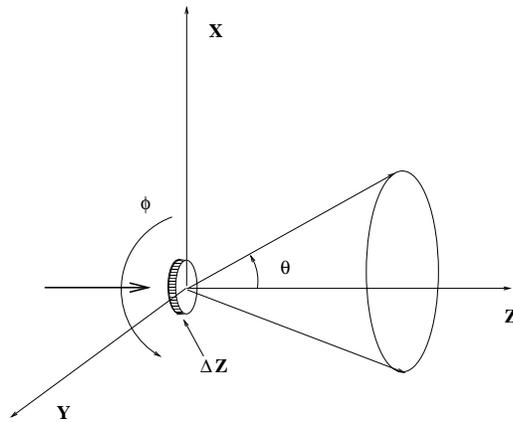


# 1. Calcolo delle direzioni nei problemi diffusivi

Come abbiamo spiegato nel par.8.2, l'interazione tra una particella incidente (proiettile) ed il mezzo attraversato viene in generale trattata come un processo di urto.

Quasi sempre la geometria di tale processo è indipendente dal tipo specifico di interazione che si considera: la deviazione della particella per urto con uno o più elementi del mezzo è rappresentabile come un angolo polare  $\vartheta$ , se la particella è considerata incidere lungo l'asse  $z$  (vedere figura 1.1).



**Fig. 1.1.** “cono” di diffusione di una particella, diretta inizialmente come  $z$ , che attraversa uno spessore  $\Delta z$  di un mezzo interagente.

Le teorie d'urto che trattano problemi diffusivi (diffusione nucleare elastica ed anelastica, diffusione multipla coulombiana, urto elastico tra sfere dure, ecc.) forniscono la densità di probabilità  $f(\vartheta, \Delta z)$  di una deviazione  $\vartheta$  dovuta all'attraversamento di uno spessore  $\Delta z$ , mentre l'angolo  $\varphi$  si può ritenere distribuito tra 0 e  $2\pi$  con probabilità costante. Una volta ricavate queste grandezze occorre poi calcolare nella simulazione la nuova direzione di volo del proiettile dopo l'urto.

Se da un lato vediamo dalla figura 1.1 che è conveniente trattare l'urto in un sistema con l'asse polare  $z$  nella direzione di volo della particella,

dall'altro sappiamo che le trasformazioni tra terne di riferimento sono particolarmente semplici se si utilizzano i coseni direttori. Infatti, dati due sistemi di riferimento cartesiani rispettivamente di versori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , e  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$ , le componenti di un vettore  $\mathbf{v}'$  nel sistema primato sono date dalla ben nota trasformazione lineare (si veda un qualunque buon testo di Fisica I o di Meccanica Razionale):

$$\begin{vmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} & \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y} & \mathbf{x}' \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{y}' \cdot \mathbf{x} & \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y} & \mathbf{y}' \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{z}' \cdot \mathbf{x} & \mathbf{z}' \cdot \mathbf{y} & \mathbf{z}' \cdot \mathbf{z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

I prodotti scalari  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{z}$  sono i coseni direttori dell'asse  $x'$  nella terna  $(x, y, z)$  e così via. La trasformazione inversa si ottiene scambiando le quantità primato con quelle non primato:

$$\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' & \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}' \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}' & \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}' \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}' & \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

da cui si deduce che, data la commutabilità del prodotto scalare, per invertire la trasformazione basta trasporre la matrice dei coseni direttori.

Dopo queste premesse affrontiamo il nostro problema: definiamo (vedere figura 1.2) come  $(x', y', z')$  il sistema “naturale” con l'asse  $z'$  diretto come la direzione di volo del proiettile prima della interazione in A e come  $(x, y, z)$  il sistema di riferimento principale in cui avviene il tracciamento.

Noti i coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$  del proiettile prima dell'urto in A, noi dobbiamo trovare i nuovi coseni direttori  $\alpha', \beta', \gamma'$  dopo l'urto, riferendoci sempre alla terna principale  $(x, y, z)$ , conoscendo gli angoli di deviazione  $(\varphi, \vartheta)$  della particella nel suo sistema “naturale”  $(x', y', z')$ . Si noti che tutta la trattazione è invariante per traslazioni, così che l'origine dei sistemi di riferimento non è importante.

Siano ora  $(\varphi_0, \vartheta_0)$  gli angoli azimutale e polare dell'asse  $z'$  nel sistema di riferimento principale. Attenzione: questi angoli non sono quelli indicati in figura come  $(\varphi, \vartheta)$ , che rappresentano la nuova direzione del proiettile e che verranno introdotti più avanti.

I coseni direttori dell'asse  $z'$  rispetto a  $(x, y, z)$  sono allora:

$$\mathbf{z}' = (\text{sen } \vartheta_0 \cos \varphi_0, \text{sen } \vartheta_0 \text{sen } \varphi_0, \cos \vartheta_0) = (\alpha, \beta, \gamma) . \quad (1.3)$$

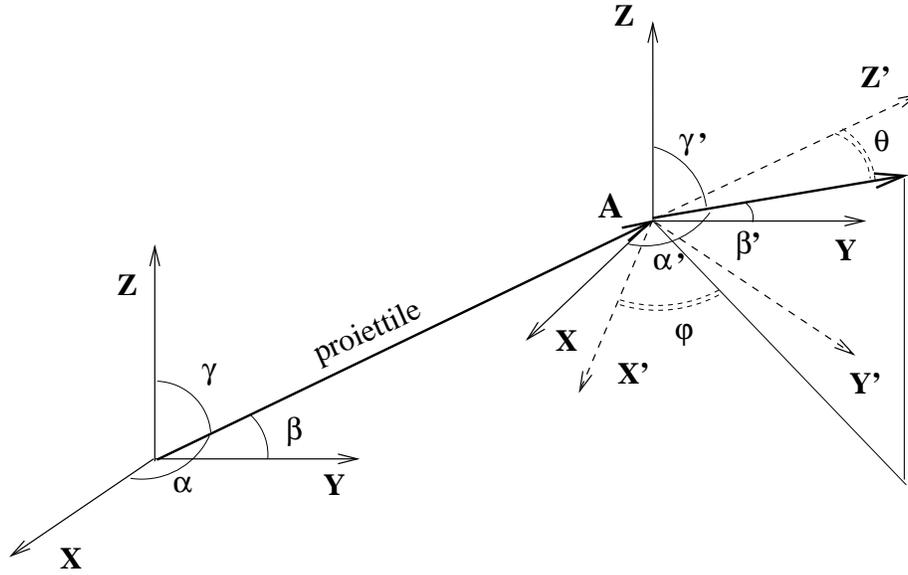
L'asse  $x'$ , giacendo nel piano  $xy$ , ha coseno direttore nullo rispetto all'asse  $z$ , quindi:

$$\mathbf{x}' = (a, b, 0) \quad (1.4)$$

dove  $a$  e  $b$  sono due parametri che dobbiamo determinare. Dalla condizione:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{z}' = a \text{sen } \vartheta_0 \cos \varphi_0 + b \text{sen } \vartheta_0 \text{sen } \varphi_0 = 0 \quad (1.5)$$

si ottiene:



**Fig. 1.2.**  $x'y'z'$  è il sistema di riferimento che ha come asse  $z'$  la direzione precedente di volo;  $x'$  giace nel piano  $xy$  della terna principale  $xyz$  applicata in A, dove il proiettile interagisce ed assume una nuova direzione  $\vartheta, \varphi$  nel sistema  $x'y'z'$

$$a = \pm \operatorname{sen} \varphi_0 \quad ; \quad b = \mp \operatorname{cos} \varphi_0. \quad (1.6)$$

La scelta dei segni è arbitraria; noi scegliamo  $a = \operatorname{sen} \varphi_0$ ,  $b = -\operatorname{cos} \varphi_0$ , così che, quando  $\varphi_0 = 0$ ,  $x' = (0, -1, 0)$ , cioè il versore  $x'$  coincide con il versore  $-y$  (osservate la figura 1.2 e meditate per un attimo ...). Abbiamo quindi:

$$x' = (\operatorname{sen} \varphi_0, -\operatorname{cos} \varphi_0, 0) \quad (1.7)$$

I coseni direttori dell'asse  $y'$  si ottengono invece dalle condizioni  $x' \cdot y' = 0$ ,  $z' \cdot y' = 0$  e  $x' \times y' = z'$ . Si ricava facilmente:

$$y' = (\operatorname{cos} \vartheta_0 \operatorname{cos} \varphi_0, \operatorname{cos} \vartheta_0 \operatorname{sen} \varphi_0, -\operatorname{sen} \vartheta_0) \quad (1.8)$$

Le relazioni (1.3), (1.7) e (1.8) vanno ora espresse in funzione dei coseni direttori  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Dalla (1.3) si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{sen} \vartheta_0 \operatorname{cos} \varphi_0 \\ \beta = \operatorname{sen} \vartheta_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \\ \gamma = \operatorname{cos} \vartheta_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Da cui, se  $\gamma \neq 0$ , cioè se  $z'$  non coincide con  $z$  (ponendo  $1/t = \operatorname{sen} \vartheta_0 = \sqrt{1 - \gamma^2}$ ):

$$\begin{cases} \operatorname{cos} \varphi_0 = \alpha t \\ \operatorname{sen} \varphi_0 = \beta t \end{cases} \quad (1.10)$$

Allora, dalle (1.4) e (1.8):

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = (\beta t, -\alpha t, 0) \\ \mathbf{y}' = (\gamma \alpha t, \gamma \beta t, -\sqrt{1-\gamma^2}) \\ \mathbf{z}' = (\alpha, \beta, \gamma) . \end{cases} \quad (1.11)$$

Queste sono le relazioni chiave di cui abbiamo bisogno poiché ci danno i coseni direttori di  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$  rispetto alla terna principale  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

Consideriamo ora finalmente la deviazione per urto  $(\vartheta, \varphi)$  del proiettile riferita alla terna  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ ; dato che  $(\text{sen } \vartheta \cos \varphi, \text{sen } \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$  è il versore relativo a questa deviazione, dalla (1.1) otteniamo i nuovi coseni direttori  $(\alpha', \beta', \gamma')$  riferiti a  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ :

$$\begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta t & \gamma \alpha t & \alpha \\ -\alpha t & \gamma \beta t & \beta \\ 0 & -\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{sen } \vartheta \cos \varphi \\ \text{sen } \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

A questo punto è facile ricavare le formule finali che risolvono il nostro problema che è, lo ripetiamo, quello di trovare i nuovi coseni direttori  $(\alpha', \beta', \gamma')$  riferiti a  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  conoscendo i coseni direttori iniziali  $(\alpha, \beta, \gamma)$  in  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  e la deviazione per urto  $(\vartheta, \varphi)$  in  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ :

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \cos \vartheta + t \text{sen } \vartheta [\beta \cos \varphi + \gamma \alpha \sin \varphi] \\ \beta' = \beta \cos \vartheta + t \text{sen } \vartheta [\gamma \beta \sin \varphi - \alpha \cos \varphi] \\ \gamma' = \gamma \cos \vartheta - \sqrt{1-\gamma^2} \text{sen } \vartheta \sin \varphi \end{cases} \quad (1.13)$$

con  $t = 1/\text{sen } \vartheta_0 = 1/\sqrt{1-\gamma^2}$ .

Il caso  $\gamma = \pm 1$ , in cui le formule precedenti non sono valide, va trattato a parte poiché in questo caso gli assi  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{z}'$  hanno la stessa direzione; qui possiamo scegliere, invece delle (1.11), le condizioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = (\gamma, 0, 0) \\ \mathbf{y}' = (0, 1, 0) \\ \mathbf{z}' = (0, 0, \gamma) \end{cases} \quad (1.14)$$

che assicurano una terna destrorsa nei due casi  $\gamma = \pm 1$ . La (1.12) diventa:

$$\begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{sen } \vartheta \cos \varphi \\ \text{sen } \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

da cui:

$$\begin{cases} \alpha' = \gamma \text{sen } \vartheta \cos \varphi \\ \beta' = \text{sen } \vartheta \sin \varphi \\ \gamma' = \gamma \cos \vartheta \quad ; \quad \gamma = \pm 1 . \end{cases} \quad (1.16)$$