratteri ed ha fornito tutte le liste che le sono equivalenti per permutazione.

Si può anticipare che questo ultimo termine è coerente con un tipo di entità molto importante che verrà esaminato parlando delle relazioni di equivalenza, entità che definiremo usando la nozione di insieme di coppie.
A quel punto la lista di tutte le permutazioni degli items di una lista nonripetitiva potrà essere qualificata come presentazione di una "classe di equivalenza per permutazione".

B08a.04 Per enunciare concisamente che il carattere a_i appartiene ad A si scrive $a_i \in A$, utilizzando il segno $\in$ che introduciamo con il ruolo di connettivo esprimente la relazione di **appartenenza**, entità che pone in collegamento con un insieme (esplicito) ciascuno degli elementi che gli appartengono e solo questi.

Ovviamente per assicurare che un carattere a_h appartenga ad A basta scorrere la **a** o una qualsiasi delle liste che sono sue permutazioni.
Questo equivale a dire che se la lista $\big\langle b_1, b_2, ..., b_n \big\rangle$ è una qualsiasi permutazione della lista $\big\langle a_1, a_2, ..., a_n \big\rangle$, allora si ha

$$A \;=\; \{a_1, a_2, ..., a_n\} \;=\; \{b_1, b_2, ..., b_n\} \;.$$

Possiamo anche dire che l'ordine di comparsa degli elementi nella notazione tra le parentesi coniugate di insieme $\{...\}$ non ha alcuna influenza sul suo significato.

Si osserva che ciascuna delle permutazioni di una lista come la **a** e l'insieme $A := \mathsf{SetY}(\mathsf{a})$ hanno la stessa portata informativa in quanto dalla lista **a** si possono ricavare con un algoritmo canonico, facilmente reperibile, tutte le sue permutazioni, cioè $\mathsf{SetY}(\mathsf{a})$ e lo stesso obiettivo si ottiene da ciascuna delle scritture $A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n}\}$.
Rispetto a un insieme come A una lista come **a** privilegia un particolare ordinamento dei caratteri appartenenti all'insieme, ordinamento rilevante in attività pratice e irrilevante per molte considerazioni generali.

Esplicitiamo il motivo che induce a prendere in considerazione sia le liste nonripetitive di caratteri, sia gli insiemi di caratteri.

È evidente che per poter operare effettivamente sugli elementi di un insieme esplicito a un esecutore conviene disporre concretamente di una lista dei suoi elementi, mentre le tante altre permutazioni della lista scelta in genere non vengono prese in considerazione.

D'altra parte vedremo che la possibilità di parlare di un insieme A e dei suoi elementi senza fare riferimento ai dettagli delle operazioni che hanno condotto alla individuazione di A costituisce un notevole vantaggio espositivo per l'organizzazione delle conoscenze matematiche; le liste sono indispensabili per le elaborazioni effettive, ma in gran parte delle argomentazioni matematiche sono superflue ed è opportuno avere la possibilità di poterle trascurare.

Va detto anche che per esaminare un insieme esplicito A può essere opportuno fare riferimento a una sola lista dei suoi elementi e quindi ad un loro ordinamento, ma per l'attività consistente nel portare sul piano dei risultati generali le conclusioni del detto esame in genere risulta meno dispersivo evitare di fare riferimento alle molte possibili liste (ordinamenti) degli elementi di A.

B08a.05 La nozione di insieme esplicito di caratteri si generalizza senza difficoltà a quella di insieme esplicito di stringhe effettivamente distinguibili.
In effetti se su uno scenario articolato richiesto frequentementa da applicazioni o da argomentazioni comparisse qualche migliaia di repliche di un tipo di oggetto, queste repliche sono individuate molto meglio da stringhe su pochi caratteri piuttosto che da caratteri reperiti in alfabeti costituiti da migliaia di segni. Questo vantaggio lessicale è ben evidente nella pratica della programmazione e in ogni pratica amministrativa.

Si può ottenere un insieme esplicito di stringhe a partire da una lista di stringhe che non presenti ripetizioni.
Queste stringhe si richiede siano chiaramente distinguibili da parte di esecutori concordemente ritenuti affidabili, sia quando vengono eseguiti da agenti umani che quando sono gestiti da automatismi, ovvero da programmi.

La affidabilità viene facilmente garantita, anche quando si opera con liste soggette a modificarsi nel tempo, quando si utilizzano solo liste di stringhe che soddisfano ben definiti requisiti.

Segnaliamo alcuni di questi insiemi di stringhe che rivestono interesse pratico:
- l'insieme delle stringhe di una determinata lunghezza (ad esempio i codici dello standard ISO 3166 per rappresentare i paesi del mondo mediante digrammi o mediante trigrammi [`ISO 3166-1 (we)`];
- l'insieme delle stringhe di lettere precedute da un carattere con il ruolo di escape (come per le macro del linguaggio TEX);
- l'insieme delle stringhe che presentano un prefisso ed un suffisso chiaramente distinguibili come per gli identificatori delle entità gestibili con linguaggi come `SGML (we)`, `HTML (we)` o `XML (we)`;
- l'insieme delle stringhe che costituiscono `Unicode (we)`.

Altre considerazioni più sottili riguardanti stringhe distinguibili sono studiate nell'ambito della combinatorica delle parole [`https://fr.wikipedia.org/wiki/Combinatoire des mots`] e della teoria dei codici C65c].

Qui non vogliamo limitarci a scelte lessicali specifiche, ma ci limitiamo a riservarci, quando necessario, di individuare particolari tipi di stringhe e corrispondenti algoritmi per il loro riconoscimento.

B08a.06 Se si ha una lista (finita) priva di ripetizioni di stringhe distinguibili è possibile sostituire ciascuna di queste con un segno peculiare e viceversa è possibile trasformare le costruzioni effettuate con segni semplici specifici in manipolazioni equivalenti nelle quali ciascuno di questi segni viene sostituito da una sua stringa peculiare, cioè distinguibile dalle altre.

Si possono quindi ripetere le argomentazioni che hanno condotto alla nozione di insieme esplicito di caratteri per giungere alla nozione di insieme esplicito di stringhe (distinguibili).

In particolare si individua un algoritmo che da una lista **A** nonripetitiva di stringhe ricava le lista di tutte le liste ad essa equivalenti per permutazione.

Questo algoritmo differisce da quello presentato in f01 solo in quanto i confronti tra caratteri, elementari (in particolare i confronti tra caratteri del codice ASCII [B70c01] moltofrequenti nella programmazione) sono da sostituire da confronti tra stringhe più elaborati e da studiare attentamente quando si ponessero esigenze di efficienza, ma in ogni caso eseguibili affidabilmente.

Quando si tratta di modificare un algoritmo per sostituire operazioni semplici (e.g. confronti o sostituzioni di caratteri) con manovre più elaborate (e.g. confronti o sostituzioni di stringhe) può essere vantaggioso, per la chiarezza della organizzazione complessiva delle elaborazioni, servirsi di sottoalgoritmi che possono eseguire le manovre più elaborate in diversi contesti operativi a partire da dati che cambiano da contesto a contesto, ma che dal sottoalgoritmo sono trattati applicando lo stesso complesso di istruzioni [B70].

Va anche osservato che per gli insiemi espliciti di stringhe si possono adottare notazioni del tutto simili a quelle introdotte in a02, con la sola differenza di interpretare i simboli a_i e a_{j_h} come rappresentanti non di caratteri, ma di stringhe. In particolare mantengono i loro ruoli i segni $\in$ e **SetY**.

B08 b. operazioni e relazioi tra insiemi espliciti

B08b.01 Introduciamo alcune composizioni di insiemi espliciti, cioè alcune costruzioni formali che da qualche insieme esplicito dato ricavano un insieme esplicito spesso più elaborato dei dati.

Si abbiano due insiemi espliciti A e B, il primo rappresentato da una lista nonripetitiva a e il secondo da una lista nonripetitiva b.

Si dice **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B e si denota con $A \times B$ l'insieme rappresentato dalla lista prodotto cartesiano $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$; si può quindi scrivere

$$A \times B \;:=\; \mathsf{SetY}(\mathsf{a} \times \mathsf{b})$$

e si può dire che $A \times B$ è la classe di equivalenza per permutazione della lista delle coppie costituenti $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$.

Se $B = A$ il prodotto cartesiano $A \times A$ si dice anche **quadrato cartesiano** dell'insieme A e si denota con $A^{\times 2}$ o, semplificando, con A^2.

Più in generale per ogni intero naturale d si introduce la **potenza cartesiana** d-esima dell'insieme A $A^{\times d}$ con le seguenti richieste:

$$A^{\times 0} \;:=\; \{\mu\} \qquad , \qquad A^{\times 1} \;:=\; A \qquad , \qquad \text{per } \; d = 2, 3, 4, ... \;:\; A^{\times d} \;:=\; A^{\times d-1} \times A \;.$$

Dato un insieme A rappresentato da una lista nonripetitiva a per qualsiasi b sottolista della a, l'insieme $B \;:=\; \mathsf{SetY}(\mathsf{b})$, ossia la lista di tutte le liste ottenute come permutazioni della b, si dice **sottoinsieme** di A ,

Per enunciare che B è sottoinsieme di A si scrive $B \subseteq A$.

Questa situazione non esclude che sia $B = A$. Se si vuole escludere l'uguaglianza si scrive $B \subset A$ e si dice che B è **sottoinsieme proprio** di A.

B08b.02 Dati due insiemi espliciti A e B si dice **relazione esplicita** tra A e B ogni sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$.
Per affermare che R è una tale entità si adotta la scrittura concisa $R \subseteq A \times B$.

Ogni relazione esplicita tra A e B può essere rappresentata da una sottolista di una qualsiasi delle liste che rappresentano $A \times B$.
Quindi una tale entità è un insieme esplicito (di coppie di stringhe) e questo giustifica l'aggettivo esplicita del suo nome.

Le relazioni esplicite sono casi molto particolari delle entità chiamate relazioni che si incontrano in ogni settore della matematica.
Qui di seguito definiremo varie nozioni associate alle relazioni esplicite che in gran parte valgono per tutte le relazioni.
Nel seguito del capitolo useremo spesso il solo termine semplificato "relazione" per le nozioni applicabili a tutte le relazioni, anche se non è ancora giustificata la loro validità generale, mentre useremo il termine "relazione esplicita" per le caratteristiche che riguardano solo le relazioni finora definite come esplicite.

Occorre anche segnalare che le relazioni qui trattate che riguardano coppie di oggetti in contesti più generali sono chiamate più precisamente relazioni binarie al fine di distinguerle da relazioni che riguardano terne, quaterne, ... , sequenze di d oggetti che sono da chiamare, risp., relazioni ternarie, quaternarie, ... , d-arie.

Queste altre relazioni sono trattate molto più raramente e quindi nel seguito parlando di relazioni intendiamo riferirci alle sole relazioni binarie; parleremo invece di relazioni in generale quando ci rivolgiamo a tutte le relazioni sia binarie che caratterizzate dalla cosiddetta arietà superiore a 2.

Consideriamo quindi una relazione [binaria] tra A e B.
Se in particolare $B = A$ ogni relazione tra A e se stesso si dice anche **relazione entro l'insieme** A.

Le relazioni esplicite, tra due insiemi espliciti, sono insiemi espliciti di costituzione particolare; quindi ad esse si possono applicare tutte le caratterizzazioni e tutte le composizioni definibili per gli insiemi espliciti.

Innanzi tutto i sottoinsiemi di una relazione R si possono chiamare **sottorelazioni** di R, mentre se R viene dichiarata sottorelazione di S, si afferma equivalentemente che S è una **sovrarelazione** di R .
Si possono prendere in considerazione anche le unioni, le intersezioni, le eliminazioni, le differenze simmetriche e i prodotti cartesiani tra relazioni; inoltre possono interessare i sottoinsiemi di questi ultimi che si possono considerare relazioni tra relazioni.

B08b.03 Di ogni insieme esplicito A si definisce il **cardinale** come il cardinale di una (ciascuna) delle liste che lo rappresentano.
Questa valutazione di un insieme esplicito (estendibile come vedremo a ogni insieme) si dice anche cardinalità, **numerosità** e numero degli elementi; essa si denota equivalentemente con $|A|$, con $\mathsf{Card}(A)$ e con $A^{\#}$.

In particolare da quanto si è visto sul prodotto cartesiano di due liste [B06e01] si ricava che il cardinale dell'insieme prodotto cartesiano di due insiemi espliciti è dato dal prodotto dei cardinali degli insiemi fattore.

È di grande interesse distinguere alcuni tipi particolari e ben definiti di relazioni.

Una relazione entro un insieme A, che per esemplificare scriviamo $A := \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, si dice **relazione riflessiva** sse contiene tutte le coppie costituite da suoi elementi coincidenti; per esemplificare abbiamo le coppie $\langle w_i, w_i\rangle$ per $i = 1, 2, ..., n$).

L'insieme di queste coppie viene detto anche il **diagonale** di $A^{\times 2}$; quindi le relazioni riflessive entro A sono le sovrarelazioni del diagonale di A.
Evidentemente il diagonale di un insieme è la relazione di uguaglianza tra i suoi elementi.

All'opposto una relazione entro A si dice **relazione antiriflessiva** sse non contiene alcuna delle coppie costituite da suoi elementi coincidenti.

Sono evidentemente relazioni antiriflessive la relazione di disuguaglianza tra gli elementi di un qualsiasi insieme, la relazione $<$ tra gli elementi di un insieme di numeri interi (o d'altro genere), la relazione "essere prefisso proprio" entro l'insieme delle stringhe su un qualsiasi definito alfabeto, la relazione "essere sovrainsieme proprio" tra sottoinsiemi di un dato insieme (ambiente).

Una relazione entro A si dice **relazione simmetrica** sse la presenza di ciascuna dalle sue coppie $\langle w_i, w_j\rangle$ comporta la presenza della sua coppia riflessa $\langle w_j, w_i\rangle$.

In geometria incontreremo come esempi di relazioni simmetriche il parallelismo e la ortogonalità tra rette o tra piani.

Una relazione entro A si dice **relazione antisimmetrica** sse la presenza di una sua coppia $\langle w_i, w_j\rangle$ implica che la sua coppia riflessa $\langle w_j, w_i\rangle$ le sia estranea.
Questa richiesta implica che ad una relazione antisimmetrica non può appartenere nessuna coppia della forma $\langle w_i, w_i\rangle$ e quindi che ogni relazione antisimmetrica è anche una relazione antiriflessiva.

Le relazioni $<$ e $>$ entro un insieme di numeri interi (ma non solo) sono antisimmetriche e tali sono anche le relazioni "essere prefisso proprio", "essere suffisso proprio", "essere infisso proprio", "essere sottosequenza propria".
Inoltre sono antisimmetriche le relazioni "essere sottoinsieme proprio" ed "essere sovrainsieme proprio".

Una relazione entro A si dice **relazione transitiva** sse la presenza della coppia $\langle w_i, w_j \rangle$ e la presenza della coppia $\langle w_j, w_k \rangle$ implicano la presenza della coppia $\langle w_i, w_k \rangle$.

Una relazione entro A si dice **relazione d'ordine** sse è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Sono relazioni d'ordine le relazioni tra stringhe pfx, sfx, ifx, sbseq e le relazioni entro insiemi numerici $\leq$ e $\geq$.

Una relazione entro A si dice invece **relazione di equivalenza** sse è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Sono relazioni di equivalenza la relazione tra stringhe su un alfabeto "avere la stessa lunghezza" e le relazioni tra liste e tra insiemi espliciti "avere lo stesso cardinale".

B08b.04 Tra le relazioni tra un A e un B si distinguono anche le funzioni, definite come relazioni nelle quali non si trovano coppie diverse con lo stesso primo membro.

In altre parole, la relazione $f \subset A \times B$ si dice funzione da A in B sse

$$\langle a_i, b_j \rangle \ , \ \langle a_h, b_k \rangle \ \in \ f \quad \Longrightarrow \quad a_i \neq a_h \ .$$

Questo implica che a una funzione da A in B si può associare, con precisione o per metafora, un meccanismo di qualche genere in grado di trasformare ogni elemento di A che compare come primo membro di una coppia appartenente ad f in un elemento di B.

Data una relazione R l'insieme dei primi membri delle sue coppie si dice **dominio della relazione** R e l'insieme dei secondi membri delle sue coppie si dice **codominio della relazione** R.

Ogni funzione tra un insieme e se stesso viene detta **endofunzione**.

Tra le endofunzioni si distinguono le permutazioni, le endofunzioni dotate di inversa, e le idempotenze, le funzioni che applicate due volte ottengono gli stessi risultati ottenibili con una sola applicazione.

Tra le permutazioni si distinguono l'identità, la permutazione che lascia invariato ogni elemento del suo dominio (e codominio), le involuzioni, endofunzioni che applicate due volte equivalgono alla identità, ossia a nessun cambiamento.

B08b.05 Insiemi numerici espliciti semplici, ma di largo uso, sono gli intervalli di numeri interi.

Per questi insiemi introduciamo varie notazioni servendoci, come spesso accade, di richieste semidiscorsive, cioè di frasi della lingua naturale contenenti formule.

Se h e k denotano numeri interi, introduciamo le notazioni e i termini seguenti:

- $[h:k]$ per l'insieme degli interi i tale che $h \leq i \leq k$, detto **intervallo chiuso** delimitato da h e k;
- $(h:k)$ per l'insieme degli interi i tale che $h < i < k$, detto **intervallo aperto** delimitato da h e k;
- $(h:k]$ per l'insieme degli interi i tale che $h < i \leq k$, detto **intervallo aperto-chiuso** delimitato da h e k;
- $[h:k)$ per l'insieme degli interi i tale che $h \leq i < k$, detto **intervallo chiuso-aperto** delimitato da h e k.

Si osservi che $[h:k] \ = \ (h-1:k+1) \ = \ [h:k+1) \ = \ (h-1:k]$.

Dell'intervallo $[h:k]$ gli interi h e k si dicono, risp., **estremità inferiore** o estremità sinistra ed **estremità superiore** o estremità destra.

Talora si trova conveniente servirsi delle seguenti notazioni abbreviate:

$$[k] \;:=\; [0:k] \;=\; \{0,1,2,...,k\}\ ; \qquad (k) \;:=\; (0:k) \;=\; \{1,2,...,k-1\}\ ;$$
$$(k] \;:=\; (0:k] \;=\; \{1,2,...,k\}\ ; \qquad [k) \;:=\; [0:k) \;=\; \{0,1,2,...,k-1\}\ .$$

Le notazioni precedenti si possono usare anche per esprimere insiemi che possono risultare vuoti
A questo proposito osserviamo:

- $h > k \iff [h:k] \;=\; \emptyset$; mentre $h \le k, \iff \big|[h:k]\big| \;=\; k-h+1 \ge 0$.
- $(h:k) \;=\; \emptyset \iff h \ge k-1$; se invece $h < k-1, \big|(h:k)\big| \;=\; k-h-1$.
- $(h:k] = \emptyset \iff [h:k) = \emptyset \iff h \ge k$; se invece $h < k$ abbiamo $\big|(h:k]\big| \;=\; \big|[h:k)\big| \;=\; k-h$.
- $[k] \;\ne\; \emptyset$ per ogni k naturale e $\big|[k]\big| \;=\; k+1$.
- $(k] \;=\; \emptyset \iff [k) \;=\; \emptyset \iff k=0$; per ogni k naturale si ha $\big|(k]\big| = \big|[k)\big| \;=\; k$.
- $(k) \;=\; \emptyset \iff k<2$; se invece $2 \le k$, $\big|(k)\big| \;=\; k-1$.

Conveniamo di denotare con **IntvlZ** la totalità degli intervalli di numeri interi. Questo insieme munito della relazione $\subseteq$ costituisce un insieme parzialmente ordinato.

B08**b.06** Finora abbiamo rivolto attenzione solo alle liste e agli insiemi espliciti di stringhe.
Nell'ambito delle elaborazioni che nel corso della storia hanno portato a soluzioni effettive di problemi concreti e tangibili si è fatto ricorso a vari tipi di oggetti diversi dalle liste finite e dagli insiemi finiti di stringhe. Per risolvere vari i problemi si è fatto ricorso: a conchiglie, sassolini (calculi), tacche e nodi su corde corrispondenti a numeri interi positivi; a figure geometriche tracciate sulla sabbia o disegnate mediante attrezzi come compassi ed elissografi; a trasformazioni esprimibili con algoritmi geometrici o realizzate mediante pantografi; a grafi e digrafi variamente arricchiti che schematizzavano vie di comunicazione, genealogie, organogrammi, molecole o cristali e da altro ancora.

Per convincere della ampia portata della impostazione che abbiamo dato per procedere nella definizione dell'*apparato*matematico-informatico sarebbe utile precisare tutti i modi con i quali le molte entità storicamente trattate per fini scientifico-tecnologici possono essere espresse mediante stringhe.

Sarebbe utile anche spiegare che quando si cercano soluzione di problemi servendosi di strumenti informatici si deve stabilire come tutte le informazioni e le strutture di dati che si rende necessario elaborare possono essere espresse dalle particolari stringhe costituite da sequenze di bits opportunamente organizzate.

Di queste spiegazioni cercheremo di esporre la più rilevanti.

Nel corso della sua storia la matematica ha rivolto la sua attenzione ad una varietà di oggetti che non si riducevano a stringhe, oggetti spesso introdotti discorsivamente, ricorrendo all'intuizione.

Tra gli oggetti che i matematici hanno fatto oggetto dei loro studi e che si sono anche sforzati di definire accuratamente, vi sono numeri, figure geometriche, espressioni, funzioni, relazioni, strutture algebriche, strutture topologiche, equazioni, procedimenti dimostrativi, ...
Molte di queste entità non sono riconducibili agli insiemi espliciti.

Per procedere ulteriormente nella definizione dell'*apparato* si devono introdurre entità che dovranno essere collocati in insiemi-E che a priori non si può pensare che siano insiemi riducibili ad espliciti, ma che rispetto alle entità finite che possono essere coinvolte nelle elaborazioni effettive dovranno presentare collegamenti ben riconoscibili e ampiamente condivisibili.

B08**b.07** Basandosi su insiemi espliciti si possono definire varie relazioni e costruzioni che sono esprimibili esse stesse come insiemi espliciti o almeno esplicitabili in quanto si dimostra possibile individuare algoritmi che forniscono liste in grado di rappresentare determinati tipi di dati in forme controllabili o che sono in grado di decidere se determinate costruzioni formali a priori generiche forniscono loro esemplari o meno.

La prima relazione tra insiemi che conviene considerare è quella di sottoinsieme. Un insieme esplicito B risulta essere sottoinsieme dell'insieme esplicito A sse si verifica che ogni elemento appartenente a B appartiene anche ad A.
Se questa proprietà vale, in quanto verificabile algoritmicamente oppure in quanto osservata come evidente, come si è detto, si scrive $A \subseteq B$.
Si scrive più precisamente $A \subset B$ sse si accerta che $A \subseteq B$ e che $A \neq B$, cioè sse si trova almeno un elemento di B estraneo ad A.

Consideriamo il problema del controllo dei sottoinsiemi di un insieme esplicito che denotiamo con $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Per questo compito occorre tenere conto dell'ordinamento che la relativa lista $\mathsf{a} = \langle a_1\, a_2\, ...\, a_n \rangle$ attribuisce ai suoi elementi.
In relazione a tale ordine a ogni sottoinsieme di A si fa corrispondere biunivocamente una sequenza binaria di n bits chiamata **funzione indicatrice** di A e si individuano due semplici algoritmi che, risp., consentono di effettuare la trasformazione di una sequenza di n bits in un sottoinsieme di A e di effettuare la trasformazione inversa.

Può risultare necessario generare una lista di tutti i sottoinsiemi di un insieme A e si constata che questa obiettivo si può raggiungere attraverso la costruzione della lista in ordine lessicografico delle sequenze di $n = |A|$ bits per poi sostituire a ciascuna sequenza la rappresentazione del corrispondente sottoinsieme di A che risulta più opportuna nella corrente circostanza.

Quindi è lecito parlare di insieme esplicito di tutti i sottoinsiemi di un qualsiasi insieme esplicito A. Questo insieme si chiama anche **booleano** di A o **insieme delle parti** di A e si denota con $A^{\mathfrak{P}}$, con $\mathfrak{P}(A)$ e con $A^{\mathbf{2}}$.
Il cardinale di questo insieme è uguale al cardinale della lista delle sequenze binarie di lunghezza n, ossia [B06f03] uguale a 2^n.

B08b.08 Consideriamo due insiemi espliciti $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ e si definisce **relazione binaria** tra A e B ogni insieme di coppie della forma $\langle a_i, b_j \rangle$ con $a_i \in A$ e $b_j \in B$.
Ogni relazione binaria tra due insiemi espliciti quindi è un insieme esplicito che è sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Da quanto si è visto in b06, si può generare una lista di tutti i sottoinsiemi dell'insieme esplicito $A \times B$; quindi si può affermare che l'insieme delle relazioni tra due insiemi espliciti A e B è un insieme esplicito avente come cardinale $2^{|A| \cdot |B|} = 2^{n \cdot k}$.

L'insieme delle relazioni tra gli insiemi A e B lo denotiamo anche con $\mathsf{Rel}_{A,B}$, ovvero usiamo la definizione

$$\mathsf{Rel}_{A,B} := \mathfrak{P}(A \times B) .$$

In particolare per l'insieme delle relazioni entro un insieme A si introduce anche la notazione semplificata

$$\mathsf{Rel}_A := \mathsf{Rel}_{A,A} = \mathfrak{P}(A \times A) .$$

Nell'insieme delle relazioni tra i due insiemi A e B, $\mathfrak{P}(A \times B)$, risulta utile distinguere i vari sottoinsiemi costituiti dalle relazioni che godono delle proprietà particolari che abbiamo introdotte in b03 e in b04.

B08b.09 Conviene ricordare che gli insiemi espliciti sono stati introdotti a partire dalle liste, oggetti formali che si possono considerare stretti vicini di oggetti materiali evidentemente osservabili e che le argomentazioni che li riguardano sono sostenibili da elaborazioni rese chiaramente comprensibili pensando a processi tangibili, ossia a fenomeni osservabili, tutti oggetti di indagini empiriche.

Esplicitiamo anche un'altra loro proprietà supportata da considerazioni empiriche che li distingue tra le entità che abbiamo chiamate insiemi-E più vagamente definite come entità alle quali si possono attribuire con il ruolo di loro elementi, alcuni oggetti precedentemente definiti.
Questa proprietà è la impossibilità di mettere in corrispondenza biunivoca un qualsiasi insieme esplicito $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ con una sua parte propria, cioè con un insieme ottenuto privando A di qualcuno dei suoi elementi.

Questa impossibilità è evidente per molteplici osservazioni empiriche e può essere proposta (abduttivamente) come condivisibilmente evidente.
La si può sostenere anche considerando che ogni insieme B con il quale si può porre A in corrispondenza biunivoca deve avere la forma $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$, mentre se esso fosse sottoinsieme proprio di A dovrebbe avere meno di n elementi.

Quando disporremo di una nozione rigorosa più comprensiva degli insiemi [B66] definiremo **insieme finito** ogni insieme che non si può porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Evidentemente ogni insieme esplicito è un insieme finito: infatti tutte le corrispondenze biunivoche che riguardano un tale insieme E costituito da n elementi e un suo sottoinsieme proprio devono essere espresse con un insieme di coppie i cui primi membri, tutti diversi, sono n ed i cui secondi membri, anch'essi diversi, dovrebbero essere meno di n.

Possiamo anche enunciare la affermazione più generale secondo la quale ogni insieme esplicito non si può porre in biiezione con un insieme con un diverso cardinale.

B08b.10 Si incontrano molti insiemi espliciti che possono essere motivati e definiti ricorrendo solo a nozioni formali a loro volta individuate solo all'interno delle argomentazioni riguardanti le combinazioni di simboli e avvalendosi di algoritmi su stringhe altamente affidabili.
Questi insiemi li possiamo qualificare come interni alla matematica e le loro proprietà, come vedremo, si possono individuare e dimostrare seguendo precise regole della logica [B66].

In molte applicazioni, invece, si devono trattare insiemi espliciti i cui elementi, spesso in numero molto elevato, sono di derivazione esclusivamente empirica e sono ottenuti con attività che richiedono notevoli risorse esterne che non possono essere ragionevolmente controllate con strumenti puramente matematici.

Mentre per trattare gli insiemi interni alla matematica possono bastare poche decine di caratteri, per le molteplici comunicazioni che riguardano gli insiemi esterni alla matematica e che spesso sono rivolte ad ampi gruppi di persone, in particolare a persone distribuite inpiù ambiti internazionali, servono decine di migliaia di simboli.

Per le attività amministrative di una nazione o di una azienda multinazionale vengono trattati milioni di registrazioni anagrafiche.
Il funzionamento del Web richiede che siano tenute sotto controllo centinaia di milioni di URL [`Uniform resource locator (we)`], grandezze destinate a crescere con il previsto sviluppo dell'Internet delle cose.
Inoltre molte delle liste richieste dalle applicazioni accennate e ampiamente prevedibili cambiano nel tempo anche a ritmi vorticosi.

Queste liste di entità del mondo reale richiedono procedimenti e dispositivi specifici che operano su loro studiate rappresentazioni: archivi, atlanti, cataloghi, repertori, ...

Le corrispondenti rappresentazioni tra il secolo XV (della nascita della navigazione sugli oceani) e la prima metà del XX (con la nascita delle comunicazioni mediante radio, automobili e aerei), sono state registrate e comunicate prevalentemente su carta; attualmente le registrazioni su carta vanno ancora crescendo anche in misura rilevante, ma crescono ancor più vistosamente le registrazioni su supporti digitali che vengono prodotte, messe in relazione e rielaborate con processi fisici e con tecnologie in continuo sviluppo.

Per questi complessi di dati in genere non sono disponibili alla lettura umana singole liste esplicite; molti di essi sono ricavabili da archivi distribuiti accessibili attraverso sistemi teleinformatici piuttosto impegnativi, in molti casi somo sottoposti a frequenti aggiornamenti e quindi la loro gestione è necessariamente affetta da qualche elemento di incertezza.

Nel seguito continueremo a parlare di liste ben definite e di insiemi espliciti, ma nella consapevolezza che si tratta di schematizzazioni piuttosto drastiche delle raccolte di dati che provengono e sono utilizzate dal mondo reale.

B08b.11 Gli insiemi finiti che si trattano per scopi pratici sono tendenzialmente costituiti da oggetti ottenibili con costruzioni chiaramente definite ed effettivamente controllabili: questi insiemi finiti possono essere qualificati come **insiemi costruibili**.

Per esempio è usuale prendere in considerazione insiemi finiti di persone residenti in una certa città, di prodotti facenti parte di un catalogo e di transazioni finanziarie; tutti questi insiemi sono esprimibili attraverso stringhe sopra alfabeti largamente riconosciuti.

In particolare risulta spesso necessario trattare insiemi di oggetti scelti con precisi criteri tra gli elementi di un insieme esplicito o ragionevolmente esplicitabile tendenzialmente ben definito che può essere molto esteso. Per ciascuno degli insiemi entro i quali si effettuano frequenti selezioni utilizzeremo il termine **ambito** e anche del termine più circostanziato ambito espositivo.
Ci possiamo quindi aspettare di incontrare frasi del tipo "accingiamoci a trattare oggetti appartenenti all'ambito della finanza internazionale".
All'interno di una esposizione nel quale si trattano solo elementi di un unico ambito espositivo, invece di questo insieme si usa anche il termine **universo**.

B08b.12 Per individuare l'insieme delle entità facenti parte di un dato ambiente e soddisfacenti una data proprietà si usa una scrittura della forma $\{x \in U \mid \mathcal{P}(x)\}$ che esprime la segnalazione che si considerano oggetti il cui generico esemplare si denota con il segno x, i quali appartengono all'ambiente U e che inoltre soddisfano la proprietà individuata dalla espressione $\mathcal{P}(x)$ nella quale compare l'identificatore x e che si suppone chiaramente interpretabile. Il simbolo " $\mid$ " sta per "*such that*" e può leggersi "tale che"; questa locuzione viene abbreviata anche con " t.c. ".

In una definizione generica come quella della frase precedente la scrittura $\mathcal{P}(x)$ costituisce solo una notazione aperta a tutte le specificazioni che nel contesto risultano sensate, e che tendenzialmente sono motivate da qualche problematica.
In una definizione specifica $\mathcal{P}(x)$ può essere una espressione nella quale, oltre alla lettera x, compaiono:
- caratteri e stringhe che denotano elementi particolari dell'ambiente U;
- segni separatori e delimitatori;
- segni di operazioni e relazioni di uso generale, come quelli già introdotti ˌ, $\leftarrow$, $+$, len, $\leq$, $>$, ... e come i molti altri che definiremo e che sono raccolti nel fascicolo X12;
- costrutti lessicali che individuano entità più complesse e segni introdotti in precedenza per denotare costruzioni ed entità che sono state oggetto di precedenti definizioni specifiche.

Con espressioni di questo tipo si possono tradurre richieste chiaramente interpretabili quali:

insieme dei nomi dei comuni italiani inizianti con la lettera `L` oppure

insieme dei nomi inglesi dei naturali inferiori a 100 costituiti da meno di 9 lettere .

Ci accadrà di introdurre oggetti diversi a_1, a_2, a_3, ... ai quali si chiede di appartenere a un dato insieme S. In questi casi useremo notazioni come le seguenti

$a_1, a_2 \in_{\neq} S$ come abbreviazione della ⌜ $a_1, a_2 \in S \ \wedge \ a_1 \neq a_2$ ⌝

$a_1, a_2, a_3 \in_{\neq} S$ come abbreviazione della ⌜ $a_1, a_2, a_3 \in S$ e $a_1 \neq a_2$ e $a_2 \neq a_3$ e $a_3 \neq a_1$ ⌝

B08 c. insiemi finiti, esplicitabili e intrattabili

B08c.01 Una interpretazione rigida della definizione degli insiemi espliciti fa pensare che quando un esecutore deve servirsi di uno di tali insiemi deve disporre effettivamente di una lista dei suoi elementi.

Questa disponibilità risulta inevitabile in alcune delle attività con obiettivi pratici specifici, ma non per tutte.

Diciamo **insieme esplicitabile** un insieme-E per il quale si può fornire una "garanzia ampiamente condivisibile" della possibilità di avviare la costruzione o lo scorrimento di una lista nonripetitiva dei suoi elementi.

Un modo per dare tale garanzia consiste nell'individuare un algoritmo in grado di presentare una lista comprendente tutti i suoi elementi ed essi soli ovvero in grado di registrarli sopra un nastro adeguato. Questa operazione spesso si descrive efficacemente come visita da parte di un dispositivo di controllo di tutti gli elementi dell'insieme, uno dopo l'altro. Si parla quindi di **algoritmo di visita di un insieme**.

Ovviamente ogni insieme esplicito è esplicitabile: l'algoritmo richiesto non deve far altro che scorrere la disponibile lista dei suoi elementi.

Gli insiemi esplicitabili, come gli insiemi espliciti, sono insiemi finiti. Per affermare questo consideriamo un insieme esplicitabile E e un $x \in E$ e scriviamo E_1 l'insieme degli elementi di E ad esclusione di x, cioè poniamo $E_1 := E \setminus \{x\}$.
Ogni algoritmo $\mathcal{A}_1$ in grado di visitare E_1 si può trasformare in un algoritmo $\mathcal{A}$ che visita inizialmente x e successivamente tutti gli elementi di E_1: evidentemente le liste generate da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_1$ non possono essere poste in corrispondenza biunivoca e quindi, dato che si possono controllare tutte le permutazioni di ciascuna delle due liste suddette, è impossibile porre in corrispondenza biunivoca una qualsiasi lista degli elementi di E con una qualsiasi lista degli elementi di E_1.

La distinzione tra gli insiemi espliciti e i restanti insiemi esplicitabili va presa in considerazione solo nei contesti nei quali si pone come determinante il problema delle risorse richieste per le attività che si stanno avviando.

In particolare essa è determinante quando si vuole individuare un algoritmo che si possa ragionevolmente implementare per risolvere effettivamente una data istanza di problema, tenendo conto delle risorse delle quali si dispone e che in ogni caso sono limitate.
In altre parole un insieme finito va considerato esplicitabile e non esplicito quando lo si tratta solo con algoritmi che rinunciano a disporre di una lista dei suoi elementi per evitare di impegnare una quantità di memoria e/o di tempo che si presume essere eccessiva, troppo costosa.

Gli insiemi esplicitabili che non richiedono risorse enormi nei contesti nei quali si può contare sulla progressiva crescita delle risorse fisiche disponibili, degli strumenti matematico-informatici e dell'interesse verso il potenziamento dell'*apparato* matematico-informatico si possono tenere in considerazione come se fossero già espliciti.

La disponibilità di una lista esplicita di oggetti particolari risulta rilevante solo quando la si può ottenere con elevato dispendio di risorse.

B08c.02 È naturale chiedersi se si individuano insiemi finiti che non risulta opportuno considerare esplicitabili.

Chi deve risolvere problemi impegnativi è portato a individuare quelli che si possono chiamare insiemi onerosamente esplicitabili, cioè insiemi la cui disponibilità completa, ossia la cui elencazione esplicita o la cui visita completa, richiede l'impiego di risorse onerose, la cui disponibilità può risultare problematica.

La distinzione tra insiemi espliciti e insiemi onerosamente esplicitabili dipende dunque dalle circostanze nelle quali si pongono i problemi e dalle disponibilità degli agenti solutori.

Questa distinzione, come la distinzione tra insiemi espliciti ed esplicitabili, può variare significativamente nel tempo: con il continuo migliorare degli strumenti che sono resi disponibili dal progredire delle tecnologie materiali e delle tecniche per la produzione di software alcuni insiemi di stringhe possono passare dall'essere onerosamente esplicitabili all'essere comunemente esplicitabili o anche a trovarsi su liste esplicite comunemente disponibili (ad esempio registrati dai più recenti dispositivi per la registrazione read only mediante laser).

Dunque la distinzione tra insiemi epliciti ed esplicitabili, in linea di massima, va considerata a carico di chi deve risolvere specifiche istanze di problemi.

B08c.03 Cerchiamo ora insiemi che devono essere considerati finiti, ma che si devono giudicare sostanzialmente impossibili da esplicitare.

Un tale insieme deve essere costituito da oggetti che sia estremamente impegnativo tenere sotto controllo nella loro totalità: esso quindi si può comprensibilmente chiamare **insieme intrattabile**.

Ci si può aspettare che, come gli insiemi onerosamente esplicitabili, gli insiemi intrattabili vadano ricercati tra gli insiemi finiti con cardinali molto elevati (che potrebbero anche essere difficili da valutare) e tra gli insiemi che per essere esaminati richiedono tempi enormemente lunghi.
Inoltre è ragionevole a pensare che questi insiemi possano essere esaminati soltanto ricorrendo a esecutori artificiali.

Come si è già osservato, la continua evoluzione delle tecnologie informatiche, induce a pensare che la tripartizione tra insiemi espliciti, insiemi onerosamente esplicitabili e insiemi intrattabili sia una distinzione che si modifica nel tempo e che le considerazioni in proposito siano da considerare permanentemente provvisorie e solo orientative a grandi linee. Si noti che in conseguenza della precedente tripartizione si può individuare la tripartizione tra problemi risolvibili senza difficoltà, problemi molto onerosi e problemi intrattabili.

Bisogna inoltre segnalare che considerazioni sulla onerosità degli insiemi finiti si ritrovano nelle analisi più complete che sono svolte nell'ambito della cosiddetta teoria della complessità che presentiamo in C47.

B08c.04 Per trovare problemi intrattabili, con l'aspettativa che ogni loro prospettabile risoluzione richieda il consumo di risorse irraggiungibilmente elevate si possono cercare tra quelli che richiedono tempi di calcolo e/o ampiezze di memoria superiori a quelli seriamente prospettabili.

Consideriamo per primo l'insieme S degli interi naturali minori di 10^{20}, insieme che evidentemente è finito e del quale il cardinale è ovviamente 10^{20}.

Il procedimento che consente di presentarli tutti in sequenza è banale, ma la sua esecuzione con un computer odierno richiederebbe intorno a 300.000 anni. Se questa lista fosse necessaria per risolvere un problema non dilazionabile si dovrebbe considerare S come un insieme intrattabile.

Si potrebbe tuttavia pensare alla possibilità di accelerare la costruzione della lista mediante l'impiego per soli tre mesi di un milione di computers che procedono in parallelo o di far conto sulla futura disponibilità di computers quantici che mantengono le promesse degli attuali sostenitori delle iniziative per il loro sviluppo.

Va anche segnalato che si pone il problema dello spazio di memoria necessario per registrare la lista prospettata.

Inoltre si deve anche osservare che non si intravvede alcun problema pratico che richieda la disponibilità materiale di una tale lista.

Potrebbe invece servire qualche strumento che alla nostra lista faccia solo riferimento, ad esempio un algoritmo in grado di decidere se una lunga stringa binaria esprima uno degli interi dell'inieme S secondo una specifica codifica; in effetti questa decisione sarebbe risolvibile facilmente, anche quando fosse possibile presentare notazioni binarie di numeri vicini al numero (10^{65}) degli atomi del 5% attualmente osservabile dell'universo [`Observable universe (we)`].
Da questo punto di vista S si potrebbe collocare tra gli insiemi esplicitabili.

B08c.05 Un altro esempio è costituito dall'insieme dei fattori primi [B12c02] di un intero espresso da alcune centinaia di cifre decimali: questo insieme, che qui denotiamo con **P**, in linea di principio è completamente determinato ed esplicitabile, ma la sua effettiva elencazione, allo stato attuale delle conoscenze sui numeri interi, richiederebbe migliaia di anni di calcoli anche si potessero utilizzare gli elaboratori più potenti attualmente disponibili (ma non converrebbe cominciare questi calcoli, sarebbe meglio aspettare qualche strumento per il quale si possa prevedere una realizzazione prossima, magari tra soli 100 anni).

Chi dovesse affrontare un problema che richiede l'effettiva conoscenza dei suddetti fattori primi (eventualmente per scardinare un sistema di sicurezza di un caveau prima dell'arrivo delle forze dell'ordine) deve sensatamente considerare che l'insieme **P** sia intrattabile.

Va anche segnalato che chi deve costruire una apparecchiatura che deve prendere decisioni entro millisecondi deve considerare intrattabili anche insiemi molto meno numerosi di quelli precedentemente prospettati intrattabili.

B08c.06 Pensiamo all'insieme di tutte le permutazioni degli interi da 1 a 10000 che denotiamo con $\boldsymbol{P}$.
Questo insieme evidentemente va considerato un insieme finito, anche se il suo cardinale non sembra facilmente valutabile precisamente.

Una sua lista è lecito dichiararla "esplicitabile in linea di principio", in quanto [a02]:

- si può assumere come primo item la sottolista dei primi 10000 interi positivi in ordine crescente,
- si conosce un procedimento per passare da una qualsiasi permutazione alla successiva secondo l'ordine lessicografico e
- si riconosce che l'ultima permutazione riguarda la sequenza decrescente dei nostri interi positivi, da 10000 a 1.

Accade però che sappiamo che il numero delle permutazioni in $\boldsymbol{P}$ ammonta a circa $2.846\,259\,681 \cdot 10^{35659}$ [`Approssimazione di Stirling (wi)`] e quindi la produzione effettiva della sua lista esplicita richiederebbe risorse inconcepibili e sarebbe un'impresa impraticabile e priva di ogni utilità attualmente prevedibile.
Quindi anche $\boldsymbol{P}$ va considerato intrattabile.

Potrebbe invece essere utile l'ottenimento di particolari informazioni riguardanti $\boldsymbol{P}$; una notazione posizionale del loro numero preciso si ottiene con 9999 moltiplicazioni di numeri relativamente contenuti, impresa abbordabile da uno qualsiasi degli odierni comuni computers.

A questo proposito va anche segnalato che per questo genere di problemi si sta andando ben oltre [`List of prime numbers (we)`]).

È invece facilmente formulabile e potrebbe rivelarsi di qualche utilità una procedura che consenta di stabilire se una lista di circa $5000 \cdot 5000 = 25 \cdot 10^8$ cifre decimali esprime $10\,000!$ o meno.

B08c.07 Un esempio di un insieme intrattabile è quello dei numeri primi compresi tra $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}^2$ dove $\mathbf{N}$ denota una valutazione (approssimata) del numero delle molecole dell'universo osservabile con gli attuali metodi radiotelescopici [`Radiotelescope (we)`, `Event Horizon Telescope (we)`].

Attualmente esso non si può considerare insieme esplicitabile, mentre sapendo che si tratta di un sottoinsieme proprio di un insieme di $\mathbf{N}^2 - \mathbf{N}$ elementi, possiamo affermare, sicuri di essere ampiamente approvati, che si tratta di un insieme finito.

Si può anche affermare che un eventuale elenco degli insiemi finiti che vanno considerati onerosamente esplicitabili è da considerare una lista variabile nel tempo, probabilmente lentamente variabile).

Di fatto si constata che questa lista nel passato ha continuato a modificarsi e che negli ultimi decenni la sua evoluzione è stata accelerata dal fatto che sono disponibili risorse di memoria e prestazioni di calcolo vistosamente superiori alle precedenti.

B08c.08 Per ogni insieme esplicito M risulta ben definito e finito l'insieme dei suoi sottoinsiemi, l'insieme delle sue parti.
Ricordiamo che se M è costituito da m elementi il suo insieme delle parti ha cardinale 2^m [B06f03].
Accade quindi che la collezione dei sottoinsiemi di un insieme di elevato cardinale E sia vistosamente più numerosa di $|E|$.

In molte circostanze quindi si può porre il problema di stabilire se, ottenuto un insieme esplicitabile con un impegno non trascurabile, l'insieme delle sue parti sia intrattabile, oppure se le risorse a nostra conoscenza inducono a giudicarlo esplicitabile.

B08c.09 Come già osservato in molte applicazioni si trattano insiemi costituiti da un numero finito, ma molto elevato, di stringhe di natura empirica, non dominabili con strumenti che agiscono su proprietà puramente matematiche.

Per rendere agevoli ed efficienti le comunicazioni internazionali servono decine di migliaia di simboli [`Unicode (we)`], per le attività amministrative di una nazione o di una azienda multinazionale sono utili molti milioni di registrazioni anagrafiche, per il funzionamento del Web sono registrati circa 5 miliardi di URL (Uniform resource locators) [`https://www.internetworldstats.com/stats.htm`].

La seconda e la terza delle liste sopra accennate risultano onerose da maneggiare e cambiano nel tempo a ritmi non facili da seguire.

Le liste empiriche come queste, in effetti, si affrontano con procedimenti e dispositivi studiati specificamente che operano su loro studiate rappresentazioni: archivi, atlanti, cataloghi, repertori, ...

Le rappresentazioni di questo genere tra i secoli XVI e XX risiedevano prevalentemente su carta, mentre oggi sono registrate prevalentemente su supporti digitali organizzati con tecniche specifiche.

Gli elementi di questi insiemi spesso non sono disponibili in singole liste esplicite, ma sono reperibili in archivi distribuiti, sottoposti a frequenti aggiornamenti, ci si aspetta che siano affetti da qualche incertezza, e in genere sono accessibili attraverso sistemi teleinformatici piuttosto elaborati.

Una versione di uno di questi insiemi riferibile a un determinato periodo va comunque ragionevolmente considerata un insieme esplicitabile.

B08c.10 È importante ribadire che per molte argomentazioni di portata generale risulta opportuno prescindere dal consumo delle risorse richieste delle operazioni che devono essere eseguite per ottenere le costruzioni effettive.

Quando si portano avanti le conoscenze matematiche è opportuno rinunciare a distinguere tra insiemi espliciti, esplicitabili e intrattabili, ma parlare comprensivamente di **insiemi finiti**, ossia di insiemi ciascuno dei quali si può caratterizzare con il numero dei suoi elementi.

Procediamo quindi a introdurre termini e notazioni riguardanti queste entità che risultano essere protagoniste di moltissime argomentazioni.
Nelle due sezioni successive introdurremo le principali relazioni e operazioni tra insiemi finiti, entità indispensabili per la conoscenza delle proprietà generali di questi raggruppamenti.

Va segnalato che queste nozioni e i conseguenti risultati sono in gran parte applicabili anche a insiemi-E che non possono essere considerati insiemi finiti.
Nel far questo introdurremo solo poche osservazioni sul costo delle elaborazioni che le effettive costruzioni implicherebbero.

B08c.11 Come si è detto, in questi primi capitoli per semplicità espositiva si fa riferimento prevalentemente a liste e insiemi di stringhe.
Questa limitazione non va considerata eccessiva, in quanto tutti gli oggetti che si vogliono utilizzare affidabilmente devono essere oggetto di comunicazioni e di trasformazioni riproducibili e quindi devono essere espresse mediante stringhe su alfabeti riconoscibili.
In effetti si constata che le stringhe sono in grado di individuare nomi, simboli, definizioni, relazioni, operazioni, formule, istruzioni di algoritmi ed enunciati con validità matematica.

Per contro va detto che riducendosi alle sole elaborazioni di stringhe da parte di automatismi come le MSM, in genere si ottiene una efficienza elaborativa molto bassa e si riscontrano appesantimenti in molte formulazioni che risultano importanti per la nostra *esposizione*.

Pi u avanti procederemo a differenziare sia i tipi delle costruzioni verbali delle entità formali che rappresentano gli oggetti che entrano nei problemi da risolvee, sia le prestazioni degli esecutori artificiali da usare per affrontare le istanze dei problemi.

Va detto anche che nella matematica e nelle sue applicazioni si incontrano molte entità non discrete.
Qui ci limitiamo ad anticipare che anche queste saranno trattate mediante stringhe nell'ambito di sviluppi condotti a un livello formale elevato che richiede impegnativi strumenti della logica formale [B60, B61].

B08c.12 Un altro tipo di espressione utile alla definizione di insiemi ha la forma

$$E \;:=\; \{x \in X :\mid \mathcal{T}(x)\}$$

nella quale X è un insieme precedentemente definito ed $\mathcal{E}(x)$ denota una richiesta di trasformazione definita utilizzando segni e costrutti noti e che da ogni $x \in X$ consente di ricavare un ben determinato oggetto che risulta far parte dell'insieme in corso di definizione.

La richiesta $\mathcal{T}(x)$ può consistere nella formulazione di un algoritmo, o in una costruzione presentata solo discorsivamente che sia in grado di trasformare ogni $x \in X$ in un oggetto da assegnare all'insieme E.

In termini più concreti per $\mathcal{T}$ si possono prospettare vari meccanismi.
Si possono avere espressioni chiaramente interpretabili.
Nel caso in cui X è un insieme esplicito $\mathcal{T}$ può ridursi a una semplice richiesta di scorrimento di una lista che rappresenta X che di fronte ad ogni item x prevede una quache trasformazione algoritmica che fornisce $\mathcal{T}(x)$, oppure prevede un algoritmo che esamina x e decide se x è da scartare oppure collocare nell'insieme E, che quindi risulta essere un sottoinsieme di X.

In un contesto di elaborazioni effettuate da una MSM si ha la lettura di un nastro di input che rappresenta X, per ogni stringa x letta la sua trasformazione nella $\mathcal{T}(x)$ da emettere sopra un nastro di output che rappresenterà l'insieme E.
Tipiche trasformazioni di questo genere sono le transcodificazioni.

Un tipo di espressione spesso adottato vantaggiosamente è la variante del precedente della forma $\{\mathcal{E}(x) \mid: x \in X\}$; entrambi si possono leggere come insieme degli oggetti forniti dalla costruzione espressa da $\mathcal{E}(x)$ in corrispondenza dei vari $x \in X$.

B08c.13 Gli insiemi finiti che si trattano per scopi pratici devono essere ben definiti, cioè essere costituiti da oggetti ottenibili con operazioni matematiche rigorose, con argomentazioni convincenti, con osservazioni sperimenta riproducibili o con ricerche documentarie meticolose in modo da essere ampiamente condivisibili.

Per esempio vengono considerati insiemi di interi naturali, di stringhe sopra un dato alfabeto, insiemi delle persone residenti in certe città, di prodotti presentati in un catalogo consultabile sul Web, ...

Spesso si vogliono individuare insiemi finiti di oggetti scelti con un determinato criterio tra gli elementi di un insieme esplicito o esplicitabile definito in modo tendenzialmente semplice che spesso è molto esteso e che si può chiamare "sovrainsieme da selezionare".

Esempi di questi sovrainsiemi sono insiemi assunti come ambienti (per esempio $\mathbb{N}$), l'insieme delle stringhe su un alfabeto A aventi lunghezza non superiore a un dato intero positivo s, insieme che si denota con $\mathsf{A}^{\times\leq s}$ e l'insieme dei 2^64 interi appartenenti all'intervallo $[-2^{63} : 2^{63}-1]$ (sono gli interi facilmente trattabili con vari linguaggi di programmazione).

Come vedremo, quando si trattano insiemi diversi dai finiti il problema di scegliere tra gli elementi assegnati a sovrainsiemi èassai delicato.

B08c.14 Abbiamo visto che per individuare l'insieme delle entità facenti parte di un dato sovrainsieme U e soddisfacenti una precisata proprietà possono adottare due scritture equivalenti aventi le forme

$$\{x \in U \mid \mathcal{P}(x)\} \qquad \text{e} \qquad \{\mathcal{E}(x) \mid: x \in U\} \ .$$

Queste due espressioni enunciano che si considerano oggetti il cui generico esemplare si denota con il segno x, ai quali si chiede di appartenere all'ambiente U e che inoltre soddisfano la proprietà individuata dall'espressione denotata genericamente con $\mathcal{P}(x)$ nella quale interviene l'identificatore x; questa espressione deve essere chiaramente interpretabile.

Nella definizione data nella frase precedente la scrittura $\mathcal{P}(x)$ costituisce solo una notazione generica, aperta a tutte le precisazioni che negli specifici contesti di utilizzo devono essere algoritmicamente trattabili; inoltre esse, preferibilmente, devono risultare utili.

In una precisazione particolare l'espressione $\mathcal{P}(x)$, oltre alla lettera x, può contenere:
- caratteri e stringhe che individuano particolari elementi e parti dell'ambiente U;
- segni di operazioni e relazioni di uso tendenzialmente esteso, come quelli già introdotti (, , $\leftharpoonup$, $+$, len, $\leq$, $>$, $\in$, ...) e come i molti altri che saranno introdotti (per l'elenco di quelli adottati in questa *esposizione* rinviamo a X12);
- segni separatori e delimitatori che servono a strutturare l'espressione;
- simboli introdotti in precedenza per denotare entità che sono state definite attraverso espressioni e costruzioni specifiche.

Va segnalato che la struttura lessicale e semantica delle espressioni che saranno proposte dovrà essere oggetto di analisi successive [C14]. In particolare va detto che in gran parte delle espressioni che serviranno si individuano porzioni (sottoespressioni) che individuano entità di complessità più ridotta di quella della espressione completa, fatto che contribuisce alla ricchezza formale e contenutistica delle formule matematiche.

B08c.15 Nelle espressioni della forma $\{x \in U \text{⁋} \mathcal{P}(x)\}$ la scrittura $\mathcal{P}$ spesso esprime una proprietà selettiva che si deve soddisfare e risulta vantaggioso se si individua un meccanismo che per ogni elemento $x \in U$ consente di decidere se la proprietà stessa è soddisfatta e quindi se x appartiene all'insieme.

Si possono prospettare due approcci:

(i) generare tutti gli elementi $x \in U$ e stabilire per ciascun x se vale o meno l'enunciato $\mathcal{P}(x)$;

(ii) trovare un criterio che permette di generare in un preciso ordine tutti e soli gli elementi x di U.

Il primo approccio può essere un po' pedestre, ma è spesso attuabile senza difficoltà; il secondo richiede la conoscenza di un criterio che potrebbe rivelarsi tutt'altro che semplice da precisare.

Il primo approccio si può adottare per costruire, per esempio, la lista degli interi espressi in notazione decimale da tre cifre la cui somma è minore di 10,

$$\{100, 101, ..., 108, 110, ..., 117, 120, ..., 126, 130, ..., 180, 200, ..., 207, 210,$$
$$......, 700, 701, 702, 710, 711, 720, 801, 810, 900\}.$$

Infatti vedremo che è semplice generare le scritture decimali di tre cifre x degli interi compresi tra 100 e 999 ed è facile verificare la $\mathcal{P}(x)$ per ciascuna di tali scritture.
Procedendo in questo modo si devono generare tanti numeri che successivamente finiscono scartati. Un criterio che dopo un numero accettabile porti al suo successivo non è semplicissimo.

In questo caso e in altri casi può convenire un approccio intermedio, di compromesso tra studio ed esecuzione, consistente nel saltare intervalli di interi palesemente inaccettabili e facili da delimitare.
Un tale atteggiamento compromissorio spesso consente soluzioni accettabili: a es. esso aiuta nella rapida messa a punto di sottoprogrammi aventi una efficienza ragionevole, anche se non ottimale.

In genere se l'insieme $S = \{x \in U \text{⁋} \mathcal{P}(x)\}$ ha un numero di elementi molto minore dell'ambiente U nel quale ci si colloca; ad esempio l'insieme delle permutazioni di n interi è un piccolo sottoinsieme delle corrispondenti disposizioni con ripetizione [B13e07].
Quindi la generazione dell'ambiente seguita dalla selezione risulta molto inefficiente e può essere opportuno dedicare tempo alla ricerca di procedimenti per la generazione dei soli elementi di U che appartengono ad S.

B08 d. relazioni tra insiemi finiti

B08d.01 In questa sezione e nella successiva esaminiamo con una certa ampiezza le relazioni tra insiemi finiti e le operazioni che, a partire da uno o due insiemi finiti portano a un nuovo insieme finito.

Va ancora segnalato che molte delle definizioni, delle notazioni e delle proprietà presentate in questa e nella successiva sezione valgono anche per gli insiemi introdotti intuitivamente per gli insiemi che definiremo assiomaticamente in B66.

Per avere un testo più leggibile nelle prossime pagine useremo il termine "insieme finito" solo per le nozioni che riguardano i soli insiemi finiti, mentre useremo il semplice nome "insieme" per le nozioni estendibili a tutti i vari tipi di insiemi.

B08d.02 Si abbiano due liste nonripetitive L_A ed L_B ottenute con due procedimenti diversi e denotiamo, risp., con A e B i due insiemi finiti che esse rappresentano.

È possibile stabilire se A e B hanno o meno elementi in comune, cioè se esiste o meno un oggetto (stringa) e) che si trovi sia in L_A che in L_B, ovvero tale che $e \in A$ ed $e \in B$.

Se un tale elemento comune non si trova, si dice che A e B sono **insiemi disgiunti** e si esprime questo fatto scrivendo $A \diamondsuit B$. Si conviene che questa affermazione valga anche quando uno o entrambi gli insiemi dati risultano essere vuoti.
Per esempio sono disgiunti gli intervalli $[2:5)$ e $[5:8]$ e sono disgiunti i due insiemi dei prefissi diversi da μ delle stringhe `prefissi` e `suffissi`; non sono invece disgiunti idue insiemi dei suffissi di queste due stringhe.

Se A e B hanno elementi comuni (fatto che comporta che nessuno dei due sia vuoto) si dice che sono insiemi che si intersecano e si scrive $A \between B$.
in altre parole si denota scrivendo $A \between B$ la relazione di **intersecazione** tra due insiemi A e B, ossia la negazione della relazione di disgiunzione tra i due insiemi.

Si osserva che l'insieme dei suffissi della stringa `prefissi` e l'insieme dei suffissi di `suffissi` hanno in comune 6 stringhe e si può affermare:

$$\mathsf{Sfx}(\texttt{prefissi}) \between \mathsf{Sfx}(\texttt{suffissi}) = \{\texttt{fissi}, \texttt{issi}, \texttt{ssi}, \texttt{si}, \texttt{i}, \} .$$

Si osserva anche che $[4:7] \between [7:13)$ e che per k intero qualsiasi $[k-4:k+2] \between [k-1:k+13)$.

B08d.03 Date due liste nonripetitive ottenute con due diversi prcedimenti e detti A e B gli insiemi finiti che esse rappresentano, è possibile stabilire se tutti gli elementi di A appartengono anche a B: in questo caso si dice che A è **sottoinsieme** di B, ovvero che A è **contenuto [in senso lato]** in B e si scrive $A \subseteq B$; si conviene che questo enunciato vale anche quando risulta $A = B$.

Se A è sottoinsieme di B ma non è uguale a esso, si dice che A è **sottoinsieme proprio** o sottoinsieme in senso stretto di B, o equivalentemente che A è **contenuto propriamente** o che è contenuto in senso stretto in B e per enunciare questa situazione si scrive $A \subset B$.

Per esempio $[3:7] \subset (4:9)$; inoltre, se h e k sono interi naturali con $h \leq k$, l'insieme delle stringhe su un dato alfabeto A aventi lunghezza $\leq h$ è contenuto nell'insieme delle stringhe su A aventi lunghezza $\leq k$.

Chiaramente se si stabilisce che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$, si può concludere che $A = B$.

Invece che $A \subseteq B$ può essere opportuno scrivere $B \supseteq A$ e dire che B è **sovrainsieme** di A, ovvero che B contiene in senso lato A.

Invece che $A \subset B$, può essere opportuno scrivere $B \supset A$ e dire che B è **sovrainsieme proprio** di A, ovvero che B contiene in senso stretto A.

B08d.04 Chiaramente, oltre ai segni "$=$", "$\Diamond$" e "$\not\Diamond$", anche i segni "$\subset$", "$\subseteq$", "$\supset$" e "$\supseteq$", denotano delle relazioni decidibili tra insiemi finiti.

È anche chiaro che la relazione $\subset$ e la relazione $\supset$ costituiscono un duetto di relazioni trasposte, come pure le relazioni $\subseteq$ e $\supseteq$.

Sono inoltre evidenti (cioè facilmenteconstatabili e dimostrabili) le seguenti implicazioni riguardanti insiemi qualsiasi A, B e C:

$$A \subseteq B \ \wedge\ B \subseteq C \implies A \subseteq C \quad , \qquad A \subset B \ \wedge\ B \subset C \implies A \subset C \quad ,$$

$$A \subseteq B \ \wedge\ B \subset C \implies A \subset C \quad , \qquad A \subset B \ \wedge\ B \subset C \implies A \subset C \quad .$$

Insieme a questeimplicazioni valgono che riguardano le rispettive trasposte.

I primi due enunciati equivalgono ad affermare che sono relazioni transitive sia $\subseteq$ che $\subset$; lo sono anche $\supseteq$ e $\supset$ e più in generale accade che le trasposte di relazioni transitive sono anch'esse transitive.
È inoltre evidente che "$\Diamond$" e la sua negazione "$\not\Diamond$" sono relazioni simmetriche.

B08d.05 Si dice che due insiemi A e B sono **insiemi confrontabili** sse accade o che $A \subset B$ oppure che $A = B$ oppure che $A \supset B$; per esprimere questa situazione sussistente tra A e B si scrive $A \lesseqgtr B$. Per esprimere la constatazione opposta si scrive $A \not\lesseqgtr B$.

Se due insiemi non vuoti sono disgiunti, allora non sono confrontabili. Se A e B non sono confrontabili e non sono disgiunti, allora deve trovarsi qualche elemento di A che non appartiene a B (in caso contrario sarebbe $A \subseteq B$) e deve trovarsi qualche elemento di B che non appartiene ad A (in caso contrario sarebbe $A \supseteq B$).

Per esprimere il fatto che A e B non sono confrontabili e non sono disgiunti si scrive $A \between B$.
Per esempio $(10:30) \between (20:30]$.
Possiamo dunque affermare che $A \not\lesseqgtr B$ sse $A \Diamond B$ oppure $A \between B$.

Evidentemente $\lesseqgtr$, $\not\lesseqgtr$, e $\between$ sono relazioni simmetriche.

Quindi, dati due insiemi A e B, è possibile giungere a una sola delle seguenti affermazioni:

(1) $$[1] A = B, \quad [2] A \subset B, \quad [3] A \supset B, \quad [4] A \Diamond B, \quad [5] A \between B \ .$$

Si potrebbero ottenere anche le seguenti affermazioni meno chiarificanti:

(2) $$A \subseteq B, \quad [7] A \supseteq B, \quad [8] A \not\Diamond B \ .$$

Queste affermazioni sono tra di loro incompatibili, ad esclusione della compatibilità della [6] e della [7] nel caso $A = B$. Inoltre le precedenti affermazioni sono le uniche relazioni a carattere esclusivamente insiemistico che possono riguardare due insiemi arbitrari.

Le cinque affermazioni concernenti le situazioni in (1) si dicono costituire un **insieme esaustivo di enunciati insiemistici incompatibili**.

In varie circostanze è utile riuscire a decidere effettivamente in quale delle suddette situazioni si collocano due insiemi ottenuti con due diversi procedimenti.

Qui possiamo affermare solo che la questione è risolvibile algoritmicamente per gli insiemi espliciti e per gli insiemi esplicitabili con le risorse disponibili.

B08d.06 Osserviamo che con un certo studio sulle costruzioni che hanno condotto a due insiemi A e B si potrebbe essere giunti a stabilire che $A \subseteq B$, senza riuscire a decidere se $A \subset B$ oppure $A = B$.

La affermazione $A \subseteq B$ potrebbe essere considerata poco soddisfacente, ma serve a rappresentare uno stadio di conoscenza ben definito, anche se non del tutto soddisfacente per gli scopi che motivano lo studio in corso.

Similmente si potrebbe stabilire che $A \supseteq B$, senza riuscire a decidere se $A \supset B$ oppure $A = B$; inoltre si potrebbe stabilire che $A \between B$ senza distinguere se accade aut [1], aut [2], aut [3], aut [5]. Inoltre si potrebbe stabilire che $A \neq B$ senza saper distinguere se accade aut [2], aut [3], aut [4], aut [5].

Segnaliamo esplicitamente che se un insieme A è vuoto, per la sua relazione con un secondo insieme B può accadere solo che sia aut $B = A = \emptyset$ aut $A \subset B$ (relazione che implica $A \diamondsuit B$); se invece A è un singoletto e B non è vuoto, si possono dare tre situazioni: aut $A = B$, aut $A \subset B$, aut $A \diamondsuit B$; solo se A e B hanno almeno due elementi si possono realizzare tutte le 5 relazioni dell'insieme esaustivo di enunciati insiemistici incompatibili.

B08d.07 Molte situazioni riguardanti confronti tra insiemi possono essere vantaggiosamente presentate con l'aiuto delle figure schematiche chiamate **diagrammi di Euler-Venn**.

Si tratta di rappresentare intuitivamente gli insiemi in esame disegnando curve piane chiuse (come cerchi, ellissi, rettangoli o simili) e intendendo che ogni insieme consista di elementi collocati all'interno della regione piana delimitata da una di tali curve.

Per esempio le 5 relazioni ammissibili di d04(1) sono visualizzate come segue

//input iB08d06

Un diagramma di Euler-Venn non vuole essere realistico, non pretende di rappresentare una caratterizzazione geometrica degli insiemi in gioco e tanto meno intende segnalare che tutti i punti all'interno di una curva rappresentino elementi del relativo insieme.
Questo tipo di raffigurazione intende solo dare un'idea visiva delle relazioni discendenti dalla relazione di appartenenza che sussistono tra gli elementi pensabili degli insiemi in esame.
Talvolta un diagramma di Euler-Venn viene arricchito con segnalazioni di particolari elementi degli insiemi oppure con indicazioni quantitative sui loro cardinali o sulle loro estensioni.

Un primo tipo di diagramma rappresenta gli elementi di un insieme finito con punti, pallini o simili contrassegni e l'insieme come la regione di piano delimitata dalla curva che racchiude tali punti.

//input iB08d06

B08d.08 I diagrammi che seguono consentono di presentare le diverse relazioni mutuamente incompatibili che possono intercorrere tra due insiemi con i vari possibili contenuti.

//input iB08d07

Per 3 o più insiemi le possibili situazioni di intersezione e inclusione sono molto più numerose.
Per individuarle sono utili schemi che si servono di digrafi con spigoli indicanti intersezione e archi rappresentanti inclusione; li esamineremo più avanti. In genere risulta significativo disporre questi schemi su diversi livelli e disegnare collegamenti che esprimono loro relazioni significative.

B08 e. operazioni su insiemi finiti

B08e.01 Esaminiamo le operazioni che, a partire da uno o due insiemi finiti, portano a un nuovo insieme finito.

Si dice **unione** degli insiemi A e B, e si denota con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A e da quelli appartenenti a B (senza escludere gli eventuali elementi che appartengono a entrambi).

Per esempio $[4:9] \cup [7:11] = [4:11]$, $[7:20] \cup (8:14] = [7:20]$, $[0:10) \cup [10:20) = [0:20)$.

$\mathsf{Pfx}(\mathtt{abaa}) \cup \mathsf{Sfx}(\mathtt{abaa}) = \{ \mu, \mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{aba}, \mathtt{abaa}, \mathtt{aaba}\}$.

Si dice **intersezione** degli insiemi A e B, e si denota con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B.

Per esempio $[4:10] \cap (6:17) = [7:11)$, $(8:16) \cap [4:8] = \emptyset$, $[2:8) \cap [3:5) = (2:4]$.

$\mathsf{Pfx}(\mathtt{abab}) \cap \mathsf{Sfx}(\mathtt{bbab}) = \{ \mu, \mathtt{ab}\}$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi non disgiunti si visualizzano con figure come le seguenti:

//input iB08e01

Si osserva che due insiemi sono disgiunti sse la loro intersezione è il vuoto. In formula:

$$A \diamondsuit B \iff A \cap B = \emptyset .$$

B08e.02 Anche l'unione e l'intersezione di due insiemi finiti sono insiemi finiti, in quanto a partire dalle liste che rappresentano A e B sono disponibili un algoritmo che costruisce una lista degli elementi di $A \cup B$ e uno che individua la lista degli elementi di $A \cap B$.

Dalle definizioni seguono subito le seguenti proprietà delle operazioni di unione e intersezione, valide per A, B e C insiemi arbitrari.

$A \cup A = A$ (idempotenza dell'unione);

$A \cap A = A$ (idempotenza dell'intersezione);

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associatività dell'unione);

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associatività dell'intersezione).

Si osserva che, come si può intuire, queste uguaglianze sono dimostrabili per ogni tipo di insieme.

Sono evidenti anche le seguenti relazioni, valide per A, B e C insiemi arbitrari.

$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

Spesso risulta comodo usare una espressione della forma $A \dot\cup B$ per denotare l'unione di due insiemi A e B e inoltre per segnalare che i due insiemi uniti erano disgiunti. Per esempio si può scrivere $[2:5] \dot\cup [7:9]$.

Più in generale si ha:

Se h, k, l, m sono interi naturali tali che $h \leq k < l \leq m$, allora si può considerare $[h:k] \dot\cup [l:m]$.
In particolare: $l = k+1 \iff [h:k] \dot\cup [l:m] = [h:m]$.

Evidentemente l'espressione $A \dot{\cup} B$ equivale alla $B \dot{\cup} A$, mentre la $A \dot{\cup} A$ non ha interesse in quanto fornisce l'insieme A e non segnala altro.

B08e.03 Si dice **eliminazione** dall'insieme A dell'insieme B, e si denota con $A \setminus B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.
L'operazione espressa da "\" si può leggere "A senza B".

Talora l'operazione eliminazione viene detta "differenza tra insiemi" e per essa, invece dell'espressione $A \setminus B$, si usa la scrittura $A - B$, tipograficamente più comoda, ma un poco ambigua.

Evidentemente la eliminazione dall'insieme finito A dell'insieme finito B è un insieme finito che si può ottenere con un semplice algoritmo che prevede una iterazione primaria sugli elementi di A e per ciascuno di essi una iterazione secondaria alla ricerca di una sua eventuale replica in B.

Esempi di eliminazioni:

$$[5:10] \setminus [9:12] \;=\; [5:8] \;\;,\;\; [2:9] \setminus [4:7] \;=\; [2:3] \dot{\cup} [8:9] \;\text{ e}$$
$$\mathsf{Ifx}(abacba) \;\setminus\; \mathsf{Ifx}(adcacba) \;=\; \{ab, aba, bac, acb, abac, bacb, abacb, bacba, abacba\} \;.$$
$$\mathsf{Ifx}(abacbab) \;\setminus\; (\mathsf{Pfx}(abacbab) \;\cup\; \mathsf{Sfx}(abacbab) \;=\; \{ba, ac, cb, bac, acb, cba, bacb, acba, bacba\} \;.$$

Se A, B e C denotano tre insiemi qualsiasi si verificano le seguenti uguaglianze:

$$A \setminus B \;=\; A \setminus (B \cap A) \;\;;\quad A \;=\; (A \setminus B) \dot{\cup} (A \cap B) \;\;;$$
$$A \setminus (B \setminus A) \;=\; A \;\;;\quad A \setminus (B \cup C) \;=\; (A \setminus B) \setminus C \;=\; (A \setminus C) \setminus B \;\;;$$
$$A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus (B \cup C)) \dot{\cup} ((A \cap B) \setminus C) \dot{\cup} ((A \cap C) \setminus B) \;\;.$$

Queste uguaglianze generali si possono dimostrare riducendo l'insieme degli elementi in gioco, cioè $A \cup B \cup C$ alla unione dei sette insiemi disgiunti che assumono il ruolo di insiemi elementari:

$$A \setminus (B \cup C) \;,\; B \setminus (C \cup A) \;,\; C \setminus (A \cup B) \;,\; (A \cap B) \setminus C \;,\; (B \cap C) \setminus A \;,\; (C \cap A) \setminus B \;,\; A \cap B \cap C \;.$$

Successivamente ciascuna delle uguaglianza si dimostra constatando che i suoi due membri sono unioni disgiunte degli stessi insiemi elementari.

B08e.04 Si dice **differenza simmetrica di due insiemi** A e B, e si denota con $A \ominus B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B e dagli elementi di B che non appartengono ad A.

Occorre segnalare che talora invece di $A \ominus B$ si usa la scrittura $A \triangle B$.

Si trova facilmente che la differenza simmetrica tra due insiemi finiti A e B è un insieme finito e si individua facilmente l'algoritmo che consente di ricavare dalle liste che rappresentano A e B una lista che rappresenta $A \ominus B$.

La differenza e la differenza simmetrica di due insiemi non disgiunti si visualizzano con le due seguenti immagini:

//input iB08e04

Se A e B sono insiemi qualsiasi, facendo intervenire ancora gli insiemi elementari si verifica che

$$A \ominus B \;=\; (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A) \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B) \;.$$

In particolare si constata che

$$A \setminus B \;=\; A \quad\Longleftrightarrow\quad A \Diamond B \quad\Longleftrightarrow\quad A \ominus B = A \dot{\cup} B \;.$$

Con gli insiemi elementari si verificano anche le seguenti uguaglianze:

$$A \ominus B \ = \ B \ominus A \ \ , \quad A \ominus \emptyset \ = \ A \ \ , \quad A \ominus A \ = \ \emptyset \ \ ,$$

$$(A \ominus B) \ominus C \ = \ (B \ominus C) \ominus A \ = \ (C \ominus A) \ominus B \ = \ [A \setminus (B \cup C)] \dot\cup [B \setminus (C \cup A)] \dot\cup [C \setminus (A \cup B)].$$

B08e.05 Dalle definizioni si verifica che per arbitrari insiemi finiti A, B e C valgono le seguenti uguaglianze

$$A \cup (B \cap C) \ = \ (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad , \qquad A \cap (B \cup C) \ = \ (A \cap B) \cup (A \cap C) \ .$$

Esse esprimono le cosiddette **proprietà distributive** per unione ed intersezione.

I diagrammi di Venn che seguono consentono di rendersi conto facilmente della loro validità

//input iB08e05

Si intuisce che tutte le uguaglianze enunciate in questa sezione valgono anche per A, B e C insiemi generici.

B08e.06 Osserviamo che una lista degli elementi dell'unione di due insiemi finiti disgiunti A e B si ottiene semplicemente giustapponendo una lista rappresentante A e una che rappresenta B; quindi per il cardinale di tale unione si ha $|A \dot\cup B| = |A| + |B|$.

Similmente per l'unione di 3 insiemi finiti mutuamente disgiunti A, B e C si trova $|A \dot\cup B \dot\cup C| \ = \ |A| + |B| + |C|$.
Considerazioni del tutto simili valgono per 4, 5, 6, ... insiemi finiti mutuamente disgiunti.

Formule concernenti i cardinali di insiemi disgiunti servono alla soluzione di molti problemi enumerativi. Infatti per calcolare il cardinale di certi insiemi finiti piuttosto articolati si riesce ad adottare il seguente modo di procedere che può essere associato alla frase esortativa *dividi ed enumera* (che richiama il motto latino *divide et impera* e la sua versione inglese *divide and conquer*).

Si ripartisce l'insieme S di cui si cerca il cardinale in insiemi disgiunti che si presentino abbastanza semplici (e in genere omogenei); si cerca di determinare i cardinali di tutti questi e se si riesce si sommano tutti gli interi trovati.

Per due insiemi finiti A e B non necessariamente disgiunti, si può considerare la seguente ripartizione:

$$A \cup B \ = \ (A \setminus B) \dot\cup (A \cap B) \dot\cup (B \setminus A) \ ;$$

di conseguenza, dato che $|A| \ = \ |A \setminus B| + |A \cap B|$, per il cardinale si trova

$$|A \cup B| \ = \ |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \ = \ |A| + |B| - |A \cap B| \ .$$

B08e.07 Per l'unione di tre insiemi finiti che possono presentare mutue intersezioni abbiamo quindi la formula di ripartizione:

$$\begin{array}{l} A \cup B \cup C \ = (A \setminus (B \cup C)) \ \dot\cup \ (B \setminus (C \cup A)) \ \dot\cup \ (C \setminus (A \cup B)) \ \dot\cup \\ \qquad\qquad ((A \cap B) \setminus C) \ \dot\cup \ ((B \cap C) \setminus A) \ \dot\cup \ ((C \cap A) \setminus B) \ \dot\cup \ (A \cap B \cap C) \end{array} .$$

I 7 insiemi elementari costituenti la partizione si individuano facilmente nel diagramma delle possibili intersezioni di tre insiemi:

//input iB08e07

Di conseguenza si ha l'uguaglianza enumerativa:

(1) $$|A \cup B \cup C| \;=\; |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \;.$$

Quando si trattano 4 o più insiemi si hanno figure e formule generali via via più complesse.

(2) Eserc. Verificare che per 4 generici insiemi $A,\ B,\ C,\ D$ si ha:

$$|A \cup B \cup C \cup D| \;=\; |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \;.$$

B08e.08 Fissiamo ora un insieme ambito o universo U e consideriamo un suo sottoinsieme A.

Se A è diverso da $\emptyset$ e da U vi sono elementi dell'universo che appartengono ad A ed elementi che non vi appartengono. Questi ultimi costituiscono un insieme chiamato **insieme complementare** di A entro U. Esso si denota con $\complement_U(A)$ o con $A^{\complement_U}$; evidentemente tale insieme coincide con $U \setminus A$.

Nei contesti nei quali U si può sottintendere, in genere risulta comodo servirsi di una delle due notazioni abbreviate $A^{\complement}$ e $\overline{A}$.

Se U è finito, e quindi lo è anche A, si verificano facilmente le seguenti uguaglianze:

$$\complement_U(\complement_U(A)) \;=\; \overline{\overline{A}} \;=\; A \;\;;\;\; \complement_U(U) \;=\; \overline{U} \;=\; \emptyset \;\;;\;\; \complement_U(\emptyset) \;=\; \overline{\emptyset} \;=\; U \;\;;$$
$$A \cup \complement_U(A) \;=\; A \cup \overline{A} \;=\; U \;\;;\;\; A \cap \complement_U(A) \;=\; A \cap \overline{A} \;=\; \emptyset \;.$$

La prima esprime il carattere involutorio della complementazione entro un dato insieme ambiente.

Si intuisce che anche queste uguaglianze valgono per insiemi generici.

Si constata inoltre similmente che

$$A \subset B \iff \overline{A} \supset \overline{B} \;.$$

Per presentare un insieme A come parte di un ambito U e per dare un'idea del suo complementare si possono usare figure come la seguente.

//input iB08e08

L'universo viene raffigurato dal rettangolo, figura che suggerisce l'idea dell'inquadramento, della totalità (spesso solo momentanea); il suo sottoinsieme A corrisponde alla regione interna alla curva chiusa e l'insieme complementare di A come la regione del rettangolo che circonda la precedente.

B08e.09 Combinando la complementazione con unione e intersezione si trovano le seguenti proprietà, note come **leggi di De Morgan**:

$$\overline{(A \cup B)} \;=\; \overline{A} \cap \overline{B} \qquad\qquad \overline{(A \cap B)} \;=\; \overline{A} \cup \overline{B} \;.$$

Anch'esse si leggono facilmente nei corrispondenti diagrammi di Euler-Venn e si chiariscono ricorrendo agli insiemi elementari; inoltre si intuisce che valgono per insiemi generici.

//input iB08e09

B08e.10 Quando si cerca di dare generalità alle affermazioni intorno alle soluzioni di molti problemi si devono spesso trattare sequenze di un numero imprecisato n di insiemi, dove il segno n potrebbe rappresentare un particolare intero naturale oppure una espressione in grado di fornire un tale numero.

Prendiamo in esame una sequenza di insiemi espressa da $\langle A_1, A_2, ..., A_n\rangle$.

La proprietà associativa dell'unione consente di definire come unione di tale sequenza di insiemi l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno degli A_i; tale composizione si denota con una delle due scritture che seguono

(1) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \;=\; \bigcup\{i = 1, ..., n :| \; A_i\} \;.$$

Abbiamo per esempio l'uguaglianza $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} [i : i^2) \;=\; [2 : n^2)$.

La proprietà associativa dell'intersezione rende lecito definire come intersezione di una sequenza di insiemi $\langle A_1, A_2, ..., A_n\rangle$ l'insieme degli elementi che appartengono a ciascuno degli A_i; tale composizione si denota con una delle due scritture che seguono

(2) $$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \;=\; \bigcap\{i = 1, ..., n :| \; A_i\} \;.$$

Abbiamo per esempio $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{5} [i : i + 10) \;=\; [5 : 11)$.

Evidentemente queste composizioni di insiemi finiti conducono ad insiemi finiti che si possono determinare con algoritmi facilmente definibili estendendo, risp., l'algoritmo per l'unione e l'algoritmo per l'intersezione di due insiemi finiti.

B08e.11 Per gli insiemi i cui elementi sono essi stessi insiemi, al fine di renderli più facilmente individuabili, in genere utilizziamo il termine **collezioni di insiemi**.

Consideriamo la collezione degli insiemi A_1, A_2, ... , A_n con $n > 2$; essa si dice collezione di **insiemi mutuamente disgiunti** sse per ogni duetto di indici $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ (con $i \neq j$) gli insiemi A_i e A_j sono disgiunti, cioè sse $i \neq j \iff A_i \Diamond A_j$.

Un esempio di collezione di insiemi mutuamente disgiunti è costituito dagli intervalli di interi $[1 : 4]$, $[7 : 12]$, $[13 : 20]$ e $[31 : 34]$.

Dato un insieme U, si dice che la collezione di insiemi $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ costituisce una collezione-partizione di S sse si tratta di una collezione di insiemi mutuamente disgiunti la cui unione coincide con U.

Spesso al termine collezione-partizione si preferisce **partizione.s**; ricordiamo che il termine "partizione"' si usa anche per le partizioni di numeri interi positivi, entità anch'esse spesso chiamate semplicemente "partizioni"; per evitare ambiguità queste ultime le chiamiamo partizioni.i.

Un esempio di partizione.s riguarda l'intervallo $[1 : 100]$ ed è costituita dai 10 intervalli consecutivi $[1 : 10]$, $[11 : 20]$, ..., $[91 : 100]$.

Molti altri esempi di partizioni.s si incontrano in molte attività di classificazione di oggetti osservabili come zone del territorio, tipi di minerali, specie del mondo dei viventi, periodi di regno dei membri di una dinastia di sovrani.

Prima della introduzione delle città metropolitane il territorio italiano si ripartiva in regioni, ciascuna di queste si ripartiva in province e ogni provincia si ripartiva in comuni.

Si osserva che per ogni collezione-partizione $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ che riguarda $U := \cup_{i=1}^{n} A_i$, ogni elemento di U appartiene a uno e un solo insieme della collezione; si constata anche che questa proprietà è caratteristica delle collezioni-partizioni.

Per tali insiemi risultano comode scritture come la $A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup ... \dot\cup A_n$ che esprime l'unione degli n insiemi e contemporaneamente segnala che essi sono mutuamente disgiunti.

Se $S := A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup ... \dot\cup A_n$ si dice che gli insiemi A_1, ..., A_n ripartiscono S. Se $n = 2$ si dice che A_1 e A_2 bipartiscono S; se $n = 3$ si dice che A_1, A_2 e A_3 tripartiscono S e così via.

B08e.12 Abbiamo incontrati vari operatori che agiscono su insiemi finiti o su insiemi generici, alcuni binari (unione, intersezione, eliminazione, differenza simmetrica) che a due insiemi associano un nuovo insieme ed uno unario (la complementazione) che trasforma un insieme collocato in un dato ambiente.

Servendosi di questi operatori insiemistici, di espressioni in grado di individuare insiemi finiti e delle due parentesi coniugate "(" e ")" da utilizzare per delimitare sottoespressioni si è in grado di comporre le cosiddette **espressioni insiemistiche**, espressioni matematiche in grado di identificare un'ampia gamma di insiemi finiti.

Queste espressioni costituiscono esempi di quelle che chiamiamo **formule ben formate**: queste sono stringhe che seguono regole formali piuttosto precise e che sono in grado di esprimere una grande varietà di entità matematiche attraverso elementi formali riguardanti composizioni, ossia costruzioni che risultano effettivamente realizzabili o che sono definibili in modi che possiamo qualificare come attendibili.

In questo capitolo abbiamo introdotto le particolari formule ben formate atte a individuare nuovi insiemi senza giungere a definire precisamente le loro caratteristiche formali generali (che vedremo più precisamente in C14), ma limitandoci a presentarle in modo intuitivo ed euristico attraverso esempi piuttosto semplici.

Più avanti incontreremo molti altri generi di formule ben formate che consentiranno di esprimere numerosi tipi di entità matematiche che interessano campi come la combinatorica, l'algebra, la geometria, il calcolo infinitesimale, la fisica matematica, la logica, ...

Accade che tutti questi generi di espressioni presentano varie caratteristiche comuni e si possono accostare in modo intuitivo, come si è fatto per gli insiemi, senza essere costretti a precisare regole generali (lessicali, sintattiche e semantiche) in grado di governarle e senza dover precisare le loro non poche forme semplificate.

Occorre segnalare che di queste espressioni sono importanti anche le varianti che vengono usate per controllare e valutare le prestazioni degli odierni sistemi per il calcolo numerico, simbolico e grafico.

In questo ambito le regole che governano le espressioni devono essere rispettate in modo assai preciso, in quanto le espressioni vengono sottoposte ad algoritmi che in genere hanno limitate possibilità di adattamento, in quanto devono poter essere efficientemente interpretate e tradotte in comandi precisi atti a governare elaborazioni impegnative.

B08e.13 Esaminando le formule trovate per le operazioni di intersezione, unione e complementazione di insiemi finiti, si trova che l'insieme delle proprietà dei sottoinsiemi di un dato universo U (che può essere finito o generico) viene trasformato in se stesso quando si effettua una trasformazione che consiste nel modificare ogni insieme nel complementare entro U e nello scambiare le operazioni di intersezione e di unione.

In particolare si scambiano insieme vuoto e universo, le proprietà di idempotenza, le proprietà associative, le due proprietà distributive, le due leggi di De Morgan.

Questa trasformazione evidentemente costituisce una involuzione e qui la chiamiamo **dualità insiemistica**. Essa induce a distinguere duetti di enunciati che vengono scambiati e singoli enunciati che restano invariati.

I primi si dicono **duetti di enunciati duali** ed i secondi **enunciati autoduali**; stesse qualificazioni si attribuiscono alle definizioni e alle formule.

Questa dualità per ogni ambito U si può vedere come una endofunzione entro un immaginabile insieme degli enunciati riguardanti le operazioni unione, intersezione e complementazione dei sottoinsiemi di U.

Come vedremo si incontrano altri capitoli della matematica che sono caratterizzati da insiemi di formule e di risultati per i quali si individuano trasformazioni involutorie per le quali si usa il termine dualità.
Le dualità sono casi particolari di simmetrie che si riscontrano entro determinati insiemi di enunciati, in particolare entro insiemi di definizioni ed entro sistemi di assiomi.
La loro notevole utilità, sulla quale avremo modo di tornare, consiste nel fatto che contribuiscono a presentazioni più organiche di molte collezioni di definizioni e di risultati e anche di consistenti parti di teorie impegnative (in particolare nella geometria proiettiva).
Molti enunciati dotati di un duale$\mathcal{E}$ precedentemente studiato si possono vantaggiosamente individuare e dimostrare riconducendosi allo stesso $\mathcal{E}$; questo modo di procedere spesso consente di realizzare significative **economie di pensiero**.

B08 f. insiemi ambiente, insiemi-P e insiemi-B

B08f.01 In questa sezione riprendiamo la nozione di insiemi-E per approfondirla e per introdurre due tipi particolari di tali entità, ossia le sue sottocollezioni che chiamiamo collezione degli insiemi-P e collezione degli insiemi-B, in attesa di esaminare più avanti la ollezione degli insiemi-G [B17].

Quando si portano avanti argomentazioni che cercano di essere condivisibili e prive di ambiguità e di contraddizioni accade di incontrare raggruppamenti di oggetti osservabili o di entità formali che condividono caratteristiche simili e che promettono di comtribuire a sviluppi promettenti.
Tendenzialmente gli oggetti in uno di questi raggruppamenti (che possiamo considerare un insieme-E) hanno in comune utilizzazioni con risultati di rilievo simili, oppure caratteristiche simili che siamo portati a giudicare influenti in loro applicazioni prevedibili.

È evidentemente opportuno sul piano delle comunicazioni considerare molti di questi raggruppamenti di entità omogenee come un insieme.
Questo insieme derivato dall'esperienza, stante la finitezza delle esperienze, dovrebbe essere solo un insieme esplicito, esplicitabile o comunque finito.

Nella previsione suggerita dalla storia di incontrare altri oggetti simili agli elementi di tale insieme derivato dall'esperienza è opportuno ipotizzare insiemi che estendono quelli derivati dalle osservazioni o dagli studi formali che non siano necessariamente finiti.

A favore della possibile non finitezza si può dire che per evitare restrizioni a priori per un insieme-E ancora da indagare si lascia aperta la possibilità di individuare un procedimento che lo ponga in biiezione con una sua parte propria.
Si possono quindi prospettare insiemi-E per i quali la suddetta possibilità risulta esclusa (gli insiemi espliciti) , insiemi-E per i quali la infinitezza risulta plausibile, probabile o ragionevolmente ipotizzabile (ad esempio gli insiemi di stringhe su un alfabeto ben definito) e insiemi-E per i quali la infinitezza appare incerta.

In un discorso nel quale un raggruppamento di elementi di un insieme-E compare più volte risulta evidentemente conveniente presentare la totalità dei possibili suoi elementi attraverso un unico oggetto formale come si fa per le liste finite e gli insiemi finiti.

Ricordiamo che ogni insieme finito va considerato come un insieme-E di un tipo particolare.

Per ciascuno degli insiemi-E abbiamo giudicato lecito e sensato prendere in considerazione suoi elementi, sue restrizioni da considerare insiemi-E e da chiamare suoi sottoinsiemi, coppie e sequenze di suoi elementi, insiemi-E di tali sequenze che nel caso degli insiemi di coppie chiamiamo relazioni, coppie e sequenze aventi come componenti elementi suoi o di altri insiemi-E, insiemi-E di tali sequenze che risultano in grado di stabilire collegamenti tra suoi elementi e collegamenti tra suoi elementi con quelli di altri insiemi-E.
In particolare si possono esaminare relazioni tra elementi di insiemi-E che si possono considerare funzioni tra due insiemi-E o entro un solo insieme-E.

È dunque lecito (e come vedremo utile) prendere in considerazione composizioni tra insiemi-E e altre costruzioni formali che si servono di insiemi-E e altre nuove eventuali entità formali; in particolare si prendono in considerazione composizioni e costruzioni che estendono quelle che sono state introdotte per gli insiemi finiti servendosi della possibilità di fare riferimento ad elaborazioni algoritmiche atte ad individuarli.

B08f.02 Procediamo dunque a definire meglio con richieste poco stringenti, che intendono avere valore solamente programmatico, di prospettiva, senza pretendere di essere definitivi, il genere di entità che chiamiamo insiemi dotati di elementi o in breve **insiemi-E**.

Ad un insieme-E che identifichiamo con il segno E facciamo solo due richieste:

ad esso si possono associate altre entità oggetto di indagini individuate in modi condivisibili che chiamiamo elementi di E le quali sono condivisibilmente distinguibili dalle altre entità oggetto di indagini che condivisibilmente non possono essere considerate elementi di E e quindi sono qualificate entità estranee all'insieme E.

L'entità identificata da E serve a rappresentare la totalità dei propri elementi e nessun altro oggetto formale.
Si stabilisce che nessun insieme-E possa essere elemento di se stesso.

Evidentemente tutti gli insiemi finiti (forse si potrebbe escludere il solo insieme vuoto) si possono considerare insiemi-E.

Sostanzialmente al termine insieme-E affidiamo il compito di qualificare raggruppamenti di oggetti che proponiamo di prendere in considerazione condivisibilmente, ma senza impegnarci di definire più precisamente le proprietà in grado di caratterizzare tutti i loro elementi e solo essi.
La determinazione di queste proprietà viene lasciata aperta, mentre verrà richiesta per quelli che chiameremo insiemi-P.

Per i raggruppamenti che consideriamo insiemi-E non si intende giungere a definire un procedimento per la costruzione effettiva dei loro elementi come si è fatto per gli insiemi espliciti (mentre per quelli che chiameremo insiemi-G ci baseremo su procedure per la costruzione potenziale dei loro elementi [B17]).
Neppure si intende chiedere che a un insieme-E E si possa associare un algoritmo che per ciascuno degli oggetti che si possono candidare ad essere elementidi E decida la sua appartenenza o la sua estraneità; un tale algoritmo sarà invece richiesto per i cosiddetti insiemi-B.

Non si chiede di conoscere un algoritmo in grado di decidere della appartenenza o meno di una data stringa qualsiasi a un insieme-E.
Si chiede invece per un insieme-E che siano conosciuti alcuni significativi esempi di suoi elementi precedentemente introdotti. Inoltre si pretende che un insieme-E vada considerato una entità di un livello superiore, più composito, del livello dei suoi elementi; in tal modo si evita la possibilità di incontrare relazioni della forma $X \in X$ che si dimostrano in grado di condurre a contraddizioni interne.

Queste richieste consentono di dire che sono insiemi-E i complessi di entità cui si è accennato in g03 e in particolare i complessi individuati dal passaggio da un insieme alla totalità delle sue parti. Infatti può avere senso cercare dei sottoinsiemi di un insieme-E.
Occorre segnalare chen non si esclude la possibilità che una entità introdotta come insieme-E si riveli in seguito essere un insieme meglio caratterizzato, ad esempio un insieme-B.

La debolezza delle richieste che costituiscono la qualifica di insieme-E comporta maggiore cautela nelle conseguenze che si possono trarre da uno di questi insiemi.
In particolare si deve essere molto cauti con la possibilità di coinvolgere gli insiemi-E in attività elaborative, di considerarli ambienti per algoritmi e per argomentare su relazioni che coinvolgono insiem-E.

B08f.03 Un insieme-E si può considerare una unità lessicale che si intende adottare in una prima fase euristica di una indagine per denotare un raggruppamento di oggetti relativamente semplici, prima di cercare di attribuirgli un ruolo meglio definito che gli consenta di essere meglio utilizzato in successivi sviluppi.

Per facilitare una padronanza intuitiva di un insieme-E che denotiamo con E è ragionevole proporre di interpretare la relazione $x \in E$ con la metafora che assimila tale E a un contenitore e i suoi elementi a oggetti che collocati nel suo interno.

Conviene anche introdurre come utile elemento di riferimento il termine **classe degli insiemi-E**, raggruppamento nel quale collochiamo ogni entità che siamo in grado di considerare insieme-E; conveniamo inoltre di denotare concisamente con il simbolo **SetE** l'entità identificata dal suddetto termine.

Un insieme-E consente di rappresentare, in genere con vantaggio verbale, un raggruppamento, almeno mentale, di oggetti definiti in precedenza con sufficiente chiarezza.
I detti oggetti vengono di conseguenza chiamati **elementi dell'insieme** E e si dice che E è l'**insieme che contiene** ciascuno di questi oggetti non altro; equivalentemente si dice che questi oggetti sono l'insieme di tutti e soli gli **elementi che costituiscono l'insieme-E**.

Si dice anche che gli elementi che costituiscono l'insieme-E E si trovano con tale E in una relazione chiamata **appartenenza**; questa relazione, se x denota un generico elemento di E, si esprime concisamente con la notazione $x \in E$, da leggere "x appartiene a E" .

Accanto al connettivo $\in$ si introduce il connettivo $\ni$ e l'espressione della forma $E \ni x$ da considerare equivalente alla $x \in E$ e da leggere "E contiene x".

Inoltre si definiscono le relazioni opposte "$y \notin E$" da leggere "y non appartiene a E, oppure "y è estraneo a E", e la relazione "$E \not\ni y$" , per affermare che E non contiene y.

B08f.04 Gli insiemi-P, gli insiemi-B e gli insiemi-G (in genere infiniti) li qualifichiamo come insiemi motivati euristicamente.

Questa locuzione vuole segnalare che queste entità sono utilizzate nel corso di ampliameni delle nozioni algoritmico-matematiche per scopi definiti facendo riferimento ad esigenze e a prospettive, non tanto a precise componenti.
Nel corso delle argomentazioni mediante questi insiemi, prima di disporre di maggiori certezze, assegnamo loro esclusivamente ruoli di strumenti espositivi.

Prima di introdurli conviene segnalare che si potrebbero evitare procedendo in due modi ben diversi.

Un primo modo cerca di portare avanti solo argomentazioni costruttive che hanno come scopo diretto la precisazione di nuovi algoritmi via via più articolati e atti a risolvere i problemi che continuano a presentarsi.
In questo modo si è costretti a formulare discorsi tendenzialmente prolissi, gravati da rilevanti appesantimenti verbali, sia quando si espongono considerazioni per finalità generali, che quando si forniscono indicazioni sopra specifiche elaborazioni che consentono di risolvere concretamente nuovi problemi.

Un secondo modo si serve degli strumenti della logica per riuscire a definire quelli che per ora, solo in prospettiva chiamiamo **insiemi astratti**, entità formali introdotte come entità caratterizzate dal fatto di soddisfare uno specifico sistema di assiomi, enunciati che devono essere formulati con grande accuratezza.

Gli insiemi astratti risultano in grado di svolgere un ruolo primario per gli stessi fondamenti della matematica e dalla prima parte del secolo XX vengono ampiamente utilizzati per la impostazione rigorosa di gran parte della matematica stessa, nonché della fisica, dell'informatica e di tutte le loro applicazioni più accurate.

Una introduzione degli insiemi astratti viene presentata nel capitolo B65 basandosi sul cosiddetto sistema di assiomi ZFC e consente di unificare gran parte delle proprietà che abbiamo introdotte per gli insiemi finiti e che si trovano esaminando gli insiemi adottati euristicamente.

B08f.05 I nomi e le caratteristiche degli insiemi adottati euristicamente potranno essere utilizzati in tutti i casi nei quali si rende necessario discutere i limiti operativi del loro utilizzo, limiti che l'impostazione assiomatica in genere si astiene dall'analizzare.

In questa *esposizione*, pensando che la definizione assiomatica degli insiemi possa essere giudicata alquanto impegnativa per un primo approccio a molte entità matematiche di larga applicazione, si è scelto di anticipare l'introduzione di questi accennati insiemi a un livello poco soddisfacente sul piano del rigore formale, manella speranza di presentare sviluppi di più facile lettura.

Nella visione complessiva della nostra *esposizione* gli insiemi adottati euristicamente sono dunque da considerare nozioni provvisorie che più avanti potranno essere arricchite di tutte le proprietà dimostrabili per gli insiemi astratti in conseguenza del fatto di poterli considerare casi particolari delle entità che soddisfano gli accennati assiomi per gli insiemi.

Conviene anche segnalare che negli ultimi decenni sono stati proposti approcci ai fondamenti della matematica e alla logica che si servono di entità diverse dagli insiemi, oppure che si servono di teorie degli insiemi basate su sistemi di assiomi diversi da ZFC.
Alcuni di questi approcci vogliono essere più generali e presentano vantaggi sul piano della teoria. Altri sono proposti in quanto aprono la possibilità di affrontare questioni diverse dalle tradizionali, cioè questioni affrontate dalla fisica classica, ampiamente utilizzati dall'ingegnaria e ben consolidate anche per molte esigenze applicative.

B08f.06 I primi insiemi-E non finiti che si devono prendere in considerazione sono i già trattati insiemi ambiente.
Per essi si chiede vi sia ampia condivisione del considerare i loro elementi come oggetti formali chiaramente definiti, molto omogenei, tendenzialmente semplici e ben riconoscibili.

Dato un alfabeto A e data una stringa qualsiasi è chiaramente accertabile se tutti i suoi caratteri appartengono ad A o qualcuno di essi non gli appartiene. Quindi le stringhe su A soddisfano tutte le richieste precedenti e la loro totalità si può considerare un insieme ambiente.

Un tale insieme viene denotato con A^* e viene chiamato anche con il termine algebrico **monoide libero su un alfabeto** A [B41a05, c10a08]. Va inoltre segnalato che per i suoi sottoinsiemi si usa spesso il termine linguaggi su A [C10a].

Se in particolare A è costituito da un solo carattere, la tacca |, si ha l'insieme delle rappresentazioni unadiche degli interi naturali, entità che si può denotare con la scrittura "$\{|\}^*$" o con la più semplice "$|^*$".

Accanto alla rappresentazione unadica risulta ben più pratico prendere in considerazione le notazioni posizionali degli interi naturali in una qualsiasi base B, con B intero positivo maggiore o uguale a 2 [B10].

Molto spesso conviene prescindere da ogni tipo di notazione e a un livello un poco più astratto servirsi di $\mathbb{N}$ per denotare l'insieme dei numeri naturali e trattarli prescindendo dalle loro notazioni.

B08f.07 Abbiamo definito **insieme infinito** un insieme-E tale che si possa individuare un procedimento che lo pone in biiezione con una sua parte propria.

Mostriamo che A^* e $\mathbb{N}$ sono insiemi-E infiniti attraverso la individuazione di alcune biiezioni tra ciascuno di essi ed una sua parte propria.
Più precisamente presentiamo semplici algoritmi che consentono di trasformare ogni elemento di un A^* in un altro suo elemento in modo da porre l'intero insieme in biiezione con una sua parte propria.

Denotiamo con $\mathfrak{A}$ uno degli algoritmi che vogliamo individuare e con $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ la trasformazione che esso esercita sulle stringhe di A^*.
La trasformazione deve essere iniettiva, cioè deve trasformare due diverse stringhe su A v e w in due diverse stringhe $v' := T_{\mathfrak{A}}(v)$ e $w' := T_{\mathfrak{A}}(w)$.

La precedente richiesta equivale a richiedere che $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ sia una trasformazione invertibile. Più precisamente chiediamo che sia una **trasformazione algoritmicamente invertibile**, cioè che si trovi un algoritmo $\mathfrak{A}'$ che abbia effetto inverso a quello di $\mathfrak{A}$; inoltre deve essere una trasformazione nonsuriettiva.

Gli oggetti ottenuti con una di queste trasformazioni possono considerarsi gli elementi di un insieme-E che denotiamo con $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}(\mathsf{A}^*)$.

Queste considerazioni facilitano la individuazione di varie biiezioni di A^* o di $\mathbb{N}$ con una sua parte propria.

La trasformazione che denotiamo con $\lceil n \in \mathbb{N} \mapsto 2\,n \rceil$ che pone in biiezione la totalità dei naturali con i naturali pari.

La trasformazione che denotiamo con $\lceil n \in \mathbb{N} \mapsto 2\,n^3 \rceil$ pone in biiezione la totalità dei naturali con l'insieme-E degli interi che sono i doppi dei cubi dei naturali stessi.

La trasformazione che denotiamo con $\lceil w \in \mathsf{A}^* \mapsto w \,{\scriptstyle|}\, w \rceil$ pone in biiezione la totalità delle stringhe su A con le stringhe replicate, cioè della forma ww.

La trasformazione che denotiamo con $\lceil w \in \mathsf{A}^* \mapsto w \,{\scriptstyle|}\, w^{\leftarrow} \rceil$ che pone in biiezione la totalità delle stringhe su A con la totalità delle stringhe su A palindrome.

Si constata che tutte le trasformazioni precedenti, oltre che nonsuriettive, sono trasformazioni algoritmicamente invertibili, ossia che si individuano facilmente algoritmi con gli effetti inversi, ciascuno dei quali consente di trasformare ogni elemento di un $T_{\mathfrak{A}}(\mathsf{A}^*)$ in una stringa su A garantendo che $T_{\mathfrak{A}}$ pone in biiezione A^* con una sua parte propria.

Le trasformazioni sopra individuate si dicono quindi **trasformazioni invertibili e nonsuriettive**.

B08f.08 Diciamo insieme definito da proprietà, termine per il quale useremo in genere l'abbreviazione **insieme-P**, un insieme-E al quale si chiede di essere costituito da tutti e soli gli elementi di un insieme ambiente U che soddisfano un determinato complesso di proprietà $\mathcal{P}$ al quale si richiede di essere definito con "chiarezza ampiamente condivisibile".

Gli stessi insiemi A^* e $\mathbb{N}$ sono da considerare insiemi-P infiniti.
Sono da considerare insiemi-P infiniti anche i vari sottoinsiemi ottenuti con le biiezioni nonsuriettive individuate nel paragrafo precedente.

Si osserva che anche gli insiemi finiti vanno considerati insiemi-P: infatti ogni insieme finito è caratterizzato dalla proprietà consistente nella possibilità di verificare che tutti i suoi elementi ed essi soli occorrono come componenti di una lista che lo rappresenta.

Conviene ribadire che le definizioni di insieme-E e insieme-P sono tutt'altro che stringenti.
Ad un insieme-E si chiede di comprendere oggetti con caratteristiche costitutive precedentemente identificate lasciate al giudizio di chi adotta un tale insieme.

Gli insiemi-P sono definiti ricorrendo a complessi di proprietà definiti con una "chiarezza ampiamente condivisibile" che dipende da attività di controllo della condivisibilità che dovrebbero essere svolte caso per caso.

L'utilizzo di un insieme-P è dunque condizionato dallo svolgimento della suddetta attività di controllo che potrebbe fallire e quindi possono essere utilizzati solo in sviluppi euristici attraverso argomentazioni che devono essere continuamente e accuratamente vagliate.

Per quanto riguarda gli insiemi ambiente primari A^* e $\mathbb{N}$ si può dire che sono ampiamente giudicati degli insiemi-P individuati in modo ben preciso[F.06]. Inoltre si chiede che un simile giudizio si deve applicare a tutti gli insiemi da dichiarare insiemi ambiente.

A questo punto si pone l'obiettivo di procedere alla definizione di nuovi insiemi ambiente in relazione al presentarsi di nuovi problemi da risolvere con procedimenti affidabili i quali non possono essere collocati in ambienti precedentemente introdotti.

Risulta opportuno anche prendere in considerazione l'insieme (o una collezione-P) se pensiamo che le caratteristiche degli insiemi ambiente siano condivisibilmente ben definite.

L'insieme degli ambienti va considerato secondo un'ottica evoluzionistica come un insieme finito che si amplia ogni volta che si decide mediante una convenzione ben formulata di introdurre un nuovo insieme con l'intenzione di utilizzarlo come insieme ambiente nel quale si possano individuare sottoinsiemi da considerare insiemi-E e particolarmente insiemi-P e insiemi finiti.
La collezione degli insiemi ambiente può anche essere qualificata come **insieme potenzialmente infinito**.

Possiamo già prevedere che la collezione degli insiemi ambiente cresca progressivamente mediante costruzioni che seguono schemi da ritenere altamente affidabili: in particolare si individuano insiemi ambiente ottenuti come prodotti cartesiani di precedenti insiemi ambiente; insieme ambiente della totalità dei sottoisiemi di un insieme ambiente; insieme ambiente della totalità delle funzioni tra due insiemi ambiente.

B08f.09 Un insieme-P M viene dunque individuato dall'ambiente U nel quale devono trovarsi i suoi elementi e da un complesso di proprietà $\mathcal{P}$. Esso si può quindi individuare come una cosiddetta **terna-IPUP** $\langle M, U, \mathcal{P}\rangle$.

Consideriamo due insiemi-P facenti parte dello stesso ambiente U, M_1 determinato dal complesso di proprietà $\mathcal{P}_1$ ed M_2 determinato dal complesso di proprietà $\mathcal{P}_2$; si dice che M_1 è sottoinsieme di M_2 sse si mostra che le proprietà P_1 sono non meno stringenti delle proprietà P_2, ovvero che le P_1 implicano le P_2.
Questa situazione si esprime concisamente scrivendo $M_1 \subseteq M_2$.

Se più precisamente si trovano elementi di M_2 che non appartengono a M_1 si dice che M_1 è sottoinsieme proprio di M_2 e si scrive $M_1 \subset M_2$.

Possiamo affermare che gli insiemi ambiente si possono considerare particolari insiemi-P che non sono vincolati da proprietà con effetto restrittivo; quindi possiamo dire che un insieme ambiente U è individuato da una terna-IPUP della forma $\langle U, U, \emptyset\rangle$.

Una relazione tra insiemi-P $M_1 \subseteq M_2$ potrebbe formularsi come relazione tra terne-IPUP della forma

$$\langle M_1, U, \mathcal{P}_1\rangle \subseteq^{ce} \langle M_2, U, \mathcal{P}_2\rangle .$$

Qui $\subseteq^{ce}$ denota la **estensione cartesiana** della relazione tra insiemi $\subseteq$ a terne di insiemi. Queste estensione si può applicare a tutte le relazioni tra insiemi, a tutte le operazioni tra insiemi e alle n-uple quale che sia n. Essa inoltre si può applicare a tutte le operazioni delle varie arietà. [V.a. B25b01]

Da una proprietà relazione come la precedente è lecito derivare relazioni tra rispettivi complessi di proprietà della forma $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2$.

Possiamo anche aggiungere che un insieme-E E_1 si considera sottoinsieme di un insieme-E E_2 sse le caratteristiche costitutive degli elementi del primo sono attendibilmente considerate più restrittive di quelle per gli elementi del secondo.

Dato un insiemi-P individuato da una terna-IPUP $\langle M, U, \mathcal{P} \rangle$ si ottengono suoi sottoinsiemi aggiungendo a $\mathcal{P}$ ulteriori richieste.
Evidentemente sono preferibili richieste aggiuntive che si possono controllare agevolmente, in quanto queste consentono di sperare di stabilire se elementi dell'insieme-P di partenza appartiengono o meno all'insieme-P più ristretto.

B08f.10 Quanto sopra apre la possibilità di prendere in considerazione vari sottoinsiemi degli insiemi-P, sulle orme di quanto effettuato per gli insiemi finiti. Per ciascuno di questi si è introdotto anche l'insieme dei sottoinsiemi e di questo insieme si è data una valutazione precisa del cardinale.

È quindi ragionevole porsi il problema del controllo della collezione delle parti per ciascuno degli insiemi-P e in particolare porsi il problema della valutazione del suo cardinale.

Possiamo anticipare che dagli insiemi-P infiniti ci si aspetta che possano estendere in modo rilevante la gamma degli insiemi trattabili affidabilmente, andando oltre la collezione degli insiemi finiti.

Gli insiemi-P infiniti quindi sono portatori di forti aspettative e vedremo che la adozione di molti di essi nella presentazione delle nozioni di interesse generale consente di procedere ben oltre le meticolosità e le pesantezze che si incontrerebbero se si facesse riferimento ai soli insiemi finiti per organizzare le conoscenze utili per i processi reali o realizzabili, evidentemente finiti.

Va detto tuttavia che la opportunità di trattare solo oggetti finiti e e insiemi finiti viene sostenuta dal filone della di filosofia matematica chiamato **finitismo**.
La posizione finitista è minoritaria, ma possiede il merito di sostenere il rispetto del fatto che le elaborazioni sostenute dalla matematica sono processi che possono essere formulati e comunicati solo attraverso descrizioni finite e che si possono servire solo di risorse finite (di tempo, di memorie,di complessi di istruzioni, ...).

B08f.11 Introduciamo ora un altro tipo di insiemi che chiamiamo tipo degli insiemi con l'appartenenza decidibile; per ciascuno di questi insiemi useremo spesso l'abbreviazione **insieme-B** (dall'inglese belonging).

Definiamo come insieme-B facente parte di un ambiente U un insieme-E $^{\searrow}$ B per il quale si conosce (almeno) un algoritmo in grado di decidere (in un numero finito di passi) per qualsiasi elemento di U se si tratta di un suo elemento o di un oggetto estraneo.

Questa decisione si dice riguardare il **problema dell'appartenenza** per l'insieme in questione B.

Si osserva che per individuare uno specifico insieme-B da utilizzare per qualche scopo ben determinato occorre adottare una cosiddetta **terna-IBUA**, oggetto della forma $\langle B, U, \mathfrak{A} \rangle$, dove B denota l'insieme-P che si sta definendo, U l'ambiente nel quale si devono trovare i suoi elementi ed $\mathfrak{A}$ l'algoritmo in grado di decidere il suo problema di appartenenza.

Si osserva innanzi tutto che ogni insieme-B è un particolare insieme-P: la proprietà che caratterizza i suoi elementi è quella di essere riconosciuti come tali dall'algoritmo in grado di decidere il problema dell'appartenenza.

Si osserva anche che la definizione di un insieme-B è si presenta più impegnativa della definizione di un insieme-P, in quanto richiede un algoritmo, cioè una entità che deve essere individuata in modo preciso e stringente [B02a06], più di quanto si richieda alla poco circoscritta proprietà che deve possedere un insieme-P.
Va anche segnalato che si trovano insiemi-P che non possono essere dotati di alcun algoritmo della appartenenza [C21f].

B08f.12 Anche la definizione degli insiemi-B contiene una richiesta piuttosto vaga: dell'algoritmo che entra nella definizione non si precisa alcuna caratteristica costitutiva.
Vedremo che si possono individuare molti insiemi-P altamente affidabili in quanto collocati in ambienti altamente affidabili e dotati di algoritmi dell'appartenenza accuratamente definiti e anche ben collaudati.
Si osserva che la collezione degli insiemi-B effettivamente identificati va considerata un insieme finito che ci si aspetta 'o crescere nel tempo.

Dunque la definizione degli insiemi-B va considerata solo orientativa, in grado di indicare prospettive, ma che non pretende di essere costruttiva. I confini della loro collezione possono essere ampliati, ma sono destinati a rimanere incerti.

Come interpretazione della relazione $x \in E$ si propone la metafora che assimila l'insieme-B B a un contenitore in grado di contenere elementi dell'ambiente U e per il quale si dispone di un meccanismo selettivo che quando gli si propone un generico oggetto y dall'ambiente perchè sia accolto in E decide effettivamente (in un numero finito di passi) se va accolto e quindi si afferma $y \in E$ e , oppure se va rifiutato e quindi si enuncia $y \notin E$.

Va osservato che ogni insieme-B si può considerare un insieme-P: in effetti da una terna-IBUA $\langle B, U, \mathfrak{A} \rangle$ si può ricavare la terna-IPUP $\langle B, U, \mathcal{P} \rangle$ definendo $\mathcal{P}$ la proprietà di decidibilità dell'appartenenza ottenuta con l'algoritmo $\mathfrak{A}$.

B08f.13 La definizione di insieme-B consente di affermare che gli insiemi espliciti e gli esplicitabili (anche i singoletti e $\emptyset$) sono particolari insiemi-B, in quanto la disponibilità attuale o potenziale di una lista dei suoi elementi può considerarsi la base di un algoritmo in grado di accettare o rifiutare gli elementi dell'ambiente U.

Risulta anche evidente che si possono considerare insiemi-B anche gli ambienti e in particolare A^* e $\mathbb{N}$. Infatti per ogni alfabeto A chiaramente definito è decidibile in un numero finito di passi cosa si intende per stringa su A e dato un oggetto formale, cioè un qualsiasi oggetto condivisibilmente riconoscibile come stringa, si può riconoscere se va o non va considerata stringa su A.

È evidente che sono insiemi-B anche i sottoinsiemi degli A^* e di $\mathbb{N}$ individuati in f07; dalle espressioni dei sottoinsiemi degli ambienti ivi introdotti si possono anche ricavare senza difficoltà gli algoritmi che consentono di precisare le corrispondenti terne-IBUA.

Come si è detto [B08f07], gli oggetti ottenuti con una di queste trasformazioni possono considerarsi gli elementi di un insieme-B che denotiamo con $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}(\mathsf{A}^*)$.
Infatti le stringhe trasformate si possono considerare elementi di insiemi-B, in quanto si può decidere se una stringa qualsiasi σ appartiene a A^* e se più precisamente le si può applicare $\mathfrak{A}\prime$ e solo in tal caso si decide se $\sigma \in T_{\mathfrak{A}}(\mathsf{A}^*)$.

Si osserva che tutte le trasformazioni nonsuriettive presentate in f07 sono algoritmicamente invertibili.

Si nota anche che tutti i sottoinsiemi ottenuti sono insiemi-P infiniti; infatti risulta facile per ciascuno di essi trovare una trasformazione biiettiva con una sua parte propria; sostanzialmente queste trasformazioni corrispondono a rafforzamenti delle proprietà richieste ai loro elementi.

B08f.14 Gli ambienti primari A^* e $\mathbb{N}$ sono particolarmente importanti anche in quanto consentono di definiremolti ambienti compositi nei quali si colloca gran parte delle entità formali che consentono di modellare e risolvere i problemi ben definiti dei quali si occupa l'*apparato*.

Sul piano delle notazioni risulta conveniente servirsi di espressioni come la $w \in \mathsf{A}^*$ per introdurre e contestualizzare una stringa formata da un numero imprecisato di caratteri appartenenti all'alfabeto A che si intende utilizzare in una costruzione o in una argomentazione.

Con una notazione come la precedente si ha il vantaggio di non essere costretti a considerare stringhe di insiemi $\mathsf{A}^{\leq s}$ per singole lunghezze s, insiemi che hanno il vantaggio di essere finiti ed espliciti, ma le cui distinzioni possono essere sostanzialmente prive di interesse.
In effetti la semplice scrittura A^* può dare un buon contributo alla formulazione di enunciati concisi e pertinenti.

Si può anche osservare che un costrutto come $w \in \mathsf{A}^*$ costituisce un arricchimento pratico ed espressivo del linguaggio degli enunciati dell'*apparato*.

B08f.15 Anche per la totalità dei numeri naturali si riscontrano sensibili vantaggi per la trattazione di proprietà generali delle molteplici elaborazioni che prevedono calcoli numerici e per le loro applicazioni ai moltissimi problemi che richiedono valutazioni quantitative.

Per l'insieme dei numeri naturali e per gli insiemi loro collegati adotteremo varie utili notazioni.

Per presentare l'insieme dei naturali si è introdotta la scrittura $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\}$ atta a ricordare gli elementi che lo costituiscono; inoltre si usa la scrittura $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ nella quale si attribuisce ad n il compito di rappresentare un elemento generico di $\mathbb{N}$, cioè un elemento che si intende lasciare imprecisato.

Risulta evidentemente utile adottare notazioni simili per vari insiemi-B numerici collegati a $\mathbb{N}$:

$\mathbb{P} := \{1, 2, 3, ...\}$ per l'insieme dei numeri interi positivi, una parte di $\mathbb{N}$;

$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1 - 0, 1, 2, 3, ...\}$ per la totalità dei numeri interi (relativi), un insieme-B che amplia motivatamente $\mathbb{N}$;

$\mathbb{Z}_- := \{..., -3, -2, -1\}$ per l'insieme dei numeri interi negativi;

$\mathbb{Z}_{-0} := \{..., -3, -2, -1, 0\}$ per l'insieme dei numeri interi nonpositivi.

B08f.16 Esaminiamo alcune biiezioni tra insiemi collocati negli ambienti primari $\mathbb{N}$ e A^*.

Una biiezione tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e gli elementi del suo sottoinsieme proprio $\mathbb{P}$ è data dalle coppie $\langle n, n+1\rangle$, ove n è un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$; tali coppie costituiscono un insieme-B, che più precisamente si qualifica come relazione-B, la relazione “intero successivo”.

La funzione che a ogni intero positivo n associa il suo quadrato n^2 pone $\mathbb{P}$ in biiezione con un suo sottoinsieme proprio dal quale sono estranei interi come 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10,... .

Conclusione simile per le funzioni che a ogni intero positivo n fanno corrispondere il suo doppio, il suo multiplo $k\,n$ per ogni $k = 3, 4, ...$ oppure il suo fattoriale, oppure ... .

$\mathbb{N}$ viene messo in biiezione con $\mathbb{Z}$ dalla funzione

$$\beta_{NtZ}(n) := \begin{cases} 2\,n & \text{sse } n \geq 0 \\ 2|n| - 1 & \text{sse } n < 0 \end{cases} = \left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \dots \end{matrix} \right\downarrow$$

Veniamo a un alfabeto $\mathsf{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e all'insieme A^* delle sue stringhe.
Ad una generica stringa w di A^* si può dare la forma $a_{j_1}\, a_{j_2} \ldots a_{j_s}$, dove ogni j_h denota un qualsiasi intero tra 1 ed n e quindi ogni a_{j_h} individua un qualsiasi carattere di A. Alla suddetta stringa generica w si può associare la stringa di lunghezza pari della forma $a_{j_1}\, a_{j_1}\, a_{j_2}\, a_{j_2} \ldots a_{j_s}\, a_{j_s}$.

È allora evidente che A^* viene posto in biiezione con il suo sottoinsieme delle di stringhe su A di lunghezza pari dalla relazione costituita dalle coppie di stringhe della forma

$$\left\langle a_{j_1}\, a_{j_2} \ldots a_{j_s}\ ,\ a_{j_1}\, a_{j_1}\, a_{j_2}\, a_{j_2} \ldots a_{j_s}\, a_{j_s} \right\rangle$$

con gli indici variabili come si è detto.

Analoghe conclusioni per la funzione che a una stringa w associa la stringa w^2, oppure la palindroma $w \lrcorner w^{\leftarrow}$, oppure la stringa $v\, w$ con v stringa su A arbitrariamente fissata, oppure tanti altri arricchimenti delle stringhe w.

B08f.17 La distinzione tra insiemi finiti e insiemi infiniti è una tipica distinzione dicotomica.

Ad ogni insieme infinito non è possibile assegnare un intero naturale che caratterizzi il numero dei suoi suoi elementi, in quanto questa è una caratteristica esclusiva degli insiemi (finiti) equivalente al fatto che non si possono mettere in biiezione con qualche loro sottoinsieme proprio.

Quindi anche la possibilità di avere un numero naturale che caratterizza il proprio cardinale costituisce una determinante distinzione dicotomica tra gli insiemi-P.

Vedremo però che anche agli insiemi infiniti si può attribuire una entità cheviene chiamata cardinale costituente una valutazione di notevole interesse che non consiste in un numero naturale ma che si può collocare in un insieme che amplia $\mathbb{N}$.

Le proprietà che caratterizzano un insieme-P sono da considerare affidabilmente ben definite se si possono collegare alla possibilità di effettuare elaborazioni molto semplici in grado di verificarle.
Gli insiemi A^* e $\mathbb{N}$, attraverso loro composizioni semplici e condivisibilmente affidabili, consentono di definire nuove nozioni, nuove proprietà e nuovi generi di insiemi che possono essere esaminate con argomentazioni affidabili e, in prospettiva, con dimostrazioni fondate sulla logica.

Va detto che il modo di procedere adottato che dà credito alla potenzialità delle argomentazioni e delle conseguenti elaborazioni, "come insegna la storia", conduce a una ampia messe di nozioni condivisibili, di costruzioni affidabili, di soluzioni di problemi e di successi applicativi.

B08f.18 Come esempio di insieme-P, cioè di insieme che contiene oggetti che ubbidiscono a "regole ben definite" ovvero che godono di "proprietà ben determinate", sono di particolare interesse per le applicazioni gli insiemi di dati empirici.
Un esempio significativo di questi insiemi è fornito dalla denominazione insieme dei comuni italiani.

Questi insiemi che derivano da osservazioni sul mondo reale devono essere insiemi-P finiti, mentre le regole cui devono ubbidire vanno considerate "ben definite" quando sono definite le modalità da seguire per la individuazione di tutti i loro elementi e di essi soli.

Si osserva che l'insieme dei comuni italiani viene definito , molto più concisamente dalla sua denominazione che dalla relativa lista esplicita che raccoglie le circa 8000 stringhe che costituiscono le loro denominazioni ufficiali; la sua denominazione infatti può fare riferimento ad atti amministrativi formalmente attendibili in quanto garantiti da precise leggi italiane.

Naturalmente per molte applicazioni pratiche e nelle circostanze che richiedono di evitare dubbi sui dettagli, la lista esplicita risulta indispensabile e non si può assolutamente derivare formalmente dalla sola definizione, anche se completamente precisa e legalmente ineccepibile.

Una lista esplicita si rende necessaria, per esempio, per la normativa e gli adempimenti riguardanti le consultazioni elettorali: infatti le operazioni che coinvolgono gli aventi diritto al voto sono regolate dalle liste elettorali.

Per molte argomentazioni volte a stabilire enunciati per scopi generali o riguardanti la utilizzazione pratica di elaborazioni risulta decisamente opportuno prescindere dalla onerosità delle operazioni che devono essere eseguite per ottenere le costruzioni effettive.

In molte circostanze è opportuno rinunciare a distinguere , gli insiemi espliciti e gli esplicitabili dai restanti finiti per parlare comprensivamente solo di **insiemi finiti**, cioè di insiemi ai quali, almeno in linea di principio, si possa attribuire il numero dei loro elementi.

Occorre quindi procedere a introdurre notazioni e termini riguardanti queste entità protagoniste di moltissime argomentazioni.
Nella sezione successiva introdurremo le principali operazioni e relazioni tra insiemi infiniti al fine di stabilire loro proprietà generali.
Accade inoltre che queste nozioni e i conseguenti risultati sono in gran parte applicabili anche alle entità che chiameremo insiemi-B e che non sono riducibili agli insiemi finiti. Nel far questo introdurremo solo poche osservazioni sul costo delle elaborazioni che le effettive costruzioni implicherebbero.

B08f.19 Visti gli insiemi ambiente primari A^* e $\mathbb{N}$, nel seguito incontreremo altri insiemi ambiente molto importanti: oltre al noto insieme degli interi (relativi) $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e altri che sono definiti con costruzioni che si basano su gli ambienti suddetti. Tra questi vogliamo almeno segnalare i piani $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e lo spazio tridimensionale $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Tutti questi insiemi ambiente si possono considerare insiemi-B; infatti vedremo che a ciascuno di essi si può associare un algoritmo ricavabile facilmente dalla sua definizione che di fronte a ogni oggetto formale riesce a decidere se sia un suo elemento o meno.

Per questi insiemi ambiente viene usato anche il termine "totalità": ad esempio diremo che $\{a, b, c\}^*$ esprime la totalità delle stringhe contenenti le lettere a, b e c e che $\mathbb{Z}$ è costituito dalla totalità dei numeri interi.

Un altro insieme-B che conviene avere presente è l'insieme delle liste nella forma canonica che si serve del separatore "," e dei delimitatori $\langle$ e $\rangle$ e i cui items sono stringhe su un alfabeto A.
Questo insieme-B può essere denotato con $\mathbf{List}[\Big\langle ; \Big\rangle][\langle , \rangle][\mathsf{A}]$, notazione pesante a causa delle specificazioni di delimitatori e separatori; in effetti notazioni di questo tipo non vengono usate quasi mai e a esse si preferiscono semplificazioni che contano su abitudine e contesto come $\mathbf{List}[\mathsf{A}]$ e $\mathbf{List}$, in quanto in vari contesti è possibile individuare senza perplessità le specificazioni trascurate.

B08f.20 Tra gli insiemi-P si può introdurre la relazione "essere sottoinsieme di", relazione in completa sintonia con la relazione chiamata nello stesso modo per gli insiemi espliciti e individuabile con un insieme finito di coppie.

Conviene segnalare esplicitamente da subito che le definizioni dei connettivi relazionali *subset* e $\subseteq$ non implicano affatto che dati due insiemi-B E e F arbitrari sia possibile decidere se $E \subseteq F$ o se $E \subset F$.
Domande come $x \in E$? e $E \subseteq F$? portano a problemi che possono risultare molto impegnativi e che in taluni casi quando vengono posti a certi livelli di generalità si dimostra che non esiste un algoritmo che permetta di risolverli.

B08f.21 Negli sviluppi della matematica e della elaborazione dei dati accade di definire costruzioni diverse in grado di definire degli insiemi le quali in seguito a successivi chiarimenti si riconoscono come casi particolari di costruzioni di portata più generale.

In questi sviluppi talora si rende necessario essere precisi e circostanziati nella definizione degli ambienti entro i quali si argomenta. Spesso però certe lunghe precisazioni risultano tediose e per avere pagine leggibili, efficaci e non dispersive, si rende opportuno raggiungere dei compromessi tra precisione e concisione.

È quindi spesso importante individuare notazioni, termini e modi di dire che evitino di risultare pesanti e verbosi e riescano ad essere precisi quanto basta per evitare ambiguità sostanziali per un lettore in grado di padroneggiare il contesto.

La opportunità di raggiungere compromessi tra concisione e precisione emerge in molte situazioni.

In molti contesti la precisazione dell'ambiente si può lasciare implicita e si possono usare scritture semplificate della forma $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ che sottintendono l'ambiente del quale fanno parte le x. Per esempio in pagine espositive dedicate prevalentemente o esclusivamente ai numeri naturali è lecito supporre che una espressione come $\{n \mid n+k<100\}$ venga interpretata senza incertezze.

In molti casi la stessa espressione $\mathcal{P}(x)$ consente di individuare in modo convincente l'insieme nel quale si deve trovare l'entità denotata con la lettera x.
Talora invece la scrittura $\mathcal{P}(x)$ rappresenta una descrizione, eventualmente di tono colloquiale o ellittica, di un meccanismo che consente di decidere se per un particolare x vale o meno una proprietà.

B08 g. costruzioni su insiemi-P e insiemi-B

B08g.01 Procediamo ora a un ulteriore esame delle caratteristiche delle relazioni e delle operazioni che si possono introdurre per gli insiemi-P e per gli insiemi-B.

I primi saranno individuati mediante terne-IPUP [f09], cioè terne della forma $\langle M, U, \mathcal{P}\rangle$ dove M denota un insieme-P, U l'ambiente di appartenenza dei suoi elementi e $\mathcal{P}$ il complesso delle proprietà che caratterizza M.
In genere la definizione delle proprietà $\mathcal{P}$ rimane nel vago e quindi non si potranno raggiungere conclusioni molto stringenti.

Gli insiemi-B saranno invece individuati mediante terne-IBUA cioè terne della forma $\langle M, U, \mathfrak{A}\rangle$ dove M denota un insieme-B, U l'ambiente di appartenenza dei suoi elementi e $\mathfrak{A}$ l'algoritmo in grado di decidere l'appartenenza o meno ad M di un qualsiasi elemento di U.

B08g.02 Date due terne-IPUP $\langle M_1, U, \mathcal{P}_1\rangle$ e $\langle M_2, U, \mathcal{P}_2\rangle$ si dice che M_1 è sottoinsieme di M_2 sse ogni elemento di M_1 è elemento di M_2. In questo caso si scrive $M_1 \subseteq M_2$.

Questo viene garantito se si trova che $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2$.

Se si trova qualche elemento di M_2 che non appartiene a M_1 si dice che M_1 è sottoinsieme proprio di M_2 e si scrive $M_1 \subset M_2$. In un tale caso si può affermare che $\mathcal{P}_1$ è strettamente più stringente di $\mathcal{P}_2$.

Se si trova che $M_1 \subseteq M_2$ e $M_2 \subseteq M_1$ si può concludere affermando l'uguaglianza $M_1 = M_2$. Questo in termini di proprietà si traduce nella doppia implicazione $\mathcal{P}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_2$.

Se $M_1 \subset M_2$ si può considerare l'insieme-E ottenuto dalla eliminazione di M_1 da M_2 da denotare, come per gli insiemi finiti, con $M_2 \setminus M_1$. Questo insieme va considerato l'insieme-P definito dalla proprietà di soddisfare $\mathcal{P}_2$ ma non la $\mathcal{P}_1$.

B08g.03 Date due terne-IPUP $\langle M_1, U, \mathcal{P}_1\rangle$ e $\langle M_2, U, \mathcal{P}_2\rangle$ si dice **unione dei due insiemi** M_1 e M_2 l'insieme-E i cui elementi appartengono o a M_1, o a M_2 o a entrambi.

Questo insieme va considerato l'insieme-P i cui elementi sono caratterizzati dalla dalla proprietà "appartenere a M_1 o a M_2". Esso si denota con $M_1 \cup M_2$, similmente all'unione di due insiemi finiti.

Date due terne-IPUP $\langle M_1, U, \mathcal{P}_1\rangle$ e $\langle M_2, U, \mathcal{P}_2\rangle$ si dice **intersezione** di M_1 e M_2 l'insieme-P i cui elementi appartengono sia a M_1 che a M_2.

Questo insieme va considerato l'insieme-P i cui elementi sono caratterizzati dalla dalla proprietà "appartenere sia a M_1 che a M_2". Esso si denota con $M_1 \cap M_2$, similmente all'unione di due insiemi finiti.

Consideriamo ora i casi di unione e intersezione di insiemi-B facendo riferimento alle due terne-IBUA $\langle B_1, U, \mathfrak{A}_1\rangle$ e $\langle B_2, U, \mathfrak{A}_2\rangle$

(1) Prop.: L'unione $B_1 \cup B_2$ costituisce un insieme-B.

Dim.: Si tratta di individuare una terna-IBUA delle forma $\langle B_1 \cup B_2\ ,\ U\ ,\ \mathfrak{A}_\cup\rangle$.
Come algoritmo $\mathfrak{A}_\cup$ si assume il procedimento che di fronte ad una generica $\sigma \in U$ in una prima fase si serve di $\mathfrak{A}_1$ per decidere se $\sigma \in B_1$; in caso positivo decide che $\sigma \in (B_1 \cup B_2)$; in caso negativo effettua una seconda fase simulando $\mathfrak{A}_2$ per decidere se $\sigma \in B_2$ e in caso affermativo enuncia $\sigma \in (B_1 \cup B_2)$, mentre in caso negativo stabilisce che $\sigma \notin (B_1 \cup B_2)$ ▮

(2) Prop.: L'intersezione $B_1 \cap B_2$ costituisce un insieme-B.

Dim.: Si tratta di individuare una terna-IBUA delle forma $\langle B_1 \cap B_2\ ,\ U\ , \mathfrak{A}_\cap \rangle$.
Come algoritmo $\mathfrak{A}_\cap$ si assume il procedimento che di fronte ad una generica $\sigma \in U$ in una prima fase si serve di $\mathfrak{A}_1$ per decidere se $\sigma \in B_1$; in caso negativo stabilisce che $\sigma \notin (B_1 \cap B_2)$; in caso positivo effettua una seconda fase simulando $\mathfrak{A}_2$ per decidere se $\sigma \in B_2$ e in caso affermativo enuncia $\sigma \in (B_1 \cup B_2)$, mentre in caso negativo stabilisce che $\sigma \notin (B_1 \cup B_2)$ ▮

B08g.04 Dato un insieme-E $^{\searrow}$ E appartenente a un ambiente U si dice complemento di E entro U il sottoinsieme di U i cui elementi non appartengono a E.
Questo raggruppamento va considerato un insieme-E e si denota con $U \setminus E$, o anche con $E^{\complement}$ o con $\overline{E}$ quando è lecito sottintendere l'ambiente U.

Si consideri più specificamente una terna-IPUP $\langle M, U, \mathcal{P} \rangle$ e ci si chieda cosa si può dire sul complementare dell'insieme-P M $U \setminus M$.

(1) Prop.: Il complementare di un insieme-P è un insieme-P.

Dim.: Ci proponiamo di individuare una terna-IPUP della forma $\langle U \setminus M\ ,\ U\ ,\ \mathcal{P}_\setminus \rangle$.
Per la proprietà $\mathcal{P}_\setminus$ si assume la "appartenenza allo stesso ambiente U e la non appartenenza a E" ▮

Ancora più in particolare si consideri la terna-IBUA $\langle B, U, \mathfrak{A} \rangle$ e il problema del passaggio al complementare dell'insieme-B M entro l'ambiente U.

(2) Prop.: Il complementare dell'insieme-B M entro il suo ambiente è un insieme-B.

Dim.: Si tratta di individuare una terna-IBUA della forma $\langle U \setminus B\ ,\ U\ ,\ \mathfrak{A}_\setminus \rangle$.
L'algoritmo $\mathfrak{A}_\setminus$ si ottiene semplicemente facendo agire su una stringa $\sigma \in U$ l'algoritmo $\mathfrak{A}$ e modificando la sua risposta nella opposta ▮

B08g.05 Considerazioni analoghe alle precedenti consentono di definire tutte le operazioni booleane sopra (gli insiemi-E,) gli insiemi-P e gli insiemi-B e di trovare che rispettano l'appartenenza a ciascuna di queste classi di insiemi.
Si trovano inoltre al livello degli insiemi-E le proprietà che coinvolgono queste operazioni e la relazione "essere sottoinsieme".
I dettagli li lasciamo come esercizi

Dati due insiemi-E M_1 e M_2 si definisce come loro **prodotto cartesiano** e si denota con $M_1 \times M_2$ l'insieme-E costituito da tutte le coppie $\langle a_1, a_2 \rangle$ con $a_1 \in M_1$ e $a_2 \in M_2 \rangle$.

Se M_1 e M_2 sono insiemi-P determinati, risp., dalle terne-IPUP $\langle M_1, U_1, \mathcal{P}_1 \rangle$ e $\langle M_2, U_2, \mathcal{P}_2 \rangle$ il loro prodotto cartesiano è l'insieme-P individuato dalla terna-IPUP $\langle M_1 \times M_2, U_1 \times U_2, \mathcal{P}_\times \rangle$ dove $\mathcal{P}_\times$ denota la proprietà godute dalle le coppie $\langle a_1, a_2 \rangle \in U_1 \times U_2$ esprimibile come $\mathcal{P}_1(a_1) \wedge \mathcal{P}_2(a_2)$.

Se M_1 e M_2 sono insiemi-B determinati, risp., dalle terne-IBUA $\langle M_1, U_1, \mathfrak{A}_1 \rangle$ e $\langle M_2, U_2, \mathfrak{A}_2 \rangle$ il loro prodotto cartesiano è l'insieme-B individuato dalla terna-IBUA $\langle M_1 \times M_2, U_1 \times U_2, \mathfrak{A}_\times \rangle$ dove $\mathfrak{A}_\times$ denota l'algoritmo che decide se a_1 appartiene a M_1 servendosi dell'algoritmo AEf_1 e se a_2 appartiene a M_2 richiamando l'algoritmo AEf_2.

B08g.06 Consideriamo due alfabeti A_1 e A_2 e i corrispondenti ambienti ${\mathsf{A}_1}^*$ e ${\mathsf{A}_2}^*$.

(1) Prop.: $\mathsf{A}_1 \subset \mathsf{A}_2 \iff {\mathsf{A}_1}^* \subset {\mathsf{A}_2}^*$

Dim.: "$\Longrightarrow$": Evidentemente tutte le stringhe su A_1 fanno parte di ${\mathsf{A}_2}^*$, mentre le stringhe nelle quali compare almeno un carattere di $\mathsf{A}_2 \setminus \mathsf{A}_1$ non possono far parte di ${\mathsf{A}_1}^*$.
"$\Longleftarrow$": basta limitarsi alle stringhe di lunghezza 1 e constatare che $\mathsf{A}_1 \subset \mathsf{A}_2$ ▮

(2) Prop.: Siano A_1 e A_2 due alfabeti nonconfrontabili, cioè vi siano caratteri di A_1 estranei ad A_2 e caratteri di A_2 estranei ad A_1; allora

$$\mathsf{A}_1{}^* \ \cup\ \mathsf{A}_2{}^* \quad \subset \quad (\mathsf{A}_1 \ \cup\ \mathsf{A}_2)^* \ .$$

Dim.: Basta osservare che $(\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2)^* \ \setminus\ \left(\mathsf{A}_1{}^* \ \cup\ \mathsf{A}_2{}^*\right)$ è l'insieme di tutte le stringhe che contengono almeno un carattere di $(\mathsf{A}_1 \setminus \mathsf{A}_2)$ e almeno un carattere di $(\mathsf{A}_2 \setminus \mathsf{A}_1)$ ▮

(3) Prop.: Siano A_1 e A_2 due alfabeti.

$$(\mathsf{A}_1 \ \cup\ \mathsf{A}_2)^* \ = \ \mathsf{A}_1{}^* \ \cup\ \mathsf{A}_2{}^* \Longrightarrow \mathsf{A}_1 \subseteq \mathsf{A}_2 \quad \vee \quad \mathsf{A}_2 \subseteq \mathsf{A}_1$$

Dim.: Basta l'osservazione nella dimostrazione precedente ▮

B08g.07 Come si è giudicato utile e interessante estendere lo studio di un insieme finito con l'esame dell'insieme delle sue parti, così si è indotti a indagare sulla natura delle collezioni dei sottoinsiemi degli insiemi euristicamente adottati.

I primi insiemi delle parti che si è indotti a esaminare sono l'insieme degli insiemi di numeri interi e l'insieme dei sottoinsiemi del monoide libero A^* per ogni possibile alfabeto A.

Questi ultimi sono detti anche linguaggi [formali su A e la loro collezione si denota anche con $\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$.

Presumendo che possa interessare la totalità dei linguaggi sui vari possibili alfabeti, stabiliamo di denotare questa entità con **Lng**.
Ci si può chiedere in quale genere di insiemi si deve collocare **Lng**.
Per questo si osserva che il raggruppamanto dei simboli va considerato un insieme che in un dato momento storico è stato determinato dalle scelte effettuate dai numerosi agenti matematico-informatici e quindi è un insieme finito che può continuare a crescere.
Si può quindi ritenere che **Lng** sia un insieme di linguaggi su un alfabeto in continua crescita e quindi sia un insieme-P in continua crescita.
Non si può invece affermare che $\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$ sia un linguaggio-B in quanto si trovano linguaggi per i quali il problema della appartenenza non è risolvibile. crescita, in quanto ogni

B08g.08 Abbiamo visto che la collezione dei sottoinsiemi di un insieme finito è un insieme finito e che la collezione dei sottoinsiemi di un insieme esplicito è un insieme esplicitabile.

Si osserva che non ci sono obiezioni ad affermare che il raggruppamento dei sottoinsiemi di un insieme-E si può considerare un insieme-E.

Ci chiediamo invece cosa si possa dire degli insiemi-E costituiti dalle parti di un insieme-P o di un insieme-B.

Cominciamo da $\mathbb{N}$, un insieme-B relativamente semplice, che consideriamo costituito dalle stringhe unadiche.

Innanzi tutto esaminiamo il complesso degli insiemi finiti di numeri naturali che denotiamo con $\mathfrak{P}_F(\mathbb{N})$ e chiediamo che ciascuno di questi insiemi sia rappresentato dalla forma canonica di una lista nonripetitiva dei suoi elementi, ovvero di stringhe unadiche. Su questo si giunge a un risultato positivo.

(1) Prop.: Il complesso $\mathfrak{P}_F(\mathbb{N}$ costituisce un insieme-B.

Dim.: Si tratta di individuare un algoritmo che data una stringa qualsiasi σ, decida se rappresenta o meno un insieme finito di interi naturali.
Le restrizioni che abbiamo imposto alle stringhe costituenti $\mathfrak{P}_F(\mathbb{N})$ riassumibili nella forma $\left\langle u_1, u_2, ..., u_s \right\rangle$ portano a un algoritmo che deve scorrere la stringa cercando di trovare inizialmente

il delimitatore $\langle$, poi un certo numero (0, 1, 2, ...) di unr separate da "," garantendo che sono diverse tra di loro e infine il delimitatore $\rangle$ ▮

Queste argomentazioni non possono essere estese per farci concludere che l'intero complesso degli insiemi finiti e infiniti di numeri naturali sia un insieme-B, in quanto l'esame delle successive componenti di una rappresentazione illimitata di unr non può ottenersi con un numero finito di passi e quindi è al di fuori della portata degli algoritmi.

B08g.09 Le argomentazioni precedenti si possono estendere abbastanza facilmente alla considerazione del complesso dei sottoinsiemi di un qualsiasi insieme-B.

Consideriamo dunque un insieme-B E determinato da una terna-IBUA $\langle E, U, \mathfrak{A} \rangle$ e denotiamo poi con $\mathfrak{P}_F(E)$ il complesso dei sottoinsiemi finiti di E chiedendo che ciascun sottoinsieme sia espresso o da una lista esplicita dei suoi elementi o da una regola dalla quale sia possibile ricavare la corrispondente lista. Per questo secondo caso parliamo di rappresentazione algoritmicamente interpretabile dell'insieme finito, osservando di avere dato una definizione fiduciaria, che va verificata in ciascun caso specifico.

Con un discorso poco più articolato di quello usato per il caso delle unr dei numeri naturali si ottiene quanto segue

(1) Prop.: La collezione $\mathfrak{P}_F(E)$ costituisce un insieme-B ▮

Anche in questo caso più generale la dimostrazione non si può estendere ai raggruppamenti di sottoinsiemi arbitrari, anche infiniti, di un insieme-B.
Ancora non si può proporre per gli insiemi infiniti rappresentabili da liste illimitate un algoritmo simile a quello utilizzabile per i sottoinsiemi finiti.

Gli insiemi delle parti degli insiemi-B e in genere degli insiemi infiniti richiedono indagini dipendenti dai singoli insiemi.

Conviene presentare anche un caso particolarmente importante del precedente enunciato.

(2) Prop.: L'insieme-E degli insiemi finiti di stringhe su un qualsiasi alfabeto A, $\mathfrak{P}_F(\mathsf{A}^*)$ costituisce un insieme-B ▮

Si consideri un insieme ambiente U che potrebbe coincidere con $\mathbb{N}$ o con $un\mathsf{A}^*$ per A alfabeto qualsiasi.

Consideriamo un E sottoinsieme di U e il suo complementare entro U.
Per esempio il complementare dei naturali pari entro $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri positivi dispari e l'insieme complementare entro l'insieme $\{a, b\}^*$ dell'insieme delle stringhe che iniziano con il carattere a è l'insieme costituito dalle stringhe che iniziano con b e dalla stringa muta.

Si dice **insieme cofinito** entro l'ambiente U il complementare di ogni sottoinsieme finito di U.

Eserc. 3 Dimostrare che il complesso dei sottoinsiemi cofiniti di $\mathbb{N}$ e di un A^* o di un qualsiasi insieme-B E è un insieme-B.

B08g.10 Resta comunque l'aspirazione a poter attribuire anche a raggruppamenti come $\mathfrak{P}(E)$ la qualifica di insieme.

In particolare può accadere di trovarsi di fronte a due sottoinsiemi infiniti S_1 e S_2 di $\mathbb{N}$ (o di un qualunque altro insieme-B infinito) individuati da due diversi algoritmi $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ e porsi il problema di decidere se contengono gli stessi elementi, se tutti gli elementi di S_1 appartengano a S_2, se viceversa tutti gli elementi di S_2 appartengano a S_1 oppure se vi siano elementi di S_1 estranei a S_2 ed elementi di S_2 che non appartengono a S_1.

Se S_1 ed S_2 si possono considerare in qualche modo degli insiemi per essi si possono adottare le notazioni introdotte per gli insiemi finiti ed estese agli insiemi-B e con esse il problema può formularsi:

Decidere se $S_1 = S_2$, oppure $S_1 \subset S_2$, oppure $S_1 \supset S_2$, oppure $S_1 \not\lessgtr S_2$.

In effetti si incontrano moltissimi problemi che risulta vantaggioso formulare, analizzare e possibilmente risolvere servendosi di un complesso di termini e di notazioni che estendono quelli introdotti per gli insiemi finiti.

Tra questi problemi molti riguardano insiemi di insiemi, spesso nei casi più particolari di insiemi di relazioni, di insiemi di funzioni, di insiemi di biiezioni.

Per esempio risulta evidentemente comodo parlare dell'insieme delle relazioni tra numeri interi, dell'insieme delle funzioni da interi a interi, dell'insieme delle biiezioni tra interi naturali e stringhe su un dato alfabeto.

La possibilità di ampliare la gamma degli ambienti nei quali collocare le entità matematiche fornita dalle costruzioni prodotto cartesiano e passaggio da un insieme all'insieme delle sua parti ampliano ulteriormente la gamma dei problemi per i quali risulta vantaggioso disporre di un linguaggio allargato che riguarda gli insiemi.

B08g.11 Una attenzione particolare merita la questione se sia opportuo o lecito pensare a un insieme di tutti gli insiemi.
Si può subito osservare che questo presunto insieme ha la caratteristica di contenere se stesso. Se lo si indica con $\mathbf{U}$ risulta lecito chiedersi se sia $\mathbf{U} \in \mathbf{U}$, oppure se all'opposto sia $\mathbf{U} \notin \mathbf{U}$.

Occorre tuttavia segnalare che questo atteggiamento "permissivo", che alla fine del secolo XIX sembrava accettabile o addirittura veniva implicitamente accettato, in particolare da Georg Cantor, allora il maggiore promotore di una teoria degli insiemi sulla quale si potesse fondare l'intera matematica, conduce a risultati non sostenibili che intorno al 1900 hanno condotto ad una crisi che ha messo in dubbio gli stessi fondamenti della matematica.

In particolare si sono individuate numerose antinomie, cioè scenari formali portatori di contraddizioni (chiamate spesso paradossi), alcune delle quali possono essere formulate in termini colloquiali e che sono state ampiamente dibattute, che portano a conseguenze insostenibili per chi volesse utilizzarle per definire procedimenti che contengono scelte con conseguenze determinanti.

In particolare l'antinomia di Russel (e di Zermelo) prende in considerazione un insieme definito come $R := \{X \in \mathbf{U} \mid X \notin X\}$. Data la definizione di $\mathbf{U}$, R gli deve appartenere e quindi potrebbe essere uno degli X dell'espressione che lo definisce.
Si osserva che se R appartenesse a se stesso sarebbe un insieme che non appartiene a $X = R$, cioè a se stesso; inoltre si osserva che R non appartenesse a se stesso dovrebbe soddisfare la richiesta che lo definisce e quindi dovrebbe appartenere a se stesso.

Si giunge quindi a una inaccettabile contraddizione riassumibile con l'enunciato $R \in R \iff R \notin R$.

Questa crisi ha portato a studiare gli insiemi con metodi ben più rigorosi dei precedenti che hanno condotto a impostazioni della teoria degli insiemi che evitano le antinomie.

In particolare Russel ha sviluppato una teoria che si serve di entità, che comprendono tutti quelli che considerava lecito chiamare insiemi collocandoli in diversi livelli gerarchici in modo tale che una relazione della forma $x \in Y$ con Y denotante un insieme è consentita solo se l'oggetto x si trova in una posizione gerarchica inferiore a quella di Y. In tal modo si esclude che x coincida con Y.

D'altra parte Zermelo, Fraenkel e successivamente Skolem sono giunti a formulare una teoria assiomatica degli insiemi che evita le antinomie.

Questa teoria degli insiemi, che presenteremo in B66, nei primi decenni del XX secolo è diventata la teoria prevalentemente adottata come piattaforma formale di gran parte della matematica e attualmente viene considerata una base logicamente solida per i fondamenti della matematica.
Questa teoria viene comunemente detta teoria ZF. Va detto anche che per affrontare talune questioni la si arricchisce con l'aggiunta di un assioma lontano dalle questioni della costruibilità chiamato assioma della scelta [B65b07, B66e]; questa teoria estesa viene chiamata teoria ZFC.

B08g.12 A questo punto possiamo servirci della nozione di insieme-E per presentare a grandi linee le convenzioni proposte per i vari generi di insiemi sui quali argomentare e le corrispondenti notazioni.

Per questo risulta utile servirsi anche del simbolo **Set** per denotare la totalità degli insiemi, entità che come abbiamo visto non si può considerare un insieme e che qui viene usata solo per segnalare che alcuni simboli della forma $SetX$ sono usati per denotare una collezione di insiemi mediante enunciati che presumono $SetX \subset \mathbf{Set}$.

Segnaliamo che alle entità come **Set** gli studi sui fondamenti dedicano una apposita teoria formale detta **teoria delle classi**.
In queste pagine queste entità saranno chiamate **classi.E** e questo ci consente di qualificare **Set** come "classe.E di tutti gli insiemi".

In questo spirito utilizzeremo anche il simbolo **SetE** per denotare il raggruppamento degli insiemi-E, **SetP** peril raggruppamemnto degli insiemi-P, gli insiemi definiti mediante proprietà, e SetB per il raggruppamento degli insiemi-B.
Segnaliamo anche la notazione **SetG** per il raggruppamento degli insiemi-G.
Si osserva che la presenza di un ambiente U nelle definizioni degli insiemi euristicamente motivati implica che ciascuno di questi raggruppamenti va considerato un insieme e non una classe.E .

A questo proposito si osserva che **SetE** si può considerare un insieme-E; quindi **SetE** $\in$ **SetE** ovvero **SetE** va considerata una classe.E.
Non si può invece dire che SetB sia un insieme-B, in quanto non si può sperare che esista un algoritmo per stabilire se un qualsiasi insieme-P si possa dotare di un algoritmo della appartenenza. quindi SetB va considerato un insieme-P.

Due importanti sottoclassi di **Set** sono la collezione degli insiemi finiti, che denotiamo con **SetF** e la collezione degli insiemi infiniti che individuiamo con la notazione **SetI**.
A questo punto proponiamo l'affermazione

$$\mathbf{SetF} \subset \mathsf{SetB} \subset \mathbf{SetP} \subset \mathbf{SetE} \subset \mathbf{Set} ,$$

scrittura alla quale vogliamo dare solo il ruolo di un promemoria e nella quale al segno $\subset$ assegnamo solo un ruolo intuitivo.

Analoghe considerazioni verranno svolte per insiemi-E costituiti da totalità di relazioni, da totalità di funzioni, da totalità di strutture algebriche, ..., totalità che potranno essere variamente dotate di qualificazioni restrittive in grado di portare a risultati riutilizzabili.

Per esempio si adotteranno simboli come **Rel**, **RelF** RelAsym, RelTrns RelTrnsF per giungere a classificare le relazioni con l'enunciato

$$\mathbf{RelF} \subset \mathsf{RelTrnsF} \subset \mathsf{RelTrns} \subset \mathsf{RelAsym} \subset \mathbf{Rel} .$$