Capitolo A33:
Introduzione dei numeri complessi

A33:A. Esigenza di ampliamento del campo dei reali

A33:A.01 Vi sono varie ragioni che inducono ad ampliare il campo dei numeri reali con il campo dei numeri complessi. Essi sono stati introdotti in un primo momento da Raphael Bombelli (EW) intorno al 1540 per dare pieno senso a formule che consentono di calcolare gli zeri reali di alcuni polinomi a coefficienti reali, ma purtroppo questa idea in quel tempo non è stata interamente compresa. Nel XVIII secolo essi sono stati presi in considerazione per poter formulare il cosiddetto "Teorema fondamentale dell'algebra", enunciato secondo il quale per ogni n intero positivo ogni polinomio di grado n possiede esattamente n zeri, quando si tenga conto della loro cosiddetta molteplicità. (v.o.) Nel XIX secolo si è visto che l'insieme dei numeri complessi costituisce un ambiente entro il quale si possono sviluppare efficientemente teorie che consentono di inquadrare procedimenti di calcolo di vastissima portata. In particolare l'ambito dei numeri complessi risulta necessario per definire a un elevato livello di generalità l'operazione di elevamento a potenza e la sua inversa cioè l'estrazione di radice.

Cominciamo con una richiesta circoscritta: quella di individuare entità numeriche che elevate al quadrato forniscono numeri reali negativi. Ancora quindi partiamo dalla opportunità di metterci in grado di eseguire una operazione inversa.

A33:A.02 Cerchiamo dunque una entità numerica x tale che $x^2 = -1$ e che possa considerarsi elemento di un'insieme che estende l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e che gode di buona parte delle proprietà di questo campo ordinato. Questa richiesta si può riformulare chiedendo un'estensione di $\mathbb{R}$ nel quale il polinomio $x^2 + 1$ possieda radici; si auspica inoltre che esso possegga esattamente due radici, in analogia con quanto si riscontra per il polinomio $x^2 - 1$ nel campo reale.
Nell'insieme esteso si deve chiedere siano definite le due operazioni di somma e di prodotto che consentono di costruire un insieme di polinomi. Per determinazione la suddetta x ci facciamo guidare dalla stretta connessione fra elementi di un monoide abeliano e trasformazioni di tale insieme determinate dalle applicazioni delle operazioni con i corrispondenti operandi.
Siamo quindi indotti a cercare una trasformazione dell'insieme che estende $\mathbb{R}$ tale che la sua doppia applicazione equivalga al passaggio all'elemento opposto.
Una trasformazione di questo genere è la rotazione di 90° nel verso antiorario del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, naturale estensione di quella del piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; come si è visto ancge in AA:, essa è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ma la stessa proprietà è soddisfatta dalla sua trasformazione inversa, dalla rotazione di 90° nel verso orario, rappresentata dalla matrice inversa della precedente $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
A questo punto abbiamo due trasformazioni candidate ad individuare due nuove entità numeriche; questo si accorda con l'auspicio di trovare due radici per l'equazione polinomiale $x^2 + 1 = 0$.

A33:A.03 Occorre trovare una rappresentazione per le entità numeriche la cui moltiplicazione viene rappresentata dalle suddette matrici. Queste matrici si applicano a coppie di numeri reali; applicate

in particolare a $\langle 1,0\rangle$ forniscono rispettivamente $\langle 0,1\rangle$ e $\langle 0,-1\rangle = -\langle 0,1\rangle$. È ragionevole associare a queste due coppie le due entità numeriche. Queste vengono anche indicate con i e $-i$, rispettivamente La moltiplicazione per un numero reale $r \neq 0$ costituisce una omotetia per i numeri reali. È ragionevole associare ai numeri reali le omotetie per le coppie di numeri e quindi le matrici della forma $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$, cioè le matrici multiple della matrice unità.
È opportuno chiedere che si possano trattare i prodotti dei reali per l'unità immaginaria i; questi sono chiamati **numeri immaginari [puri]** e sono rappresentati dalle matrici della forma $\begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$, matrici che esprimono le composizioni di rotazioni di 90° con omotetie.

Per quanto riguarda la somma dei reali $r+s$, la si fa corrispondere alla traslazione di r per un passo s. La somma di un immaginario puro it con un numero reale r si può definire come la traslazione in verticale di passo t del reale r; essa corrisponde alla somma dei vettori-RR $r + it = \langle r, 0\rangle + \langle 0, s\rangle$.
Siamo dunque condotti a considerare l'insieme dei vettori-RR munito di due operazioni binarie: la somma vettoriale e un'operazione di prodotto nella quale rientrino sia le rotazioni di $\pm 90°$ che le omotetie.
La trasformazione che corrisponde a $r + it$ si ottiene come

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -it \\ it & r \end{bmatrix} .$$

A33:A.04 Si dice **norma** o **modulo** della coppia $r + it$, e si denota con $|r + it|$ o con il semplice ρ, la lunghezza del segmento che ha come estremi l'origine e $\langle r, t\rangle$, cioè $\rho := |r + it| := \sqrt{r^2 + t^2}$.
Si ha quindi la forma trigonometrica dei numeri complessi

$$r + it = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) , \quad \text{dove} \quad \cos\theta = \frac{r}{\rho} , \ \sin\theta = \frac{t}{\rho} .$$

I numeri con la norma uguale a 1 costituiscono la circonferenza del piano: i suoi punti hanno la forma $\cos\theta + i\sin\theta$ La moltiplicazione per un tale numero complesso corrisponde alla rotazione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ di un angolo θ in verso antiorario.
La moltiplicazione per un generico $r+it$ corrisponde alla omotetia per il fattore ρ seguita (o preceduta) dalla rotazione dell'angolo θ.
L'angolo θ non è completamente determinato, ma solo a meno di un addendo multiplo di 2π.

A33:A.05 Esprimiamo le precedenti moltiplicazioni mediante matrici 2×2.
Per la rotazione

$$Rot_{\mathbf{0}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin et & \cos\theta \end{bmatrix} ,$$

per la omotetia

$$Omtt_{\mathbf{0}}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$

per la rotoomotetia

$$Rot_{\mathbf{0}}(\theta) \circ Omtt_{\mathbf{0}}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix} .$$

Questa trasformazione esprime la moltiplicazione per il numero $r + is$ con $r = \rho\cos\theta$ ed $s = \rho\sin\theta$, e quindi con

$$\rho = \sqrt{r^2 + s^2} , \quad \cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}} , \quad \sin\theta = \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}} .$$

Mediante r e s questa trasformazione si esprime con la matrice

$$\begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix} .$$

Quindi questa trasformazione manda $u + iv$ in

$$\begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ru - sv \\ su + rv \end{bmatrix} .$$

A33:B. Campo dei numeri complessi

A33:B.01 Definiamo come **numero complesso** ogni coppia $z = \langle a, b\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; i numeri complessi quindi corrispondono ai punti-RR, cioè ai vettori-RR; la componente a, l'ascissa del punto-RR, si chiama **parte reale** del numero complesso z e la componente b, la ordinata del punto-RR, si dice **parte immaginaria** di z. Per l'insieme dei numeri complessi useremo anche la notazione $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e la denominazione di **piano di Gauss-Argand**.
Su questo insieme definiamo le operazioni di somma e di prodotto ponendo, per ogni $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in \mathbb{C}$:

$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle ,$$

$$\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac - bd, ad + bc\rangle .$$

La somma è l'estensione cartesiana della somma tra numeri reali; come già notato essa è una operazione commutativa dotata di elemento neutro; questo è $\langle 0, 0\rangle$, corrisponde all'origine del piano sui reali, lo denotiamo anche con $\mathbf{0}$ e può chiamarsi **zero complesso**.
Inoltre per l'operazione di somma ogni numero complesso $\langle a, b\rangle$ è dotato di inverso, questo è $\langle -a, -b\rangle$, cioè $-\langle a, b\rangle$ e viene chiamato più specificamente **opposto del numero complesso** $\langle a, b\rangle$; esso corrisponde al vettore-RR ottenuto da $\langle a, b\rangle$ per simmetria centrale rispetto all'origine. Dunque $\mathbb{C}_{gradd} := \big\langle \mathbb{C}, +, -, \langle 0, 0\rangle \big\rangle$ è un gruppo abeliano chiamato **gruppo additivo dei numeri complessi**.
Il prodotto fra numeri complessi è stato definito in modo che la moltiplicazione per un numero complesso sia una rotoomotetia di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Da questo discende che il prodotto è un'operazione commutativa (in accordo con la simmetria delle espressioni per le componenti del prodotto), che è un'operazione associativa (come le rotazioni e le omotetie) e che ogni numero complesso diverso dallo zero è dotato di inverso per il prodotto.
Si trova subito che il numero complesso $\langle 1, 0\rangle$ corrisponde alla omotetia di rapporto 1 composta con la rotazione di angolo 0, cioè alla trasformazione identica $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$; evidentemente esso costituisce l'elemento neutro del prodotto.
Per l'inverso dell'elemento generico si trova

$$\langle a, b\rangle^{-1} = \left\langle \frac{a}{a^2 + b^2} \ , \ \frac{-b}{a^2 + b^2} \right\rangle ,$$

in accordo con il fatto che la trasformazione corrispondente è la omotetia di rapporto $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ composta con la rotazione opposta a quella corrispondente ad $\langle a, b\rangle$. Dunque, se si introduce $\mathbb{C}_{nz} := \mathbb{C} \setminus \mathbf{0}$, $\mathbb{C}_{grmul} := \big\langle \mathbb{C}_{nz}, \cdot, {}^{-1}, \langle 1, 0\rangle \big\rangle$ è un gruppo abeliano chiamato **gruppo moltiplicativo dei numeri complessi**.

A33:B.02 Per l'insieme dei numeri complessi l'operazione di prodotto è distributiva rispetto alla somma, cioè,

$$\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in \mathbb{C} \,:\; \langle a,b\rangle \cdot \big(\langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle\big) = \langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle + \langle a,b\rangle \cdot \langle e,f\rangle \ ;$$

Questa uguaglianza si ricava facilmente dalla linearità rispetto a $\langle c,d\rangle$ dell'espressione per il prodotto oppure, in termini geometrici, dalla osservazione che applicando la rotoomotetia RO associata a $\langle a,b\rangle$ alla somma di due vettori-RR $\mathbf{v} = \langle c,d\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle e,f\rangle$ si ottiene la somma del vettore fornito applicando la RO a $\mathbf{v}$ con il vettore $RO(\mathbf{w})$.
Dunque l'insieme dei numeri complessi munito delle operazioni di somma e prodotto costituisce un campo. Questa struttura algebrica viene detta **campo dei numeri complessi** e si denota con

$$\mathbb{C}_{fld} := \big\langle \mathbb{C}, +, -, \mathbf{0}, \cdot, ^{-1}, \langle 1,0\rangle \big\rangle \ .$$

I numeri complessi con parte immaginaria nulla si comportano come i numeri reali: infatti

$$\langle a,0\rangle + \langle c,0\rangle = \langle a+c,0\rangle \quad , \qquad \langle a,0\rangle \cdot \langle c,0\rangle = \langle ac,0\rangle \quad , \qquad \langle a,0\rangle^{-1} = \left\langle \frac{1}{a}, 0 \right\rangle \ .$$

Questi numeri complessi costituiscono un sottocampo del campo dei numeri complessi $\mathbb{C}_{fld}$. Inoltre la corrispondenza $\lceil a \in \mathbb{R} \mapsto \langle a,0\rangle \rceil$ costituisce un isomorfismo tra il campo dei reali e il suddetto sottocampo. Questo rende lecito identificare discorsivamente i numeri complessi con parte immaginaria nulla con i numeri reali.
A questo punto è lecito affermare che il campo dei numeri complessi estende il campo dei numeri reali.

A33:B.03 Vediamo come si semplifica la moltiplicazione per $z = \langle a,b\rangle$ per alcuni sottoinsiemi particolari di numeri complessi.
Per i complessi z con $b = 0$, cioè per punti-RR dell'asse orizzontale, la moltiplicazione per $\langle a,b\rangle$ si riduce ad una omotetia di rapporto a: $\langle a,0\rangle \cdot \langle c,d\rangle = \langle ac, ad\rangle = a\langle c,d\rangle$.
Nel caso in cui $a^2 + b^2 = 1$, cioè quando il corrispondente punto-RR si trova sulla circonferenza di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1, la moltiplicazione per $\langle a,b\rangle$ si riduce a una rotazione.
Per i numeri immaginari puri, cioè per i numeri complessi z per i quali $a = 0$ corrispondenti ai punti-RR dell'asse verticale, la moltiplicazione per $\langle a,b\rangle$ si riduce ad una omotetia di rapporto b composta con la rotazione di 90°: $\langle 0,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle = \langle -bd, bc\rangle = b\langle -d,c\rangle$.
In particolare i quadrati dei numeri immaginari puri sono i numeri reali non positivi: $\langle 0,b\rangle^2 = -b^2$; ancor più in particolare $i^2 = -1$. Si osserva inoltre che '$(-\langle 0,b\rangle)^2 = -b^2$ e $(-i)^2 = -1$; quindi nel campo dei complessi ogni numero reale negativo possiede due radici quadrate, come nel campo reale ogni numero positivo k possiede due radici quadrate, la sua radice quadrata aritmetica $\sqrt{k} > 0$ e il numero reale opposto di questa $-\sqrt{k}$.
Si osserva che tutti i reali negativi sono esprimibili in due modi come quadrati di immaginari puri: per ogni k reale positivo, si può scrivere $k = \left(\pm\sqrt{k}\right)^2$ e quindi $-k = i^2\left(\pm\sqrt{k}\right)^2 = \left(\pm i\sqrt{k}\right)^2$.

A33:B.04 Talora è utile denotare la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso con scritture specifiche: se $z = \langle a,b\rangle \in \mathbb{C}$ per la sua parte reale si scrive $a = \Re z$ e per la sua parte immaginaria $b = \Im z$. Ogni numero complesso $z = \langle a,b\rangle$ si può esprimere come somma della sua parte reale e del prodotto dell'unità immaginaria per la sua parte immaginaria:

$$z = \langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle 0,1\rangle \cdot \langle b,0\rangle = a + ib = \Re x + i\Im z \ .$$

L'espressione $a + ib$ si dice **forma cartesiana** o **forma algebrica** del numeri complesso z; essa spesso risulta più maneggevole di quella che esprime la definizione data e per la quale qui si utilizzano le parentesi angolate. Ad esempio le definizioni della somma e del prodotto di due complessi diventano

$$(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d) \quad , \qquad (a+ib)\cdot(c+id) := (ac-bd)+i(ad+bc) \ .$$

Queste formule si possono ricavare applicando le regole per le espressioni riguardanti polinomi sui reali (cioè le cosiddette regole dl calcolo letterale), trattando i come una indeterminata, ma tenendo conto anche dell'uguaglianza $i^2 = -1$.

A33:B.05 Si definisce come **complesso coniugato** di $z = a+ib$ il numero

$$z^* := a - ib = \Re z - i\Im z \ .$$

Va osservato che spesso per il complesso coniugato di z si usa la notazione $\overline{z}$.
Il passaggio da un numero complesso al suo coniugato corrisponde alla riflessione del piano complesso rispetto all'asse orizzontale, cioè all'asse dei numeri reali. Evidente quindi che questa trasformazione sia un'involuzione su $\mathbb{C}$, cioè che sia $(z^*)^* = z$.
Si ricavano subito le uguaglianze seguenti (con $z = \langle a, b\rangle$ e w numeri complessi qualsiasi):

$$z + z^* = 2a = 2\Re z \quad , \qquad z - z^* = 2bi = 2i\Im z$$

$$\Re z = \frac{z+z^*}{2} \quad , \qquad \Im z = \frac{z-z^*}{2i} \ ;$$

$$(z \pm w)^* = z^* \pm w^* \quad , \qquad (z\cdot w)^* = z^* \cdot w^* \quad , \qquad \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*} \ .$$

Le ultime uguaglianze esprimono il rispetto delle operazioni algebriche da parte della coniugazione complessa. Da queste uguaglianze segue che ad ogni uguaglianza della forma

$$\mathcal{E}_1(z_1, z_2, ..., z_n) = \mathcal{E}_2(z_1, z_2, ..., z_n)$$

nella quale z_1, z_2, ... , z_n sono numeri complessi, mentre $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_1$ denotano due espressioni riguardanti le applicazioni di due combinazioni di operazioni algebriche sopra i numeri complessi loro argomenti, corrisponde una uguaglianza coniugata della forma

$$\mathcal{E}_1\left({z_1}^*, {z_2}^*, ..., {z_n}^*\right) = \mathcal{E}_2\left({z_1}^*, {z_2}^*, ..., {z_n}^*\right) \ .$$

Questa corrispondenza fra uguaglianze viene chiamato **principio di dualità per coniugazione complessa** e può venire utilizzata per ricavare con poca fatica nuove uguaglianze da uguaglianze accertate.

A33:B.06 Si osserva che

$$zz^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \geq 0 \ ;$$

La radice quadrata aritmetica di questa espressione $\sqrt{a^2+b^2}$ è $|z|$, il modulo del numero complesso z; questa notazione si accorda con quella che esprime il valore assoluto di un numero reale, in quanto se z è un numero reale, $z = \Re z = a$, il suo modulo non è che il valore assoluto della sua parte reale, $|z| = |a|$.

Valgono le seguenti relazioni per z e w numeri complessi arbitrari:

$$|z| \geq 0 \quad \text{e} \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

$$|z^*| = |z|$$

$$|\Re z|, |\Im z| \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$$

$$||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$$

Le prime tre discendono immediatamente dalle definizioni e hanno evidenti interpretazioni geometriche. Anche le ultime due coppie di relazioni sono interpretabili geometricamente e sono chiamate **disuguaglianze triangolari** per i numeri complessi. Può essere utile darne anche una verifica algebrica. Posto $z = \langle a, b\rangle$ e $w = \langle c, d\rangle$ e passando ai quadrati dei tre membri, si giunge alle disuguaglianze equivalenti

$$\left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \le (a+c)^2 + (b+d)^2 \le \left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \ ;$$

Sviluppando i quadrati si hanno altre disuguaglianze equivalenti

$$-\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \le ac+bd \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \ ;$$

queste equivalgono all'unica disuguaglianza

$$|ac+bd| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \ ;$$

passando ancora ai quadrati, sviluppando e semplificando si arriva alla

$$0 \le -abcd + a^2d^2 + b^2c^2 = (ad-bc)^2 \ ,$$

evidentemente verificata per ogni scelta di a, b, c e d reali.

A33:C. Potenze e radici nel campo complesso

A33:C.01 Vediamo come la forma trigonometrica dei numeri complessi si riveli particolarmente vantaggiosa per esprimere prodotti e divisioni.
Consideriamo $n \ge 2$ numeri complessi della forma

$$z_j = |z_j|(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad \text{per} \quad j = 1, 2, ..., n \ ;$$

Calcoliamo il prodotto $z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\,[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] =$
$|z_1|\cdot|z_2|\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
Per il **reciproco** del numero complesso z abbiamo invece

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{|z|}\,\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} = |z|^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) \ ,$$

ovvero

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \ .$$

Di conseguenza per la **divisione di due complessi**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \ .$$

Più in generale, per il prodotto di n numeri complessi z_1, z_2, ..., z_n, dalla formula precedente e dalla associatività del prodotto si ottiene

$$\prod_{j=1}^n z_j = \prod_{j=1}^n |z_j| \left[\cos\left(\sum_{j=1}^n \theta_j\right) + i\sin\left(\sum_{j=1}^n \theta_j\right)\right] \ .$$

In particolare se $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ si ha la formula per la **potenza intera positiva di un numero complesso**

$$z^n = |z|^n\,[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Per la formula per il numero reciproco la precedente formula vale anche per qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$. Questa formula viene detta **formula di de Moivre**.

A33:C.02 Dato l'intero naturale n e il numero complesso $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, si dice **radice n-esima** di z ogni numero complesso w tale che $w^n = z$.

(1) Teorema Ogni numero complesso non nullo z possiede n radici n-esime della forma

$$|z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \ .$$

Dim.: Si verifica facilmente che elevando alla potenza n-esima le espressioni precedenti si trova z, cioè che esse forniscono radici n-esime di z. Si osserva poi che per ogni radice n-esima di z, che assumiamo della forma $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, deve essere $r^n[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)] = |z|[\cos\theta + i\sin\theta]$; di conseguenza questa generica radice deve avere una delle forme precedenti ▮

A33:C.03 Fissato un intero n maggiore di 1, consideriamo i numeri complessi della forma

$$u_{n,k} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \ .$$

Si verifica facilmente che questi n numeri complessi sono **radici n-esime dell'unità**, cioè che ${u_{n,k}}^n = 1$.
Si trova inoltre che per ogni $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ si ha $u_{n,k} = {u_{1,n}}^k$.
Chiaramente nel piano complesso i numeri $u_{n,0} = 1$, $u_{n,1}$, ..., $u_{n,n-1}$ costituiscono i vertici di un poligono di n lati regolare inscritto nella circonferenza goniometrica, con il primo vertice nel punto 1 dell'asse dei reali.
Si noti che per n pari (scriviamolo $n = 2h$), $u_{2h,h} = -1$; se invece n è dispari solo 1 è radice reale dell'unità.
Si trova inoltre per $j = 0, 1, ..., \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ che ${u_{n,j}}^* = u_{n,n-j}$.

A33:C.04 Le n radici complesse del numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si possono esprimere prendendo una qualsiasi di esse e moltiplicandola per le n radici dell'unità.
Si osserva anche che la moltiplicazione per le n radici dell'unità corrispondono alle rotazioni del piano complesso con centro nell'origine per l'angolo di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$.
Di conseguenza anche le n radici del generico numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza; questa, come la circonferenza goniometrica utilizzata per le radici dell'unità, ha centro nell'origine, ma ha raggio $|z|^{1/n}$.

A33:C.05 In seguito nelle considerazioni riguardanti numeri complessi useremo il segno di radice per individuare l'insieme di tutte le radici del radicando complesso e la notazione con esponente frazionario per la radice aritmetica.

$$\sqrt[n]{\rho}(\cos\theta + i\sin\theta) = \left\{k = 0, 1, 2, ..., n-1 :|\ \rho^{1/n}\left[\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)\right]\right\} \ .$$

Ad esempio abbiamo $\sqrt{9} = \{-3, +3\}$, $\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$, $9^{1/2} = 3$, $8^{1/3} = 2$, $(-8)^{1/3} = -2$.

A33:C.06 Definiamo inoltre come **potenza del numero complesso z ad esponente razionale $\frac{n}{d}$**, con d intero positivo, n intero non nullo e $|n|$ e d coprimi, ogni numero complesso fornito dall'espressione

$$\sqrt[\frac{n}{d}]{\rho}(\cos\theta + i\sin\theta) \ ,$$

cioè

$$\left\{k = 0, 1, 2, ..., n-1 :| \ \rho^{\frac{n}{d}} \left[\cos\frac{n\theta + k2\pi}{d} + i\sin\frac{n\theta + k2\pi}{d}\right]\right\} \ .$$

A33:D. Campo dei numeri complessi costruibili

A33:D.01 Anche nel campo dei numeri complessi è opportuno distinguere i numeri costruibili: si dice **numero complesso costruibile** ogni numero complesso esprimibile come combinazione $a + ib$ con a e b numeri reali costruibili. In altre parole si ha un numero complesso costruibile sse si conoscono due procedure che possono fornire la sua parte reale e la sua parte immaginaria con una precisione elevata quanto si vuole.
Dato che sono note procedure che calcolano i valori assunti dalle funzioni radice quadrata, seno e coseno di argomenti costruibili con una precisione arbitrariamente elevata, una definizione equivalente di numero complesso costruibile può riferirsi alla sua forma polare $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e richiedere due procedure in grado di fornire il modulo e l'argomento di tale z con precisione elevata quanto si vuole.

A33:D.02 L'insieme dei numeri complessi costruibili lo denotiamo con $\mathbb{C}_C$ e si può esprimere come $\mathbb{R}_C \times \mathbb{C}_C$.
Si osserva che i complessi costruibili costituiscomno un sottocampo di $\mathbb{C}_{fld}$; infatti effettuando operazioni di somma e prodotto sui numeri costruibili complessi si ottengono numeri dello stesso genere.
Sono molte altre le costruzioni che da numeri reali o complessi costruibili portano a numeri complessi costruibili. In questo capitolo abbiamo visto l'elevamento a potenze intere e il passaggio alle radici complesse. Lo studio delle funzioni speciali ne fornisce molte altre.