Capitolo B04:
numeri interi

Contenuti delle sezioni

28 pagine

B04:**0.01** L'esame delle prime elaborazioni eseguibili affidabilmente da esecutori umani o artificiali (che ora limitiamo alle MSM, alle macchine sequenziali multinastro in quanto presentano comportamenti vicini a quelli umani) hanno consentito di delineare i primi algoritmi e di ottenere le prime proprietà delle stringhe.
Questi risultati portano naturalmente, ossia inseguendo esigenze progressive, alla introduzione degli interi naturali, entità notoriamente molti utili che introduciamo attraverso le loro rappresentazioni fornite da stringhe su un solo segno o su pochi segni.

Ulteriori semplici algoritmi portano a controllare trasformazioni e composizioni di stringhe e di numeri naturali e ad introdurre come prime stringhe articolate le liste e le relazioni finite.

Le trasformazioni e le composizioni, anche se applicate a oggetti formali semplici come le stringhe e gli interi naturali, si rivelano strumenti fondamentali per la ricerca di soluzioni affidabili di problemi ben definiti.

B04:**0.02** Emerge quindi la necessità di definire strumenti per la formulalizzazione e la strutturazione di generalizzazioni dei risultati delle elaborazioni che si vanno sperimentando materialmente e mentalmente.

Si devono individuare entità che consentano di organizzare, comunicare e rielaborare concettualmente i risultati e le proprietà che si vanno acquisendo, in vista della possibilità che contribuiscano ai successivi sviluppi che prevedibilmente saranno sollecitati da richieste di risolvere nuovi problemi via via più ampi o più incisivi.

Emerge la necessità di avviare la definizione di un linguaggio dotato di propri simboli, di propri termini e di proprie regole che deve rispondere a forti esigenze di precisione e di versatilità, ma anche di leggibilità, di gestibilità e di apertura alla propria crescita nella previsione di suoi utilizzi per una varietà di applicazioni alla quale non è ragionevole porre limiti.

Dobbiamo quindi aspettarci un linguaggio estremamente articolato che dovrà anche essere organizzato in scomparti che possano essere padroneggiati da corposi gruppi di agenti matematico-informatici e di molti altri operatori interessati ad utilizzare i loro risultati.

Le prime mosse in questa direzione riguardano i numeri interi.

B04:a. sostituzioni e interi naturali

B04:**a.01** Stringhe molto particolari sono quelle che contengono solo repliche di un unico carattere. Nel seguito faremo preferibilmente uso delle stringhe contenenti solo repliche del segno ı, che chiamiamo **tacca**, termine che richiama il segno utilizzato per contare da molte popolazioni primitive.

Esamineremo quindi stringhe come ı, ıı, ıııı e ııııııı.

Evidentemente in contesti che preferissero un qualsiasi altro segno particolare si avrebbero sviluppi del tutto equivalenti, ossia potrebbero trattare costruzioni e proprietà formali con conseguenze del tutto equivalenti.

Questa equivalenza è una evidente conseguenza del fatto che tutti gli sviluppi formali si basano su convenzioni che possono essere modificate con grande libertà se si cura di evitare di incorrere in affermazioni poco condivisibili o addirittura contradditorie, situazioni in contrasto con gli obiettivo che ci siamo posti.

Conviene ricordare che la intercambiabilità di molte delle convenzioni formali che si vanno stabilendo favorisce la adattabilità dell'*apparato* alle sue esigenze di crescita, la sua versatilità e la sua modularità.

In effetti adattabilità e aperture alla crescita sono pregi di tutti i sistemi formali che vengono sviluppati per obiettivi rilevanti e con prospettive lungimiranti.

Conviene anche anticipare che la intercambiabilità dei simboli è premessa della relazione tra entità matematiche chiamata "isomorfismo", relazione fondamentale, ampiamente utilizzata in molti sviluppi. nonché della sua estensione chiamata "criptomorfismo".

Ogni stringa costruita replicando il solo carattere ı la chiamiamo **rappresentazione unadica di un intero positivo** mediante il segno ı.
Accanto alle suddette stringhe consideriamo anche la stringa muta e a essa assegnamo il ruolo di **rappresentazione unadica del numero zero**.
Più in generale diciamo **rappresentazione unadica di un intero naturale** una rappresentazione unadica dello zero o di un qualsiasi intero positivo mediante uno specifico segno.

B04:**a.02** Introduciamo ora la nozione di "sostituzione" come generalizzazione della ricodifica alfabetica [B02c15]; si tratta di un tipo assai semplice di trasformazione algoritmica definita sulle stringhe prese singolarmente ed estendibile ad altre entità riconducibili alle stringhe (linguaggi, liste e matrici di stringhe e linguaggi, funzioni e relazioni che riguardano stringhe e linguaggi, ...).

Diciamo **sostituzione uniformatrice** che si serve del carattere c la trasformazione applicabile a ogni stringa che sostituisce ogni suo carattere con c.

Questa operazione si può effettuare con un semplicissimo algoritmo che non fa che leggere la stringa da modificare ed emettere il carattere c in corrispondenza di ogni carattere letto; gli stadi dell'iterazione alla quale si riduce questo algoritmo prevedono solo la lettura di un carattere, il suo confronto con il terminatore $\dashv$, e in caso di diversità l'emissione di c, mentre nel caso di coincidenza si ha l'emissione di $\dashv$ e il successivo arresto.

Se denotiamo con A un alfabeto, la sostituzione acontestuale di una stringhe w su tale alfabeto con il carattere c la denotiamo con l'espressione $\mathsf{Sost}[\mathsf{A}, c](w)$ o con l'equivalente $\mathsf{Sost}_{\mathsf{A},c}(w)$.

Ciascuna delle rappresentazioni unadiche di interi naturali si può ottenere applicando a una opportuna stringa su A, compresa la muta, la sostituzione uniformatrice con ı.

La stringa unadica ottenuta in tal modo dalla stringa w $\mathsf{Sost}[\mathcal{A}, |](w)$ viene detta anche **rappresentazione unadica della lunghezza della stringa** w.

Per esempio la rappresentazione unadica della lunghezza della stringa "unadica" è ||||||| e, anticipando i termini proposti nella tabella in a07, si può dire che tale lunghezza in italiano viene detta "sette", in inglese "seven" e secondo la più diffusa simbologia matematica (e concisamente) "7".

Osserviamo anche che le stringhe sul solo segno |, ad esempio la "||||", sono le uniche stringhe che coincidono con la rappresentazione unadica della propria lunghezza.

B04:**a.03** La lunghezza di una stringa costituisce una sua caratterizzazione molto elementare, ma significativa e spesso utile.
Possono essere significative e utili le lunghezze delle espressioni matematiche, dei programmi per il computer, degli articoli di legge, delle opere letterarie, dei ponti.

Dietro le rappresentazioni unadiche degli interi naturali si intravvedono entità, gli interi naturali, che nella storia si sono dimostrate enormemente utili e che risulta importante saper maneggiare con efficienza ed efficacia.
Si capisce facilmente che le rappresentazioni unadiche, purtroppo, sono tutt'altro che efficienti.
Nelle molte applicazioni nelle quali intervengono numeri interi molto grandi si dovrebbero maneggiare rappresentazioni unadiche molto lunghe; se per esempio si volesse il numero di caratteri usati nella Divina Commedia si avrebbe una sequenza di un unico carattere insopportabilmente lunga ben poco significativa e distinguibile.

Servendoci di termini ben noti, chiedendo venia per non averli ancora definiti, diciamo che si avrebbe una sequenza di alcune *centinaia di migliaia di repliche di un solo carattere.*

Un agente umano per cogliere il significato di una tale sequenza dovrebbe leggerla con grande attenzione impiegando molto tempo e fatica per interpretarla e un robusto esecutore artificiale non riuscirebbe a operare su queste enormi sequenze con accettabile efficienza.

*Si sente quindi la necessità di introdurre [*B14a*] altre scritture equivalenti a tutti gli effetti alle unadiche che si rivelino rappresentazioni più pratiche; troveremo in particolare le ben note rappresentazioni posizionali (come le binarie e le decimali) seguono strutture un poco elaborate, ma che si rivelano assai più maneggevoli da parte di tutti gli esecutori.*

*B04:*a.04 *Come vedremo, le rappresentazioni degli interi naturali, consentono di esprimere, oltre alla lunghezza delle stringhe, altre entità dell'apparatodi grande importanza: la lunghezza delle liste [*B06b12*], il cardinale degli insiemi finiti [*B08b04*] e altre fondamentali caratterizzazioni di varie entità che qualificheremo come "valutazioni" o come "misure".*

Evidentemente "rappresentazioni unadiche di interi naturali" è una locuzione prolissa che appesantisce le argomentazioni e gli enunciati sopra le entità che denotano.

Quindi innanzi tutto abbreviamo "rappresentazione unadica di un intero naturale" e il suo plurale con la sigla unr.
Inoltre introduciamo alcune notazioni per esprimere concisamente la lunghezza di una qualsiasi stringa w.

Come prima notazione per la lunghezza della w *proponiamo la* $\mathsf{len}_|(w)$ *e insieme a questa la abbreviata* $\mathsf{len}(w)$ *che trascura l'uso del segno* |*, dato che, grazie alla intercambiabilità dei segni, raramente serve specificare il segno che compare in queste scritture.*

Abbiamo per esempio $\mathsf{len}(\mathtt{abbca}) = |||||$ *e* $\mathsf{len}(\mathtt{lunghezza}) = |||||||||$.

*La notazione introdotta costituisce un esempio di notazione funzionale [*B01c16*] per la trasformazione algoritmica rappresentata dal simbolo specifico* len *e realizzabile dal meccanismo che effettua la trasformazione della stringa argomento, w, nella sequenza di segni* (|) *che costituisce la sua* unr*. I due caratteri "(" e ")" sono i due delimitatori coniugati che hanno il compito di racchiudere la scrittura della entità semplice o composita alla quale il meccanismo rappresentato dal primo segno viene applicato per trasformarla. Essi sono detti anche* **parentesi tonde***.*
Questa rappresentazione di entità trasformanda viene detta argomento della trasformazione*.*

Conviene anticipare che i delimitatori di argomento possono racchiudere le rappresentazioni di più entità da sottoporre a rielaborazione opportunamente separate da simboli separatori (per i quali spesso si usa la virgola).
Conviene anticipare anche anche che i segni coniugati "(" e ")" vengono usate anche per uno scopo più generale, come delimitatori di sottoespressioni, ossia di porzioni di una qualsiasi espressione matematica che forniscono composizioni di entità che possono essere interpretate ed elaborate indipendentemente dal resto della espressione stessa.

Insieme alla notazione funzionale $\mathsf{len}(w)$ *della lunghezza della stringa w proponiamo di utilizzare come equivalenti la* **notazione a funzione suffissa***, detta anche funzione in esponenziale,* $w^{\vdash\!\dashv}$ *e la* **notazione a delimitatori** $|w|$ *.*
La $|w|$ *si serve di un segno unico che fa sia da delimitatore iniziale che da delimitatore finale dell'argomento della trasformazione, il cui ruolo è precisabile solo esaminando il contesto, ma che presenta il vantaggio della concisione.*

Anche la $w^{\vdash\!\dashv}$ *può presentare il vantaggio della concisione, ma solo se w è un segno semplice; se invece la trasformazione fosse individuata da una espressione elaborata richiederebbe una coppia di delimitatori di sottoespressioni, che potrebbero essere "(" e ")".*

La disponibilità di queste diverse notazioni equivalenti consente scelte determinabili dalle valutazioni dei vantaggi espositivi che ciascuna di esse riesce a realizzare, vantaggi non trascurabili quando si incontrano molte trasformazioni con argomenti elaborati.

Anticipiamo anche che per delimitare sottoespressioni può essere vanaggioso servirsi di coppie di parentesi diverse dalle tonde, come [con], oppure { con }.
*B04:***a.05** *Per poter condurre discorsi scorrevoli introduciamo il termine ampiamente diffuso* **numeri naturali** *come nome di entitàlle quali chiediamo di possedere tutte le proprietà ricavabili dalle diverse* unr *o dalle sopra accennate notazioni loro equivalenti.*

Dobbiamo dichiarare che stiamo introducendo questo termine in modo intuitivo e in via provvisoria in quanto non abbiamo ancora precisate le altre loro notazioni equivalenti: come in altri casi simili si chiede al lettore di accettarlo fidandosi della promessa di una successiva precisazione.

Dobbiamo inoltre dichiarare che le proprietà delle unr*, cioè le proprietà delle sequenze di occorrenze di un unico tipo di segno che si vuole riconoscibile e distinguibile dagli agenti, si avvalgono di osservazioni eseguite con procedimenti materiali semplici e quindi costituiscono entità le cui proprietà sono oggetto di osservazioni piuttosto elementari ma condotte nel rispetto delle regole delle sperimentazioni della fisica.*

Si dice che le unr *sono* **rappresentazioni fedeli** *dei numeri naturali, dove si conviene di chiamare rappresentazioni fedeli di un qualsiasi tipo di entità le scritture di queste entità dalle quali si possano ricavare tutte le proprietà godute da queste entit*

*B04:***a.06** *Cerchiamo di chiarire come intendiamo precisare la definizione dei numeri interi naturali e contemporaneamente trovare notazioni di tali entità più soddisfacenti per la presente esposizione e per ogni loro utilizzo.*

Per questo dovremo introdurre ed esaminare varie nozioni, ad esempio: lista, lista nonripetitiva, insieme esplicito, prodotto cartesiano di liste, prodotto di due unr*, funzioni ed equivalenze.*

Dopo aver introdotto le operazioni di somma e prodotto tra le unr *saremo in grado di definire altre rappresentazioni delle* unr *stesse ciascuna associata a un numero naturale $B = 2, 3, 4, ...$ che diciamo "notazione posizionale in base B degli interi naturali" [*B1a*].*
A questo punto si potrà osservare che tutte queste rappresentazioni sono rappresentazioni fedeli delle unr *e viceversa le notazioni unadiche si possono considerare rappresentazioni fedeli di ciascuna delle notazioni posizionali.*
Segnaliamo anche che presenta qualche vantaggio considerare le unr *come notazioni posizionali in base 1.*

Quindi diventa lecito trasformare qualsiasi affermazione concernente numeri naturali espressi mediante una notazione posizionale (o la unadica o in una qualsiasi altra rappresentazione che si dimostri essere fedele) nella affermazione nella quale si utilizza una qualsiasi altra rappresentazione fedele degli interi naturali.

Segnaliamo che l'uso delle notazioni posizionali si estenderà a entità che generalizzano i numeri naturali, ossia i numeri interi relativi, i numeri razionali, i reali e i complessi.
Segnaliamo anche che si pone il problema di per esprimere i collegamen tra le notazioni posizionali nelle diverse basi.

Quando saranno chiarite le equivalenze fra le varie rappresentazioni fedeli risulterà possibile definire i numeri naturali come le entità ciascuna delle quali può essere rappresentata da ciascuna delle stringhe che le corrispondono in una delle rappresentazioni fedeli.

In seguito potremo partire dalla definizione di numero naturale per introdurre le sue accennate generalizzazioni (numeri interi, numeri razionali, numeri reali, numeri complessi, ...) che costituiscono strumenti indispensabili per lo sviluppo di tutte le numerose e importanti "discipline quantitative".

Disporremo anche di molti importanti algoritmi che consentono di manipolare e di utilizzare le scritture che possono rappresentare questi "numeri" in tutte le applicazioni che li richiedono.
A quel punto sarà ragionevole affermare che ogni numero, naturale o più generale, possiede le caratteristiche essenziali di ciascuna delle sue rappresentazioni.

*B04:***a.07** *I numeri interi naturali nelle lingue parlate sono identificati da nomi piuttosto precisi e molto importanti per tutti i parlanti, anche per il loro sviluppo mentale.*
Nella tabella seguente per i primi dieci interi naturali sono presentati i nomi nelle lingue italiana e inglese accanto alle rispettive rappresentazioni unadiche e ai segni chiamati **cifre decimali** *o* cifre indo-arabe .

Rappresentazione unadica	*Termine italiano*	*Termine iiglese*	*Cifra decimale*
µ	*zero*	*zero*	*0*
|	*uno*	*one*	*1*
||	*due*	*two*	*2*
|||	*tre*	*three*	*3*
||||	*quattro*	*four*	*4*

❘❘❘❘❘	*cinque*	*five*	*5*
❘❘❘❘❘❘	*sei*	*six*	*6*
❘❘❘❘❘❘❘	*sette*	*seven*	*7*
❘❘❘❘❘❘❘❘	*otto*	*eight*	*8*
❘❘❘❘❘❘❘❘❘	*nove*	*nine*	*9*

Conviene segnalare anche che lo studio delle proprietà dei numeri naturali, la disciplina chiamata `teoria dei numeri (wi)`, *costituisce una parte fondamentale della matematica* [B25].

*B04:***a.08** *Per chiarire i collegamenti tra i numeri naturali e le loro notazioni conviene introdurre alcune notazioni apposite.*

Se disponiamo della notazione K per rappresentare l'intero naturale k in una rappresentazione fedele identifichiamo il numero servendoci della scrittura

$$k \;:=\; \mathsf{EqvCls}(K)\ .$$

In essa compare il simbolo **EqvCls** *che collochiamo in $\mathbb{A}M$ e che denota la trasformazione che alla scrittura K, quale che sia la rappresentazione alla quale appartiene, associa l'identificatore k dell'intero naturale che essa rappresenta.*

Intendiamo ora individuare una sorta di trasformazione inversa delle precedente e per questo supponiamo che ogni rappresentazione fedele delle unr *sia individuabile da un contrassegno che scriviamo B. Supponiamo anche che il contrassegno delle rappresentazione unadica sia 1.*

Se abbiamo individuato con qualche argomentazione sulle sue proprietà un intero naturale che abbiamo identificato con k, per introdurre la notazione K che lo rappresenta nella notazione che caratterizziamo con B ci serviamo della scrittura

$$K \;:=\; \mathsf{notn}_B(k)\ .$$

Anche il simbolo notn *riguarda una trasformazione e lo collochiamo in $\mathbb{A}M$.*

Si osserva che $\mathsf{notn}_1(k)$ è la unr *che esprime k.*

Si constata che per ogni notazione ammissibile K del tipo B si ha

$$\mathsf{notn}_B\big(\mathsf{EqvCls}(K)\big) \;=\; K$$

e per ogni intero naturale k e la sua rappresentazione di un qualsias tipo B si

$$\mathsf{EqvCls}\big(\mathsf{notn}_B(k)\big) \;=\; k\ .$$

Quindi i due simboli **EqvCls** *e notn_B riguardano un duetto di trasformazioni invertibili, l'una la inversa dell'altra, e quindi due biiezioni* [B01].

Va detto che non possiamo qualificare **EqvCls** e notn_B *come trasformazioni-A, ossia come trasformazioni algoritmiche, in quanto non abbiamo ben definiti costruttivamente gli insiemi ai quali si possono applicare.*

B04:b. somma di interi naturali

*B04:***b.01** *La giustapposizione di due* unr H *e* K *costituisce un'altra* unr *che viene detta rappresentazione unadica della* **somma di due interi naturali** *rappresentati da* H *e* K.

Assumiamo come fisicamente evidente la commutatività della giustapposizione delle stringhe su un solo carattere; da questa discende la proprietà di **commutatività della somma** *degli interi naturali.*

Dato che giustapponendo la stringa muta a una qualsiasi stringa w *si ottiene questa stessa stringa* w, *si ricava che la somma di un intero rappresentato dalla* unr H *con la* unr *dello zero fornisce la la stessa* H.

*Il suddetto fatto, utilizzando termini generali che vedremo definiti in algebra [*B41*], si enuncia affermando che il numero zero costituisce l'***elemento neutro** *per la operazione binaria somma di interi naturali.*

Possiamo definire come **somma di due numeri naturali** h *e* k *e denotare con* $h+k$ *l'intero naturale che ha come* unr *la giustapposizione delle* unr *di* h *e di* k.
Servendoci delle trasformazioni **EqvCls** e notn_1 *definite in* a08 *abbiamo gli enunciati più concisi riguardanti due interi naturali qualsiasi* h *e* k*:*

(1) $$\mathsf{notn}_1(h+k) \;:=\; \mathsf{notn}_1(h) \,\lrcorner\, \mathsf{notn}_1(k) \qquad \text{e} \qquad h+k \;:=\; \mathbf{EqvCls}\left((\mathsf{notn}_1(h) \,\lrcorner\, \mathsf{notn}_1(k)\right) \;.$$

*B04:***b.02** *Consideriamo tre* unr H, K *e* L *e i corrispondenti interi naturali che esse, risp., rappresentano* h, k *ed* l. *Si individuano facilmente la* unr $\mathsf{notn}_1(h+k)$ *della somma dei primi due e la* unr $\mathsf{notn}_1(k+l)$ *della somma degli ultimi due.*

È fisicamente evidente che per la unr *della somma* $\mathbf{EqvCls}\left(\mathsf{notn}_1(h+k)\right) + \mathbf{EqvCls}(L)$*e per la* unr *della somma* $\mathbf{EqvCls}(H) + \mathbf{EqvCls}\left(\mathsf{notn}_1(k+l)\right)$ *valgono le uguaglianze*

$$\mathsf{notn}_1(h+k) \lrcorner \mathsf{notn}_1(l) \;=\; (H \lrcorner K) \lrcorner L \;=\; H \lrcorner (K \lrcorner L) \;=\; \mathsf{notn}_1(h) \lrcorner \mathsf{notn}_1(k+l) \;.$$

Applicando la **EqvCls** *al primo e al quarto membro abbiamo l'uguaglianza tra due espressioni riguardanti interi naturali*

Per h, k *e* l *interi naturali arbitrari si ha* $(h+k)+l \;=\; h+(k+l)$.

Questa uguaglianza, evidente conseguenza della associatività della giustapposizione di stringhe, si esprime anche affermando che la operazione somma di numeri interi naturali gode della **proprietà associativa** *o* **associatività**.

Questa uguaglianza giustifica la semplificazioneforma;e che consiste nella abolizione delle parentesi esprimibile con la definizione

$$h+k+l \;:=\; (h+k)+l \;=\; h+(k+l) \;.$$

*B04:***b.03** *Osserviamo che nei precedenti enunciati si sono introdotte, senza chiarirle del tutto, le parentesi coniugate "(" e ")". Ciascuna di queste coppie ha lo scopo di delimitare entro una espressione, una sottoespressioni che riguarda operazioni da effettuare per ottenere un risultato, indipendentemente dalle operazioni che si possono trovare nella parte esterna del nido da esse delimitato; questo risultato sarà a disposizione delle suddette operazioni esterne.*

Osserviamo anche che il ruolo di queste parentesi "(" e ")" è diverso da quello svolto dagli stessi segni usati per delimitare l'argomento o gli argomenti di trasformazioni costruibili come Sost , notn_1 , len *ed* **EqvCls**.

La suddetta distinzione purtroppo non viene evidenziata dalla nonunivocità dei due segni coniugati e per le espressioni ampiamente usate si confida che il contesto consenta di riconoscere i significati diversi dei nidi che essi determinano.

Anche nelle pagine che seguono si rinuncia alla distinzione di significati, salvo osservarla nelle poche occasioni nelle quali si rischia l'ambiguità.

La notazione riguardante la somma degli interi naturali consente di esprimere concisamente le proprietà di questa operazione binaria.

Siano h, k e j interi naturali arbitrari:

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{ll} h+0=0+h=h & (\textbf{numero 0, elemento neutro per la somma di naturali}) \\ h+k=k+h & (\textbf{commutatività della somma di naturali}) \\ h+(k+j)=(h+k)+j & (\textbf{associatività della somma di naturali}). \end{array}$$

*B04:*__b.04__ *Possiamo quindi scrivere:*

(1) per u e v stringhe qualsiasi $\;\vdots\;$ $\mathsf{len}(u \shortmid v) \;=\; \mathsf{len}(u) \shortmid \mathsf{len}(v)$ e $\mathsf{len}(\mu) \;=\; \mu$.

$$|u \shortmid v| \;=\; |u| \shortmid |v| \quad \text{e} \quad |\mu| \;=\; \mu \;.$$

Queste uguaglianze dicono che la applicazione della trasformazione $\mathsf{Sost}[\mathsf{A}, \shortmid]$ *rispetta la valutazione della lunghezza delle stringhe.*

Evidentemente se B *denota una stringa alfabeto con lo stesso numero di caratteri della stringa non necessariamente iniettiva* A*, la lunghezza delle stringhe viene rispettata anche dalla ricodifica* $\mathsf{Sost}[\mathsf{A}, \mathsf{B}]$.

Possiamo quindi avere enunciati quali $\mathsf{len}\ulcorner \texttt{abaacb} \urcorner = 6$, $|aaabbbccc| = 9$, *e* $\mu^{\vdash\!\dashv} = 0$. *Possiamo scrivere anche*

$$\text{(2)}\qquad |w| \;:=\; \mathsf{len}\,(w) \;:=\; w^{\vdash\!\dashv} \;:=\; \mathbf{EqvCls}_{|}\,(\mathsf{Sost}[ab..., \shortmid\shortmid ...]\,(w)) \;.$$

I simboli che abbiamo introdotti consentono di esprimere in formule proprietà generali come le seguenti, valide per u e v stringhe arbitrarie:

$$\text{(3)}\qquad |u|=0 \iff u=\mu \quad , \quad \mathsf{len}(u \shortmid v) \;=\; \mathsf{len}(u)+\mathsf{len}(v) \quad , \quad (u^{\leftarrow})^{\vdash\!\dashv} \;=\; u^{\vdash\!\dashv} \;.$$

In termini discorsivi, la prima uguaglianza afferma che la stringa muta è l'unica stringa avente lunghezza 0, la seconda che la lunghezza della giustapposizione di due stringhe è la somma delle rispettive lunghezze, la terza che la lunghezza di ogni stringa non cambia quando essa viene riflessa, o, in altri termini, che la lunghezza delle stringhe è un invariante per riflessione.

Osserviamo quanto le formule precedenti siano più concise delle equivalenti espressioni verbali e segnaliamo che questa differenza risulta ancor più marcata quando si trattano entità più complesse delle stringhe e degli interi naturali.

In linea di massima le formulazioni discorsive possono essere molto utili per la prima presentazione di singole nozioni, mentre le formule consentono invece di sintetizzare vantaggiosamente nozioni e proprietà quando occorre avere presenti numerose formule differenziate.

Le formule si possono considerare uno strumento professionale per le attività della matematica, della elaborazione delle informazioni e di tutte le discipline quantitative.

Va anche osservato che molte formule non risultano facili da interpretare e che una loro lettura poco consapevole può rendere oscuri i loro significati.

Peraltro per trattare in modo efficace nozioni e processi elaborati le formule si dimostrano indispensabili; in particolare esse sono vantaggiose per registrare, trasmettere, archiviare e rielaborare con i molti automatismi oggi disponibili i risultati di interesse generale e gli scenari che esse rappresentano.

*B04:***b.05** *Il segno "+" che compare nelle formule precedenti si può considerare il contrassegno di un meccanismo che da due numeri interi naturali ricava la loro somma. Questo meccanismo è stato derivato dal meccanismo rappresentato dal segno "|" che da due stringhe ottiene la stringa loro giustapposizione.*

Giustapposizione di stringhe e somma di interi naturali sono due esempi di **operazioni binarie***: queste sono entità che a due oggetti di una certa natura (stringhe, interi naturali, insiemi, enunciati, ...), chiamati* **operandi** *dell'operazione, fanno corrispondere un altro oggetto della stessa natura.*

Al termine "oggetti della stessa natura" ora possiamo attribuire solo una funzione programmatica: attraverso di esso possiamo tuttavia cercare di intravvedere oggetti individuati con procedimenti simili e dotati di caratteristiche costitutive e proprietà comuni.

Ciascuna delle operazioni binarie finora incontrate si può considerare la rappresentazione concisa di una macchina molto semplice ed ampiamente considerata affidabile che trasforma dati iniziali omogenei in un risultato dello stesso genere.

In effetti finora è prevalsa la intenzione di definire procedimenti costruttivi ampiamente condivisibili. Va però segnalato che in seguito incontreremo molte altre operazioni binarie e per le quali non saranno esplicitati procedimenti algoritmici ben definiti.

B04:c. modelli e modellizzazioni

*B04:***c.01** *Ci proponiamo ora, assumendo un atteggiamento suggerito dall'empirismo, di delineare un cosiddetto "modello osservabile" per i numeri interi naturali che è facilmente ampliabile a un modello che aiuta a introdurre i "numeri interi negativi" e i conseguenti "numeri interi" (chiamati anche "numeri interi interi relativi" [*:e*]), le entità comprendenti sia gli interi naturali che gli interi negativi.*

Prima di questo riteniamo opportuno dare una prima presentazione delle nozioni generali di modello fisico-matematico e di modellizzazione.

La nozione di modello fisico-matematico, che nel seguito in genere chiameremo semplicemente"modello", costituisce uno strumento conoscitivo che attualmente viene utilizzato sistematicamente per organizzare complessi di conoscenze che si vogliono consapevolmente condivisibili, mosse sia da esigenze scientifiche e tecnologhe, che da scopi dichiaratamente applicativi e pratici (industriali, gestionali, amministrativi, richiesti dalla convivenza, ...).

Per modellizzazione intendiamo l'attività del definire un modello costituente un collegamento tra un genere di complessi di entità (oggetti, relazioni e processi) in più o meno direttamente osservabili con un complesso precisamente definito di entità formali.

Si devono distinguere due generi di modellizzazioni che perseguono scopi grosso modo speculari.

*B04:***c.02** *Le prime modellizzazioni le chiamiamo* **modellizzazioni applicative***, in quanto se ne incontrano numerose e importanti in quasi tutti i campi applicativi.*
Ciascuna di esse parte da complessi di entità osservabili e da fenomeni che presentano caratteristiche qualificanti simili tanto da farli attribuire a un genere $\mathcal{G}$ sufficientemente definito.
I complessi attribuiti a $\mathcal{G}$ sono conosciuti parzialmente sulla base di tradizioni o di indagini condotte con mezzi correntemente giudicati limitati.

Accade che le entità e i fenomeni riconducibili a $\mathcal{G}$ si vogliono conoscere meglio, spesso in stretta relazione al raggiungimento di successivi obiettivi che si pongono persone o organizzazioni alle quali si può attribuire un ruolo di committenti della modellizzazione stessa.

Lo scopo della modellizzazione è la definizione di un modello costituito da due componenti: una definizione operativa del genere $\mathcal{G}$ e una componente formale in grado di rappresentare ciascuno dei complessi di entità afferenti a $\mathcal{G}$ e in grado di essere utilizzata attraverso elaborazioni formali per condurre indagini più approfondite sulle suddette entità.

La qualità dei risultati delle indagini in genere sono valutate in relazione alle esigenze dei committenti della modellizzazione.

Segnaliamo che spesso si usa dire che la definizione di un modello riguarda una rappresentazione formale di un complesso di entità "reali", dando per scontata la realtà degli oggetti e dei processi forniti dalle osservazioni, senza soffermarsi su loro basi convenzionali, accidentali o limitatamente approfondite.

*B04:***c.03** *Le modellizzazioni del secondo genere, che possiamo definire* **modellizzazioni di formalismi** *o* costruzioni di modelli osservabili*, partono invece da un complesso* F *di entità formali tendenzialmente ben definito, ma le cui proprietà rimangono in gran parte da analizzare e approfondire.*
Lo scopo della modellizzazione del formalismo F *consiste nel costruire materialmente dei dispositivi tangibili o nel definire mentalmente dei dispositivi condivisibilmente giudicati realizzabili che possano rappresentare tangibilmente le caratteristiche delle suddette entità formali.*

Questi dispositivi costruiti o costruibili servono a a rendere F *più comprensibile, più intuitivo e facilmente comunicabile, in particolare attraverso raffigurazioni e metafore; inoltre possono sostenere l'immaginazione di loro possibili applicazioni.*

Ogni modellizzazione applicativa o di formalismi prevedere dunque una componente osservabile, una componente formale e collegamenti tra le due tendenzialmente precisi; questi collegamenti possono essere elencati singolarmente oppure fatti discendere da quelle che chiamiamo regole di collegamento della modellizzazione o del modello.

La componente osservabile in genere riguarda vari esemplari ciascuno costituito da un complesso di oggetti, relazioni e processi esaminabili fisicamente oppure da un complesso di più dispositivi; la componente formale è costituita invece da un sistema di simboli e di relazioni tra simboli forniti da espressioni, da strutture formali e da enunciati con svolgono i i ruoli degli assiomi e delle affermazioni.

Il complesso delle regole di collegamento si vuole che per ogni esemplare di coppia ⟨ osservabile, formale ⟩ sia in grado di porre in una corrispondenza biunivoca tendenzialmente precisa gli elementi di ciascuna componente osservabile con gli elementi della componente formale.

In tal modo si possono esaminare congiuntamente entità osservabili ed entità formali corrispondenti e si chiede che i comportamenti degli elementi osservabili possano essere descritti, analizzati, valutati e previsti (possibilmente anche quantitativamente) attraverso lo studio dei corrispondenti elementi formali.

Sugli elementi osservabili, costituiti da oggetti costruiti o costruibili e da processi eseguibili, un osservatore può effettuare osservazioni di vari tipi: dalle osservazioni personali alle sperimentazioni con strumenti che possono essere cercati tra quelli già disponibili oppure possono essere di nuova progettazione che tendenzialmente si avvalgono di tecniche innovative avanzate.

Questi oggetti e processi osservabili si chiede che siano realizzati o realizzabili con precisioni che si possono ritenere adeguate alle situazioni che si intendono studiare, o meglio adeguate entro le tolleranze consentite dagli obiettivi dello studio e dalle risorse disponibili.

Il modello esprime mediante entità formali i suddetti oggetti fisici e gli scenari che gli oggetti compongono e che in genere sono variabili nel tempo.

Lo studio di questi scenari costituisce il compito del modello e la bontà del modello corrisponde a quanto sia agevole e fecondo il controllo degli scenari mediante procedimenti affidabili, che in particolare sono procedimenti di calcolo da effettuare sulle accennate entità formali.

Dagli anni intorno al 1960 ha assunto grande peso il fatto che i suddetti controlli possono venire effettuati con efficienza e sistematicità dai sistemi informatici che si venivano a rendere disponibili.
Va detto che molti progressi delle tecnologie digitali sono stati influenzati dalla riconosciuta importanza del controllo di fenomeni del mondo reale (fisici, biologici, organizzativi, finnziari, ...) attraverso loro simulazioni basate su modelli.

Occorre segnalare che in molti discorsi su questi argomenti, per migliorare la loro leggibilità, si confonde un modello con il complesso delle regole che collegano gli elementi osservabili con i corrispondenti elementi formali, contando anche in questi casi sulla capacità dei lettori di servirsi del contesto.

B04:d. modello osservabile degli interi naturali

*B04:***d.01** *Procediamo ora a definire due specifici generi di modelli delle formalizzazioni degli interi naturali e dei numeri interi, schemi mentali che chiamiamo, risp., modello-$\mathbb{N}$ e modello-$\mathbb{Z}$.*

I modelli che stiamo per introdurre si basano sulle seguenti considerazioni fornite da osservazioni fisiche e riferibili a un primo modello che chiamiamo **modello-1***, molto intuitivo dello spazio tridimensionale e (secondariamente) della scala temporale nei quali operano osservatori che inizialmente hanno obiettivi elementari, ma con intenzioni fondative nei confronti dello stesso metodo scientifico e che in seguito avranno la possibilità di perfezionare le loro attività.*

(1) Nello spazio tridimensionale nel quale dovranno operare gli agenti matematico-informatici vengono osservati oggetti materiali che mostrano di mantenere fisse le loro forme e le loro estensioni e che vengono chiamati **corpi rigidi***; essi quando vengono spostati, cioè traslati e ruotati, rispetto all'osservatore non cambiano percettibilmente le distanze tra i punti che possono essere individuati su di essi.*

Tra i corpi rigidi vanno presi in particolare considerazione i cosiddetti **regoli***, oggetti con le forme delle aste sottili e i cosiddetti* **compassi** *oggetti la cui forma richiama la lettera* V *con i due segmenti la cui angolatura può variare e con le due diverse estremità che si presentano appuntite.*

Regoli e compassi possono essere utilizzati come strumenti per le misurazioni delle lunghezze, cioè delle **distanze** *che separano coppie di punti individuabili nell'ambiente le cui posizioni nel corso delle operazioni di misura l'osservatore giudica fisse rispetto a un proprio sistema di riferimento spazio-temporale di 3 + 1 dimensioni mantenuto fisso.*

In particolare possono essere considerate costanti le distanze tra le estremità di ciascun regolo e si assume che durante ogni misurazione possano essere mantenute fisse le distanze tra le due punte di ogni compasso.

(2) Si considerano utilizzabili anche fasci luminosi molto sottili (quelli che sono modellizzati nell'ottica geometrica), ossia quelli che in fisicasono chiamati fasci di radiazioni elettromagnetiche visibili molto collimati.

Si assume che possono essere utilizzate le traiettorie che questi fasci definiscono nell'ambiente tridimensionale, in quanto si possono controllare con opportuni disponibili strumenti ottici dotati di precisioni sufficienti per le situazioni di interesse applicativo da inquadrare nel modello-1; alle suddette traiettorie corrispondono come elementi formali le cosiddette **traiettorie rettilinee**.

Due punti P e Q dello spazio toccati da una tale traiettoria definiscono il **segmento rettilineo** *che li congiunge, segmento rappresentato fedelmente dal duetto costituito dai due punti.*

Estendendo tali segmenti nelle due direzioni opposte "illimitatamente", o meglio quanto si reputa sufficiente per tutte le applicazioni che il modello-1 ha in programma di affrontare, si definiscono le **linee rette** *dello spazio fisico.*

(3) Si prendono in considerazione oggetti minuti e allungati che chiamiamo "astine", che possono essere caratterizzati da una sezione trasversale trascurabile rispetto alla loro lunghezza, la quale a sua volta viene considerata trascurabile rispetto alle lunghezze dei regoli in uso per le distanze tra i punti che si intendono esaminare.

Si suppone che le astine possono essere collocate in punti materiali dello spazio tridimensionale fissi rispetto a chi osserva le attività che si intendono analizzare. Questi punti vengono chiamati **oggetti puntiformi**.

Gli insiemi di questi punti che si possono controllare oggi possono essere notevolmente complessi, grazie alla possibilità di localizzarli rispetto punti materiali del sistema osservatore costituenti strumenti di posizionamento che si servono essi stessi di radiazioni elettromagnetiche [`GPS (wi)`*].*

*B04:***d.02** *Vediamo ora come osservatori che si servono del modello-1 possono effettuare la costruzione di un esemplare del modello-ℕ, costruzione che, per motivi che dovremo chiarire, denotiamo con la scrittura* $\mathbf{MN}_{\mathsf{P},d,\mathfrak{u},N}$ *che ci riserviamo di abbreviare con* **MN**.

Questo esemplare e altri che si possono considerare sue repliche molto simili, intendiamo possano essere utilizzati per individuare oggetti da dotare di identificatori (nomi) atti a consentire la definizione di una gamma di problemi che giudichiamo qualificanti per lo sviluppo dell'apparato; questi oggetti sono da attribuire a tipi ben circoscritti in relazione a tipi di processi ben definiti e tali da rispettare i limiti per le particolari situazioni nelle quali i detti oggetti possono essere impiegati.

Per l'esemplare osservabile del modello-ℕ vanno eseguite le operazioni che seguono.

(4) Si sceglie un punto materiale **P** *dello spazio per dargli il ruolo di* **punto origine***, lo si caratterizza con una astina e gli si associa come rappresentante formale con l'intero* $0 := \mathsf{EqvCls}(\mu)$.

(5) Si sceglie un particolare fascio luminoso che tocca il punto origine e si estende in una determinata direzione d per una ampiezza giudicata sufficiente per le applicazioni previste dell'esemplare di modello **MN** *che si sta costruendo; a d si affida il ruolo di "direzione" di quella che sta per essere definita* **semiretta**-ℕ *dell'esemplare (ℕ denoterà la collezione dei numeri naturali).*

*(6) Si sceglie, secondo un criterio dipendente dalle applicazioni previste, un regolo cui si attribuisce il ruolo di campione per l'***unità di misura delle lunghezze per MN***; tale lunghezza unitaria la denotiamo con* $\mathfrak{u}$.

Con questo regolo si individua il punto sulla semiretta-ℕ a distanza $\mathfrak{u}$ *dal punto 0 e tale punto si contrassegna con il numero* $1 := \mathsf{EqvCls}(\mathsf{I})$.

(7) Con il regolo campione si procede a individuare i successivi punti sulla semiretta-N ciascuno a distanza $\mathfrak{u}$ *dal precedente; a essi si associano, risp., i numeri 2, 3, 4, ... fino a un numero N giudicato sufficiente per le applicazioni previste.*

*B04:***d.03** *Presentiamo alcune osservazioni che potrebbe sollevare un lettore con buone conoscenze scientifiche aggiornate.*

Il modello **MN** *presenta limitazioni di validità che lo rendono insufficiente per molti problemi coinvolgenti fenomeni elettromagnetici, movimenti con velocità che si avvicinano a quella della luce e traiettorie nello spazio astronomico che passano in prossimità di corpi con masse dell'ordine delle masse stellari.*

Inoltre questo modello va considerato decisamente inadeguato per gli studi riguardanti molecole, atomi e particelle subatomiche.

Il modello è quindi inadeguato per molti fenomeni afferenti all'elettromagnetismo e alla teoria della relatività ristretta, per i fenomeni che possono essere spiegabili solo mediante la relatività generale e per i fenomeni che sono spiegabili solo con le teorie quantistiche.

Ogni esemplare del modello-ℕ può solo essere proposto come utile per le applicazioni che non devono ricorrere alle suddette discipline.

Se si vogliono rispettare realisticamente le situazioni contingenti alle quali si intende applicare, ossia se si vuole tenere conto del fatto che si possono usare solo risorse limitate, questo modello può servire solo a rappresentare oggetti e processi finiti le cui misurazioni richiedono solo pochi regoli e compassi.

Si lascia invece aperta la possibilità di procedere a costruire esemplari del modello applicabili a oggetti via via più piccoli o da misurare con maggiore precisione o a oggetti sempre più distanti o numerosi. Queste maggiori prestazioni si possono ottenere, almeno fino a un certo livelo, utilizzando unità di misura $\mathfrak{u}$ *sempre più ridotte, oppure procedendo a individuare sequenze di punti caratterizzate da numeri* N *sempre maggiori.*

La possibilità di effettuare questi progressivi potenziamenti risulta in sintonia con gli avanzamenti nelle tecnologie realizzati o pianificati, avanzamenti che, in linea di massima, si accompagnano alla progressiva crescita dei problemi che si è indotti ad affrontare servendosi dell'apparato matematico-informatico e in particolare dei problemi risolvibili servendosi solo dei numeri naturali.

*B04:***d.04** *Il modello-*$\mathbb{N}$ *si può illustrare utilmente con semplici figure nelle quali compaiono pochi numeri naturali ma che aiutano a immaginare facilmente come si possano utilizzare figure più estese.*

Questo modello risulta familiare anche per chi si è abituato a maneggiare fin dall'infanzia righe da disegno e compassi e si è abituato a osservare e cercare di riprodurre segmenti rettilinei.

Gli interi naturali considerati 0, 1, 2, 3, ... ,N si dicono costituire un "intervallo iniziale di $\mathbb{N}$*".*
Esso in genere viene raffigurato disposto orizzontalmente con i numeri interi associati ai punti che si susseguono crescendo da sinistra verso destra.
In tal modo la relazione "minore di" tra naturali viene visualizzata come "collocazione più a sinistra di".

Per taluni problemi, tuttavia, risulta più conveniente presentare la semiretta-N disposta verticalmente con i numeri crescenti verso l'alto; questa può essere la scelta migliore per presentare la scala dei gradi Kelvin delle successive temperature assolute e le altitudini di località al di sopra del livello del mare.

Questa applicazione conduce naturalmente alla opportunità di modelli più generali che comprendano, per esempio, delle posizioni sottomarine.

Nel modello-$\mathbb{N}$ *risultano facilmente evidenziabili le caratteristiche degli intervalli di interi naturali e le proprietà delle operazioni su tali intervalli.*

Il modello conduce naturalmente anche alla possibilità di descrizioni cinematiche di manovre che coinvolgono più numeri naturali, a cominciare da somme, prodotti e considerazioni sulla divisibilità.
In molte considerazioni si è portati a servirsi, in genere senza esplicitarle, di metafore come lo "scorrere" un intervallo verso destra o verso sinistra oppure l'effettuare determinati "salti" in avanti o all'indietro per raggiungere altri numeri naturali .

Con queste queste espressioni si è condotti anche a ricorrere a scale temporali discrete, ossia alla considerazione di sequenze di istanti successivi con scritture come $\langle t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, ..., t_{k+m}\rangle$ *che risultano in evidente corrispondenza biunivoca con l'intervallo che va dall'intero* k *all'intero* $k+m$*.*

A queste sequenze di istanti può essere conveniente riferire le stesse manovre su numeri naturali e su oggetti contrassegnati da tali numeri.
In particolare a queste scale temporali possono essere efficacemente riferiti i successivi passi delle elaborazioni che effettua una MSM o in generale delle elaborazioni rette da algoritmi o da programmi redatti in qualche linguaggio di programmazione.

Per quanto riguarda le estensioni N degli esemplari del modello $\mathbb{N}$*, possiamo ricordare alcune considerazioni svolte in precedenza [*B01e07*] sulle lunghezze dei nastri utilizzabili per certe applicazioni.*

Vogliamo anche aggiungere che per raffigurazioni della sequenza dei nuclei atomici degli elementi chimici oggi è più che sufficiente $N = 150$*; per distinguere gli abitanti di una città medio-piccola è sufficiente* $n = 100\,000$*, mentre per statistiche sull'uso di Internet si deve arrivare a* $N = 10^{10}$ *o a* $n = 10^{12}$*.*

*B04:***d.05** *Il modello-$\mathbb{N}$ e il modello-$\mathbb{Z}$ sono costruzioni molto semplici e chiaramente visualizzabili che aiutano efficacemente a padroneggiare molte operazioni e proprietà che riguardano i corrispondenti elementi numerici.*

Inoltre occorre segnalare che il modell0-$\mathbb{Z}$ può essere esteso, grazie ad argomentazioni non immediate ma chiaramente definite e ben motivate e anch'esse ben visualizzabili, per giungere a modelli numerici più efficaci che a loro volta portano a modelli geometrici e fisico-matematici ricchi di importanti ricadute nello sviluppo della matematica.

I due modelli -$\mathbb{N}$ e -$\mathbb{Z}$ riguardano solo ambienti discreti e monodimensionali, ma sono destinati a essere ampliati e arricchiti per soddisfare esigenze di calcolo che permettono di affrontare molteplici problemi di interesse generale e applicativo.

Questi modelli ampliati si possono qualificare come "modelli euclidei" e comprendono il cosiddetto "spazio tridimensionale ordinario", l'ambiente geometrico nel quale si collocano la fisica classica e la vastissima gamma delle sue applicazioni.

Il modello-$\mathbb{N}$, come vedremo, permette di descrivere convenientemene alcune rilevanti operazioni e relazioni che riguardano gli interi naturali, consente di individuare i limiti operativi e conoscitivi di queste entità, porta a riconoscere la manifesta opportunità di introdurre gli interi negativi e quindi conduce al più esteso e prestante modello-$\mathbb{Z}$ riguardante tutti i numeri interi.

*B04:***d.06** *Accenniamo a uno schema delle attività con le quali si utilizza un modello fisico-matematico.*

Una di queste attività inizia con l'inquadramento entro il modello di un problema applicativo tendenzialmente ben definito attraverso il complesso dei collegamenti tra gli oggetti e i processi che caratterizzano ciascuna delle istanze osservabili del problema e le entità formali alle quali il modello assegna il ruolo di loro corrispondenti formali.

Con l'elaborazione di queste entità formali mediante procedimenti forniti dall'apparato matematico-informatico si cercano i risultati costituenti le soluzioni formali per la istanza applicativa i quali dovranno essere associati a elementi riconoscibili nello scenario reale dell'istanza stessa.

Ottenute le soluzioni di un adeguato numero di istanze del problema, potrà porsi il nuovo problema della adeguatezza o meno delle soluzioni alle aspettative dei committenti e i risultati delle conseguenti indagini potranno portare alla accettazione del modello e alla validazione dei risultati, oppure al suo rifiuto e al declassamento dei risultati, oppure a interventi di precisazione del modello stesso attraverso limitazioni o miglioramenti dai suoi parametri, o ancora a un arricchimento delle sue caratteristiche e la ripetizione delle esecuzioni con l'attesa di ottenere risultati migliori, più adeguati alle esigenze.

Si osserva che questo atteggiamento si trova in sintonia con le richieste del pragmatismo, del costruttivismo e del fallibilismo degli strumenti scientifico-tecnologici, posizioni per le quali si rinvia a T90 *e* T92.

B04:e. connettivi di ordinamento per i numeri naturali

*B04:***e.01** *Iniziamo lo studio delle proprietà dei numeri naturali avvalendoci del modello-*$\mathbb{N}$ *e della evidenza della sua visualizzazione.*

Se ci vengono presentate le costruzioni di due naturali che denotiamo, risp., con h *e* k *e collochiamo tali oggetti sul modello-*$\mathbb{N}$ *disposto orizzontalmente, si constata che si può osservare una sola delle tre seguenti situzioni:*
(a) h *si trova a sinistra di* k*,*
(b) h *e* k *occupano la stessa posizione,*
(c) h *si trova a destra di* k*.*

Queste situazioni si esprimono anche dicendo, risp.:
(a) h *è minore di* k*,*
(b) h *e* k *coincidono,*
(c) h *è maggiore di* k*.*

Questi tre enunciati mutuamente esclusivi si esprimono concisamente, risp., con le scritture

(1) $$h < k \quad , \quad h = k \quad , \quad h > k \ .$$

Queste conclusioni raggiunte attraverso la visualizzazione equivalgono con quelle che si ottengono con le due rappresentazioni unadiche $\mathsf{notn}_1(h)$ *e* $\mathsf{notn}_1(h)$ *e verificando con semplicissimi procedimenti che:*
$h < k$ *sse* $\mathsf{notn}_1(h)\mathsf{pfx}\mathsf{notn}_1(k)$ *(o* $\mathsf{notn}_1(h)\mathsf{ifx}\mathsf{notn}_1(k)$*) e* $\mathsf{notn}_1(h) \neq \mathsf{notn}_1(k)$*,*
$h = k$ *sse* $\mathsf{notn}_1(h) = \mathsf{notn}_1(k)$*,*
$h > k$ *sse* $\mathsf{notn}_1(k)\mathsf{pfx}\mathsf{notn}_1(h)$ *(o* $\mathsf{notn}_1(k)\mathsf{sfx}\mathsf{notn}_1(h)$*) e* $\mathsf{notn}_1(h) \neq \mathsf{notn}_1(k)$*.*

In queste scritture i tre segni in posizione infissa rispetto ai due simboli esprimenti i due interi naturali oggetti della nostra semplice osservazione affermano l'esistenza di una tra tre relazioni specifiche tra le entità h *e* k*. I tre segni vengono qualificati "connettivi relazionali".*

Come i molti altri connettivi che incontreremo i tre segni vanno collocati in $\mathbb{A}M$

Il segno "=" è stato già introdotto per esprimere l'uguaglianza di due stringhe che in un contesto applicativo possono essere ottenute con due diverse costruzion, uguaglianza ottenibile con una semplicissima iterazione di confronti. Ovviamente questo procedimento si può applicare in particolare a due rappresentazioni unadiche di numeri naturali e quindi risulta lecito parlare di uguaglianza o meno tra gli oggetti di questo genere.

Per i segni connettivi $<$ *e* $>$ *per ora abbiamo giustificata solo la loro applicazione a coppie di numeri naturali ottenuta per astrazione dalle corrispondenti* unr*.*

*Conviene anticipare che questi connettivi, insieme al segno di uguaglianza, verranno applicati anche a molti altri generi di entità [*B55*].*

Va segnalato anche che molti altri segni con un ruolo di connettivi vengono applicati a più generi di entità, generi che spesso si possono disporre in modo da rispettare la loro portata più o meno ampia. Questo si riscontra per molte operazioni numeriche e algebriche.
In seguito per distinguere fra le applicazioni di connettivi di largo uso ai diversi generi di entità adotteremo anche il termine **accezione**.

*B04:***e.02** *Sul piano operativo è disponibile un semplice algoritmo che esamina due* unr *ed effettua una cosiddetta "scelta tricotomica" decidendo quale delle tre possibili situazioni si verifica per due date* unr *di* h *e* k*.*

Questo algoritmo scorre in parallelo i due nastri sui quali sono registrate le stringhe $\mathsf{notn}_1(h)$ *ed* $\mathsf{notn}_1(k)$ *e deve giungere a trovare la fine di almeno una delle due stringhe caratterizzata, per esempio, da un segno* $\dashv$ *.*

La verificabilità algoritmica delle tre relazioni tra interi naturali consente di dire che si tratta di tre **relazioni algoritmiche** *ovvero di tre* relazioni effettivamente decidibili.

L'algoritmo, oltre a decidere in quale delle tre situazioni (a), (b) e (c) si trova la coppia $\langle h, k\rangle$*, è in grado di fornire la* unr *dell'eventuale nastro nel quale non si è giunti a trovato il segno* $\dashv$ *.*

Abbiamo quindi che le tre possibili situazioni ottenute dal confronto tra due unr *corrispondono, rispettivamente, alle tre seguenti affermazioni mutuamente esclusive:*

(a) $h < k$ *e si trova un naturale* d *tale che sia* $h + d = k$*,*
(b) si stabilisce che $h = k$*,*
(c) $h > k$ *e si trova un naturale* e *tale che sia* $h = k + e$*.*

Nel caso in cui entrambe le unr *terminano contemporaneamente abbiamo il caso (b) e su un nastro* T_u *di uscita si segnala lo 0.*

Se termina prima la $\mathsf{notn}_1(h)$ *si constata il caso (a) e si riproducono su* T_u *i caratteri* ı *che rimangono sul nastro con la* $\mathsf{notn}_1(k)$*.*
L'intero naturale così individuato si dice **differenza** *tra* k *ed* h*e si denota con* $k - h$*.*

Se termina prima la $\mathsf{notn}_1(k)$ *si constata il caso (c) e si individua l'intero positivo differenza tra* h *e* k *che si scrive* $h - k$*.*

L'operazione che conduce a una differenza di interi naturali si dice **sottrazione**. *Nell'espressione di una sottrazione* $k - h$ *l'operando* k *si dice* **minuendo** *e l'operando* h **sottraendo**.

La sottrazione tra interi naturali viene qualificata come **operazione binaria algoritmica e parziale**, *ove "parziale" caratterizza il fatto che non è definita per tutte le possibili scelte dei suoi due operandi: alla scrittura* $h - k$ *se* $h < k$ *non sappiamo ancora associare un significato che possa essere agevolmente utilizzato.*

*B04:***e.03** *Generalizzando i connettivi relazionali tra rappresentazioni unadiche di interi naturali, facendo riferimento a un semplice algoritmo di scorrimento parallelo di due stringhe su un alfabeto qualsiasi, si individuano i connettivi relazionali tra stringhe qualsiasi identificati dalle locuzioni seguenti:*

avere lunghezza uguale : sussiste tra due stringhe che presentano lo stesso numero di caratteri;

avere lunghezza minore : riguarda due stringhe tali che la prima abbia un numero di caratteri minore della seconda.

avere lunghezza maggiore : riguarda due stringhe tali che la prima abbia un numero di caratteri maggiore della seconda.

Accanto ai connettivi relazionali tra numeri naturali $<$ *e* $>$ *risulta utile definire i connettivi* $\leq$ *da leggere "minore o uguale" e* $\geq$ *da leggere "maggiore o uguale" che, risp., esprimono situazioni meno definite della* $<$ *e della* $>$*.*

In collegamento con queste relazioni introduciamo i connettivi relazionali riguardanti stringhe arbitrarie caratterizzati dalle locuzioni "avere lunghezza minore o uguale" e "avere lunghezza maggiore o uguale".

Facendo ancora riferimento alle coppie di interi naturali h *e* k*, accade che se si stabilisce che* $h < k$ *resta accertato anche che* $h \leq k$ *e, similmente, accertato che* $h > k$*, è lecito affermare anche che* $h \geq k$*.*

Per giustificare la utilità della introduzione del connettivo $\leq$ *accanto a* $<$ *osserviamo che si possono incontrare situazioni nelle quali con due diverse costruzioni si sono ottenute due indicazioni incomplete*

sulle lunghezze di due stringhe tra le quali non è chiaro se sussista l'uguaglianza oppure se una delle due sia prefisso proprio dell'altra.
La relazione "avere lunghezza minore o uguale" serve a esprimere questa situazione conoscitiva meno definita, ad esempio prima di affrontare una indagine che possa portare a una maggiore precisazione.

Considerazione del tutto simile vale per i connettivi $>$ *e* $\geq$.

Va segnalato che situazioni conoscitive incomplete si possono riscontrare per molte altre caratterizzazioni di ogni genere di entità (ad esempio per la inclusione tra insiemi e tra figure geometriche).

*B04:***e.04** *Evidentemente un algoritmo che, dati due interi naturali* h *e* k *decide se* $h < k$, *quando si scambiano i due dati diventa un algoritmo che decide se* $k > h$.

In generale consideriamo un connettivo relazionale decidibile $\prec$ *riguardante coppie di stringhe e un algoritmo* $\mathcal{A}$ *per l'accertamento della sua validità. Si dice* **algoritmo trasposto** *di* $\mathcal{A}$ *l'algoritmo che preliminarmente attua lo scambio delle due stringhe date, ossia che preliminarmente scambia i due membri della coppia di dati e successivamente si comporta come* $\mathcal{A}$.
Il connettivo relazionale individuato da questo algoritmo trasposto, che denotiamo con $\succ$, *si dice* **connettivo relazionale trasposto** *di* $\prec$ *e per enunciare questo collegamento scriviamo*

$$\prec^{\mathsf{T}} = \succ \ .$$

Qui $^{\mathsf{T}}$ *denota una trasformazione che si applica a connettivi relazionali. È evidente che questa trasformazione è una involuzione, in quanto è una involuzione anche lo scambio dei due membri di una coppia di stringhe da sottoporre ad algoritmi dicotomici.*

Tornando ai connettivi relazionali riguardanti interi naturali possiamo quindi enunciare

$$\leq^{\mathsf{T}} = \geq \quad \text{e} \quad \text{la relazione trasposta dell'uguaglianza è l'uguaglianza stessa} \ .$$

Osserviamo anche che il secondo enunciato non si è espresso nella forma concisa $=^{\mathsf{T}} = =$ *che avrebbe richiesto di attribuire due diversi livelli semantici per il segno "=".*

Per la sottrazione si trovano facilmente le seguenti proprietà, valide per h, k *e* j *interi naturali arbitrari:*

$$(1) \quad h - 0 \ = \ h \ ; \qquad h \leq k \implies h + (k - h) \ = \ k \ ; \qquad h < k < j \implies j - k < j - h \ ;$$

$$(2) \qquad h + k \leq m \implies m - (h + k) \ = \ (m - h) - k \ = \ (m - k) - h \ .$$

*B04:***e.05** *Si osserva che l'algoritmo che stabilisce se* $h \leq k$ *o meno si trasforma in quello che decide se* $h > k$ *semplicemente scambiando le segnalazioni conclusive 0 e 1. Questa situazione si esprime dicendo che il connettivo* $\leq$ *è la* **negazione** *del connettivo* $>$

Con lo scambio e delle due segnalazioni conclusive si trasforma l'algoritmo che decide se $h \geq k$ *con quello che stabilisce se* $h < k$; *si dice allora che il connettivo* $\geq$ *è la negazione del connettivo* $<$.

In generale un connettivo relazionale decidibile $\prec$ *si dice* negazione *del connettivo relazionale decidibile* $\succeq$ *sse un algoritmo che decide la validità o meno di* $\prec$ *in seguito allo scambio delle segnalazioni conclusive diventa un algoritmo che stabilisce la validità o meno di* $\succeq$.

Per enunciare questo collegamento tra $\prec$ *e* $\succeq$ *si scrive*

$$\neg \prec \ = \ \succeq \ .$$

Qui il segno $\neg$ *denota una trasformazione che sappiamo applicare ad alcuni connettivi relazionali e più precisamente a quelli riguardanti una decisione dicotomica.*
È anche evidente che questa trasformazione è una involuzione, in quanto è una involuzione anche lo scambio delle segnalazioni conclusive per gli algoritmi dicotomici.

Possiamo quindi enunciare $\neg \leq \; = \; >$.

Considerazioni del tutto simili portano a enunciare $\neg \geq \; = \; <$.

Va osservato infine che applicando la trasposizione dei connettivi si passa dalla penultima uguaglianza all'ultima e viceversa e che queste due implicazioni sono a loro volta mutuamente implicate in forza del carattere involutorio della trasposizione.

*B04:***e.06** *Abbiamo visto due trasformazioni che da un connettivo relazionale ricavano un secondo connettivo relazionale e constatiamo che si tratta di trasformazioni derivabili da trasformazioni di algoritmi.*

Ci proponiamo ora di introdurre operazioni binarie che da una coppia di connettivi relazionali ottengono un terzo connettivo relazionale, operazioni binarie che risultano anch'esse derivabili da composizioni di algoritmi.

Consideriamo due algoritmi decisionali $\mathfrak{A}_1$ *e* $\mathfrak{A}_2$ *entrambi operanti su coppie di stringhe e denotiamo, risp., con* κ_1 *e con* κ_2 *i connettivi relazionali che essi individuano.*

Per esprimere concisamente questa situazione scriviamo

$$\kappa_1 \; := \; \mathsf{ConnRel}(\mathfrak{A}_1) \qquad , \qquad \kappa_2 \; := \; \mathsf{ConnRel}(\mathfrak{A}_2) \; .$$

Con il simbolo ConnRel *intendiamo denotare la trasformazione in un connettivo relazionale di un algoritmo con una adeguata organizzazione e un adeguato scopo.*

Diciamo **congiunzione di due algoritmi decisionali** $\mathfrak{A}_1$ *e* $\mathfrak{A}_2$ *l'algoritmo che a partire dai dati* H *e* K *esegue le istruzioni di* $\mathfrak{A}_1$*, se la risposta è positiva termina con la sua risposta positiva; in caso contrario fa operare* $\mathfrak{A}_2$ *e fornisce come sua risposta quella fornita da quest'ultimo.*

Il connettivo relazionale che esso individua si dice congiunzione di κ_1 *e* κ_2 *e si denota con* $\kappa_1 \; \vee \; \kappa_2$.

Definiamo **disgiunzione di due algoritmi decisionali** $\mathfrak{A}_1$ *e* $\mathfrak{A}_2$ *l'algoritmo che a partire dai dati* H *e* K *esegue le istruzioni di* $\mathfrak{A}_1$*, e se la risposta è negativa termina con la sua risposta negativa; in caso contrario fa operare* $\mathfrak{A}_2$ *e fornisce come sua risposta quella fornita da quest'ultimo.*

Il connettivo relazionale che esso individua si dice disgiunzione di κ_1 *e* κ_2 *e si denota con* $\kappa_1 \; \wedge \; \kappa_2$.

A questo punto possiamo giungere alla enunciazione della forma

(1) $$\leq \; = \; (< \vee =) \quad \text{e} \quad \geq \; = \; (> \vee =) \; .$$

Questa affermazione si può riformulare dicendo che la costruzione $(\leq \wedge \geq)$ *equivale alla relazione di uguaglianza.*

*B04:***e.07** *Nei due precedenti enunciati compaiono due occorrenze del segno "=" che richiedono un chiarimento.*
si tratta di un genere di chiarimento di ruoli che si presenta per molte altre relazioni e moltre altre costruzioni (operazioni, funzioni, funzionali, ...) che coinvolgono entità di vari generi (insiemi, strutture, enunciati, ...).

In ciascuna delle formule precedenti le occorrenze del segno "=" esprimono l'uguaglianza riguardanti coppie di oggetti che vengono individuati da costruzioni formali diverse o da algoritmi diversi.
Nella formula (1), per esempio, la seconda occorrenza riguarda l'uguaglianza tra numeri naturali (e potrà essere estesa a uguaglianza tra oggetti numerici più generali o tra stringhe con vari possibili significati).

La prima occorrenza riguarda invece la relazione di uguaglianza tra relazioni ottenute esaminando coppie di oggetti numerici (o di oggetti loro assimilabili).

Per maggiore chiarezza sarebbe consigliabile utilizzare due segni distinguibili da definire opportunamente, ad esempio "$=_{num}$" e "$=_{rel}$". Nella pratica queste precisazioni non le si effettuano sostanzialmente mai, ma ci si limita a contare su chiarimenti derivabili dai contesti.

Va segnalato che vi sono molte altre situazioni nelle quali si dovrebbero distinguere due o più diversi livelli di applicazione dei simboli e delle entità in gioco, ma che in genere non lo si fa confidando n ogni caso che il contesto consenta di evitare ogni ambiguità.

Si osserva anche che $\wedge$ e $\vee$ sono composizioni commutative, anche se gli algoritmi ottenuti dalle due possibili composizioni sono diversi.
A questo proposito segnaliamo che si riscontrano varie diversità tra evoluzioni algoritmiche ed enunciazioni matematiche loro conseguenze che potrebbero richiedere accurate precisazioni che però quasi sempre vengono trascurate.

B04:f. numeri interi relativi

*B04:***f.01** *Molti problemi di interesse pratico e molte considerazioni metodologiche inducono a pensare che una espressione come la $h - k$ con $h < k$ possa risultare utile.*

Quando si trattano con numeri naturali gli scambi di denaro tra due persone risulta utile essere in grado di eseguire calcoli che possono condurre al passaggio di denaro da ciascuno dei due all'altro, oppure che consentano di decidere se una prima persona possa nei confronti di una seconda sia riconoscere un debito che vantare un credito.

Insieme alle altitudini delle località della terraferma si possono trattare le profondità di posizioni sottomarine o sotterranee.
Trattando temperature si può adottare la scala delle temperature Celsius con gradi positivi e negativi, mentre la scala Kelvin che consente di limitarsi a valori positivi dei gradi richiede maggiore conoscenze di fisica.

Negli studi storici si trattano sia gli anni che precedono sia quelli che seguono quello assunto come anno di nascita di Cristo (o che precedono l'Egira o un altro evento memorabile).

La addizione di due numeri naturali $h+k$ si descrive chiaramente come lo spostamento sulla semiretta-$\mathbb{N}$ verso destra da una generica posizione h alla posizione che si incontra alla sua destra dopo aver effettuti k passi unitari. Similmente una sottrazione $h-k$ si visualizza con spostamenti dalla posizione h verso sinistra di k passi.

Più in generale può porsi il problema di modificare un intero h con una sequenza di addizioni e di sottrazioni, ovvero in termini visuali, di muoversi dal punto della semiretta-$\mathbb{N}$ contrassegnato con h con una sequenza di spostamenti ciascuno dei quali può portare verso destra o verso sinistra.

Si trovano facilmente molti problemi pratici per i quali risulta utile essere in grado di controllare sequenze di spostamenti che possono portare ad auspicabili punti su un prolungamento del'allineameto a sinistra della posizione estrema alla quale è stato associato il numero 0.

*Cercheremo dunque di estendere la nozione di intero naturale in modo che l'operazione differenza sia definita per ogni coppia delle entità che generalizzano gli interi naturali, chiedendo inoltre che si possa estendere a tali entità anche l'operazione di somma, meglio se mantenendo la forma delle sue proprietà [*b02, b03, d04*] .*
Se questa estensione riesce le nuove entità permettono di effettuare operazioni di calcolo coerenti con quelle fattibili con gli interi naturali; questo significa dotarsi di uno strumento applicabile ad una più ampia gamma di problemi, in particolare a molti scambi di denaro e a molti spostamenti su posizioni allineate in orizzontale o in verticale.

*B04:***f.02** *Cerchiamo dunque di rendere lecita la effettuazione della operazione unaria che, fissato un intero naturale a, a ogni naturale b associa $a - b$ anche quando $a < b$. Questa operazione si può visualizzare come arbitrario spostamento a sinistra di b passi unitari sulla semiretta-$\mathbb{N}$ o sul suo prolungamento verso sinistra.*

Tutto questo equivale alla possibilità di estendere verso sinistra la sequenza dei numeri che compaiono nel modello-$\mathbb{N}$, cosa che per la parte materiale si riduce alla semplice possibilità fisica di disporre di un raggio luminoso estremamente collimato volto a sinistra che si sovrappone in parte al raggio rivolto a destra che ha condotto al modello-$\mathbb{N}$.

Per realizzare fisicamente un esemplare del modello che estende il modello-$\mathbb{N}$ e che chiamiamo modello-$\mathbb{Z}$ occorre servirsi di un fascio di luce sottile che tocca i punti associati ai numeri naturali ed è orientato *nella direzione dei numeri decrescenti: su di esso servendosi del regolo campione unitario si individuano, procedendo per spostamenti unitari via via più a sinistra, le posizioni che contrassegnamo con le scritture* -1, -2, -3, ...

Il punto contrassegnato con $-d$ *lo consideriamo equivalente al risultato dello spostamento dall'origine di* d *passi unitari verso sinistra o, più in generale come lo spostamento verso sinistra da* h *di* k *passi unitari, ove sia* $k := h + d$ *; quindi ogni* $-d$ *si può considerare come il numero intero ottenibile con una espressione della forma* $h - k$*.*

Se si dispone di un esemplare materiale (osservabile) del modello-$\mathbb{N}$ *che corrisponde all'intervallo* $[0 : N]$*, risulta vantaggioso ampliarlo verso sinistra fino alla posizione di* $-N$ *per ottenere un esemplare materiale del modello-*$\mathbb{Z}$ *simmetrico rispetto al punto 0.*

Non sono comunque da escludere esemplari non simmetrici del modello-$\mathbb{Z}$ *che risultino più adatte a visualizzare particolari situazioni di interesse applicativo.*
In particolare non può essere utile un esemplare per le altitudini delle posizioni rispetto alla superficie dei mari in metri che abbia le estremità in corrispondenza di $-6\,400\,000$ *e di* $+6\,400\,000$*.*
Possono invece essere utili un esemplare del modello che copre le temperature in gradi Celsius da $-373°$ *fino a* $+5000°$ *e un esemplare di interesse climatologico che copre gli anni da 65 milioni di anni fa fino all'anno corrente.*

La parte formale del modello così ottenuto lo chiamiamo anche **retta-Z***, le entità* $-h$ *con* $h \in \mathbb{P}$*, cioè poste alla sinistra dello zero le chiamiamo* **numeri interi negativi** *e chiamiamo collettivamente* **numeri interi** *i numeri naturali e i numeri interi negativi.*
Alla posizione del numero 0 attribuiamo ora il ruolo di **origine** *dell'intera retta-Z.*
Per visualizzare gli esemplari del modello bastano semplici figure.

//input pB04e02

*B04:***f.03** *A questo punto occorre stabilire che i numeri interi godono di proprietà che estendono quelle dei numeri naturali; per questo procediamo in modo discorsivo utilizzando termini che ci suggerisce il modello-*$\mathbb{Z}$*.*

Nel seguito conveniamo che h, k, l ... *denotino numeri interi arbitrari.*

La somma di interi continua a godere le proprietà commutativa e associativa come mostra la osservazione dei corrispondenti possibili spostamenti.

Il numero 0 è elemento neutro delle operazioni binarie addizione e sottrazione, in quanto corrisponde a nessuno spostamento sulla retta-Z.

Si definisce l'operazione unaria di cambiamento di segno degli interi denotata anteponendo all'operando il segno $-$*; essa può descriversi anche come la riflessione dei punti della retta-Z rispetto alla sua origine.*

Dunque per ogni intero h *l'espressione* $-h$ *denota l'intero che viene chiamato* **numero opposto** *dell'intero* h*.*
Il cambiamento di segno porta da un numero positivo a uno negativo e viceversa; quindi per ogni intero naturale k *si ha* $-(-k) = k$.

Quindi l'operazione cambiamento di segno è una involuzione che ha un unico punto fisso, lo 0, e ha che i suoi duetti di elementi coniugati sono costituiti da un intero e dal suo numero opposto.

*B04:***f.04** *Osserviamo che abbiamo già supposto implicitamente la validità della relazione di uguaglianza per tutte le coppie di numeri interi coincidenti, in quanto queste sono esprimibili come coppie di stringhe* *che rappresentano in qualche notazione lo stesso intero; si osserva anche che questo è un caso particolare della attribuzione al connettivo "=" del significato di uguaglianza per tutte le stringhe su un qualsiasi alfabeto definibile.*

Occorre anche estendere la portata dei connettivi di ordinamento $\leq$, $<$, $>$ e $\geq$ dalle coppie di elementi della semiretta-$\mathbb{N}$ alle coppie della retta-Z; questo si ottiene con le assunzioni che seguono.

Decidiamo che ogni numero negativo sia minore di ogni intero naturale e in particolare di zero.

Se p e q sono numeri positivi con $0 \leq p \leq q$, allora si stabilisce che $-q \leq -p \leq 0$.

Questo implica che $r \leq s \leq 0 \iff 0 \leq -s \leq -r$.

Per l'intera retta-Z si possono stabilire le seguenti relazioni:
la relazione $p < q$ *equivale alla* $(p \leq q) \wedge (p \neq q)$;
la relazione $\geq$ *è la trasposta della* $\leq$;
la relazione $>$ *è la trasposta della* $>$.

*B04:***f.05** *CEsplicitiamo alcune conseguenze delle scelte fatte.*

Dalla definizione dei numeri negativi segue che $h + (-h) = (-h) + h = 0$.

$-(h+k) = (-h)+(-k)$, *in quanto* $0 = (h+k)-(h+k) = h+k-h-k = (h+k)+(-h)+(-k)$.

Si osserva che la differenza tra interi non è affatto commutativa, ma che si ha $h - k = -(k - h)$.

Per ogni intero m si ha $h - k = (h + m) - (k + m)$ *; questo enunciato si potrà proclamare come invarianza della differenza tra numeri interi rispetto alle traslazioni sulla retta-Z.*

L'enunciato "per ogni intero m si ha $h-k = (h-m)-(k-m)$*" non aggiunge molto al precedente, in quanto è possibile sostituire un intero m con il suo opposto $-m$ in ogni enunciato nel quale m si può scegliere arbitrariamente sulla retta-Z; questo equivale alla simmetria della retta-Z rispetto all'operazione di cambiamento di segno, ovvero, in termini più visuali, rispetto alla riflessione della retta-Z rispetto all'origine.*

Si definisce come **valore assoluto** *di un intero*

$$|h| := \begin{cases} h & \text{se } h \geq 0, \\ -h & \text{se } h \leq 0 \end{cases} .$$

Di conseguenza per arbitrari interi h e k si ha $|h - k| = |k - h|$.

Inoltre per due interi qualsiasi h e k si ha:

$$\Big||h| - |k|\Big| \leq |h - k| \leq |h| + |k| .$$

Questo enunciato si dimostra con la s $h < 0 < k$ *e* $0 < h < k$. *Si osserva anche che il precedente enunciato è simmetrico rispetto allo scambio delle variabili h e k.*

B04:g. considerazioni sulle prime formule

*B04:*__g.00__ *In precedenza abbiamo introdotto varie scritture che consentono di presentare in modo abbastanza conciso le entità che si vanno definendo e le proprietà che si vanno scoprendo.*

La espressioni e le formule introdotte sono state proposte senza approfondire tutte le loro caratteristiche formali e di significato, preferendo procedere con una certa speditezza e confidando che possano essere lette in modo intuitivo, anche contando sul fatto che si tratta di scritture simili a scritture ampiamente utilizzate.

In particolare ci siamo spesso serviti dei segni delimitatori coniugati "(" e ")" per racchiudere espressioni che intervengono come sottoespressioni di espressioni più composite.

Qui riprendiamo le suddette scritture per inquadrarle meglio nell'ambito del percorso che stiamo portando avanti e per puntualizzare alcune loro importanti caratteristiche formali e i significati che in queste si possono intravvedere, tuttavia senza cercare precisazioni complete.

Precisazioni più complete in proposito le incontreremo più avanti, in particolare in C14d.

*B04:*__g.01__ *Ci proponiamo di riesaminare la seguente raccolta*

[1] $w := \mathtt{abcdcba}$ *forma tipica per l'abbreviazione di una stringa esplicita*
[2] $v := a_1\, a_2 \ldots a_n$ *[*B01e04*], abbreviazione di stringa generica*
[3] $\mathbb{A}W_{\mathcal{P},.}$ *[*B01d04*], alfabeto di lavoro usato dall'esecutore $\mathcal{P}$*
[4] $\mathbb{A}S$ *[*B01d04*], alfabeto usato per le scansioni delle stringhe su cui si lavora*
[5] $\mathbb{A}M$ *[*B01d04*], alfabeto per le espressioni usate nelle considerazioni a fini generali*
[6] $\langle a, b\rangle$ *[*a08*], coppia di stringhe o di scritture*
[7] q_i per $i = 1, 2, 3, 4$ *[*B01e09*], definizione di simbolo indicizzato*
[8] $\mathsf{len}(\mathtt{lunghezza}) = \mathtt{|||||||||}$ *[*d01*]*
[9] $\mathsf{Sost}[\mathsf{A}, c](w)$ *[*B01a02*], sostituzione dei caratteri in* A *con c*
[10] $\mathsf{Halt}(\mathcal{P}, \mathfrak{A}, \mathsf{D})$ *[*B01d10*], problema dell'arresto*
[11] $\mathfrak{Fun}(\mathfrak{A})$ *[*B01b13*], funzione determinata dall'algoritmo $\mathfrak{A}$*
[12] $v \shortmid w$ *[*B01e07*], l'operazione binaria giustapposizione*
[13] $w^{\leftarrow} := a_s\, a_{s-1} \cdots a_3\, a_2\, a_1$ *[*B01e12*], stringa riflessa*
[14] $(v_i\, \tau)\, \theta = v_i$ *[*B01e13*], composizione di trasformazioni*
[15] $\tau^{-1} = \theta$ *[*e13*], trasformazione inversa o funzione inversa*
[16] $w \shortmid (w^{\leftarrow})$ e $w \shortmid c \shortmid (w^{\leftarrow})$ *[*B01e17*], palindrome*
[17] $\mathbf{EqvCls}(\mathsf{notn}_1(k))$ *[*a08*], intero naturale come classe di equivalenza*
(18) $h + k := \mathbf{EqvCls}\,((\mathsf{notn}_1(h) \shortmid \mathsf{notn}_1(k))$ *[*B04a09*]*
[19] $|u \shortmid v| = |u| \shortmid |v|$ *[*a12*], lunghezza della giustapposizione*
[20] $\Big|\,|h| - |k|\,\Big| \leq |h - k| \leq |h| + |k|$ *[*d04*], disuguaglianze*

Inizialmente prendiamo in considerazione le componenti elementari delle formule, successivamente esaminiamo le sottostringhe più composite e dotate di un proprio significato e concludiamo delineando le strutture di intere formule.

*B04:*__g.02__ *Le componenti elementari delle formule precedenti sono singoli segni. Alcuni di queste,* a, b, c, d, e, g, h, l, u, z, *e le equivalenti in corsivo, insieme a* |, *sono lettere di un alfabeto per le stringhe da sottoporre alle cosiddette elaborazioni primarie dell'esposizione, cioè appartenenti a un alfabeto* $\mathbb{A}W_{.,\mathcal{P}}$.

Vi sono lettere (i, n ed s), che come certe cifre intere esprimono indici che possono assumere certi valori interie che servono a distinguere entità delle quali si considerano ragguppamenti e che sono identificate da scritture come a_2, a_n, a_s, q_i e v_i.

Le entità da distinguere entro un raggruppamento vengono fornite anche da scritture un po' più composite, come a_{s-1} nelle quali l'indice è presentato con una espressione (in questo caso $s-1$) che può anche avere una forma assai elaborata, in quanto le si chiede solo di essere univocamente interpretabile.

Queste scritture, quando si esaminano attività di elaborazioni su semplici stringhe sono da considerare come elementi leggermente compositi del linguaggio delle argomentazioni matematiche sulle prospettive ad ampio raggio, mentre quando si esaminano elaborazioni più impegnative e conseguenti enunciati è opportuno che siano viste come espressioni che possano essere sottoposte a elaborazioni simboliche eseguibili daspecifici esecutori.

Altre lettere (u, v, w, h, k) servono a rappresentare nelle argomentazioni matematiche stringhe su alfabeti di lavoro $\mathbb{A}W_{\mathsf{C},\mathcal{P}}$ che sono oggetto di elaborazioni tendenzialmente semplici.

*B04:***g.03** *Nelle formule in* h01 *compaiono alcuni segni semplici ($-$, $+$, τ, θ) e molte stringhe brevi come* len, Sost, $\mathfrak{Fun}$, Halt, $\shortmid$, $^{\leftarrow}$, notn$_1$, **EqvCls**.
Questi segni vanno considerati elementi dell'alfabeto $\mathbb{A}M$ e si vuole che servano a identificare entità collegabili ad azioni esercitate su stringhe di un alfabeto di lavoro.

*Alcuni dei precedenti simboli (*len, Sost, $\shortmid$, $^{\leftarrow}$*) riguardano azioni che sono state attribuite chiaramente ad algoritmi. Altri (τ, θ) sono simboli introdotti per denotare azioni definite non costruttivamente, ma facendo riferimento a loro proprietà ragionevolmente ipotizzabili o intuibili.*

Alcune di queste entità in certi contesti sono da considerare segni di un alfabeto di lavoro per esecutori che effettuano analisi ed eventualmente rielaborazioni di formule.

Questi segni intervengono in espressioni che compaiono in formule che seguono forme piuttosto precise. In linea di massima si individuano espressioni di forme assimilabili che forniscono entità di generi assimilabili.

*B04:***g.04** *Un genere di entità chiaramente individuabile è quello delle trasformazioni.*
Afferiscono a questo genere le espressioni caratterizzate da Sost, len, **EqvCls**, notn$_1$, $^{\leftarrow}$, $^{\mathbf{-1}}$, τ *e* θ.

Accade che le espressioni con le prime 4 entità hanno la forma

segno della trasformazione (argomento)

che abbiamo chiamata **forma funzionale**.

Le espressioni caratterizzate dalle rimanenti entità hanno invece la cosiddetta **forma esponenziale**

argomento ˥ segno della trasformazione ,

con la possibilità di trascurare il connettivo "˥".

Bisogna segnalare che Sost, len *e* $^{\leftarrow}$ *denotano trasformazioni associate ad algoritmi ben definiti, mentre* $^{\mathbf{-1}}$ *denota una trasformazione prospettata come possibilità lasciata a una verifica aperta e τ e θ esprimono una trasformazione invertibile ipotetica e la sua inversa che si ipotetizza potersi individuare con qualche procedimento regionevolmente prevedibile.*

Un altro genere di entità è costituito dalle operazioni binarie. Queste sono esemplificate in e01 *dalla fondamentale $\shortmid$ e dai segni semplici $+$ e $-$ e portano a espressioni della forma*

primo operando operazione secondo operando.

Si hanno poi le entità del genere operatori unari quasi identificabili con delle trasformazioni e che possono dare espressioni della **forma prefissa***, come per il meno unario e della* **forma esponenziale** *come per il passaggio all'opposto (o, come vedremo, al reciproco e in generale a un inverso).*

Va segnalato che altre espressioni riguardanti trasformazioni o funzioni sono discusse in B15:a.06.

*B04:***g.05** *Nelle formule elaborate compaiono, necessariamente segni delimitatori e segni separatori.*

I segni delimitatori compaiono a coppie coniugate come "(" e ")", come "[" e "]" o come "{" e "}" (fa eccezione il delimitatore autoconiugato "—").
Va detto anche che nelle formule più articolate sono usate per convenienza visuale coppie coniugate di diverse estensioni e quindi con diverse evidenze.

I delimitatori svolgono l'importante compito di rendere disponibili espresioni matematiche che possono contenere annidate al loro interno sottoespressioni le quali a loro volta possono racchiudere sottoespressioni ancora più semplici, senza che si pongano a priori limiti ai livelli di annidamento e al numero di espressioni annidate in un espressione.

Questa ampia libertà è consentita dalla versatilità compositiva fornita dalle coppie di delimitatori coniugati e dai separatori i quali permettono di fornire evidenza ai significati delle sottoespressioni annidate.

Le precisazioni formali di questa possibilità di arricchimento delle espressioni viene chiarito dalla teoria dei linguaggi acontestuali esposta in C14.

Per la interpretazione delle espressioni più composite ricordiamo ancora che le parentesi tonde sono usate con due significati diversi: come delimitatori di argomenti di trasformazioni o funzioni, come per $\mathfrak{Fun}(\mathfrak{A})$*, o come delimitatori di sottoespressioni nell'ambito di espressioni articolate, come in* $(v_i\,\tau)\theta \;=\; v_i$.

Conviene prestare attenzione ad espressioni come $\mathbf{EqvCls}\,(\mathsf{notn}_1(k))$ *: in essa compaiono due coppie di delimitatori di argomenti, quelle in* (k) *annidata entro il nido di livello superiore* $(\mathsf{notn}_1(k))$.

Riprendiamo anche la $\mathsf{Sost}[\mathsf{A},c](w)$ *: in essa le parentesi quadre delimitano specificazioni riguardanti la trasformazione* Sost *che spesso sono chiamate* **parametri***, mentre le parentesi tonde delimitano l'argomento della sostituzione, cioè l'entità alla quale si applica l'azione espressa da* $\mathsf{Sost}[\mathsf{A},c]$.

Il segno $|$ *viene usato come delimitatore sia iniziale che finale per denotare una particolare trasformazione. Esso consente scritture concise, ma può presentare qualche difficoltà di interpretazione; questo può accadere, per esempio, per la prima parte della formula* $\Big||h|-|k|\Big| \;\le\; |h-k| \;\le\; |h|+|k|$.

*B04:***g.06** *Nelle formule giocano ruoli essenziali i segni "=" e ":=".*

Il primo esprima la relazione di uguaglianza che nella accezione più semplice si definisce a partire dall'algoritmo che decide la uguaglianza o meno di due stringhe. Accanto a esso va considerato il segno $\neq$ *che esprime l'opposto della uguaglianza, anch'esso nella accezione più semplice derivabile dall'algoritmo dell'uguaglianza.*

Si osserva che anche la nozione di relazione opposta o di proprietà opposta, che nella sua accezione più semplice è stata ricavata dai comportamenti degli esecutori di algoritmi e più precisamente dalle istruzioni di scelta dicotomica che compaiono negli algoritmi.

Il segno $:=$ *è il connettivo che va inserito tra una espressione più o meno semplice con la quale si intende denotare una entità nuova, che si introduce nello sviluppo espositivo e una espressione alla sua destra che deve esprimere in modo chiaramente interpretabile una costruzione, che nel caso più semplice è traducibile in un algoritmo e che conduce a una entità controllabile affidabilmente.*

Semplici esempi sono le prime due formule in f01 *.*

Analogamente a := si può usare il segno suo "riflesso" "=:" in formule nelle quali si ritiene conveniente presentare prima una espressione interpretabile e poi il nuovo simbolo equivalente o più in generale una espressione equivalente nella quale compare un nuovo elemento.

Inoltre si useranno equazioni, come la prima in B53a04*, nelle quali viene usato il segno :=: per fare da connettivo interposto tra due espressioni che vengono entrambe definite da un'altra espressione chiaramente interpretabile e che quindi risultano equivalenti.*

*B04:***g.07** *Altre espressioni che prendiamo in considerazione con qualche dettaglio sono quelle introdotte in* a04 *e che riguardano le lunghezze delle stringhe.*

Come prima notazione per la lunghezza della w è stata proposta la $\mathsf{len}_{|}(w)$ *e insieme a questa la più semplice* $\mathsf{len}(w)$ *che si può pensare sottintenda l'uso del segno* |*, oppure che tenga conto della intercambiabilità dei segni e reputi di basso interesse specificare il segno che si utilizza per le rappresentazioni unadiche degli interi naturali.*

Abbiamo per esempio $\mathsf{len}(\mathtt{abbca}) = |||||$ *e* $\mathsf{len}(\mathtt{lunghezza}) = |||||||||$ *.*

Questo tipo di notazione presenta un primo segno specifico, len*, che sta a rappresentare il meccanismo che effettua la trasformazione della stringa nella sequenza di segni (*|*) che costituisce la sua* unr*.*

Dopo la prima sottoespressione e il segno "=" compare le notazione per la stringa da "elaborare" delimitata tra i due delimitatori coniugati, "(" e ")". Va osservato che questi due segni possono essere usati per racchiudere scritture molto elaborate, in particolare sequenze di svariati argomenti di una funzione.

In generale una scrittura delimitata da due parentesi coniugate a secondo membro di una espressione come le due precedenti deve rappresentare una entità alla quale sia lecito applicare il meccanismo rappresentato dalla prima sottoespressione. Questa rappresentazione di entità trasformabile viene detta "argomento della trasformazione".

Per denotare la trasformazione di una stringa w nell'intero naturale che costituisce la sua lunghezza, oltre alla notazione $\mathsf{len}(w)$*, vengono utilizzate le scritture equivalenti* $|w|$ *e* $w^{\vdash\!\dashv}$ *.*
Come per il valore assoluto, la $|w|$ *si serve di un segno che fa da delimitatore iniziale e delimitatore finale dell'argomento della trasformazione e può presentare il vantaggio della concisione.*

Anche la $w^{\vdash\!\dashv}$ *può presentare il vantaggio della concisione, ma solo se l'argomento w consiste in un segno semplice; in caso contrario richiederebbe una coppia di delimitatori, come la notazione* $|w|$ *.*

La notazione $w^{\vdash\!\dashv}$*, che si dice presentare la trasformazione in posizione esponenziale, può risultare significativa in quanto mostra prima un oggetto esaminabile staticamente e alla sua destra un meccanismo che viene applicato "in un secondo momento" all'oggetto da modificare e quindi viene scritto alla sua destra (contrariamente a quanto si dovrebbe fare in lingue come l'arabo e l'ebraico).*

Queste diverse notazioni, come vedremo, sono utilizzate per esprimere una grande varietà di entità assimilabili più o meno direttamente alle trasformazioni di stringhe.
Si tratta di notazioni equivalenti tra le quali occorre scegliere in relazione ai vantaggi espositivi che ciascuna di esse può presentare.