

Capitolo A01

introduzione

Contenuti delle sezioni

- a. motivazioni p. 3
- b. criteri espositivi p. 9
- c. impianto organizzativo p. 13

19 pagine

A010.01 Il presente capitolo e i tre successivi A02, A03, A05 costituiscono l’apertura di una presentazione di varie nozioni della matematica, di alcuni elementi dell’informatica e della fisica e di alcune loro applicazioni resa disponibile su Internet.

Si tratta di un testo in fieri portato avanti servendosi di strumenti informatici finora piuttosto semplici, il sistema $T_{E}X$ e un paio di source editors, che si vuole piuttosto ampio: attualmente consiste di circa 3800 pagine e purtroppo manca delle figure precedentemente definite con un programma che sembra non più disponibile.

Questo corpo di documenti che chiamiamo MaTeXp, ma che in seguito più spesso chiameremo semplicemente “*esposizione*”, tocca nozioni che in gran parte vengono trattate nei primi anni dei corsi universitari scientifici e che in parte minore si collocano ad un livello un poco superiore.

A010.02 Occorre subito segnalare che questa *esposizione*, tuttora bisognosa di precisazioni e complementamenti, va considerata primariamente come una sperimentazione di modalità in parte non tradizionali per la presentazione di contenuti matematico e in parte minore informatici e fisici con l’aiuto di specifici strumenti informatici di larga disponibilità.

A questo proposito occorre dichiarare la convinzione che tutte le presentazioni di nozioni che possono destare un ampio interesse per le attività conoscitive, sia per fini formativi e divulgativi che per scopi dettati da specifiche esigenze applicative, possono trarre notevoli vantaggi dall’utilizzo degli strumenti per la gestione delle informazioni che sempre di più vengono resi potenzialmente efficaci dai continui progressi delle tecnologie digitali.

Questo vale in particolare per la matematica e per le discipline ad essa contigue nell’attuale periodo di crescita dell’influenza sull’intera società e in particolare sulle attività culturali della strumentazione tecnologica e delle conseguenti prospettive.

Occorre anche aggiungere che consideriamo assurdo che tra le attività culturali non siano incluse e non siano giudicate determinanti quelle riguardanti le scienze e le tecnologie.

Riteniamo quindi opportuno che venga dedicata molta attenzione alle prospettive che le innovazioni tecnologiche, già ampiamente disponibili e in evidente continua espansione, aprono per la didattica e la divulgazione di quelle che chiamiamo **conoscenze razionalmente condivisibili** e in particolare della matematica e delle discipline scientifiche e tecnologiche a lei contigue.

A010.03 Occorre aggiungere che questa esposizione cerca di essere portata avanti con **razionalità**, attenta alle difficoltà dei processi di formazione delle conoscenze.

È opportuno dare una rapida indicazione su cosa qui si intende con questo termine, anche se maggiori considerazioni saranno svolte più avanti in relazione alla definizione di varie nozioni cruciali.

Un atteggiamento razionale va assunto innanzi tutto quando si affronta un problema che ci preoccupa: occorre esaminare varie caratteristiche dei contesti nei quali si presenta, valutare le sue possibili conseguenze e studiare in quali modi si può cercare di risolverlo.

Tutti queste attività conoscitive devono portare a schematizzazione di scenari strutturati, a valutazioni quantitative, a decisioni e a conseguenti azioni.

Per questo si devono chiarire molte relazioni fra le entità in esame, misurare molti parametri di confronto e valutare molti rapporti fra costi e benefici.

Tutto questo deve essere fatto con una ponderazione (con competenza e ragionevolezza) tenendo a bada spinte istintive e pulsioni momentanee, prestando attenzione alle conseguenze non immediate e con sufficiente autoconsapevolezza.

In linea generale occorre anche

riconoscere la complessità di quanto ci circonda e la varietà delle esigenze umane che possono condurre a conflitti;

favorire accordi che portino ad azioni di più persone che cooperano preoccupandosi della obiettività delle valutazioni le quali devono tenere conto della ampia varietà delle situazioni e delle influenze;

Le persone che cooperano per la risoluzione di un problema quindi devono dedicarsi alla progressiva crescita delle analisi, degli obiettivi e delle iniziative, riconoscendo la necessità di verifiche che possono condurre ad autocorrezioni anche molto decise.

A010.04 La varietà tematica, la versatilità e le valenze applicative della matematica da un lato e le prospettive degli strumenti digitali dall'altro suggeriscono di sviluppare l'attenzione alle prospettive tecnologiche anche attraverso sperimentazioni.

Tra queste cerca di collocarsi MATeXp, attività portata avanti solo con mezzi e competenze artigianali, aiutando la convinzione che le possibilità di una apparecchiatura come un comune PC attualmente sono utilizzate solo in piccola parte e con limitata razionalità.

Riteniamo inoltre che per la società stia assumendo una rilevanza non eludibile una maggiore consapevolezza del modo di crescere, dei risultati e delle conseguenze tangibili della matematica associata agli strumenti informatici utilizzata a supporto di una crescente gamma di attività.

Questa consapevolezza può contribuire a contrastare efficacemente le derive generatrici di conflitti dovute a credenze e pulsioni lontane dalla razionalità, derive oggi molto diffuse e in crescita.

Contro queste derive dovrebbe essere messa in campo la divulgazione di conoscenze affidabili, palesemente in forte crescita e con estese e solide potenzialità verso la soluzione di problemi e il supporto a iniziative costruttive.

La divulgazione delle conoscenze affidabili si presenta come doverosa e può e dovrebbe essere condotta anche con toni perentori.

A010.05 La prima sezione del presente capitolo, :a, è dedicata alle finalità e agli aspetti generali della presente *esposizione*.

Nella sezione :b sono presentati i criteri seguiti per la redazione del testo e nella :c sono esaminate le caratteristiche della organizzazione dello stesso. Si tratta di discorsi in parte tecnici la cui lettura non è richiesta per la comprensione di gran parte delle pagine successive.

In linea di massima si può consigliare a chi si accosta a questa *esposizione* una prima lettura delle pagine che toccano argomenti che attraggono la sua attenzione, eventualmente già noti, in modo che possa rendersi conto in concreto delle scelte stilistiche, in particolare delle non poche riguardanti termini e notazioni non usuali, e della organizzazione complessiva dei materiali.

A010.06 Nelle sette sezioni del successivo capitolo, dalla A02a alla A02g, sono presentati a grandi linee i contenuti dei singoli capitoli che compongono gli attuali sette tomi nei quali l'*esposizione* è suddivisa.

Conviene segnalare subito che il tomo W contiene un prontuario di nozioni e formule utilizzabili per scopi circoscritti che si propone soprattutto per consultazioni autonome e che il tomo X contiene vari indici che intendono facilitare la individuazione di alcuni tipi di nozioni in grado di aiutare nella fruizione del testo anche con spostamenti non progressivi tra discorsi distanti.

A010.07 Il capitolo successivo A03 è dedicato alla presentazione dei sopra accennati indici che aiutano a orientarsi nel materiale esposto.

Essi, come i collegamenti interni al testo, fanno riferimento sistematico alle ripartizioni nelle quali i contenuti sono distribuiti; queste, in ordine di estensione decrescente, sono chiamate tomi, capitoli, sezioni e paragrafi.

Gli indici elencano: titoli di capitoli e sezioni, termini, simboli, abbreviazioni, persone e pubblicazioni. Le persone e le pubblicazioni (tradizionali ed elettroniche) negli ultimi due elenchi riguardano sia le fonti delle nozioni presenti nell'*esposizione*, sia personalità che hanno fornito contributi rilevanti per lo sviluppo delle idee matematiche e più in generale scientifiche e culturali vicine, almeno potenzialmente, agli argomenti presentati.

Queste idee sono richiamate anche in alcuni parti dedicate a riferimenti storici.

Vengono di seguito descritti i files che aiutano nella redazione dei testi; la loro lettura può interessare solo coloro che intendessero riprendere questa *esposizione*, per rielaborarne o per ampliarne qualche parte o per trattare altri argomenti adottando una struttura organizzativa simile.

Nel capitolo sono anche illustrate le intenzioni della sperimentazione che si vuole portare avanti mettendo a punto programmi specifici per la elaborazione dei testi dell'*esposizione*.
<https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/>

A01 a. motivazioni

A01a.01 La presente *esposizione* intende trattare un ventaglio piuttosto esteso di argomenti della matematica, di alcuni strumenti informatici (un semplice linguaggio di programmazione procedurale e metodi per la gestione delle conoscenze) e di un buon numero di applicazioni.

Questa esposizione innanzi tutto cerca di presentare un complesso di nozioni con motivazioni proposte come ampiamente condivisibili e dotate di una gradualità e di una coerenza interna dettagliatamente giustificabili.

Gli argomenti presentati si pensa che in gran parte possano essere riconosciuti di largo interesse applicativo e possano essere considerati utili per una organica presentazione complessiva della matematica e del suo utilizzo (come esempi citiamo le algebre di Kleene [C32] e le matroidi [D48]).

Il materiale presentato fa riferimento a una visione complessiva delle relazioni tra matematica, strumenti computazionali e applicazioni che dà molto peso agli algoritmi, alle costruzioni formali e operative, all'evolversi delle modellizzazioni e alla concezione pragmatistica e sociale dello sviluppo delle conoscenze.

Nel nome "MATeXp" attribuito alla *esposizione* si possono scorgere alcune suggestioni: **M**atematica (tra) **A**lgoritmi, (e) **T**eorie, lo strumento T_EX ed **ex**position (in **p**rogress); quest'ultima lettera intende anche suggerire **ex**periment.

Nel seguito tuttavia invece di questa sigla un po' ermetica utilizzeremo prevalentemente il sostantivo più scorrevole "*esposizione*" o anche il più generico "testo".

Questa *esposizione* si intende rivolta primariamente a persone concretamente, non solo episodicamente, interessate ad applicazioni che richiedono soluzioni effettive di quelli che ci proponiamo di considerare **problemi ben definiti**.

Di conseguenza in queste pagine la matematica viene considerata primariamente come la disciplina che fornisce ai procedimenti e ai metodi del calcolo (da intendersi, come dovremo precisare, in senso molto ampio) il ruolo comunicativo-cognitivo che si può associare a termini quali "inquadramento teorico" e "organizzazione logico-deduttiva".

A questi termini intendiamo collegare una organizzazione tendenzialmente unitaria, sistematicamente formalizzata e dotata di una solida impalcatura logico-deduttiva la quale si pone il compito di agevolare il più sistematicamente possibile il riutilizzo delle indicazioni sui procedimenti di calcolo acquisite con attività computazionali maturate in precedenza; questo compito persegue lo scopo di favorire la capacità di risolvere altri (nuovi) problemi ben definiti che si presume possano presentarsi con caratteristiche simili.

A01a.02 Qui con il termine **calcolo** intendiamo ogni attività precisamente riproducibile (almeno in linea di principio) che abbia il fine di trovare una soluzione a un problema molto sentito, sia specifico e occasionale che di interesse ampio e duraturo.

Per **problema** intendiamo in generale una questione che si pone a individui o a collettività e che implica una decisione che porta a successive azioni o prese di posizione, e in particolare che conduce a una scelta tra diverse alternative.

Le attività di calcolo si possono concretizzare in manovre costituite da **manipolazioni di simboli** o rappresentabili precisamente con esse, alle quali si chiede di essere il più possibile analizzabili e riproducibili o fedelmente o in seguito ad adattamenti che non le snaturano.

Le operazioni di calcolo, come i problemi, possono essere di generi molto diversi (come esemplificheremo) e sono valutabili mediante svariate caratteristiche. Quelle riguardanti l'attuazione sono le risorse richieste, i tempi di realizzazione, i costi implicati, le difficoltà esecutive e i possibili rischi. Le caratteristiche dei risultati possono riguardare la portata, l'incisività, la precisione, la versatilità, la adattabilità e la relazionabilità, ossia la possibilità di adattarli a situazioni assimilabili.

La possibilità di ricondurre le operazioni di calcolo a manipolazioni di simboli è da collegare sia alla richiesta della loro riproducibilità adattiva, che alla prospettiva da parte di chi le svolge di far crescere le loro caratteristiche.

Il convincimento che le caratteristiche dei calcoli possano essere migliorate in molte direzioni servendosi delle elaborazioni di simboli lo si ricava dagli sviluppi storici. Molti passi dell'esposizione sono dedicati a esempi che mettono in evidenza i vantaggi della formalizzazione cercando di giustificare le relative scelte o di presentare possibili alternative.

A01a.03 Un calcolo che risolve un nuovo problema avvalendosi delle indicazioni ricavate da precedenti soluzioni di problemi assimilabili può essere effettuato con strumenti diversi ma correlabili ricorrendo a schematizzazioni di problemi e operazioni risolutive che tendono ad mostrare accostabili gli elementi con caratteristiche simili.

Questo lavoro di schematizzazione conduce a delineare schemi più generali che tendono a presentare gerarchicamente i problemi e gli strumenti risolutivi che presentano caratteristiche paragonabili.

Tutti questi schemi risultano tanto più vantaggiosi quanto più riescono a prospettare attività risolutive organizzate sistematicamente, in particolare unificate o per generi confrontabili.

Si può riconoscere una evoluzione degli schemi dei problemi, delle operazioni e delle loro gerarchie che vedono crescere le loro capacità organizzative fino a suggerire e a delineare delle tassonomie.

La definizione degli schemi di maggiore presa può essere impegnativa e spesso richiede quella che chiameremo "capacità di astrazione".

Il collegamento tra i problemi che chiamiamo computabili e le attività di calcolo che consentono di risolverli si serve, più o meno esplicitamente, di **modelli matematici**, entità che per ora ci limitiamo a delineare come costruzioni mentali con lo scopo di rappresentare mediante simboli oggetti, situazioni e processi empiricamente osservabili.

Con simboli intendiamo entità formali, ossia oggetti comunicabili, muniti di relazioni che li collegano e tali che, a partire dai più semplici, consentono di introdurre ulteriori simboli via via più compositi, a loro volta caratterizzabili con relazioni e sottoponibili a trasformazioni e composizioni che contribuiscono a organizzarli in sistemi formali.

Questi sistemi vogliamo che possano essere sottoposti a esami approfonditi seguendo procedimenti la cui validità possa essere apertamente analizzata in modo da poter giungere a loro propriet' a che si possano proporre come attendibilmente condivisibili da parte di ogni studioso che intenda avvalersene per ulteriori sviluppi o per loro applicazioni.

A01a.04 Alle entità formali introdotte con un modello si richiede sul piano semantico di avere collegamenti ben riconoscibili con le entità osservabili negli scenari in cui vengono inquadrategli oggetti e i processi che si intendono rappresentare.

Sul piano operativo le entità formali devono essere sottoponibili alle manipolazioni che possono servire alla ricerca di soluzioni di problemi consistenti.

Sul piano formale si vuole che le entità formali possano essere inquadrare significativamente in un linguaggio che sia adatto alla presentazione delle varie tematiche riguardanti soluzioni nelle forme ampiamente comunicabili e condivisibili che consideriamo proprie della matematica.

A questo linguaggio matematico chiediamo che possa favorire la rielaborazione dei contenuti che esprime nelle due direzioni dell'approfondimento delle conoscenze di interesse generale e del loro utilizzo per molteplici scopi applicativi.

Le entità ricavabili dalle osservazioni che vengono a far parte di un modello matematico devono essere in qualche modo misurabili e relazionabili; esse possono consistere in oggetti tangibili (corpi, testi, costruzioni, campionamenti, ...), in processi (fisici, chimici, biologici, tecnologici, ...) e in procedimenti (produttivi, amministrativi, economici, finanziari, comunicativi, conoscitivi, ...).

Le entità formali che rappresentano entità osservabili possono assumere molti aspetti: possono consistere in mere sequenze di lettere dei linguaggi naturali, notazioni numeriche, grafi con i nodi dotati di etichette (e quindi formule), altri tipi di configurazioni combinatorie, figure geometriche, strutture algebrico-relazionali, sistemi di equazioni, sistemi di assiomi, processi dinamici, processi statistici e tanto altro.

Nelle entità formali si devono riconoscere (in genere con un qualche grado di approssimazione e semplificazione) le caratteristiche salienti delle entità osservabili rappresentate che sono riconosciute rilevanti per i problemi per i quali si cercano soluzioni.

Questo è importante soprattutto per le entità osservabili sulle quali si intendono fare previsioni.

A01a.05 Nei paragrafi precedenti abbiamo infilato termini impegnativi come “calcolo”, “manipolazione di simboli”, “problema applicativo”, “modello”, “approssimazione”; in seguito ci sforzeremo di chiarirli il più possibile e di presentare un numero sufficientemente rappresentativo di loro esempi.

Corre l'obbligo di dichiarare subito che qui si attribuisce importanza ad un **obiettivo computazionale della matematica**, disciplina della quale si intende a sottolineare il ruolo di organizzazione formale delle attività computazionali il più possibile coerente, comprensiva, aperta a nuove situazioni problematiche ed essa stessa promotrice della ricerca di soluzioni di problemi prevedibili.

Più precisamente, in sintonia con il pragmatismo risalente a un matematico del calibro di Charles Saunders Peirce, qui si ritiene che l'obiettivo computazionale sia sufficiente per fornire ragionevoli motivazioni per tutte le argomentazioni, di tutte le costruzioni formali e di tutte le metodologie che si riescono a esporre.

Molti ritengono che confinare la matematica entro un obiettivo computazionale sia restrittivo, taluni inaccettabilmente restrittivo.

Senza entrare in una discussione in proposito, ci limitiamo a segnalare che le pagine che seguono si sforzano di motivare tutti gli sviluppi riconducendoli a obiettivi computazionali (talora generali, talora specifici) nella convinzione che questi sviluppi possono essere ampiamente riconosciuti, anche da quanti non li pongono tra i propri obiettivi.

Forse a causa di personali limitazioni, sono tentato di sospettare che altri obiettivi della matematica non siano presentabili in modo convincente con motivazioni condivisibili alle molte persone che si interessano della matematica prevalentemente per l'efficacia delle sue applicazioni.

A01a.06 Ogni attività di calcolo, in quanto osservabile (ossia oggetto di comunicazioni, registrazioni, esami e rielaborazioni) costituisce un processo finito, anche quando la si descrive procedere senza vincoli prefissati.

La presente *esposizione*, per coerenza con i suoi obiettivi computazionali, deve occuparsi di procedure che consistono di indicazioni costruttive esprimibili finitamente, che possono impiegare solo risorse finite, che si possono servire solo di materiali informativi esprimibili finitamente e che possono controllare solo elaborazioni di durata finita.

In effetti per chi si interessa di applicazioni effettive della matematica la finitezza delle informazioni disponibili, dei tempi che devono rispettare e degli strumenti concreti dei quali si possono avvalere è ineludibile e deve essere valutata con tutta l'attenzione.

In accordo con questi requisiti delle attività computazionali la presente *esposizione* deve partire dalle più elementari delle informazioni trattabili, dalle stringhe, cioè dalle sequenze di segni chiaramente riconoscibili da tutti gli attori interessati.

I procedimenti e i metodi di calcolo che la matematica inquadra vanno giustificati in relazione a molteplici requisiti che possono essere avanzati dalle applicazioni.

È ragionevole affermare che procedimenti e metodi devono essere giudicati:

- dall'ampiezza della portata,
- dalla precisione dei risultati,
- dalla velocità e dall'efficienza dei procedimenti,
- dalle proprie caratteristiche di versatilità, adattabilità ed espandibilità.

Non stupisce che quando si affrontano problemi impegnativi in genere tra questi requisiti si devono raggiungere dei compromessi, anche drastici.

L'esame di questi requisiti risulta particolarmente impegnativo e aperto in questi anni che vedono da un lato la crescita progressiva delle attività che danno importanza a metodi quantitativi e a requisiti strutturali, e dall'altro la possibilità di avvalersi di strumenti tecnologici in continua evoluzione e di metodologie via via più elaborate.

A01a.07 Gli argomenti trattati o soltanto sfiorati in queste pagine, ovviamente, sono condizionati dallo stato delle competenze dell'autore.

Dati per scontati questi limiti, l'*esposizione* cerca di presentarsi autonoma, unitaria e consequenziale; inoltre si sforza di presentare una buona gamma di collegamenti con tradizione e applicazioni e su qualche argomento persegue una certa completezza.

Questi intenti sono evidentemente impegnativi, e non si possono nascondere la attuali macroscopiche carenze e limitazioni.

In effetti non si propone un testo definitivo, ma semplicemente si porta avanti una presentazione che si appoggia sul Web (nei modi che diremo), riconosce le sue carenze, ma continua a sperare di essere di qualche utilità, in particolare come riferimento per insegnanti interessati alle applicazioni.

Gli obiettivi dell'*esposizione* implicano l'opportunità di distinguere con chiarezza:

- da un lato le informazioni e gli schemi operativi che servono a organizzare i procedimenti computazionali necessari per impostare e risolvere i problemi;
- dall'altro le entità formali e le proprietà impiegate per edificare costruzioni teoriche, anche decisamente astratte, da giustificare in quanto utili a inquadrare problemi e metodi che puntano alla generalità, spesso trascurando coscientemente alcuni elementi necessari a rendere effettivi i procedimenti richiesti dai contesti applicativi reali.

Va segnalato che questi due generi di nozioni devono essere presentati con continua attenzione verso le reciproche influenze.

A01a.08 Tra i contenuti molti, in particolare tra quelli iniziali, riguardano configurazioni discrete e procedimenti costruttivi.

La priorità accordata a questi contenuti è stata influenzata da precise convinzioni.

- Varie strutture discrete e molte tematiche costruttive sono essenziali per una buona visione generale della matematica e delle sue possibilità applicative, per la comprensione degli sviluppi algoritmici e per la collocazione di questi tra le teorie e le applicazioni della matematica.
- Molte nozioni discrete consentono di introdurre con chiarezza e di risolvere problemi concreti e di conseguenza forniscono o contribuiscono a mettere in luce salde connessioni tra la matematica e i suoi sempre più numerosi campi di applicazione.
- Vari argomenti della matematica costruttiva possono migliorare il collegamento tra insegnamento della matematica e utilizzo degli odierni sistemi informatici, collegamento per il quale si riscontrano sia collaborazioni con reciproci vantaggi, che situazioni conflittuali; questo collegamento la continua evoluzione della tecnologia e delle prospettive di utilizzo lo mantengono costantemente teso e bisognoso di aggiornamenti.

In effetti la progressiva diffusione di mezzi elettronici per il calcolo automatico e l'elaborazione delle informazioni, molto rilevante ma spesso povera di consapevolezza e di riferimenti solidamente giustificati, richiede conoscenze concernenti configurazioni discrete che non sfigurano di fronte a quelle relative agli affermati modelli della matematica del continuo.

Da un lato vari aspetti del computer e dell'elaborazione delle informazioni possono essere presentati in modo più nitido e facile da generalizzare ricorrendo a nozioni matematiche.

Dall'altro vari argomenti proposti dall'insegnamento della matematica possono essere motivati in modo tangibile, convincente e possibilmente attraente come conoscenze basilari per la comprensione di procedimenti per il calcolo, per le valutazioni dei dati, per la utilizzabilità dei risultati e per la circolazione delle comunicazioni.

Tutti questi elementi per la consapevolezza di quanto ci sta intorno possono essere assai incisivi e talora determinanti per la società e per la cultura nelle quali siamo immersi.

A01a.09 Molte conoscenze sulle configurazioni discrete possono risultare utili a chi si avvia a una delle diffuse attività professionali collegate a programmazione, sistemi informatici e aggiornamenti tecnologici.

A questo proposito occorre rilevare che negli ultimi anni, soprattutto in conseguenza della perdurante crescita in efficienza, versatilità e diffusione dei mezzi per l'elaborazione e la circolazione delle informazioni, dovrebbe crescere la esigenza di consapevolezza sugli algoritmi, sulle loro implementazioni, sulla loro efficacia e sulla validità dei loro risultati.

Molti laureati in matematica (e in ingegneria, fisica, ...) trovano impiego nella programmazione e la svolgono con profitto, in buona misura grazie alla loro consuetudine con le definizioni precise e le argomentazioni rigorose.

Nonostante questo, in alcuni corsi di matematica non viene prestata adeguata attenzione agli algoritmi e agli argomenti di matematica discreta, anche a quelli che costituiscono ponti storicamente riconoscibili tra matematica, elaborazione dei dati e applicazioni.

Inoltre la familiarità con algoritmi e le loro conseguenze, anche solo al livello del buon senso, oggi costituisce uno strumento culturale indispensabile per la corretta comprensione di molti aspetti dell'attualità e del futuro.

A01a.10 In vari ambienti scolastici e universitari si continuano a definire progetti didattici che prevedono maggiore uso degli strumenti informatici e si ampliano la necessità e l'offerta di corsi fruibili tramite Internet.

Queste tendenze sono spinte dalle esigenze di maggiore resilienza culturale a facilitate dai continui progressi della tecnologia e, comprensibilmente, sono accompagnate da tangibili pressioni commerciali. Anche nell'ambito di alcuni insegnamenti della matematica si osservano richieste di maggiore consapevolezza delle possibilità degli strumenti informatici.

Molte risposte possono venire da un approccio che metta in luce gli aspetti utilitaristici, costruttivi e in fondo finitistici della matematica.

A01 b. criteri espositivi

A01b.01 L'esteso scritto chiamato MATeXp è costituita da un testo di tono espositivo e argomentativo e da fascicoli di riferimenti interni ossia al testo stesso e a media esterni.

Il testo è costituito principalmente da pagine riguardanti contenuti della matematica, delle sue applicazioni e di discipline contigue (n particolare informatica, fisica, filosofia e storia).

Si tratta di pagine rivolte a definizioni, argomentazioni e risultati della matematica e al loro utilizzo per risolvere in modo tendenzialmente sistematico una vasta gamma di problemi. per queste pagine useremo spesso il termine “contenuti”,

Queste contenuti in gran parte sono proposti come nozioni di interesse generale e si vorrebbero comprensibili e agevolmente accessibili sia dagli studiosi interessati primariamente a modelli e calcoli motivati da problemi concreti, sia, nelle parti più basilari, dagli allievi degli ultimi anni delle scuole secondarie e dei primi corsi universitari, sia, per quanto riguarda talune questioni di fondo, da loro insegnanti.

Alle pagine di contenuti si affiancano fascicoli di indici alle nozioni sopra accennate ed elenchi di riferimenti a media esterni: libri, articoli e pagine reperibili nei non pochi siti Web affidabili dedicati alla matematica e alle discipline considerate contigue.

Il testo espositivo si propone di introdurre con una propria coerenza le molte nozioni che consentono di precisare un buon sistema di strumenti computazionali e concettuali e si sforza di porre in evidenza le motivazioni e le finalità costruttive, dirette o indirette, delle entità e delle proprietà presentate.

MaTeXp cerca anche di segnalare una buona varietà di applicazioni e di aree computazionali nelle quali le nozioni presentate dimostrano la loro utilità.

Il materiale è stato ripreso da svariate fonti consolidate [X16], ma contiene anche qualche spunto originale.

Varie pagine del testo attuale ampliano e puntualizzano i contenuti di rapporti presentati nell'ambito degli istituti CNR IAMI e IMATI compilati per obiettivi abbastanza simili tra il 1970 e il 2006.

Altre pagine riprendono varie tesi di laurea in matematica presso l'Università degli Studi di Milano seguite dall'autore.

A01b.02 Una delle motivazioni della presente *esposizione* è la sperimentazione di alcune modalità che possono essere seguite con vantaggio da una persona o da un piccolo gruppo di persone che intendono raccogliere e pubblicare una mole estesa di nozioni matematiche o simili su supporti elettronici servendosi di strumenti oggi facilmente disponibili, vuoi per scopi didattico-divulgativi, vuoi per fare da supporto a materiali specialistici con l'obiettivo della loro maggiore comprensione del loro più consapevole inquadramento contestuale.

Per le attività di questi ipotetici gruppi di persone si potrebbe proporre il termine “iniziative di taglia artigianale”.

Per molte delle attività redazionali prospettate sono da prevedere tempi lunghi, soprattutto quando rivolte a discipline in continua crescita; è quindi ragionevole pensare a lavori redazionali in progressiva evoluzione.

Di conseguenza le modalità che MATeXp intende sperimentare sono volte innanzi tutto a facilitare l'ampliamento e la modificabilità delle pagine per le quali si prospettano graduali arricchimenti e non pochi riadattamenti.

Per questo si è stati indotti a chiarire, almeno a grandi linee, una sorta di modello della prevedibile evoluzione di questo genere di lavori di redazione o di compilazione mediante e per strumenti informatico-telematici.

Questa sperimentazione che si rivolge agli open contents [Open content (we)] intende anche prospettare materiali aperti al riutilizzo e alla definizione di pratiche che possano essere riprese senza difficoltà.

A01b.03 L'*esposizione* viene portata avanti senza la prospettiva di una pubblicazione a stampa e questo atteggiamento consente di evitare vari vincoli.

Il primo vincolo evitato riguarda la mole complessiva, che si vuole di qualche migliaio di pagine, pagine va detto piuttosto capienti (molte arrivano a 40 per 90 battute).

Questa intenzione, in accordo con la ampiezza delle conoscenze matematiche sulle quali è opportuno effettuare una sperimentazione significativa e comprendente la loro coerenza in termini di compatibilità e distinguibilità, nell'ottica commerciale dei tradizionali prodotti editoriali cartacei in lingua italiana incontra evidenti difficoltà.

L'intenzione di produrre artigianalmente la presentazione di un buon ventaglio di conoscenze di natura scientifica e applicativa ha portato naturalmente a servirsi di supporti digitali e telematici, sia per la redazione che si vuole accurata, ossia controllata, che per la messa a disposizione.

Questi supporti consentono di dotare il testo di numerosi collegamenti con le migliori pagine matematiche del Web e di non porre limitazioni alle citazioni della letteratura consolidata.

A01b.04 Un altro punto a vantaggio della pubblicazione digitale sta nel potersi permettere ridondanze che possono rendere più autonoma la lettura di molti argomenti specifici.

Le ridondanze consistono in ripetizioni che in certi punti costituiscono richiami agevolati e in altri costituiscono ripresentazioni di concetti secondo punti di vista e obiettivi differenziati o graduati.

I brani dedicati a nozioni introdotte altrove (in genere in capitoli precedenti) possono essere buone occasioni per assumere diversi livelli di generalità, di approfondimento e di astrazione e per presentare diversi presupposti, diversi scenari di riferimento e diverse finalità applicative.

Un particolare tipo di ridondanze riguarda da un lato pagine introduttive e argomentative e dall'altro repertori di definizioni e di risultati.

Le ridondanze pongono problemi di uniformità e coerenza di linguaggio in contrapposizione a differenziazioni di termini, notazioni e definizioni che devono essere compatibili e motivate.

A favore delle ridondanze gioca la possibilità di rendere disponibili discorsi sviluppati in decine di pagine leggibili in buona autonomia e che quindi possono essere meglio utilizzate da lettori che hanno scopi circoscritti e ritengono opportuno evitare contesti che per loro presentano scarso interesse, almeno nell'immediato.

Un'altro vantaggio ottenibile con la distribuzione attraverso canali telematici delle conoscenze su supporti digitali consiste nella possibilità di evitare i vincoli economici e temporali alle correzioni degli errori e alle piccole migliorie che incontrano gli autori e i responsabili delle opere distribuite su carta, vincoli spesso pesantemente condizionati da difficoltà operative e da esigenze commerciali.

A01b.05 Una caratteristica della presente *esposizione*, in linea con il suo carattere sperimentale, consiste nella adozione di termini, simboli e modalità di scrittura poco usuali, anche lontani da consolidate tradizioni, ma ritenuti o sperati utili per alcuni vantaggi che permettono di conseguire.

Si osserva innanzi tutto che in una presentazione di ampi settori di una disciplina come la matematica si incontra una varietà molto elevata di nozioni e quindi la necessità di utilizzare numerosi termini e simboli (diverse migliaia).

Questo comporta forti rischi di interferenze, di incompatibilità e di ambiguità, in particolare ambiguità da omonimia. Inoltre, come in ogni disciplina con una lunga tradizione e con una complessa articolazione si incontrano molti esempi di sinonimia e di polisemia (e peggio di enantiosemia).

Risulta quindi opportuno che le scelte linguistiche, a partire dalle lessicali, agevolino la precisa determinazione delle definizioni e delle proprietà.

Queste constatazioni suggeriscono di sperimentare l'adozione di elementi tipografici attentamente differenziati atti a facilitare il contenimento e l'eliminazione delle omonimie e la conseguente riduzione delle ambiguità, anche in relazione alle possibili (e auspicabili) prestazioni di strumenti di monitoraggio e ricerca in grado di facilitare interventi interattivi o automatici oggi in parte disponibili e in parte facilmente prospettabili.

Si osserva anche che in una presentazione in fieri che si auspica ampliabile e riutilizzabile devono essere facilitati i riadattamenti e può essere utile proporre e sperimentare sistemi di termini e di notazioni che cercano di risultare versatili, adattivi e riconoscibili da automatismi.

Il testo che si procede a redigere si vuole che si serva di simboli semplici e composti a ciascuno dei quali si attribuisca o una visibilità globale o una visibilità circoscritta ad ambiti testuali possibilmente precisi (come capitoli o sezioni).

Occorre tuttavia aggiungere che accanto a molti termini e simboli proposti come alternativi di scelte più usuali si cerca di segnalare anche queste ultime; inoltre si intendono segnalare le sinonimie che si incontrano più spesso nella letteratura.

Similmente di alcuni termini di largo uso sono citate le versioni nella lingua inglese (e in poche altre).

A01b.06 Molte presentazioni della matematica insistono sul rigore delle definizioni delle entità che introducono e sul rigore delle dimostrazioni delle proprietà che affermano e più in generale insistono sulla precisione del linguaggio usato.

Queste autoproclamazioni sono accettabili quando si confronta il linguaggio dei testi matematici con i linguaggi praticati in molte altre discipline che trattano entità essenzialmente più elaborate e sfuggenti come l'economia e l'ermeneutica, ma non hanno validità assoluta.

A questoproposito Va segnalato che il rispetto completo della precisione lessicale, sintattica e semantica viene richiesto dai linguaggi di programmazione, i quali peraltro trattano tipi di entità piuttosto circoscritti: numeri interi e razionali (certo non tutti), stringhe, liste di numeri e di stringhe e poco più.

Approfondendo l'esame si osserva invece che in gran parte le presentazioni di argomenti matematici per mantenere un buon livello di leggibilità sono praticamente costrette ad adottare svariati accorgimenti semplificativi quali: abbreviazioni di termini composti, sfrondamenti di notazioni, giri di frase metaforici per esprimere concisamente manovre di manipolazioni delle entità; a questo proposito si parla spesso di "abusi di linguaggio".

Si tratta di scostamenti da un linguaggio ideale che dovrebbe rispettare rigorosamente le definizioni, scostamenti spesso sono adottati senza avvertimenti, confidando che i lettori con buone competenze sugli argomenti trattati siano indirizzati correttamente dal contesto.

La presente *esposizione*, come atteggiamento indotto dalle sue ambizioni divulgative rivolte soprattutto a persone interessate alle applicazioni e che quindi dovranno in qualche modo risolvere le ambiguità, si

propone di chiarire le molte semplificazioni e abbreviazioni, sforzandosi anche di classificarle in modo da rendere chiaribili tutti i dubbi.

Gli appesantimenti che questi chiarimenti richiedono sono resi sopportabili rendendo evidenti le possibili deviazioni dalla lettura strettamente sequenziale.

Va anche segnalato che l'adozione di alcune semplificazioni può essere sostenuta da precisazioni formalizzate attraverso le definizioni di apposite entità lessicali e di schemi sintattici semplificativi (riguardanti in particolare meccanismi sostitutivi).

Si segnala anche che talune di queste definizioni aprono la possibilità di ulteriori generalizzazioni delle entità trattate e delle relative affermazioni .

A01 c. impianto organizzativo

A01c.01 Il testo MATeXp si concretizza in un serie dei capitoli, ciascuno leggibile su un file in formato .pdf (ordinariamente stampabile) e in fascicoli dedicati a indici e a simili elenchi di riferimenti fruibili in .pdf e in parte nel formato .htm.

Questi materiali sono accessibili in due pagine Web, una dedicata ai singoli files, l'altra costituente un ambiente Web che consente di navigare agevolmente sui vari documenti dovuto a Maria Teresa Artese e Isabella Gagliardi del CNR-IMATI.

Ciascuno dei files .pdf proviene da un file sorgente redatto servendosi del ben noto sistema Plain T_EX dovuto a Donald Knuth ed è stampabile con procedure usuali.

Ciascuno dei files .htm proviene da testi nel linguaggio HTML molto semplici impostati con la versione HTML4.

Si tratta quindi di prodotti digitali ormai tradizionali che possono essere facilmente ripresi e riutilizzati servendosi di strumenti di dominio pubblico, in accordo con il carattere di sperimentazione artigianale delle presenti pagine.

A01c.02 Il sistema T_EX prevalentemente adottato, innanzi tutto, consente un'ampia varietà di scelte tipografiche essenziali per la varietà delle espressioni matematiche e delle altre notazioni presentate. In effetti T_EX rende facile la introduzione di nuovi semplici simboli che consentono di servirsi di svariate composizioni simboliche, alcune delle quali al di fuori della tradizione.

In particolare T_EX consente di definire alcune centinaia di segni che aiutano a presentare entità che si vogliono ben distinguibili, anche quando si incontrano gruppi di oggetti formali concettualmente collegati ma con funzioni complementari che è opportuno distinguere visivamente, lessicalmente e sintatticamente.

Le molte scelte lessicali del testo vengono effettuate seguendo criteri strutturali e organizzativi che innanzi tutto si preoccupano di facilitare auspicabili controlli automatici e semiautomatici delle componenti discorsive e degli inserti simbolici.

Queste scelte cercano di essere visivamente coordinate, di facilitare i collegamenti interni e la esecuzione dei riadattamenti e dei completamenti dei discorsi che si possono rendere necessari o che è opportuno auspicare.

Per monitoraggio e modifiche vengono utilizzati pacchetti di source editing, di dominio pubblico come MultiEdit e Notepad++.

A01c.03 L'esposizione consiste principalmente su un testo sorgente "disciplinato" scritto nel linguaggio Plain T_EX che si avvale di alcune migliaia di macro definite appositamente.

Queste macro hanno diverse funzioni:

- demarcare il testo T_EX sorgente per dargli una struttura agevolmente controllabile e riadattabile per l'ambiente Web;
- rendere disponibili segni con specifici ruoli nelle formule (come \int , ∇ , \exists , \forall , \square , \square , $[,)$, \langle , \rangle , \cdot , \cdot);
- definire abbreviazioni di termini che cercano di essere mnemoniche (come **RelTrns**, **GrpFSmpl** e **RngNab**);
- facilitare il controllo della coerenza del lessico, della consequenzialità delle argomentazioni e della coerenza delle ridondanze.

- facilitare la individuazione nei testi sorgente di occorrenze sopra le quali effettuare monitoraggi, statistiche, riadattamenti e adattamenti, attività che vengono richieste con una certa frequenza in alcune fasi dello sviluppo di una redazione in fieri; tra queste occorrenze da tenere sotto controllo vanno segnalate le molte migliaia di rinvii all'interno del testo e verso l'esterno.

A proposito delle ultime esigenze segnaliamo in particolare che si usano due macro con identificatori e rendering leggermente diversi (scritte, risp, `\sctn` e `\sctN` per distinguere le sezioni del testo stabili o quasi da quelle chiaramente provvisorie, incomplete o bisognose di consolidamento; altre due macro simili alle precedenti, `\prg` e `\prG`, sono usate per distinguere i paragrafi stabili dai poco stabili.

Nel testo ha molta rilevanza la adozione di molti termini dotati di una cosiddetta **specificazione sincopata**: si tratta di una stringa di pochi caratteri alfanumerici che viene giustapposta a termini dotati di un loro significato al fine di ottenere un significato più particolare oppure di ottenere un significato moderatamente alterato.

In effetti tra i termini con suffisso sincopato vanno distinti quelli della forma “*termine-suffisso*” nei quali *suffisso* rappresenta la breve stringa che porta ad esprimere una entità più particolare di quella espressa dal solo *termine*, dai termini della forma “*termine.suffisso*” nei quali la breve stringa *suffisso* porta a identificare una entità vicina ma da distinguere da quella fornita dal solo *termine*.

Per esempio il termine anello viene usato per una struttura algebrica per la quale non si richiede il possesso di un elemento unità; ora il termine con suffissazione sincopata “semianello-ab” sta per semianello abeliano, mentre “anello.u” sta per anello unifero, con il significato di struttura algebrica più ricca di una struttura anello, in quanto dotata esplicitamente di una unità.

Va detto che per i termini con suffisso ci si avvale delle regole della lingua italiana per evitare ulteriori definizioni, riservandoci di adottare implicitamente alcune varianti morfologiche di queste forme: sia la variante singolare-plurale (come ad esempio “anello-ab” e “anelli-ab”), sia la variante maschile-femminile (esempio: connesso-ZZB e connessa-ZZB), sia le varianti sostantivo-aggettivo-verbo-avverbio.

A01c.04 Il testo MaTeXp è organizzato in ripartizioni su quattro livelli chiamate, risp., **tomi**, **capitoli**, **sezioni** e **paragrafi**.

Ogni tomo è contrassegnato da una maiuscola e attualmente sono stati sviluppati i tomi presentati nel quadro seguente:

- A** discorsi di apertura
- B** sulle nozioni proposte come basilari
- C** sopra linguaggi, automi, computabilità e codici
- D** sopra strutture discrete
- G** sulla geometria
- I** sull'analisi infinitesimale
- P** sulla fisica matematica (ora molto ridotto)
- T** teorie generali su algebra, topologia e teorie loro collegate
- W** prontuario con formule e schemi
- X** indici dei vari tipi di contenuti

A questi vanno accostati i fascicoli degli indici e dei restanti riferimenti che sono raggruppati in una sorta di tomo caratterizzato dalla lettera **X**; questi fascicoli seguono strutture proprie che solo in parte si avvicinano a quella dei capitoli nei tomi costituenti il testo dei contenuti descritta qui di seguito.

Capitoli, sezioni e paragrafi si possono individuare con etichette che seguono due forme equivalenti, una più concisa e una seconda più evidentemente scandita.

Ogni capitolo viene etichettato concisamente dalla lettera del tomo al quale è assegnato e da due cifre decimali, mentre la sua etichetta scandita si ottiene accodando alla concisa il carattere “:”: sono esempi di etichette concise di capitoli B21, B22, G47 e I25.

A01c.05 Ciascuna delle sezioni di un capitolo viene contraddistinta da una lettera minuscola; l’etichetta concisa di una sezione si ottiene aggiungendo alla concisa del relativo capitolo la propria lettera minuscola; la corrispondente scandita differisce dalla concisa per il segno “:” che precede la lettera. ad esempio nel capitolo B22 si incontra la sezione etichettata da B22c individuata anche dalla equivalente scrittura B22:c .

I paragrafi di una sezione sono contraddistinti da due cifre decimali; l’etichetta concisa di un paragrafo si ottiene aggiungendo ai 4 caratteri della etichetta concisa della sezione le due cifre che le competono, mentre l’etichetta scandita si ottiene dalla scandita della sezione aggiungendole un punto e le due cifre decimali.

Per esempio si ha il paragrafo caratterizzato dalla etichetta B22c03 oppure dalla scrittura equivalente B22:b.03, mentre si ha il paragrafo identificato da G25c04 o dalla etichetta equivalente G25:c.04 .

La presenza nelle etichette scandite dei caratteri “:” e “.”, non indispensabili, fornisce una certa facilitazione ad alcune ricerche lessicali e a qualche riadattamento interattivo del testo \TeX sorgente.

I rinvii all’interno dello stesso capitolo sono abbreviati: ogni rinvio a un paragrafo si riduce alla lettera e alle due cifre che caratterizzano il paragrafo bersaglio (come b05 o d11); i rinvii ad intere sezioni si riducono alla lettera assegnata alla sezione preceduta da “:” (:b, :g).

A01c.06 I capitoli e le sezioni iniziano con un titolo esplicito, mentre solo pochi paragrafi iniziano con una scritta esplicativa.

I paragrafi in gran parte sono costituiti da 10-30 righe; essi costituiscono unità di riferimento mediamente più ridotte delle pagine stampate e risultano comode per le operazioni di redazione e di modifica, in quanto buona parte di essi è interamente controllabile da una sola finestra che riesce a condividere lo schermo con altre finestre.

Come si è detto i paragrafi non hanno titolo, ma i contenuti di molti di essi sono distinguibili a prima vista grazie agli enunciati (proposizioni, teoremi, lemmi, corollari, esempi, esercizi) e ai termini che sono evidenziati in **neretto**.

Tipicamente una sezione contiene da 5 a 12 paragrafi e un capitolo da 3 a 12 sezioni.

Attualmente sono proposti all’incirca 140 capitoli con un numero di sezioni valutabili intorno alle 900 e con un numero di paragrafi vicino a 7000. La valutazione di questi numeri, soprattutto degli ultimi due, va considerata incerta, sia per l’esiguità di molte parti da considerare solo intenzioni, sia per le instabilità dovute ad ampliamenti, ripensamenti e incertezze.

Può comunque avere qualche interesse il seguente quadro, basato su valutazioni indulgenti nei confronti delle parti incomplete:

tomo	n. capitoli	n. sezioni	n. paragrafi
A	4	20	
B	38	235	2203
C	15	71	673
D	20	108	929
G	24	178	1265
I	27	179	1200

P	3	18	63
T	10	74	534
W	10	1	
X	8	8	
totale	146	740	6866

A01c.07 Alcuni paragrafi sono dedicati a specifici enunciati (proposizioni, teoremi, lemmi, corollari, congetture, algoritmi), a esempi e a esercizi; altri hanno contenuti meno caratterizzabili.

La numerazione dei capitoli presenta lacune e irregolarità in genere intenzionali e comunque tollerate per facilitare i cambiamenti derivanti dal perdurare di incompletezze e di incertezze.

Molti paragrafi presentano componenti (formule, enunciati, casi, assiomi, ...) contraddistinte da cifre o da lettere tra parentesi prevalentemente tonde, ma anche quadrate.

Le loro etichette servono per consentire richiami come B22a08(1), B22a08(2) e B22a08(3) .

Le etichette dei paragrafi e delle loro componenti sono univoche: si ritiene poco pratico presentare con la stessa etichetta un lemma e un teorema, oppure una congettura e un esempio.

Ogni capitolo viene scritto e modificato in un file `.tex` sorgente.

Molti capitoli contenevano figure ciascuna fornita da un file `.tex` subordinato scritto nel linguaggio Pictex, una semplice estensione di Plain T_EX che richiede indicazioni dettagliate e non prevede interventi interattivi e visuali.

In genere ciascuno di questi files era identificato da una stringa che inizia con una “p” e prosegue con l’etichetta concisa del paragrafo del quale fa parte; si hanno ad esempio i files pB24e13 e pD26i02 richiamati, risp., in [B13e13] e in [D26i02].

Nel caso di più figure in un paragrafo si avevano identificatori di file subordinato come pB24f02, pB24f02B, pD35g02, pD35g02B e pD35g02C.

Purtroppo qualche modifica negli strumenti software ha reso attualmente inutilizzabili le molte centinaia di figure sopra accennate portando gravi mancanze a molte pagine presentate.

È fortemente auspicata la possibilità di recuperare le figure ora inutilizzabili e di aggiungerne molte altre al fine di mettere a disposizione sostegni visivi a un buon numero di definizioni, di sviluppi deduttivi, di osservazioni orientative e di processi costruttivi.

A01c.08 Per l’intera serie dei capitoli è disponibile un indice dei capitoli e delle sezioni che occupa il file caratterizzato dalla sigla A00 e collocabile prima di questo stesso capitolo introduttivo.

Inoltre vengono costruiti sei indici complessivi dedicati, risp., ai titoli di capitoli e sezioni [X10], ai termini presentati **in evidenza** [X11], alle notazioni utilizzate [X12], alle abbreviazioni adottate e in particolare agli acronimi [X13], alle persone citate o segnalate [X15] e alle pubblicazioni consultate e ai siti giudicate meritevoli di segnalazione [X16].

Tutti gli indici interni rinviano ai paragrafi, alle intere sezioni e ai capitoli.

In questi indici risulta ben chiara l’utilità delle etichette delle ripartizioni del testo; esse sono un poco elaborate, ma costituiscono coordinate facilmente utilizzabili e sicuramente utili.

Quando si è effettuata qualche modifica riguardante più di un paragrafo si sono potute riadattare le etichette nel testo e negli indici con manovre interattive semiautomatiche abbastanza agevoli.

Negli indici delle persone e delle pubblicazioni sono presenti varie centinaia di rinvii a pagine web.

A01c.09 L'impatto che possono avere le illustrazioni di procedimenti costruttivi e dimostrativi conduce talora a preferire argomentazioni riguardanti sequenze, matrici e digrafi di flusso piuttosto che insiemi e funzioni, entità preferibili negli enunciati di interesse generale, ma meno direttamente collegabili a procedimenti effettivi.

Per esempio i coefficienti binomiali vengono introdotti come numeri di cammini visivamente evidenti e solo successivamente sono riconosciuti come cardinali di sottoinsiemi.

Si cerca comunque di dare rilievo anche alle svariate circostanze nelle quali una astrazione porta a rilevanti risparmi per una catena deduttiva o per l'organizzazione espositiva di un argomento.

A01c.10 Nel testo, come si è accennato, compaiono vari richiami a siti Web nei quali sono reperibili utili nozioni matematiche, tecnico-scientifiche o storiche e si vorrebbe che questi riferimenti potessero crescere sensibilmente.

Tra i siti richiamati segnaliamo:

l'enciclopedia *Wolfram MathWorld* [[http://http://mathworld.wolfram.com/](http://mathworld.wolfram.com/)]

la *Encyclopedia of Mathematics* di Springer ed EMS

[[http://https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Main_Page](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Main_Page)]

il *MacTutor History of Mathematics archive* [[http://http://mathhistory.st-andrews.ac.uk/](http://mathhistory.st-andrews.ac.uk/)]

la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, OEIS

[[http://http://www.research.att.com/~njas/sequences/](http://www.research.att.com/~njas/sequences/)

l'enciclopedia aperta Wikipedia nelle sue versioni in diverse lingue

primariamente quella in inglese [[http://http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)],

secondariamente nella versione in italiano [[http://https://it.wikipedia.org/wiki/Pagina principale](http://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale)]

ma anche con qualche rinvio a quelle in francese e in tedesco.

Stanford Encyclopediay of Philosophy [http://https://plato.stanford.edu](http://plato.stanford.edu)

A01c.11 Si considera particolarmente utile Wikipedia a causa delle sue caratteristiche di sistema di contenuti a un buon livello qualitativo (almeno per quanto riguarda gli argomenti scientifici e tecnologici), della sua ottima organizzazione reticolare, della sua progressiva evoluzione e dal fatto che si sta imponendo come riferimento canonico per molte aree conoscitive.

Per molti argomenti esposti Wikipedia può costituire un interessante ampliamento dei contenuti, sia interni che esterni alla matematica, soprattutto per la mole e l'aggiornamento dei contenuti raggiunta per la versione in inglese e, in misura più ridotta per la italiana e per le altre lingue maggiori (francese, tedesco, svedese, ...).

Va inoltre segnalata la possibilità che ha ogni autore di materiali divulgativi seri di intervenire sugli articoli di Wikipedia perché possano costituire migliori riferimenti dei materiali sopra accennati.

Wikipedia risulta utile in particolare per l'ampia disponibilità di formule, figure, biografie, riferimenti bibliografici, citazioni sitografiche e fonti testuali immediatamente fruibili.

Sono di notevole interesse anche le animazioni concernenti risultati matematici, anche se tuttora non numerose quanto sarebbe auspicabile.

Infine va segnalata la ricchezza dei contenuti e la tempestività degli aggiornamenti riguardanti la ICT, la Information and Communication Technology, e i risultati scientifici e tecnologici più recenti.

Nel seguito richiameremo un articolo della versione in italiano ponendone il titolo in un nido della forma `it titolo (wi)`, richiameremo un articolo della versione in inglese ponendone il titolo in un nido della forma `"title (we)"`.

Richiameremo anche qualche articolo nella versione in francese e nella versione in tedesco.

A01c.12 Nella *esposizione* si incontrano varie strutture formali caratterizzate da sistemi di assiomi elaborati, costituiti da non poche richieste, spesso nella forma delle equazioni o delle disequazioni.

Dato che queste richieste in genere vengono richiamate più volte nelle analisi delle strutture in causa, ciascuno degli assiomi viene caratterizzato da etichette aventi forme esemplificate da [Rng 1], [Rng 2], ... , [Rng 7], [Rngu 8], [MtdI 3a].

Talora vengono richiamati più assiomi dello stesso sistema: esempio di questi richiami è [MtdR1a,2a,3a].

L'esposizione in <https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/> e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php