1

# Capitolo A01
# introduzione

## Contenuti delle sezioni

a. obiettivi e caratteristiche generali p. 3
b. motivazioni p. 8
c. criteri espositivi p. 15
d. impianto organizzativo p. 19

26 pagine

**A01 0.01** Il presente capitolo e i successivi A02, A03, A05 e A07 costituiscono l'apertura di una presentazione di un complesso di nozioni riguardanti la matematica rivolta alle applicazioni e alcuni aspetti dell'informatica, della fisica e della Intelligenza Artificiale (qui chiamata concisamente **AI**) considerati necessari per la comprensione di molti aspetti e di molte conseguenze della matematica applicabile.
Questo complesso di nozioni nel seguito verrà chiamato MATeXp o *esposizione*.

Iniziamo con un breve orientamento sui contenuti del presente capitolo.

Le prime due sezioni, :a e :b, sono dedicate agli obiettivi e alle caratteristiche generali della *esposizione*.

Nella sezione :c sono presentati i criteri seguiti per la redazione del testo e nella :d sono esaminate le caratteristiche della sua organizzazione marcatamente strutturata. Si tratta di discorsi in parte tecnici la cui lettura non è richiesta per la comprensione di gran parte delle pagine successive.

In linea di massima si può consigliare a chi si accosta a questa *esposizione* una prima lettura delle pagine che toccano argomenti che attraggono la sua attenzione, eventualmente già noti, in modo che possa rendersi conto in concreto delle scelte stilistiche, in particolare delle non poche scelte che riguardano termini e notazioni non usuali, e della organizzazione complessiva dei materiali.

**A01 0.02** Nelle sette sezioni del successivo capitolo, dalla A02a alla A02g, sono presentati a grandi linee i contenuti dei files sui quali è registrato il testo di MATeXp.

Conviene segnalare subito che il tomo W contiene un prontuario di nozioni e formule utilizzabili per scopi circoscritti che si propone soprattutto per consultazioni autonome; il tomo X contiene invece indici ed elenchi che intendono facilitare la individuazione di varie nozioni in grado di aiutare nella fruizione dei contenuti, anche muovendosi a salti sulla loro successione.

**A01 0.03** La nostra *esposizione* è costituita da vari "capitoli" a carattere espositivo e argomentativo dedicati alla presentazione delle nozioni e da alcuni fascicoli di supporto alla lettura dei capitoli, contenenti riferimenti interni, ossia indici a entità presente, indicazioni statistiche sui termini occorrenti e riferimenti esterni, cioè rinvii ad altre pubblicazioni su carta o accessibili in linea.

Per comodità espositiva introduciamo il termine convenzionale **kapitoli** per denotare sia i capitoli che i fascicoli dell'*esposizione*.

**A01 0.04** Il capitolo A03 è dedicato alla presentazione dei sopra accennati indici ed elenchi orientativi. Essi, come i collegamenti interni al testo, fanno riferimento sistematico alle ripartizioni nelle quali i contenuti sono distribuiti; queste, in ordine di estensione decrescente, sono chiamate tomi, kapitoli, sezioni e paragrafi.

Gli indici elencano: titoli di kapitoli e sezioni, estensioni dei kapitoli, termini rilevanti, simboli, abbreviazioni, notazioni, persone e pubblicazioni.
Le persone e le pubblicazioni riguardano sia le fonti delle nozioni presenti nell'*esposizione*, sia personalità e documenti che hanno fornito contributi rilevanti per lo sviluppo delle idee matematiche e più in generale scientifiche e culturali prossime, almeno potenzialmente, agli argomenti presentati.
Queste idee sono richiamate anche in alcune parti dedicate a riferimenti storici.

Vengono di seguito descritti i files che aiutano nella redazione dei testi; la loro lettura può interessare solo coloro che intendessero riprendere questa *esposizione*, per rielaborarne o per ampliarne qualche parte o per trattare altri argomenti adottando una struttura organizzativa simile a quella dell'*esposizione*.

Nel capitolo sono anche illustrate le intenzioni della sperimentazione che si vuole portare avanti mettendo a punto programmi specifici per il supporto della redazione e del mantenimento dei testi dell'*esposizione*.

## A01 a. obiettivi e caratteristiche generali

**A01 a.01** Alla presente *esposizione* si possono attribuire più obiettivi.

Il primo è la messa a disposizione in linea di una consistente gamma di nozioni della matematica e di alcuni argomenti dell'informatica e della fisica considerati importanti per una buona comprensione degli sviluppi della matematica applicabile.

I contenuti sono rivolti primariamente a persone interessate, non solo episodicamente, a servirsi della matematica per risolvere alcuni dei numerosi problemi impegnativi che la società umana ha dovuto affrontare nel passato e continua ad incontrare nei suo cammino.

A questo proposito dobbiamo dichiarare di ritenere che la prima parte del nostro secolo sia caretterizzata soprattutto dalla crescita elevata e perdurante delle tecnologie che si sviluppano in connessione con l'elettronica digitale e con altre attività ad essa collegate e dalle conseguenze della messa a disposizione degli strumenti che realizzano sopra le reazioni e sopra le prospettive dei singoli individui e delle collettività.

Questa *esposizione* oggi consiste in circa 5000 pagine e tocca molti argomenti che corrispondono a buona parte di quelli trattati nelle scuole secondarie superiori e nei primi corsi universitari con contenuti associati alla sigla STEM, Science, Technology Engineering and Mathematica; in essa si trovano anche alcuni argomenti piuttosto elevati, alcuni sviluppi originali e considerazioni su eventi matematici recenti.

Vengono trattati tanti argomenti anche nella speranza di dare un piccolo contributo alla crescita della consapevolezza della potenziale grande utilità pratica del complesso dei procedimenti e delle idee che continua ad essere prodotto dalla ricerca matematica.

Un proposito dell'*esposizione* sul quale dovremo tornare in seguito, è quello di crescere su basi autonome e attraverso argomentazioni rigorose, ossia esaurienti e convintamente condivisibili.

**A01 a.02** Dopo i buoni propositi della *esposizione*, si deve tuttavia riconoscere che anche un rapido sguardo alle sue pagine evidenzia che si tratta di un testo che presenta tanti tasselli mancanti e molte parti che richiedono precisazioni e che risultano poco omogenee e da rendere più coerenti.
Abbiamo quindi una *esposizione* da considerare un testo in fieri e aperto .

Essa in particolare purtroppo attualmente manca delle figure; va segnalato che varie figure tracciate utilizzando il pacchetto PicTex da qualche anno il software utilizzato non riesce a continuare a farle comparire nel testo.

Dunque si può dire che MATeXp è un esteso corpo di documenti disponibili in linea che in buona parte sono da precisare, da completare e da rendere più omogenee e che in parte sono soltanto bozze.
Occorre aggiungere che questo testo viene portato avanti in modo da poter accogliere facilmente nuovi contenuti.

**A01 a.03** Un secondo obiettivo generale dell'esposizione deriva dalla convinzione che le attuali avanzate tecnologie associate alla sigla ICT, Information anc Communication technologies, e in particolare i sistemi attribuiti all'Intelligenza Artificiale, influiranno fortemente sulla matematica e le sue applicazioni, in due sensi: fornendo strumenti in grado di aumentare la loro efficia e di ampliare i loro campi d'azione, sia ponendo alla matematica nuovi problemi e quindi suggerendo nuovi temi di ricerca e modifiche di alcuni modi di procede di taluni assetti organizzativi.

L'*esposizione*si può quindi considerare una sperimentazione di una presentazione della matematica applicabile che si serve di strumenti informatici non usali la cui efficienza si vuole valutare e che dedica buona parte dei contenuti alla stretta connessione tra matematica e nozioni dell'informatica.

Più precisamente nella *esposizione* si trovano spunti di qualche originalità riguardanti: il ruolo degli algoritmi nei fondamenti della matematica; l'importanza degli strumenti informatici per rendere matematica effettivamente e ampiamente applicabile; l'utilità di un linguaggio di programmazione procedurale, il C++, per presentare esempi di strutture matematiche discrete e per effettuare indagini di matematica sperimentale.

**A01 a.04** Lo sviluppo di MATeXp viene portato avanti servendosi di strumenti informatici finora piuttosto semplici.
Si tratta del linguaggio Plain TEX nella implementazione MikTex, WinShell il traduttore dei suoi testi sorgenti nelle vesioni leggibili .dvi o .pdf e gli editori di testi sorgente .tex PSPad e Notepad++.

Sono inoltre in cantiere programmi per il monitoraggio, il miglioramento e l'ampliamento del suo testo scritti appositamente nel linguaggio C++.
Si tratta di programmi relativamente semplici che riteniamo costituire un supporto molto auspicabile per lo sviluppo di un testo esteso e in continuo ampliamento da parte di un solo autore o da un piccolo gruppo di redattori che intendono mantenere il suo completo controllo.

Questi sono motivati dalla convinzione che la disponibilità di programmi per l'elaborazione di testi, anche molto più ambiziosi di quelli ora in cantiere, possa fornire molti sostegni alla produzione di documenti scientifici e tecnologici.

In questa ottica MATeXp può essere considerato anche come materiale che per la sua mutevolezza consente di sperimentare modalità, anche lontane dalla tradizione, per la presentazione di contenuti scientifici e tecnologici con l'aiuto di specifiche procedure automatiche.

Va segnalato che in questi ultimi anni si sono resi disponibili alcuni sistemi di AI molto impegnativi in grado di fornire vari aiuti alla redazione di rapporti scientifici, ad esempio Claude Science sistema presentato nel giugno 2026 da Anthropic rivolto ai ricercatori di campi afferenti alle scienze dei vivemti.
I programmi qui presentati si rivolgono invece ad attività che richiedono soltanto apparecchiature e software di uso comune, che tutti possono permettersi.

**A01 a.05** A questo proposito dobbiamo dichiarare la convinzione che tutte le presentazioni di nozioni che possono destare un ampio interesse per le attività conoscitive, sia per fini formativi e divulgativi che per scopi dettati da specifiche esigenze applicative, possono trarre notevoli vantaggi dall'utilizzo degli strumenti per la gestione delle informazioni che sempre di più vengono resi potenzialmente efficaci dai continui rilevanti progressi delle tecnologie digitali.

Questo conta in particolare per la matematica e per le discipline ad essa contigue nell'attuale periodo di crescita della loro influenza sull'intera società.

Occorre anche aggiungere che consideriamo assurdo che in molti discorsi pubblici sulle attività culturali siano escluse e non siano giudicate determinanti le attività focalizzate sulle scienze e sulle tecnologie.

Riteniamo invece opportuno che venga dedicata molta attenzione alle prospettive che le innovazioni tecnologiche, gin parte ampiamente disponibili e in manifesta continua espansione, aprono per la didattica e la divulgazione di quelle che chiamiamo **conoscenze razionalmente condivisibili** e in particolare della matematica e delle discipline scientifiche e tecnologiche a lei contigue spesso espresse con l'acronimo **STEM** (Science, Technology, Enginnering, Mathematics).

Segnaliamo inoltre che nel seguito useremo le sigle**SciTec** ed **ST** per indicare sbrigativamente i termini "scientifico-tecnologico" e simili; useremo conseguentemente termini come "area ST" e "obiettivi ST".

**A01 a.06** Un terzo obiettivo generale dell'*esposizione* discende dalla considerazione che la fisica viene utilizzata per molte argomentazioni basilari per la matematica.
Questo non deve stupire, in quanto le persone che fanno della matematica e che la comunicano operano nel mondo fisico e ad esso sono sostanzialmente costretti a fare riferimento.
....

**A01 a.07** Una considerazione che condiziona le scelte per l'*esposizione*riguarda la constatazione che la formazione e il consolidamento di conoscenze che si possono proporre come attendibili, in particolare delle conoscenze che si sono formate nel corso della storia nelle discipline SciTech, hanno sempre richiesto processi che hanno incontrato varie difficoltà, che quasi sempre sono stati complessi e faticosi.

Per portare avanti una *esposizione* ampiamente attendibile quindi si devono individuare entità tangibili e mentali che devono essere definite in modo da essere riconosciute e valutate con la maggiore chiarezza possibile; inoltre si devono enunciare affermazioni che possano essere sostenute da argomentazioni il più possibile convincenti e da supposizioni che devono essere esplicite e che richiedono di essere giustificate e verificabili in modo da poter essere confermate, precisate, limitate oppure abbandonate.

Un altro atteggiamento assunto per l'*esposizione* riguarda quella che chiamiamo **razionalità inclusiva**.

Cerchiamo di dare una rapida indicazione su cosa qui si intende con questo termine, premettendo che considerazioni più dettagliate saranno svolte più avanti in vari punti nei quali vengono definite nozioni importanti e delicate.

Per **atteggiamento razionale inclusivo** intendiamo il modus operandi che è decisamente necessario assumere quando si affrontano questioni di importanza cruciale, soprattutto problemi di vasta portata che destano forti preoccupazioni.

Per capire a fondo un problema preoccupante vanno analizzate tutte le caratteristiche dei contesti nei quali si può manifestare, vanno studiati accuratamente i modi con i quali cercare di risolverlo e vanno valutate e confrontate le risorse necessarie e le possibili conseguenze dei diversi procedimenti risolutivi che si possono prospettare.
Gli esami e le valutazioni dovrebbero tenere conto di tutti gli elementi che possono essere coinvolti nelle azioni da intraprendere.
Se ci si limita agli elementi più immediatamente evidenti si possono avere soluzioni poco generalizzabili, applicabili a poche situazioni e in molte altre inefficaci o controproducenti.
Se chi prende decisioni valuta solo le conseguenze collegate ai suoi interessi e ai suoi punti di vista può provocare danni a suoi vicini ed anche a comunità diverse dalla propria.
Le attuali sempre più strette connessioni e interferenze tra persone e comunità rendono rischioso, soprattutto nei tempi medi e lunghi, tenere conto solo di prospettive personali e del momento o solo della propria comunità, non preoccuparsi di evitare contrapposizioni e possibili conflitti tra persone o tra fra comunità.

Queste considerazioni sulla oppportunità della inclusività si possono ripetere, con convinzione anche maggiore, nei confronti delle soluzioni di problemi decise per favorire esclusivamente singoli individui o cricche ristrette.
Limitarsi alle visioni affrettate e agli interessi di pochi e ignorare le conseguenze meno facili e più impegnative da individuare e da valutare in genere è piuttosto rischioso e può anche essere alla lunga molto dannoso.

**A01 a.08** Tutte le attività conoscitive e tutte le decisioni da prendere per cercare di risolvere con una certa sistematicità problemi impegnativi richiedono di definire con grande cura schemi di scenari operativi, di formulare su di essi valutazioni quantitative delle risorse richieste dagli interventi prospettabili e di analizzare i rapporti costi/benefici dei risultati prevedibili.

Per tutto questo si deve esaminare un insieme, spesso ampio, di relazioni tra le entità che vengono coinvolte, si devono definire molti parametri di confronto misurabili e si devono valutare tutti i costi previsti e i vari benefici attesi.
Tutto questo deve essere fatto con ponderazione, ossia con competenza e con ragionevolezza, lasciando poco spazio a spinte istintive e a pulsioni momentanee, prestando invece attenzione alle conseguenze poco appariscenti, agli eventuali compromessi e alla autoconsapevolezza delle proprie capacità di decidere e di impegnarsi.

In linea generale occorre anche
riconoscere la complessità di quanto sta intorno ai problemi impegnativi e la varietà delle esigenze umane che possono condurre a conflitti;
favorire accordi che portino ad azioni di più persone capaci di cooperare curando la obiettività delle valutazioni tenendo conto della ampia varietà delle situazioni e delle reciproche influenze;

Le persone che cooperano per la risoluzione di un problema quindi devono dedicarsi con impegno alla progressiva crescita delle analisi degli obiettivi e della definizione delle operazioni da compiere, riconoscendo la necessità di verifiche in corso d'opera e delle possibili conseguenti correzioni di rotta, anche molto drastiche.

**A01 a.09** Da un lato la varietà delle tematiche della matematica, delle sue opportunità applicative e di contesti nelle quali queste possono essere richieste, dall'altro le potenziali prestazioni degli automatismi digitali suggeriscono di sviluppare le indagini sulle prospettive tecnologiche anche attraverso sperimentazioni di peso contenuto.

Ad alcune di queste prestazioni cerca di ricorrere MATeXp, attività portata avanti solo con mezzi e competenze artigianali, seguendo la convinzione che le possibili prestazioni di una apparecchiatura come un comune PC per sostenere le pubblicazioni scientifiche attualmente sono utilizzate solo in pochi casi e con obiettivi limitati.

Riteniamo inoltre che per la società stia assumendo una rilevanza non eludibile una consapevolezza più attenta e più diffusa della crescita dei risultati e delle conseguenze tangibili delle procedure informatiche sostenute dalla matematica; questi risultati e queste conseguenze negli ultomi anni hanno costituito robusti supporti di attività cruciali per la qualità della vita di individui e collettività.

La consapevolezza dell'importanza delle procedure informatiche può anche contribuire a contrastare efficacemente le derive generatrici di conflitti dovute a convinzioni prive di fondamento e a pulsioni emotive prive di giustificazioni consapevoli.

Va osservato che a molte di queste derive contribuiscono direttamente gli stessi progressi delle tecnologie della informazione e della comunicazione, in quanto facilitano la diffusione a largo raggio e ripetitiva di notizie false, di valutazioni tendenziose e di prospettive illusorie rivolte a un pubblico in buona parte poco disposto a faticose analisi critiche e quindi facilmente influenzabile.

Inoltre i progressi delle tecnologie della simulazione digitale facilitano la produzione e la fruizione di opere di fantasia che possono contribuire a ridurre la percezione realistica degli scenari nei quali si devono prendere decisioni con rilevanti conseguenze.

**A01 a.10** Contro le derive della insufficiente obiettività sopra accennate dovrebbe essere decisamente sostenuta la consapevolezza della attuale forte crescita delle conoscenze scientifico-tecnologiche, della portata degli strumenti che esse ci mettono a disposizione e dell'importanza delle possibili conseguenze sia in vista di utilità per la soluzione di problemi impegnativi e per la facilitazione di iniziative costruttive, sia per contrastare le possibilità di degrado etico-sociale e di aumento delle disuguaglianze economiche e delle disparità nel rispetto dei diritti.

La diffusione ragionata delle conoscenze innovative affidabili e la consapevolezza dei rischi che accompagnano i forti cambiamenti tecnici e conseguentemente sociali oggi risulta doverosa, può essere realizzata con risorse maggiori di quelle disponibili nel passato e dovrebbe essere condotta con decisione, anche con manifestazioni perentorie.

## A01 b. motivazioni

**A01 b.01** La presente *esposizione* dunque intende trattare un ventaglio piuttosto esteso di argomenti della matematica e di collegarli a conoscenze contigue considerate essenziali per la loro piena comprensione e per la loro concreta applicabilità.
Questi conoscenze contigue riguardano alcuni definiti strumenti informatici (in particolare un linguaggio di programmazione procedurale), i procedimenti di modellizzazione praticati in primis dalla fisica e alcune nozioni riguardanti la pratica della gestione delle conoscenze che si collocano nella filosofia, nella sociologia e nell'economia.
Inoltre si ritiene necessario presentare le caratteristiche di una ampio ventaglio di esempi di applicazioni.

Una preoccupazione della presente *esposizione* è quella di motivare le nozioni che presenta in quanto ampiamente condivisibili da parte di persone cointeressate, ossia interessate ad approfondire gli argomenti in causa.
In effetti l'ampia **ondivisibilità** è un requisito fondamentale per la fiducia che può essere accordata a tutte le affermazioni che aspirano alla autorevolezza scientifica.

Questa preoccupazione richiede di introdurre tutte le nuove nozioni con gradualità e mettendo in evidenza che ogni nuova nozione risulta coerente con quelle già acquisite; la coerenza interna è una aspirazione primaria di MATeXp.

**A01 b.02** Una parte degli argomenti presentati si pensa che possano essere riconosciuti di largo interesse applicativo; a questo dovrebbero contribuire i promessi esempi applicativi.
Altri argomenti, tendenzialmente i più astratti, intendono contribuire a rendere più organica e completa la presentazione complessiva della matematica e del suo utilizzo; a questo proposito citiamo le algebre di Kleene [C32] e le matroidi [D48]).

La scelta del materiale presentato si collega a una visione complessiva delle relazioni tra matematica, strumenti computazionali e applicazioni tramite modelli che dà molto peso agli algoritmi, alle costruzioni formali e operative, alla adattabilità delle modellizzazioni, alle difficoltà che incontra lo sviluppo e il mutare delle conoscenze e alla concezione pragmatica e sociale delle discipline SciTech.

**A01 b.03** Nel nome "MATeXp" attribuito alla *esposizione* si possono scorgere le seguenti suggestioni: **M**atematica (tra) **A**lgoritmi (e) **T**eorie, lo strumento TEX ed **exp***osition* (in **p**rogress); le ultime tre lettere intendono segnalare che si effettuando un **exp***eriment*.

Nel seguito tuttavia invece di questa sigla un po' ermetica utilizzeremo prevalentemente il sostantivo più scorrevole "*esposizione*" o anche il più generico "testo", quano non rischia di essere ambiguo.

La presente *esposizione* si intende rivolta primariamente a persone concretamente e non solo episodicamente interessate ad applicazioni che richiedono soluzioni effettive di quelli che ci proponiamo di qualificare anche come **problemi ben definiti**.

Di conseguenza in queste pagine la matematica viene considerata primariamente come la disciplina che fornisce ai procedimenti e ai metodi del calcolo (attività che guardiamo più attentamente nel prossimo paragrafo) il ruolo comunicativo-cognitivo che si può associare a termini quali "inquadramento teorico" e "organizzazione logico-deduttiva".

A questi termini intendiamo collegare una organizzazione che cerca di essere unitaria, sistematicamente formalizzata e dotata di una solida ossatura argomentativa e magari logico-deduttiva.

L'organizzazione del testo si pone il compito di agevolare il più ampiamente possibile il riutilizzo delle indicazioni sui procedimenti di calcolo acquisite in attività computazionali che possono presentarsi in svariati ambiti.
Questo compito persegue lo scopo di favorire la capacità di risolvere altri (nuovi) problemi ben definiti che si ritiene possano presentarsi con caratteristiche simili in un buon ventaglio di circostanze.

**A01 b.04** Con il termine **calcolo** qui intendiamo ogni attività precisamente riproducibile (almeno in linea di principio) che abbia il fine di trovare una soluzione a un **problema ben definito**.

I problemi ai quali ci rivolgiamo possono essere specifici e occasionali, oppure riguardare interessi molteplici e duraturi; particolare attenzione deve essere presata a problemi che destano forti preoccupazioni per intere comunità.

In generale per **problema** intendiamo una questione che si pone a individui o a collettività e che ha collegata più o meno direttamente una decisione che condiziona successive rilevanti possibili azioni o prese di posizione, una decisione che in sostanza conduce a una scelta tra diverse alternative con effetti importanti.

Tra le azioni che possono servire alla soluzione di un problema privilegiamo le attività di calcolo; queste si possono concretizzare in manovre costituite da **manipolazioni di simboli**, ossia da manovre che si possono rappresentare con trasformazioni di simboli che presentano una buona aderenza ad oggetti materiali effettivamente manipolabili: palline di un abaco, riga e compasso, flussi materiali o elettromagnetici, trasformazioni e trasmissioni di informazioni.

A tutte le manovre che prendiamo in considerazione chiediamo di essere il più possibile analizzabili e riproducibili o fedelmente o in seguito ad adattamenti che non le snaturino, ossia che mantengano loro caratteristiche essenziali.

**A01 b.05** Le operazioni di calcolo, come i problemi, possono essere di generi molto diversi (che si dovrebbero saper individuare chiaramente), ma devono essere accuratamente valutabili attraverso tutti i parametri giudicati importanti dagli ambienti applicativi interessati.

Le valutazioni riguardanti le esecuzioni dei calcoli comprendono in primis i tempi di attuazione, le quantità di dati da prendere in carico e da usare nello svolgimento delle manovre, la gamma dei tipi di operazioni richieste e disponibili, la versatilità e la adattabilità rispetto a nuove situazioni.
Altre valutazioni sulle soluzioni ottenibili si sanno riconoscere solo nel corso delle effettive manovre risolutive e riguardano le difficoltà che si possono incontrare: rischi di errori e di fraintendimenti, necessità di correzioni di dettagli e di chiarimenti complessivi.

Altre valutazioni devono riguardare i risultati ottenibili: l'ampiezza della loro portata, le precisioni ottenibili, le incisività di quanto consentono di chiarire e la loro cosiddetta **scalabilità relazionale**, ossia la possibilità di adattare soluzioni che hanno avuto successo a situazioni assimilabili, soprattutto a situazioni con parametri più elevati.

**A01 b.06** La possibilità di ricondurre le operazioni di calcolo a manipolazioni di simboli è da collegare sia alla richiesta della loro riproducibilità adattiva, che alla prospettiva da parte di chi le svolge di far crescere le loro cpacità valutative.

Le valutazioni devono cercare soprattutto di far capire i costi che i calcoli richiedono nei contesti concreti.

Gli sviluppi storici mostrano piuttosto chiaramente che i calcoli si possano migliorare in varie direzioni quando vengono eseguiti mediante elaborazioni di simboli.

Queste esecuzioni sono costituite da sequenze di trasformazioni di simboli e sono le costituenti dei metodi formali e dello sviluppo delle conoscenze esprimibili in termini formalizzati che costituiscono le rappresentazioni delle situazioni reali.

Molti passi dell'*esposizione* sono dedicati a esempi e commenti che mettono in evidenza i vantaggi della formalizzazione, cercando di giustificare le relative scelte e talora anche di confrontare possibili altenative.
La cura da dedicare a questi passi è motivata dal fatto che buona parte degli elementi che rendono a molti ostica la matematica e tante sue applicazioni è il fatto che i suoi formalismi sono percepiti come stranezze ingiustificate, forse arbitrarie e apparentemente sconnesse dalle esigenze pratiche che si incontrano in tanti frangenti.

**A01 b.07** Un calcolo che risolve un nuovo problema avvalendosi delle indicazioni ricavate da precedenti soluzioni di problemi assimilabili può essere effettuato con strumenti diversi ma suggeriti da correlazioni ricorrendo a schematizzazioni di problemi e operazioni risolutive che rendono più facilmente distinguibili i collegamenti tra gli elementi omologhi di siuazioni precedenti e situazioni nuove.

Questo lavoro di schematizzazione auspicabilmente conduce a delineare schemi più generali che, con l'aiuto di opportuni studi comparativi, cercano di presentare gerarchicamente i problemi e i procedimenti risolutivi che presentano caratteristiche confrontabili.
Questi schemi tendenzialmente gerarchici risultano tanto più vantaggiosi quanto più riescono a suggerire attività risolutive organizzate sistematicamente, in particolare attività unificate o inquadrabili mediante generi confrontabili.

Nei casi di successo si giunge a riconoscere una evoluzione degli schemi dei problemi, delle operazioni e delle loro gerarchie, evoluzione che vede crescere le loro capacità organizzative fino a suggerire e a delineare delle tassonomie.

La definizione degli schemi di maggiore presa può essere impegnativa e spesso richiede quella che chiameremo "capacità di astrazione".

**A01 b.08** Il collegamento tra i problemi che chiamiamo computabili e le attività di calcolo che consentono di risolverli si basa suquelli che chiamiamo **modelli matematici**; queste entità per ora ci limitiamo a considerarle costruzioni mentali accuratamente formulate che hanno il compito di rappresentare mediante simboli oggetti, situazioni e processi empiricamente osservabili.

Con simboli qui intendiamo entità formali, ossia oggetti comunicabili tra operatori umani o artificiali, interconnessi da precise relazioni e collocabili a diversi livelli di articolazione.
I più semplici sono segni ai quali si chiede solo che devono essere distinguibili dagli esecutori ed essere componibili per costituire simboli via via più compositi; questi, a loro volta devono essere collegabili mediante nuove relazioni e devono essere sottoponibili a trasformazioni e composizioni eseguite dagli accennati operatori esecutori; simboli diversamente conpositi e corrispondenti relazioni contribuiscono a definire quelle che chiamiamo **strutture formali**.

Complessi organici di simboli, e relazioni che li collegano e strutture formali costituiscono i cosiddetti **sistemi formali**.
Rivestono il maggiore interesse i sistemi formali che riescono a rappresentare sistemi fisicamente osservabili e che possano essere sottoposti a esami approfonditi attraverso procedimenti la cui ripetibilità possa essere apertamente verificata e analizzata in modo che si possano scoprire loro propriet'a che si possano proporre come attendibilmente condivisibili a studiosi che intendono utilizzarli oppure che intendoo portare avanti ulteriori sviluppi modellistico-formali.

Il fine di questi sviluppi è l'applicazione dei risultati ottenibili a previsioni ed estrapolazioni riguardanti nuovi fenomeni con caratteristiche simili a quelle dei sistemi osservati che hanno condotto al modello di partenza e agli eventuali modelli intermedi.

**A01 b.09** Consideriamo le entità formali individuate come componenti dei modelli che si introducono per avviare le trattazioni dei problemi impegnativi.

Ogni entità di un modello riguardante un problema rappresenta un oggetto o un processo osservabile in ogni scenario nel quale si presenta una istanza del problema.
Sul piano semantico per ciascuna entità si devono presentare collegamenti ben riconoscibili con l'entità osservabile che rappresenta.

Sul piano operativo le entità formali devono essere sottoponibili alle manipolazioni che possono servire alle esecuzioni che cercano di risolvere le istanze del nostro problema.

Sul piano formale si vuole che le entità formali possano essere inquadrate significativamente in un linguaggio che sia adatto alla presentazione delle varie questioni poste dai procedimenti risolutivi nelle forme che consideriamo proprie della matematica, forme che devono essere ampiamente condivisibili e comunicabili integralmente senza incontrare rischi di fraintendimento.

Al linguaggio matematico per la formulazione di un problema che supponiamo "ben definito" chiediamo che possa favorire la rielaborazione dei contenuti che esprime, non solo per quanto serve per il loro utilizzo nelle molteplici istanze applicative, ma anche nella direzione della crescita delle conoscenze di interesse generale.

Le entità osservabili rappresentate da simboli in un modello matematico devono essere soddisfacentemente misurabili e relazionabili; esse possono consistere in oggetti tangibili (corpi, testi, costruzioni, campionamenti, ...), in processi (fisici, chimici, biologici, tecnologici, ...) e in procedimenti (produttivi, amministrativi, economici, finanziari, comunicativi, conoscitivi, ...).

**A01 b.10** Le entità formali che in un modello matematico rappresentano entità osservabili possono assumere molti aspetti: possono consistere in mere sequenze di lettere di un linguaggio naturale, in notazioni numeriche, in grafi con i nodi dotati di etichette come si possono considerare le formule), in altri generi di configurazioni combinatorie, in figure geometriche, in strutture algebrico-relazionali, in sistemi di equazioni, in sistemi di assiomi, in processi dinamici, in processi statistici e in tanto altro.

Nelle entità formali si devono riconoscere (spesso con un qualche grado di approssimazione e di semplificazione) le caratteristiche salienti delle entità osservabili rappresentate che sono riconosciute rilevanti per il problema per il quale si cercano soluzioni.
Questo è importante soprattutto per le entità osservabili sulle quali i committenti delle istanze del problema intendono fare estrapolazioni o previsioni.

**A01 b.11** Nei paragrafi precedenti abbiamo infilato termini impegnativi come "calcolo", "manipolazione di simboli", "problema applicativo ben definito", "modello matematico", "approssimazione"; in seguito, in particolare di fronte a problemi specifici, ci sforzeremo di chiarirli il più possibile e di presentare un ventaglio sufficientemente rappresentativo di loro esempi.

Corre l'obbligo di dichiarare subito che nella *esposizione* si attribuisce importanza ad un **obiettivo computazionale della matematica**, disciplina della quale si intende a sottolineare il ruolo di organizzazione formale delle attività computazionali il più possibile coerente, comprensiva, aperta a nuove situazioni problematiche ed essa stessa promotrice della ricerca di nuovi problemi la cui soluzione rivesta importanza.

Più precisamente, in sintonia con il pragmatismo risalente a un matematico del calibro di Charles Sounders Peirce, qui si ritiene che l'obiettivo computazionale sia sufficiente per fornire ragionevoli motivazioni per tutte le argomentazioni, per tutte le costruzioni formali e per tutte le metodologie che si possano esporre.

Molti ritengono che confinare la matematica entro un obiettivo computazionale sia restrittivo, taluni inaccettabilmente restrittivo.

Senza entrare in una discussione in proposito, ci limitiamo a segnalare che le pagine che seguono si sforzano di motivare tutti gli sviluppi riconducendoli a obiettivi computazionali (talora generali, talora settoriali) nella convinzione che questi sviluppi possono essere ampiamente riconosciuti, anche da quanti non li pongono tra i propri maggiori obiettivi.

Forse a causa di personali limitazioni, sono tentato di sospettare che altri obiettivi della matematica non siano presentabili in modo convincente con motivazioni condivisibili alle molte persone che si interessano della matematica prevalentemente o esclusivamente per l'efficacia delle sue applicazioni.

**A01 b.12** Ogni attività di calcolo, in quanto osservabile (e quindi oggetto di possibili comunicazioni, registrazioni, giudizi valutativi e rielaborazioni) costituisce un processo finito, anche quando la si descrive procedere senza vincoli prefissati e quando per la sua presentazione si utilizza la nozione di infinito.

La presente *esposizione*, per coerenza con i suoi obiettivi computazionali, deve occuparsi di procedure che consistono di indicazioni costruttive esprimibili finitamente, che possono impiegare solo risorse finite (per ovvie esigenze di realismo), che si possono servire solo di materiali informativi esprimibili finitamente e che possono controllare solo elaborazioni di durata finita e in grado di fornire solo risultati esprimibili finitamente.

In effetti per chi si interessa di applicazioni effettive della matematica la finitezza delle informazioni disponibili, dei tempi contenuti che si dovrebbero rispettare e degli strumenti concreti dei quali ci si può avvalere è ineludibile e quindi dovrebbe essere valutata con attenzione.

In accordo con questi requisiti delle attività computazionali e con la esigenza di comunicabilità e di revisionabilità di tutte le discipline ST, la presente *esposizione* deve partire dalle più elementari delle informazioni trattabili, dalle stringhe, cioè dalle sequenze di segni che siano riconoscibili senza ambiguità da tutti gli attori che possono intervenire.

**A01 b.13** Abbiamo visto in precedenza, che i procedimenti e i metodi di calcolo che la matematica prende in esame vanno giustificati e valutati in relazione ai vari requisiti ai quali i diversi committenti di applicazioni possono assegnare pesi diversi.

Esaminiamo questi requisiti.

ampiezza della portata,
precisione dei risultati,
velocità ed efficienza dei procedimenti,
caratteristiche di versatilità, adattabilità e scalabilità (o espandibilità).

Non stupisce che quando si affrontano problemi impegnativi in genere tra questi requisiti si devono raggiungere dei compromessi, anche drastici.

L'esame di questi requisiti risulta particolarmente impegnativo e aperto in questi anni che vedono da un lato la crescita progressiva delle attività che danno importanza a metodi quantitativi e a requisiti strutturali, e dall'altro la possibilità di avvalersi di strumenti tecnologici in continua evoluzione e di

procedure e metodologie via via più elaborate finalizzate al soddiscafimento di esigenze sempre più spinte.

**A01 b.14** Gli argomenti trattati o soltanto sfiorati in queste pagine, ovviamente, sono condizionati dallo stato delle competenze dell'autore.

Dato per scontato questo limite, l'*esposizione* cerca di presentarsi autonoma, unitaria e consequenziale; inoltre si sforza d presentare una buona gamma di collegamenti con tradizione e applicazioni; su qualche argomento cerca perfino di raggiungere una sorta di completezza.

Questi intenti sono evidentemente impegnativi, e non si possono nascondere la attuali macroscopiche carenze, inadeguatezze e limitazioni.
In effetti non si propone un testo definitivo, ma semplicemente si porta avanti una presentazione che si appoggia sul Web con modalità che dovremo precisare, che riconosce le sue carenze, ma che continua a sperare di essere di qualche utilità, in particolare come riferimento per insegnamenti interessati alle applicazioni.

Gli obiettivi dell'*esposizione* implicano l'opportunità di distinguere con chiarezza:

- da un lato le informazioni e gli schemi operativi che servono a organizzare i procedimenti computazionali necessari per impostare e risolvere i problemi;
- dall'altro le entità formali e le proprietà impiegate per edificare costruzioni teoriche, anche decisamente astratte, da giustificare in quanto utili a inquadrare problemi e metodi che puntano alla generalità, spesso trascurando dichiaratamente alcuni elementi necessari a rendere effettivi i procedimenti richiesti dai contesti applicativi reali.

Va segnalato che questi due generi di nozioni devono essere presentati con continua attenzione verso le reciproche influenze.

**A01 b.15** Tra i contenuti molti, in particolare tra qualli iniziali, riguardano configurazioni discrete e procedimenti costruttivi.

La priorità accordata a questi contenuti è stata influenzato da precise convinzioni.

- Varie strutture discrete e molte tematiche costruttive sono essenziali per una buona visione generale della matematica e delle sue possibilità applicative, per la comprensione degli sviluppi algoritmici e per la collocazione di questi tra le teorie e le applicazioni della matematica.
- Molte nozioni discrete consentono di introdurre con chiarezza e di risolvere problemi concreti e di conseguenza forniscono o contribuiscono a mettere in luce salde connessioni tra la matematica e i suoi sempre più numerosi campi di applicazione.
- Vari argomenti della matematica costruttiva possono migliorare il collegamento tra insegnamento della matematica e utilizzo degli odierni sistemi informatici, collegamento per il quale si riscontrano sia collaborazioni con reciproci vantaggi, che situazioni conflittuali; questo collegamento la prdurante evoluzione della tecnologia e dei sistemi software applicativi lo mantengono costantemente teso e bisognoso di periodici aggiornamemti.

**A01 b.16** In effetti la progressiva diffusione di mezzi elettronici per il calcolo automatico e l'elaborazione delle informazioni, molto rilevante ma spesso povera di consapevolezza e di riferimenti solidamente giustificati, richiede conoscenze concernenti configurazioni discrete che non sfigurano di fronte a quelle relative agli affermati contenuti della matematica del continuo.

Da un lato vari aspetti dei sistemi di calcolo automatico e dell'elaborazione delle informazioni possono essere presentati in modo più nitido e facile da generalizzare ricorrendo a nozioni matematiche.

Dal lato opposto vari argomenti proposti dall'insegnamento della matematica possono essere motivati in modo tangibile, convincente e possibilmente attraente come conoscenze basilari per la comprensione di procedimenti per il calcolo, per le valutazioni dei dati, per la utilizzabilità dei risultati, per la circolazione delle comunicazioni e per la crescita di una cultura consapevole della efficienza e della efficacia degli strumenti e dei metodi scientifico-tecnologici.

Penso che i risultati recenti e gli studi recenti sulle prospettive comportino che la consapevolezza delle potenzialità delle discipline ST sia indispensabile per la comprensione di molti aspetti del mondo odierno, dei cambiamenti maggiori e per la definizione di decisioni incisive e talora determinanti per la società e per la cultura nelle quali siamo immersi.

**A01 b.17** Molte conoscenze sulle configurazioni discrete possono risultare utili a chi si avvia a una delle diffuse attività professionali collegate a programmazione, sistemi informatici e aggiornamenti tecnologici (oggi occorre soprattutto essere consapevoli delle irruzioni della AI e valutare le relative conseguenze).

A questo proposito occorre rilevare che negli ultimi anni, soprattutto in conseguenza della perdurante crescita in efficienza, versatilità e diffusione dei mezzi per l'elaborazione e la circolazione delle informazioni, dovrebbe crescere la esigenza di consapevolezza sugli algoritmi, sulle loro implementazioni, sulla loro efficacia e sulla validità, spesso limitata, dei loro risultati.

Molti laureati in matematica (e in ingegneria, fisica, ...) trovano impiego nella programmazione e la svolgono con profitto, in buona misura grazie alla loro consuetudine con le definizioni precise, con le argomentazioni rigorose e con gli obiettivi ben chiari.

Nonostante questo, in alcuni corsi di matematica non viene prestata adeguata attenzione agli algoritmi e agli argomenti di matematica discreta, anche a quelli che costituiscono ponti storicamente riconoscibili tra matematica, elaborazione dei dati e applicazioni (ingegneristiche, economiche, ambientali, ... ).

Inoltre la familiarità con algoritmi e le loro conseguenze, anche solo al livello del buon senso, oggi costituisce uno strumento culturale indispensabile per la corretta comprensione di molti aspetti dell'attualità e del futuro imminente e incombente.

**A01 b.18** In vari ambienti scolastici e universitari si continuano a definire progetti didattici che prevedono maggiore uso degli strumenti informatici e si ampliano la necessità e l'offerta di corsi fruibili tramite Internet.

Queste tendenze sono spinte dalle esigenze di maggiore resilienza culturale e sono sollecitate dai continui progressi della tecnologia e, comprensibilmente, sono accompagnate da tangibili pressioni commerciali. Anche nell'ambito di alcuni insegnamenti della matematica si osservano richieste di maggiore consapevolezza delle possibilità degli strumenti informatici.
Molte risposte possono venire da un approccio che metta in luce gli aspetti utilitaristici, costruttivi e in fondo finitistici della matematica.

## A01 c. criteri espositivi

**A01 c.01** Ciascuno dei capitoli e dei fascicoli della nostra *esposizione*, ossia ciascuno dei kapitoli, risulta registrato su un file di estensione `.tex`.

I capitoli sono costituiti principalmente da pagine attribuibili soprattutto alla matematica, in buona parte alla informatica e alla fisica e a nozioni e considerazioni riguardanti filosofia, economia, sociologia e linguistica.
La maggior parte delle pagine contengono definizioni, dimostrazioni, enunciati della matematica; molte contengono argomentazioni sopra le applicazioni della matematica, sopra risultati della fisica, sopra gli sviluppi e le realizzazioni dell'informatica (in particolare una presentazione del liguaggio C++) e della intelligenza artificiale; si incontrano considerazioni afferenti alle altre discipline con caratteri umanistici e varie informazioni e valutazioni di carattere storico.

I contenuti di MATeXp in buona parte sono proposti come nozioni di interesse generale e si vorrebbero comprensibili e agevolmente accessibili sia dagli studiosi interessati primariamente a modelli e calcoli richiesti da problemi concreti, sia, nelle parti più basilari, dagli allievi degli ultimi anni delle scuole secondarie e dei primi corsi universitari, sia, per quanto riguarda talune questioni di fondo, da loro insegnanti.

I fascicoli dei riferimenti riguardano personalità, libri, articoli e pagine reperibili nei non pochi siti Web affidabili dedicati alla matematica e alle discipline che consideriamo ad essa contigue.

**A01 c.02** I capitoli si propongono di introdurre con una propria coerenza le molte nozioni che consentono di definire condivisibilmente e proficuamente un sistema di strumenti computazionali, verbali e concettuali e si sforza di porre in evidenza le motivazioni e le finalità costruttive, dirette o indirette, delle entità presentate e delle loro proprietà.

MATeXp cerca anche di segnalare una buona varietà di applicazioni e di aree computazionali nelle quali le nozioni presentate dimostrano la loro utilità.

Il materiale è stato ripreso da svariate fonti consolidate [X21], ma è stato presentato con una progressione graduale che, scontate le ben evidenti perduranti carenze, prevede il perseguimento della completezza e cerca di delineare una cpmplessiva unitarietà con alcuni tratti di originalitè.
Varie pagine del testo attuale ampliano e puntualizzano i contenuti di rapporti presentati nell'ambito degli istituti CNR IAMI e IMATI compilati per obiettivi abbastanza simili tra il 1970 e il 2006.
Altre pagine riprendono varie tesi di laurea in matematica presso l'Università degli Studi di Milano seguite dall'autore.

**A01 c.03** Una delle motivazioni della presente *esposizione* è la sperimentazione di alcune modalità che possono essere seguite con vantaggio da una persona o da un piccolo gruppo di persone che intendono raccogliere e pubblicare una mole estesa di nozioni della matematica, delle sue applicazioni e di iscipline contigue su supporti digitali servendosi di strumenti oggi facilmente disponibili, vuoi per scopi didattico-divulgativi, vuoi per fare da supporto a materiali specialistici con gli obiettivi della loro maggiore comprensione e del loro più consapevole inquadramento scientifico. ¶Per le attività di questi ipotetici gruppi di persone si potrebbe proporre il termine "iniziative scientifico-cognitive di livello artigianale".

Per molte delle attività redazionali prospettate sono da prevedere tempi lunghi, soprattutto quando rivolte a discipline in continua crescita; è quindi ragionevole pensare a lavori redazionali in progressiva evoluzione.

Di conseguenza le modalità che MATeXp intende sperimentare sono volte innanzi tutto a facilitare l'ampliamento e la modificabilità delle pagine per le quali sono prevedibili graduali arricchimenti e possibilità di riadattamento.

Per questo si è stati indotti a definire, almeno a grandi linee, una sorta di modello della prevedibile evoluzione di questo genere di lavori di redazione o di compilazione sostenuti da semplici strumenti informatici.

Questa sperimentazione fa riferimento allo spirito degli open contents [`Open content (we)`] e intende prospettare materiali aperti al riutilizzo e alla definizione di pratiche che possano essere riprese impiegando risorse limitate, comuni e di basso costo.

**A01 c.04** L'*esposizione* viene portata avanti senza la prospettiva di una pubblicazione a stampa e questo atteggiamento consente di evitare vari vincoli.

Il primo vincolo evitato riguarda la mole complessiva, che si vuole di qualche migliaio di pagine, pensando a pagine piuttosto capienti; molte pagine di MATeXp contengono 40 per 90 battute.

L'obiettivo della pubblicazione digitale riconosce l'ampiezza delle conoscenze matematiche sulle quali è opportuno effettuare sperimentazioni significative e l'importanza della loro coerenza in termini di compatibilità e distinguibilità; la pubblicazione di estese nozioni matematiche nell'ottica dei tradizionali prodotti editoriali cartacei in lingua italiana incontra evidenti difficoltà commerciali.

L'intenzione di produrre artigianalmente la presentazione di un buon ventaglio di conoscenze di natura scientifica e applicativa ha portato naturalmente a servirsi di supporti digitali e di Internet, sia per la redazione che si vuole il più possibile controllabile, sia per la messa a disposizione.

Questi supporti consentono di dotare il testo di numerosi collegamenti con le migliori pagine matematiche del Web e di non porre limitazioni alle citazioni della letteratura consolidata.

**A01 c.05** Un altro punto a vantaggio della pubblicazione digitale sta nel potersi permettere ridondanze che possono rendere più autonoma e meno lineare la lettura quanto può servire per soddisfare esigenze di contenuti specifici.

Le ridondanze consistono in ripetizioni che in certi punti costituiscono richiami agevolati e in altri costituiscono ripresentazioni di concetti secondo punti di vista e obiettivi differenziati o graduati.

I brani dedicati a nozioni introdotte altrove (in genere in capitoli precedenti) possono essere buone occasioni per assumere diversi livelli di generalità, di approfondimento o di astrazione e per presentare diversi presupposti, diversi scenari di riferimento e diverse finalità applicative.

Un particolare tipo di ridondanze riguarda da un lato pagine introduttive e argomentative e dall'altro repertori di definizioni e di risultati.

Le ridondanze pongono problemi di uniformità e di coerenza di linguaggio in contrapposizione a differenziazioni di termini, notazioni e definizioni che devono essere motivate e in grado di rispettare la coerenza.
A favore delle ridondanze gioca la possibilità di rendere disponibili discorsi sviluppati in poche decine di pagine leggibili in buona autonomia e che quindi possono essere meglio utilizzate da lettori che hanno scopi circoscritti e ritengono opportuno evitare contesti che reputano scollegati dai loro interessi immanenti.

Un'altro vantaggio ottenibile con la distribuzione attraverso canali telematici delle conoscenze su supporti digitali consiste nella possibilità di evitare i vincoli economici e temporali alle correzioni degli errori e alle piccole migliorie che incontrano gli autori e i responsabili delle opere distribuite su carta,

vincoli spesso pesantemente condizionati da difficoltà operative e da comprensibili esigenze commerciali.

**A01 c.06** Una caratteristica della presente *esposizione*, allineata con il suo carattere sperimentale, consiste nella adozione di termini, simboli e modalità di scrittura poco usuali, anche lontani da consolidate tradizioni, ma ritenuti utili per alcuni rilevanti vantaggi che permettono di conseguire.

Si osserva innanzi tutto che in una presentazione di ampi settori di una disciplina come la matematica si incontra una varietà molto elevata di nozioni e quindi la necessità di utilizzare numerosi termini specifici rilevanti e simboli, dell'ordine delle migliaia; ṗrevedibile anche un rapporto 1 su 2 tra numero di pagine e numero di termini rilevanti.

Questo per il lettore comporta forti rischi di interferenze, di incompatibilità e di ambiguità, in particolare ambiguità da omonimia.
Inoltre, come in ogni disciplina con una lunga tradizione e con una complessa articolazione si incontrano molti esempi di sinonimia e di polisemia (e peggio di enantiosemia).

**A01 c.07** Risulta quindi opportuno che le scelte linguistiche, a partire dalle lessicali, agevolino la precisa determinazione delle definizioni e delle proprietà da riconoscibili attraverso una denominazione.

Queste constatazioni suggeriscono di sperimentare l'adozione di elementi tipografici attentamente differenziati atti a facilitare il contenimento e l'eliminazione delle omonimie e la conseguente riduzione delle ambiguità, grazie alle prestazioni che si possono chiedere agli strumenti di monitoraggio e ricerca in grado di facilitare interventi interattivi o automatici oggi in parte comunemente disponibili e in parte ottenibili senza rilevanti difficoltà.

Si osserva anche che in una presentazione in fieri che si auspica ampliabile e riutilizzabile, i riadattamenti devono essere facilitati e può essere utile proporre e sperimentare sistemi di termini e di notazioni che cercano di risultare versatili, adattivi e riconoscibili da automatismi.

Il testo dell'esposizione che si procede a redigere si vuole che si serva di simboli semplici e compositi a ciascuno dei quali si attribuisca o una visibilità globale o una visibilità circoscritta ad ambiti testuali possibilmente ben definiti, ad esempio circoscritta a singoli capitoli, a gruppi di sezioni, a singoli paragrafi, a determinati teoremi o a singole righe.

Occorre tuttavia aggiungere che accanto a molti termini e simboli proposti in alternativa di scelte più usuali si cerca di segnalare anche queste ultime; inoltre si intendono segnalare le sinonimie che si incontrano più spesso nella letteratura.

Nello stesso spirito di alcuni termini di largo uso, sono citate le versioni nella lingua inglese; sono segnalati anche alcuni termini in francese e in tedesco.

**A01 c.08** Molte presentazioni della matematica insistono sul rigore delle definizioni delle entità che introducono e sul rigore delle dimostrazioni delle proprietà che affermano e più complessivamente insistono sulla precisione del linguaggio usato.

Queste insistenze sono accettabili quando si confronta il linguaggio dei testi matematici con i linguaggi praticati in molte altre discipline che trattano entità essenzialmente più elaborate e sfuggenti come l'economia, l'ermeneutica o le passioni umane; tuttavia in genere tali insistenze non raggiungono una validità assoluta.

A questo proposito va segnalato che il rispetto completo della precisione lessicale, sintatica e semantica viene richiesto dai linguaggi di programmazione, i quali peraltro trattano tipi di entità molto circoscritti: numeri interi e razionali (certo non tutti), stringhe, liste di numeri e di stringhe e strutture informative poco più elaborate.

**A01 c.09** Approfondendo l'esame si osserva invece che in gran parte le presentazioni di argomenti matematici per mantenere un buon livello di leggibilità sono praticamente costrette ad adottare svariati accorgimenti semplificativi quali: abbreviazioni di termini compositi, sfrondamenti di notazioni, giri di frase metaforici per esprimere concisamente manovre di manipolazioni di entità distinguibili completamente solo fornendo un sacco di dettagli; per questi accorgimenti si parla spesso di "abusi di linguaggio".

Si tratta di scostamenti da un linguaggio ideale che dovrebbe rispettare rigorosamente le definizioni; questi scostamenti spesso sono adottati senza avvertimenti, confidando sbrigativamente che i lettori con buone competenze sugli argomenti trattati siano indirizzati correttamente dal contesto.

La presente *esposizione*, come atteggiamento indotto dalle sue ambizioni divulgative rivolte soprattutto a persone interessate alle applicazioni e che quindi dovranno in qualche modo risolvere varie ambiguità, si propone di chiarire le molte semplificazioni e abbreviazioni, sforzandosi anche di classificarle in modo da rendere eliminabili tutti i dubbi.

Gli appesantimenti che questi chiarimenti richiedono sono resi sopportabili dando evidenza alle possibili deviazioni dalla lettura strettamente sequenziale, evidenza che può essere facilitata dai supporti digitali.

Va anche segnalato che l'adozione di alcune semplificazioni può essere sostenuta da precisazioni formalizzate attraverso le definizioni di apposite entità lessicali e di schemi sintattici semplificativi (riguardanti in particolare meccanismi sostitutivi).

Si segnala anche che talune di queste definizioni aprono la possibilità di ulteriori generalizzazioni delle entità trattate e delle relative affermazioni .

## A01 d. impianto organizzativo

**A01 d.01** Per iniziare l'esame della organizzazione di MATeXp conviene analizzare il suo testo sorgente, ossia i contenuti leggibili della sequenza dei files che contengono le registrazioni dei kapitoli nei quali è suddivisa l'*esposizione*.

Si tratta di files sequenziali costituiti da caratteri ASCII 7 che vanno considerati testi scritti nel linguaggio Plain TEX dovuto Donald Knuth; ogni file ha come estensione `.tex` ed è individuato da un trigramma costituito da una lettera maiuscola e da due cifre decimali.

Attualmente l'*esposizione* consiste in 185 capitoli e 10 fascicoli; elenchi dei loro titoli e delle loro sezioni sono riportati nei fascicoli X01 e X02.

Ciascuno dei file dell'*esposizione* può essere tradotto dal programma *WinShell* in un file di estensione `.dvi` leggibile su schermo; a sua volta questo può essere trasformato in un file `.pdf` leggibile, stampabile e facilmente veicolabile sul Web e su vari dispositivi digitali.
WinShell consente di ottenere facilmente anche files di estensione `.ps` nel formato Postscript, anch'essi facilmente comunicabili.

Ricordiamo che i capitoli sono dedicati ad una presentazione che cerca di essere sistematica di fatti matematici e di alcune nozioni della fisica e dell'informatica considerati necessari per una completa comprensione della matematica applicabile.
I fascicoli invece contengono indici e altri elenchi di referimenti che servono a facilitare chi si vuole orientare sui molti contenuti dell'intera *esposizione*. Va anche detto che indici e riferimenti sono anche molto utili per lo sviluppo coerente dell'intera MATeXp.

**A01 d.02** È opportuno distinguere diversi corpi di files che fanno da contenitori di MATeXp.
Chiamiamo **testo-A** o testo dell'autore il corpo dei files `.tex` scritti nel linguaggio Plain TEX; il testo-A potrebbe anche essere chiamato testo iniziale (dell'attività redazionale) o testo sorgente (per le sue trasformazioni di rendering ottenibili da WinShell).
Chiamiamo **testo-dvi** il corpo dei files `.dvi` ricavabili attraverso la compilazione dei files del testo-A eseguita da WinShell.
Chiamiamo **testo-pdf** il corpo dei files `.pdf` ricavabili attraverso la trasformazione dei files del testo-dvi, anch'essa da parte di WinShell.

L'*esposizione* è fruibile anche in un ambiente Web che consente di navigare più agevolmente sui vari documenti; questo ambiente e i files nel linguaggio HTML che lo compongono sono dovuti a Maria Teresa Artese e a Isabella Gagliardi dell'Istituto IMAT del CNR.

Usiamo il termine **testo-L**, per testo leggibile, per denotare genericamente uno dei testi nei formati `.dvi`, `.pdf` e `.htm`, formati che consentono l'usuale lettura dell'*esposizione* da schermo o da pagine stampate.

Sia ogni testo-A che ciascuno dei testi-L sono corpi di documenti digitali che possono essere facilmente ripresi e riutilizzati servendosi di strumenti di dominio pubblico, in accordo con il carattere di sperimentazione artigianale dell'attività che li produce.

**A01 d.03** Volendo approfondire le attività per lo sviluppo di MATeXp, azioni che potrebbero riguardare esposizioni di argomenti simili occorre occuparsi delle procedure automatiche che le sostengono, strumenti che possono essere facilmente riprese sui comuni computers per operare su qualche altro corpo di documenti.

Le procedure di sostegno operano sui testi-A e sui cosiddetti **testi-M**; M suggerisce "testo nella memoria del computer.
Ogni testo-M ha un contenuto del tutto equivalente a quello di un testo-A; più precisamente da un testo-A si può ricavare il corrispondente testo-M e viceversa.

Un testo-M è costituito da una struttura informativa che rappresenta l'intero testo-A e che ha lo scopo di poter essere gestita con efficienza dai programmi di supporto.
Questi programmi attualmente sono solo parzialemnte disponibili, essenzialmente effettuano analisi e trasformazioni di testi-A e hanno due compiti primcipali:
controllare che i testi-A rispettino le loro regole lessicali e sintattiche primarie e che si servano di termini singolarmente definiti con precisione e complessivamente utilizzati in modo coerente;
ricavare automaticamente da un testa-A di un kapitolo un file che dopo semplici operazioni di postproduzione fornisce una versione controllata del testo-A a sua volta trasformabile in un testo-L pubblicabile e leggibile.

**A01 d.04** Il sistema TEX adottato per i files sorgente componenti il testo-A, ha innanzi tutto il pregio di distinguere tra testi sorgente gestiti dall'autore (come i testi-A dei kapitoli) e testi per il rendering, comunemente leggibili e trasferibili, ricavabili con automatismi (per noi i testi-dvi e i testi-pdf).
La possibilità di elaborare abastanza facilmente i testi-A apre la possibilità di sviluppare programmi di supporto dei contenuti di una esposizione senza doversi addentrare nei tecnicismi delle procedure per il rendering dei testi.

Notoriamente il sistema TEX consente un'ampia varietà di scelte tipografiche le quali si dimostrano molto utili per sostenere la varietà delle espressioni matematiche e di molte altre notazioni che in un documento SciTech possono contribuire notevolmente alla efficacia e alla accuratezza della presentazione dei contenuti.

In effetti con TEX risultano facili la gestione di complessi di macro e la introduzione di nuovi semplici simboli, prestazioni che consentono di arricchire la gamma delle composizioni simboliche disponibili, alcune delle quali in grado di comporre notazioni diverse delle tradizionali facilmente sperimentabili per arrivare se giudicato opportuno, a proporle come alternative.

In particolare TEX ha consentito di definire alcune centinaia di segni ottenuti con il semplice meccanismo della sovrapposizione di rettangoli con lati di pochi decimi di millimetro che consentono di presentare concisamente entità che si vogliono accuratamente distinguibili.

Questo modo di organizzare le notazioni risulta vantaggioso in particolare quando si presentano gruppi di oggetti formalmente diversi ma concettualmente collegati mediante funzioni o relazioni che a loro volta vanno ben distinte, anche attraverso il loro aspetto.
In generale le entità esprimenti nozioni di carattere matematico e scientifico e i loro collegamenti risulta vantaggioso differenziarli non solo lessicalmente e sintatticamente, ma anche mostrandoli mediante simboli distinguibili e collegabili variazioni del loro aspetto facilmente individuabili.

**A01 d.05** Le molte scelte lessicali del testo sorgente vengono effettuate seguendo criteri espressivi e organizzativi che innanzi tutto si proccupano di facilitare controlli e arricchimenti automatici e semiautomatici del testo-A che vengono a rivelarsi utili e sono relativamente facili da ritoccare.

Queste scelte lessicali riguardano sia le componenti discorsive del testo, sia i numerosi inserti simbolici, sia componenti dei files-A invisibili per il lettore che possono essere utilizzati dai redattori per gestire meglio l'evoluzione esplicitamente prevista o solo auspicata.

Queste scelte cercano di essere visivamente coordinate, intendono favorire i collegamenti interni e cercano di facilitare la attuazione di cambiamenti graduali di forme e di contenuti.

I cambiamenti nell'ambito dello sviluppo di MATeXp possono essere dovuti a precisazioni, a completamentazioni e a riadattamenti per nuove versioni alternative; a loro volta queste possono essere più o meno avanzate, più o meno concise oppure possono dipendere da diversi prerequisiti o essere richieste da diversi obiettivi.

Per i monotoraggi e le modifiche più semplici dei testi-A sono stati utilizzati i già citati i pacchetti di source editing di dominio pubblico MultiEdit e Notepad++.

La sequenza dei capitoli presenta con una sua consequenzialità lo sviluppo progressivo dei contenuti matematici, e delle nozioni afferenti alla fisica, alla informatica, alla intelligenza artificiale e a svariate applicazioni.

**A01 d.06** Come si è già accennato, il testo-A dell'*esposizione* scritto nel linguaggio Plain TEX, si avvale dialcune centinaia di macro del linguaggio e di alcune migliaia di macro definite appositamente.

Queste macro hanno diverse funzioni:

- demarcare il testo-A per dargli una struttura complessiva controllabile e sottoponibile a riadattamenti di forme e di contenuti mediante programmi relativamente semplici;
- rendere disponibili segni con specifici ruoli nelle formule (esempi: $\lceil$ , $\mapsto$ , $\neg$ , $\lceil$ , $\neg$ , **[** , **)** , $\langle$ , $\vdots$ , . . . );
- definire abbreviazioni di termini che cercano di essere mnemoniche e che sono collegabili grazie a variazioni semplici da riconoscere (come **RelTrns**, **GrpFSmpl** e **RngNab**);
- facilitare il controllo della coerenza del lessico, dell'uso di elementi già definiti o esplicitamente previsti, della consequenzialità delle argomentazioni e della giustificabilità delle ridondanze.
- facilitare la individuazione nei testi sorgente di occorrenze sopra le quali effettuare aggiornamenti, monitoraggi, statistiche, differenziazioni e riadattamenti, attività che vengono richieste con una certa frequenza in ogni redazione in fieri di testi estesi.

  Tra i tokens da tenere sotto controllo vanno segnalate le molte migliaia di rinvii all'interno del testo e di richiami di contenuti esterni.

**A01 d.07** Nel testo ha molta rilevanza la adozione di numerosi termini dotati di una cosiddetto **suffisso sincopato**.
Si tratta di una stringa di pochi caratteri alfanumerici usuali o costituita da una macro apposita.
Un suffisso sincopato va giustapposto a un termine dotato di un suo preciso significato al fine di esprimere un significato più particolare oppure al fine di ottenere un significato parzialmente e precisamente alterato.

Più in dettaglio tra i termini con suffisso sincopato vanno distinti:
quelli della forma "*termine-suffsinc*" nei quali *suffsinc* rappresenta la breve stringa che contribuisce ad esprimere una entità più particolare di quella espressa dal solo *termine*;
dai termini della forma "*termine.suffsinc*" nei quali la breve stringa *suffsinc* porta a identificare una entità vicina ma che si vuole chiaramente distinta da quella fornita dal solo *termine*.

Per esempio i termini anello e semianello vengono usati per strutture algebriche per le quali non si richiede la presenza di un elemento unità; ora il termine con suffisso sincopato "semianello-ab" sta per semianello abeliano, mentre "anello.u" sta per anello unifero, con il significato di struttura algebrica più ricca di una struttura anello, in quanto dotata di una unità che va chiaramente dichiarata.

Va detto che per i termini con suffisso ci si avvale delle regole della lingua italiana per evitare ulteriori definizioni, riservandoci di adottare implicitamente alcune varianti morfologiche di queste forme:
- variante singolare-plurale (come ad esempio “anello-ab” e “anelli-ab”),
- variante maschile-femminile (esempio: connesso-ZZB e connessa-ZZB),
- varianti sostantivo-aggettivo-verbo-avverbio
  (esempi: connesso-ZZB, comnnessione-ZZB, connettere-ZZB, connettivamente-ZZB)

**A01 d.08** Il testo MATeXp è organizzato in ripartizioni su quattro livelli chiamate, risp., tomi, kapitoli, sezioni e paragrafi.

Ogni tomo è contrassegnato da una maiuscola e attualmente sono stati sviluppati i tomi presentati nel quadro seguente:

| | |
|---|---|
| **A** | discorsi di apertura |
| **B** | nozioni proposte come basilari |
| **C** | linguaggi, automi, computabilità e codici |
| **D** | strutture discrete |
| **G** | geometria |
| **I** | analisi infinitesimale |
| **J** | informatica, programmazione e intelligenza artificiale |
| **K** | inquadramento culturale |
| **P** | fisica matematica |
| **T** | alcune teorie generali (algebra, topologia, categorie) |
| **W** | prontuario di formule e schemi costruttivi |
| **X** | fascicoli con indici ed elenchi dei vari tipi di riferimenti |

**A01 d.09** I fascicoli sono i componenti del tomo X e seguono schemi organizzativi propri che in parte si allontanano a quella dei capitoli descritta qui di seguito.

Kapitoli, sezioni e paragrafi si possono individuare con etichette che seguono due forme equivalenti, una più concisa e una seconda più evidentemente scandita.

Ogni kapitolo viene etichettato concisamente dalla lettera del tomo al quale è assegnato e da due cifre decimali, mentre la sua etichetta scandita si ottiene accodando alla concisa il carattere “:”: sono esempi di etichette concise di capitoli B21, B22, G47 e I25. Queste etichette concise sono chiamate **trigrammi** dei kapitoli.

**A01 d.10** Ciascuna delle sezioni di un kapitolo viene contradddistinta dalla cifra 0 o da una lettera minuscola; l’etichetta concisa di una sezione visualizzabile si ottiene aggiungendo alla concisa del relativo kapitolo la propria lettera minuscola; la corrispondente scandita differisce dalla concisa per il segno “:” che precede la lettera. ad esempio nel capitolo B22 si incontra la sezione etichettata da B22c, individuabile anche dalla equivalente scrittura B22:c .
Le etichette concise delle sezioni sono dette anche **tetragrammi** delle sezioni.

I paragrafi di una sezione sono contraddistinti da due cifre decimali; l’etichetta concisa di un paragrafo si ottiene aggiungendo al tetragramma della relativa sezione le due cifre che le competono, mentre l’etichetta scandita si ottiene dalla scandita della sezione aggiungendole un punto e le due cifre decimali. Per esempio si ha il paragrafo caratterizzato dalla etichetta B22c03 oppure dalla scrittura equivalente B22:b.03 , mentre si ha il paragrafo che può essere identificato da G25c04 o dalla equivalente stringa G25:c.04 .

Le etichette concise dei paragrafi sono chiamate **exagrammi** dei paragrafi.

La presenza nelle etichette contenenti i caratteri ":" e ".", non indispensabili, fornisce una certa facilitazione ad alcune ricerche lessicali interattive e a qualche riadattamento interattivo dei testi sorgente.

I rinvii all'interno dello stesso kapitolo sono leggermente semplificati: ogni rinvio a un paragrafo esplicito si riduce alla lettera e alle due cifre che lo caratterizzano precedute da ":"; esempi :b05 e :d11); i rinvii ad intere sezioni si riducono alla lettera assegnata alla sezione preceduta da ":" (:b, :g).
Queste semplificazioni consentono di effettuare più rapidamente le modifiche a interi gruoppi di sezioni e di paragrafi.

**A01 d.11** I kapitoli e le sezioni iniziano con un titolo esplicito, mentre solo pochi paragrafi iniziano con una scritta esplicativa resa in evidenza.

I paragrafi in gran parte sono costituiti da 15-40 righe; essi costituiscono unità di riferimento in genere un po' più ridotte delle pagine stampate e delle schermate sul testo-A, limitazione che li rende ambienti nei quali risulta piuttosto agevole effettuare operazioni di redazione, di riesame, di modifica e di confronto.
Quindi gran parte dei paragrafi sono interamente controllabili da una sola finestra; osserviamo anche che spesso risulta opportuno affiancare diverse finestre con interi paragrafi per poter esaminare i diversi contenuti ed eventualmente per modificarli in modi coerenti, per renderli più omogenei oppure più distinguibili.

Come si è detto i paragrafi non hanno titolo, ma i contenuti di molti di essi sono distinguibili a prima vista grazie a termini significativi posti al loro interno e facili da notare in quanto scritti entro appositi nidi che vengono resi in **neretto**.

Altri elementi di qualificazione di paragrafi sono quelli che chiamiamo "enunciazioni nel testo"; più esplicitamente si tratta di dare evidenza a brani che possono riguardare:

proposizioni, teoremi, lemmi, corollari, congetture, problemi, algoritmi, esempi ed esercizi

.

Ogni enunciazione inizia con una scritta in neretto che serve a qualificare a prima vista il paragrafo nel quale compare.
Le scritte che preannunciano i tipi di brani sopra elencati sono, rispettivamente:

**Prop.** , **Teorema** , **Lemma**: , **Coroll.**: , **Cong.**: , **Problema**: , **Algoritmo**: , **Esempio** ed **Eserc.** .

**A01 d.12** Tipicamente una sezione contiene da 5 a 12 paragrafi e un capitolo da 3 a 12 sezioni.

Attualmente sono resi disponibili 10 fascicoli, 185 capitoli con un numero di sezioni valutabili intorno alle 1150 e con un numero di paragrafi poco superiore a 8500.
La valutazione dei numeri delle sezioni e dei paragrafi va presentata come incerta, sia per l'esiguità di molte parti dei capitoli che vanno considerati solo bozze, sia per le instabilità dovute a necessità di completamento, di precisazione e di maggiore sintonia con altre parti, sia per il permanere di ripensamenti e incertezze.

Maggiori dettagli sulla consistenza delle ripartizioni del testo ricavabili dai numeri delle pagine sono reperibili in X02.

A proposito della opprtunità di distinguere parti stabili da parti provvisorie segnaliamo in particolare che si usano due macro con identificatori e rendering leggermente diversi (scritte, risp, `\sct{...}` e

`\sct {...}` per distinguere le sezioni del testo stabili o quasi stabili da quelle marcatamente provvisorie, incomplete o bisognose di consolidamento; una seconda coppia di macro simile alla precedente, `\prg{...}` e `\prg {...}`, viene usata per distinguere i paragrafi stabili dagli instabili.

**A01 d.13** Torniamo alla identificazione delle ripartizioni (tomi, kapitoli, sezioni e paragrafi) e di altri componenti del testosulle quali serve far agire i programmi di supporto.

La numerazione dei kapitoli presenta lacune e irregolarità in parte intenzionali e in parte casuali; esse sono tollerate, in quanto rendono un poco più facili alcuni cambiamenti prevedibili e auspicabili e grazie alla considerazione che modifiche complessive dei trigrammi dei kapitoli, al pari di quelle dei tetragrammi delle sezioni e degli exagrammi dei paragrafi, si possono effettuare senza difficoltà se limitate, oppure si possono automatizzare se numerose e costituenti sottosequenze senza interruzioni.

Nel testo compaiono numerose enunciazioni e numerose formule rilevanti delimitatate da coppie di dollari; inoltre si prevede il repristino dei grafici nelle pagine e/o almeno la introduzione di numerosi rinvii a grafici predisposti in pagine Web collegate.

Anche a queste componenti vengono assegnati identificatori che si vogliono univoci e che per questo devono essere tenuti sotto controllo per evitare che modifiche consistenti del testo-A comportino sovrapposizioni e conseguenti ambiguità o altri tipi di confusioni.

Questi identificatori di componenti di forte rilievo sono costituiti dagli exagrammi dei paragrafi che le contengono seguiti da cifre, da lettere o da qualche altro segno identificativo prevalentemente tra parentesi tonde.
Le loro etichette servono per consentire richiami come B22a08(1), B22a08(2) e B22a08(3) .

Come si è detto si chiede che gli identificatori delle ripartizioni e dei componenti di forte richiamo siano univoci: si ritiene poco pratico presentare con la stessa etichetta un lemma e un teorema, oppure una congettura e un esempio, mentre il controllo automatico della univocità è facilmente attuabile.

**A01 d.14** Ogni kapitolo del testo-A è registrato in un file `.tex` per poter essere analizzato, rimaneggiato e costruito più o meno integralmente con programmi relativamente semplici.

Molti kapitoli contenevano figure ciascuna fornita da un file `.tex` subordinato scritto nel linguaggio PicTex, una semplice estensione di Plain TEX che richiede indicazioni dettagliate e non prevede interventi di grafica interattiva.

In genere ciascuno di questi files era identificato da una stringa che inizia con una "p" e prosegue con l'exagramma del paragrafo del quale fa parte; si hanno ad esempio i files pB24e13 e pD26i02 richiamati, risp., in [B13e13] e in [D26i02].
Nel caso di più figure in un paragrafo si avevano identificatori di file subordinato come pB24f02, pB24f02B, pD35g02, pD35g02B e pD35g02C.

Purtroppo qualche modifica negli strumenti software da me usati ha reso attualmente inutilizzabili le molte centinaia di figure sopra accennate portando gravi mancanze a molte pagine del testo.
È fortemente auspicata la possibilità di recuperare le figure ora inutilizzabili e di aggiungerne molte altre al fine di mettere a disposizione sostegni visivi a un buon numero di definizioni, di sviluppi deduttivi, di osservazioni orientative e di processi costruttivi.

**A01 d.15** Il principale complesso di informazioni che serve ad orientarsi sui contenuti della *esposizione* è fornito dal fascicolo X01 dedicato all'indice dei kapitoli e delle sezioni attraverso i rispettivi titoli.
Per ciascuna sezione viene indicata la pagina (nuova) nella quale inizia (con poche eccezioni nel tomo W) e per quasi tutti i kapitoli vengono segnalati i numeri delle pagine nelle quali le sue sezioni iniziano, nonché il numero complessivo delle pagine.

Ricordiamo che indicazioni più sintetiche sono contenute in X02.
Questo fascicolo inizia con un elenco riguardante i kapitoli presentati seguendo l'ordine alfabetico dei relativi trigrammi e ripartiti per tomi; di ogni kapitolo vengono presentati trigramma, titolo e numero delle pagine.
Segue una tabella che a ciascuno dei tomi associa i numeri dei capitoli, delle sezioni e dei paragrafi che contiene.

Sono poi resi disponibili altri indici complessivi dedicati, risp., a:
- elenco KWIC dei titoli di capitoli e sezioni – [X10];
- elenco alfabetico dei termini presentati **in evidenza** nei nidi dn, nidi della forma `{\dn` *termine* –[X11],
- elenchi delle notazioni utilizzate – [X12],
- personalità citate o segnalate – [X20],
- pubblicazioni consultate,
- bibliografia e sitografia giudicate meritevoli di segnalazione – [X21],
- glossario in inglese e italian delle nozioni di maggiore importanza – [X24],
- lessico in inglese e italiano delle parole e delle brevi locuzioni considerate più significative per i vari argomenti toccati – [X25],
- elenchi di abbreviazioni, specificatori e variatori dei termini – [X14].

**A01 d.16** Nel testo sono inseriti numerosi (quasi 3000) rinvii interni riguardanti altri paragrafi, altre sezioni o altri capitoli individuati mediante i rispettivi multigrammi (trigrammi, tetragrammi ed exagrammi).
In questi rinvii risulta ben chiara l'utilità delle etichette delle ripartizioni del testo; esse sono un poco elaborate, ma costituiscono coordinate univoche facilmente utilizzabili e abbastanza facilmente controllabili e riadattabili.

Conviene annche segnalare che quando si sono effettuate modifiche presenti in più paragrafi e a maggior ragione in più kapitoli, si sono potute riadattare le occorrenze delle etichette nel testo e negli indici con manovre semiautomatiche abbastanza agevoli.
Per queste modifiche sono previste procedure automatiche di modifica e di controllo che dovrebbero agevolare notevolmente l'evoluzione di esposizioni del genere STA.

Negli indici delle persone e delle pubblicazioni sono presenti varie centinaia di rinvii a pagine Web.

**A01 d.17** L'impatto che possono avere le descrizioni e le illustrazioni di procedimenti costruttivi e dimostrativi conduce a preferire in molti punti dell'*esposizione* argomentazioni riguardanti sequenze, matrici e digrafi di flusso piuttosto che insiemi e funzioni, entità che sono invece preferibili negli enunciati di portata generale, tipici delle presentazioni astratte della matematica ma meno direttamente traducibili in procedimenti effettivi.

Per esempio i coefficienti binomiali vengono introdotti come numeri di cammini visivamente evidenti e solo successivamente sono riconosciuti come cardinali di sottoinsiemi.

Tuttavia si riconosce importante dare rilievo anche alle svariate circostanze nelle quali una astrazione porta a rilevanti risparmi per una catena deduttiva o per l'organizzazione espositiva di un argomento con più livelli di generalità.

**A01 d.18** Nel testo, come si è accennato, compaiono vari richiami a siti Web nei quali sono reperibili utili nozioni matematiche, tecnico-scientifiche o storiche e si vorrebbe che questi riferimenti potessero crescere sensibilmente.

Tra i siti richiamati segnaliamo:

- enciclopedia *Wolfram MathWorld* [`http://http://mathworld.wolfram.com/`]
- *Encyclopedia of Mathematics* di Springer ed EMS
  [`http://https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Main Page`]
- *MacTutor History of Mathematics archive*
  [`http://http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`]
- *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, OEIS
  [`http://http://www.research.att.com/~njas/sequences/`
- enciclopedia aperta Wikipedia nelle sue versioni in diverse lingue
  primariamente quella in inglese [`http://http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page`],
  secondariamente nella versione in italiano
  [`http://https://it.wikipedia.org/wiki/Pagina principale`]
  presenti anche alcuni rinvii a quelle in francese e in tedesco;
  Stanford Encyclopedy of Philosophy `http://https://plato.stanford.edu`.

**A01 d.19** Si considera particolarmente utile Wikipedia, a causa delle sue caratteristiche di sistema di contenuti a un buon livello qualitativo (almeno per quanto riguarda gli argomenti scientifici, tecnologici e più generalmente culturali), della sua efficiente organizzazione reticolare, della suo continuo aggiornamento e dal fatto che si è imposta come riferimento canonico per molte aree conoscitive.

Per molti argomenti esposti Wikipedia può costituire un interessante ampliamento dei contenuti, sia interni che esterni alla matematica, soprattutto per la mole e l'aggiornamento dei contenuti raggiunta per la versione in inglese (oltre 7 milioni di voci) e, in misura più ridotta (intorno ai 2 milioni) per la italiana e per le altre lingue maggiori (francese, tedesco, svedese, neerlandese, russo, spagnolo, cebuano, ...).

Va inoltre segnalata la possibilità che ha ogni autore di materiali divulgativi seri di intervenire sugli articoli di Wikipedia perché possano costituire migliori riferimenti per tanti campi conoscitivi.

Wikipedia risulta utile in particolare per l'ampia disponibilità di formule, figure, biografie, riferimenti bibliografici, citazioni sitografiche e fonti testuali immediatamente fruibili.

Sono di notevole interesse anche le animazioni concernenti risultati matematici, anche se tuttora non numerose quanto sarebbe auspicabile.

Infine va segnalata la ricchezza dei contenuti e la tempestività degli aggiornamenti riguardanti la ICT, la Information and Communication Technology, e i risultati scientifici e tecnologici più recenti, in particolare nella fisica fondamentale, nella intelligenza artificiale e nella biologia molecolare.

Nel seguito richiameremo un articolo della versione in italiano ponendone il titolo in un nido della forma `\Yi{`it titolo`}` , richiameremo un articolo della versione in inglese ponendone il titolo in un nido della forma `\Yi{`it title`}` e analogamente per e versioni in francese e in tedesco.

**A01 d.20** Nella *esposizione* sono presentate varie strutture formali definite mediante sistemi di assiomi elaborati, costituiti da non poche richieste, spesso nella forma delle equazioni o delle disequzioni.

Dato che queste richieste in genere vengono richiamate più volte nelle analisi delle strutture in causa, ciascuno degli assiomi viene caratterizzato da etichette aventi forme esemplificate dalle seguenti

[Rng 1], [Rng 2], ... , [Rng 7], [Rngu 8], [MtdI 3a] .

Talora vengono richiamati più assiomi dello stesso sistema: un esempio di questo tipo di richiami è [MtdR1a,2a,3a].

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php