

Materiale per approcci costruttivi alla matematica

020:0.1 Queste pagine costituiscono un lieve ampliamento del mio intervento al XIX Congresso UMI 2011 (Bologna, 12-17 settembre 2011) tenuto giovedì 15 settembre 2011 nell'ambito della Sezione 23, dedicata alla didattica della matematica.

020:a. Introduzione

La pagina <http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto> rende accessibile un testo in progressivo sviluppo rivolto particolarmente a chi affronta la matematica mosso da esigenze computazionali quindi privilegiando i suoi aspetti costruttivi.

Il lavoro è motivato dalla possibilità di crescita dell'interesse per la matematica applicabile, anche al di fuori delle sedi tradizionali. Istituzionali di insegnamento. Chi è impegnato in calcoli effettivi da un lato si occupa di processi finiti che pongono problemi di adeguatezza applicativa (precisione, efficienza, versatilità, adattabilità, ...) e si deve servire di vari strumenti informatici (linguaggi di programmazione e simulazione, basi dati, canali su Web, ...); dall'altro deve essere in grado di muoversi tra svariati metodi matematici, che raramente possono evitare di fare riferimento ad entità infinite e spesso ricorrono all'astrazione. Ora è mia sensazione che per queste persone i materiali disponibili sul versante matematico siano piuttosto limitati e molti collegamenti fra attività di calcolo effettivo e metodi generali e astratti non siano sufficientemente puntualizzati.

Nel seguito espongo le modalità di presentazione del materiale e successivamente segnalo alcune caratteristiche dei contenuti. Per questi occorre segnalare che sono previste quattro parti dedicate, rispettivamente, alle nozioni considerate basilari (attualmente la più fruibile), ad una introduzione dell'analisi infinitesimale, ad una introduzione della geometria, ad alcuni argomenti di matematica discreta ed a teorie di riferimento (geometria assoluta, teoria degli insiemi, topologia, logica matematica, algebra, algebre di Kleene, matroidi, ...). Per i contenuti considererò soprattutto la parte delle nozioni di base, attualmente la meno meno lacunosa e con qualche elemento di originalità.

020:b. Modalità di presentazione dei materiali

Per rendere disponibili i materiali accennati si ritiene decisamente preferibile servirsi dell'ICT, cioè di supporti digitali e di canali Web. Questi media innanzi tutto presentano vantaggi fisici ormai ben riconosciuti:

- mancanza di sostanziali limitazioni per l'estensione ed i tempi di aggiornamento che si incontrano invece con i testi distribuiti su carta;
- accessibilità rapida e agevole ormai da parte di "tutti" ed "ovunque";
- strumenti per controllare l'omogeneità e la coerenza dei testi e per facilitare costruzione e mantenimento di indici, essenziali per ogni testo esteso;

- possibilità di contestualizzazione, grazie al fatto che ogni pagina Web è collegabile a risorse che sono accessibili in tempi ben inferiori a quelli per i documenti stampati.
- perseguibile versatilità e multimedialità dei testi resa opportuna dalla molteplicità dei problemi da trattare.

Tutti questi vantaggi rendono Internet preferibile per la gran parte delle esigenze di documentazione. Inoltre nell'ambito dell'ICT continuano ad aprirsi interessanti prospettive, ad esempio sulle prestazioni e sui ruoli dei dispositivi mobili (con funzioni di e-books).

Evidentemente quando ci si rivolge a pagine Web si devono effettuare scelte oculate; oggi comunque si può contare su buone pagine curate da specialisti e dotate di credenziali e su siti sviluppati nell'ambito di accurate iniziative per lo sviluppo condiviso di contenuti aperti. La contestualizzazione orientata al Web è particolarmente promettente per i collegamenti fra matematica ed applicazioni.

Nell'esposizione che cerco di portare avanti sono presenti in particolare collegamenti con [it.wikipedia](#) e con [en.wikipedia](#), tenendo conto della diffusa abitudine alla loro consultazione e della possibilità di proporre ampliamenti e sintonizzazioni per le loro pagine.

Si utilizza il canale Web anche in quanto si rinuncia ad ogni forma di commercializzazione, sia perché i materiali sono rivolti a destinatari mal definiti come target commerciale, sia in quanto ci si riserva di presentare anche parti incomplete che sarebbero commercialmente inaccettabili.

Una prospettiva rilevante del canale Web sta nella sua possibilità di rendere disponibili materiali di svariati formati: si pensa soprattutto a presentazioni dinamiche di processi di interesse matematico e applicativo, attualmente non molto frequenti ma per le quali è auspicabile una crescita regolare.

Inoltre il Web consente un filo diretto per critiche, segnalazioni di difetti e contributi nello spirito del cosiddetto Web 2.0.

Attualmente sono disponibili documenti in formato PDF generati da files Plain TeX; questo linguaggio viene preferito a LaTeX sia per le abitudini e gli attrezzi dell'autore, sia in quanto LaTeX viene giudicato parecchio verboso. I testi sorgente potranno essere resi disponibili.

Queste disponibilità sono collegate al fatto che come pensionato posso permettermi di rinunciare a certi atteggiamenti individualistici. Questo modo di fare non lo si può certo imporre, ma va osservato che le persone che si trovano in situazioni analoghe alla mia non sono pochissime, stante l'elevato numero di docenti e ricercatori che sono stati reclutati negli anni dal 1960 al 1980.

I documenti resi disponibili, come accennato, non pretendono affatto di essere definitivi: le lacune sono ancora molte, ma varie parti forse possono essere di qualche utilità anche nello stato attuale. Viceversa si considera programmaticamente ragionevole lasciare permanentemente ampliabili varie componenti dell'esposizione: esempi, figure, riferimenti, segnalazioni di applicazioni, esercizi. Inoltre si sostiene la riutilizzabilità dei materiali su Web anche per contrastare l'obsolescenza a medio termine che tocca alla maggior parte dei testi su carta.

Nell'esposizione sono usati termini e simboli poco usuali, ma ritenuti utili per varie precisazioni; essi si vogliono esaurientemente definiti e facilmente reperibili attraverso indici estesi da gestire con strumenti di text processing. Sono disponibili un indice dei titoli di capitoli e sezioni e un indice dei simboli; si prepara un indice dei termini.

020:c. Alcuni atteggiamenti per le scelte dei contenuti

Come accennato si attribuisce importanza primaria ai calcoli che consentono di risolvere problemi concreti. In questa posizione si può vedere una contrapposizione a quella che vede il calcolo effettivo, in particolare quello che si serve di strumenti digitali, in posizione ancillare rispetto alla esposizione logico-deduttiva della matematica. Si sostiene anche l'opportunità di riferire risultati e sviluppi computazionali ad attività svolte da esecutori sia umani che artificiali. Inoltre si dà rilievo ai problemi posti dalla organizzazione sistematica delle conoscenze che servono ai calcoli, dalle più astratte alle più tecnologiche.

Date queste premesse, nella prima parte dell'esposizione dedicata delle nozioni di base si guarda con cautela all'impostazione assiomatica della matematica. Si ritiene che per il lettore che si privilegia le teorie assiomatiche siano meno facilmente motivabili degli algoritmi in grado di contribuire ad affrontare problemi applicativi. Si assume quindi un atteggiamento attentamente costruttivo, privilegiando le definizioni costruttive e curando le motivazioni.

Si dà un certo peso anche alle implementazioni degli algoritmi ed abbastanza presto si introduce un linguaggio di programmazione procedurale, miniC, semplificazione del linguaggio C con alcune facilitazioni del C++.

Ogni definizione viene motivata dalla sua utilità cercando di collocarla in una prospettiva di presentazione sistematica delle conoscenze utili, direttamente o meno, alle attività computazionali. Si presta quindi attenzione alle istanze dell'utilitarismo e del consequenzialismo, forse anche a scapito di alcune istanze estetiche.

L'avvio è finitistico, nel rispetto del fatto che i calcoli si effettuano mediante processi finiti. Inoltre si trattano con una certa ampiezza insiemi finiti e relazioni finite, sia per la maneggevolezza degli esempi che forniscono, sia per sostenere una buona visione matematica (prevalentemente geometrica) alle attività di programmazione, in particolare alle iniziali.

Si inizia parlando delle stringhe di caratteri come come oggetti delle prime operazioni e come elementi portanti delle comunicazioni che intercorrono fra esecutori umani e artificiali, (in particolare nell'ambito della programmazione procedurale e simbolico-grafico-numerica).

Gli interi naturali sono definiti attraverso le loro notazioni unadiche come lunghezze di stringhe. La giustapposizione delle stringhe conduce alla somma degli interi naturali. Le coppie di stringhe conducono al prodotto cartesiano e quindi al prodotto degli interi.

Le sequenze di stringhe forniscono le rappresentazioni degli insiemi espliciti. Altre stringhe opportunamente articolate consentono di gestire:

- notazioni posizionali, funzioni finite, matrici;
- più in generale strutture, loro elementi e loro specie;
- algoritmi e programmi.

Si insiste sui digrafi, soprattutto in quanto servono a rappresentare schemi di processi e di dimostrazioni. Più in generale si dà peso alla combinatorica per la sua propedeuticità verso algoritmi, funzioni speciali, calcolo simbolico, e per i suoi interventi a sostegno dello studio di varie strutture di algebra, geometria, analisi,

Dopo gli insiemi finiti si introducono gli insiemi numerabili generabili da macchine con risorse illimitate. La nozione di insieme infinito discreto si collega alla opportunità espositiva di presupporre la possibilità di disporre risorse illimitate.

Le nozioni geometriche sono introdotte in ambienti "poveri" come il piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; esse vengono considerate utili per l'introduzione alla programmazione. Per gli spazi vettoriali e l'algebra lineare si utilizzano le notazioni di Dirac, considerate in grado di rendere chiare varie formule.

Un'attenzione particolare viene data alle simmetrie e quindi ai gruppi di simmetria, insistendo sui vantaggi forniti dal riconoscimento delle simmetrie, soprattutto in termini di economia di pensiero, di concisione espositiva e di versatilità degli algoritmi.

I numeri reali e le nozioni generali di insieme e di infinito sono definite assiomaticamente e sono tenute distinte dalle entità definibili costruttivamente.

Le varie parti di questo testo sono accessibili in <http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto>