Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

a) scegliendo a caso 20 neonati, quante sono le sequenze possibili di M e F?

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

a) scegliendo **a caso** 20 neonati, quante sono le sequenze possibili di M e F?

Per riempire la sequenza possiamo immaginare di fare estrazioni **con reimmissione** da un'urna con 1M e 1F:

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

a) scegliendo **a caso** 20 neonati, quante sono le sequenze possibili di M e F?

Per riempire la sequenza possiamo immaginare di fare estrazioni **con reimmissione** da un'urna con 1M e 1F:

$\Longrightarrow$ **estrazioni indipendenti**:

$$2 \times 2 \times 2 \times \cdots 2 \times 2 = 2^{20} = 1\,048\,576$$

Se supponiamo $\#M = \#F \iff P(M) = P(F)$, la probabilità di una qualunque sequenza è:

$$\frac{1}{1\,048\,576} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

b) In quanti modi 10M e 10F possono essere allineati?

Cioè, quanti sono i modi in cui posso mettere 10 caselle rosa (10F) in un totale di 20 caselle?

$$\binom{20}{10} = \frac{20\times 19\times 18\times 17\times 16\times 15\times 14\times 13\times 12\times 11}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$$

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

c) Qual è la probabilità di ottenere 10M e 10F su 20 neonati?

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

c) Qual è la probabilità di ottenere 10M e 10F su 20 neonati?

$$P(M) = P(F) \Rightarrow$$

$$\frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}$$

tutti i modi con cui posso riempire la riga sopra di azzurro e rosa, come da punto a).

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

c) Qual è la probabilità di ottenere 10M e 10F su 20 neonati?

$$\frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}$$

tutti i modi in cui posso mettere esattamente 10 caselle rosa, come da b)

tutti i modi con cui posso riempire la riga sopra di azzurro e rosa, come da punto a).

$$= \binom{20}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0.176$$

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

d) Sulla base di questi risultati, siamo d’accordo col ricercatore che 10M e 10F è normale? No!

$$\boldsymbol{P(M) = P(F) = 0.5}$$

$$P(10F\ tra\ 20\ bimbi) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0.176$$

Su 100 campioni di 20 bambini mi aspetto che la combinazione 10F+10M si abbia circa 18 volte, non *ogni volta*!

Es. 11 pg 115

Un ricercatore di genetica vi ha insospettito: ogni volta che sceglie a caso 20 bambini, il campione da lui scelto ha 10 F e 10M. Secondo lui è normale.

d) Sulla base di questi risultati, siamo d'accordo col ricercatore che 10M e 10F è normale? **No!**

$$\boldsymbol{P(M) = P(F) = 0.5}$$

$$P(10F\ tra\ 20\ bimbi) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \binom{20}{10} \times \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}^{10F} \times \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}^{10M} = 0.176$$

ricordiamocelo dopo aver introdotto la parola "variabile Binomiale" !

Dipendenza ed indipendenza

Estrazioni
senza reimmissione

DIPENDENZA

INDIPENDENZA

Estrazioni
con reimmissione
o **lancio di** (dadi/monete)

Dipendenza ed indipendenza

Estrazioni
senza reimmissione

DIPENDENZA

estendiamo!

INDIPENDENZA

Estrazioni
con reimmissione
o **lancio di** (dadi/monete)

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	**Test negativo (no gravidanza)**
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. che **il test sia positivo**?

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. che **il test sia positivo**?

$$\frac{80+3}{99} = 0.838$$

ogni donna delle 99 ha la stessa probabilità di essere estratta di qualunque altra

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	**Test negativo (no gravidanza)**
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. che **sia incinta**?

$$\frac{\mathbf{80+5}}{99} = 0.858$$

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. che **sia incinta e che il test sia positivo**?

$$\frac{\mathbf{80}}{99} = 0.808$$

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{83}} = 0.964$$

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta** **sapendo** **che il test è positivo**?

$$\frac{80}{83} = \mathbf{0.964} > \mathbf{0.858} = \frac{80}{99}$$ prob. che sia incinta

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	**Test negativo (no gravidanza)**
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

$$\frac{80}{83} = 0.964 > 0.858 = \frac{80}{99}$$ (prob. che sia incinta)

prob. ***a posteriori***

prob. ***a priori***

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)
Incinta	80	5
Non incinta	3	11

Campione di 99 donne. Scegliendo a caso una donna nel campione, qual è la prob. **che il test sia positivo sapendo che è incinta**?

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{85}} = 0.941 > 0.838$$ (prob. che test +)

prob. ***a posteriori***

prob. ***a priori***

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)	Marginale gravidanza
Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
Marginale test	**83**	16	*99*

Prob. che donna sia incinta

$$\frac{\mathbf{80+5}}{99} = 0.858$$

prob. ***a priori***

Dipendenza ed indipendenza

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)	Marginale gravidanza
Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
Marginale test	**83**	16	99

Prob. che donna sia incinta sapendo che il test è positivo

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{83}} = 0.964 \neq 0.858$$

prob. ***a posteriori***

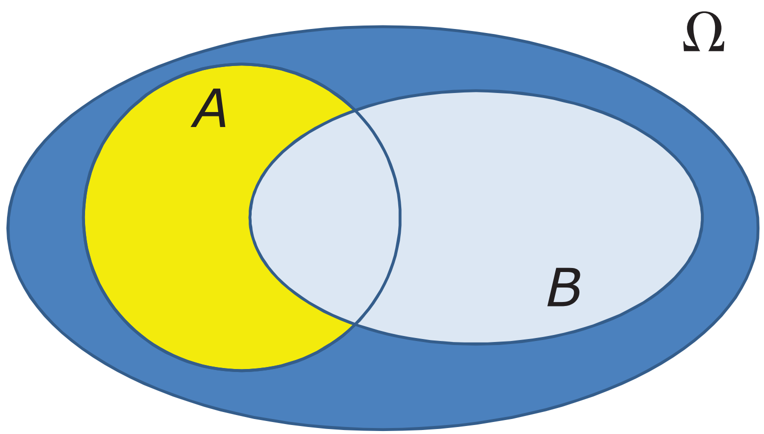
Prob. che donna sia incinta

$$\frac{\mathbf{80+5}}{99} = 0.858$$

prob. ***a priori***

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento "collegato", P(B) ≠ 0

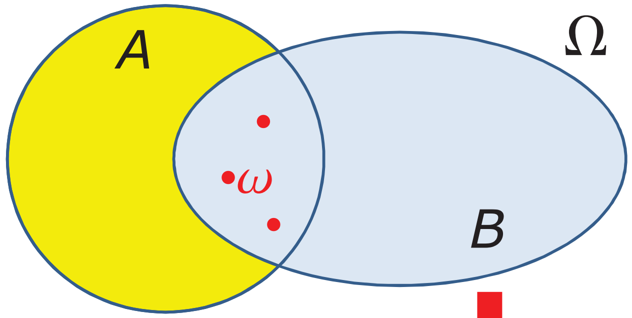


Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento "collegato", P(B) ≠ 0



B=spazio degli esiti

Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{80}{83}$$

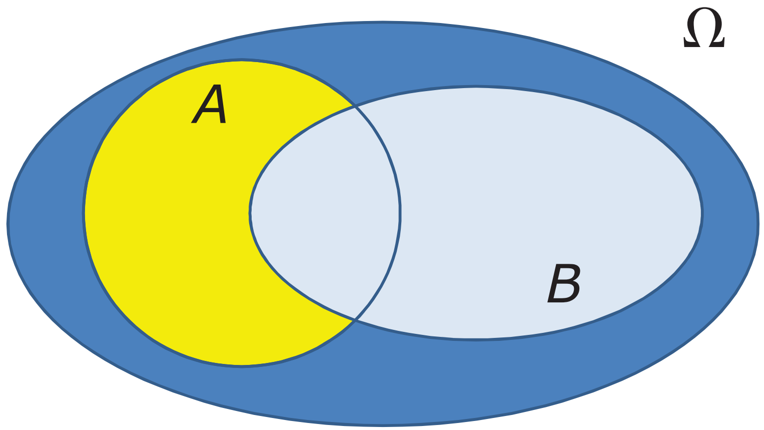
B

A

	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)	
Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
	83	16	99

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento "collegato", $P(B) \neq 0$



Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) **indipendenti** se

$$P(A|B) = P(A)$$

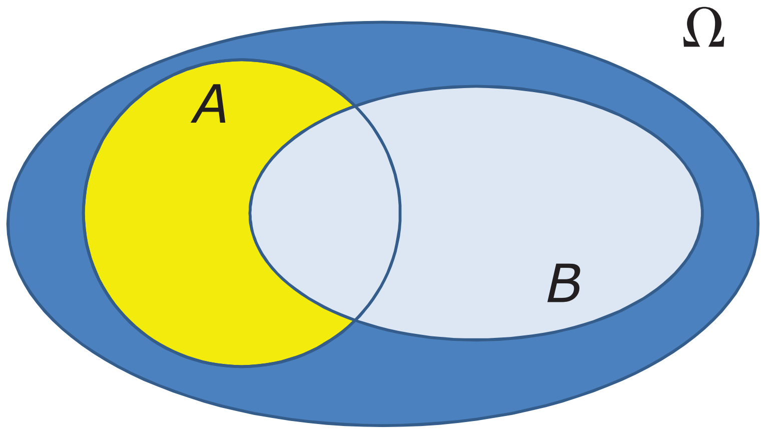
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

P(A|B) non coincide con P(B|A)

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento "collegato", $P(B) \neq 0$



Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

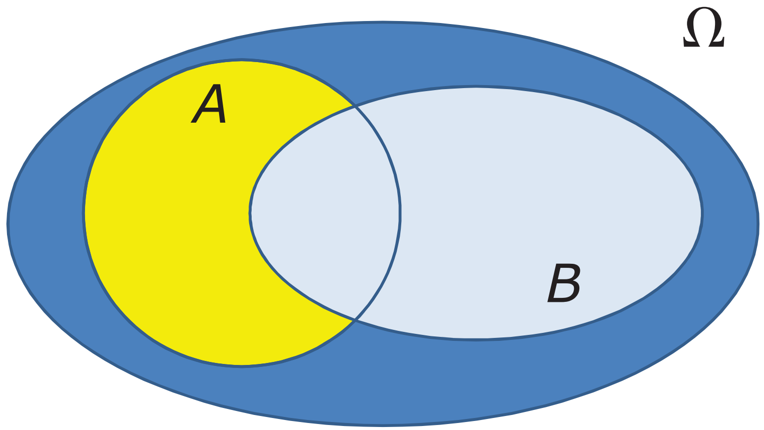
Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) **indipendenti** se

$$P(A|B) = P(A)$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento “collegato”, P(B) ≠ 0



Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) **indipendenti** se

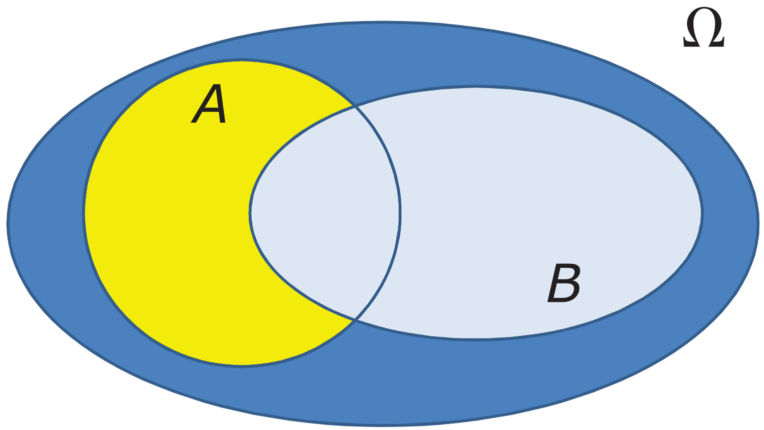
$$P(A|B) = P(A)$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B)P(B)}$$

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento "collegato", $P(B) \neq 0$



Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) **indipendenti** se

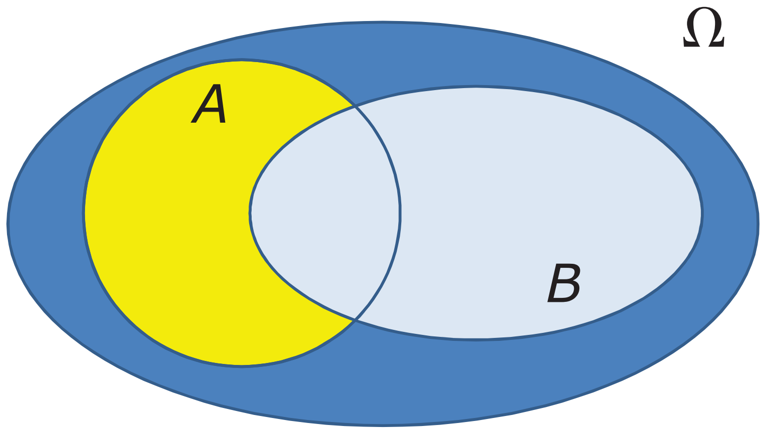
$$P(A|B) = P(A)$$

B

A	Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)	Marginale gravidanza
Incinta	72	18	**90**
Non incinta	5	2	**10**
Marginale test	**80**	**20**	***100***

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento “collegato”, $P(B) \neq 0$



Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) **indipendenti** se

$$P(A|B) = \frac{72}{80} = 0.9$$

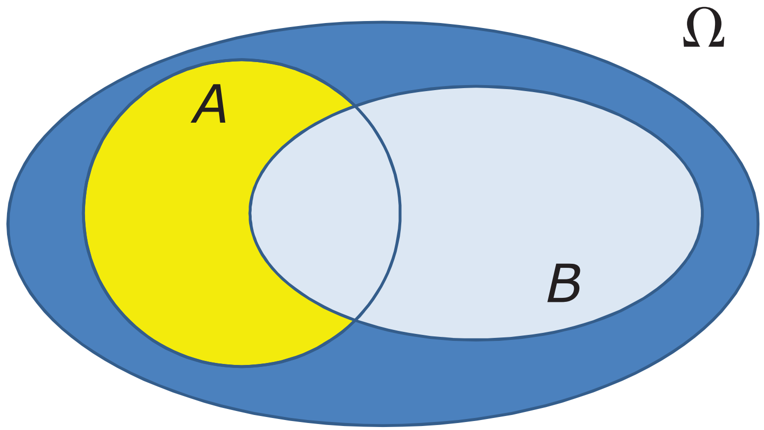
$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A) = \frac{90}{100} = 0.9$$

A	B Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza)	Marginale gravidanza
Incinta	72	18	**90**
Non incinta	5	2	**10**
Marginale test	**80**	**20**	***100***

La probabilità condizionata

A = evento che ci interessa
B = evento "collegato", P(B) ≠ 0



Probabilità condizionata:

$$\mathbf{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Gli eventi A e B si definiscono (*stocastiche*) **indipendenti** se

$$P(A|B) = \frac{72}{80} = 0.9$$

$$\mathbf{P(A|B) = P(A)}$$

$$P(A) = \frac{90}{100} = 0.9$$

B

A	Test positivo (gravidanza)
Incinta	72
Non incinta	5
Marginale test	**80**

A e B indipendenti!
Il test non permette di fare previsione sulla gravidanza

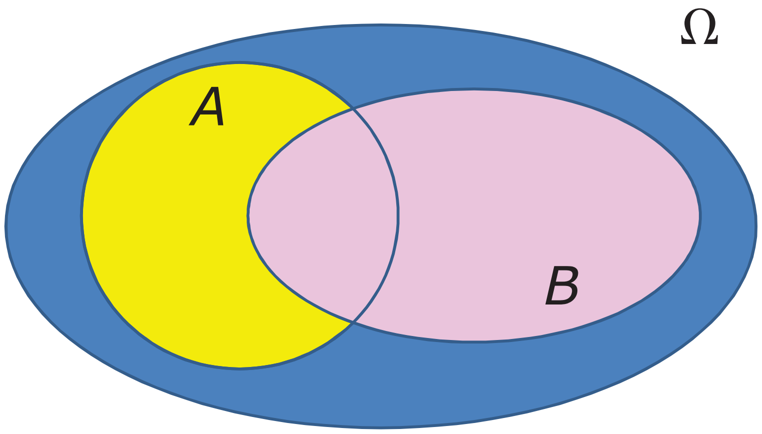
Esercizio

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4\ e\ \ P(A \cup B) = 0.9.$

a) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = ?,\ \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = ?$

b) A e B sono indipendenti?

c) A e B sono incompatibili?



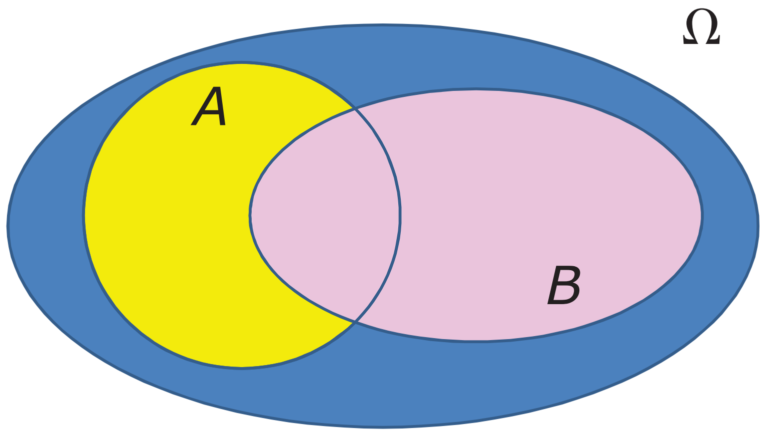
Esercizio

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4\ e\ \ P(A \cup B) = 0.9.$

a) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = ?,\ \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = ?$

b) A e B sono indipendenti?

c) A e B sono incompatibili?



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ⇒ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.9 = 0.1$$

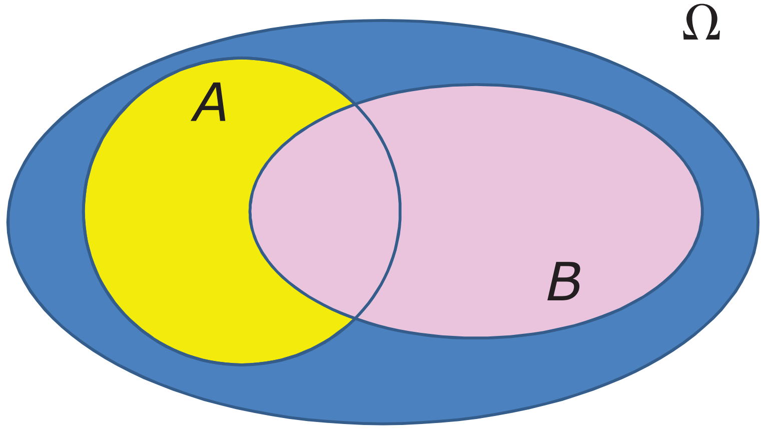
Esercizio

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.9$.

a) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = ?$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = ?$

b) A e B sono indipendenti?

c) A e B sono incompatibili?



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.9 = 0.1$$

c) Gli eventi **non** sono incompatibili ($A \cap B \neq \emptyset$)

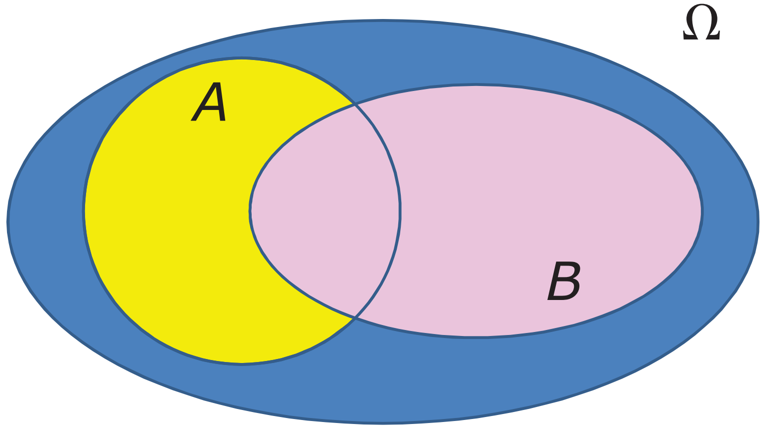
Esercizio

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4\ e\ \ P(A \cup B) = 0.9.$

a) $\mathrm{P(A \cap B) =?,\ P(A|B) =?}$

b) A e B sono indipendenti?

c) A e B sono incompatibili?



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ⇒

$$P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.9 = 0.1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

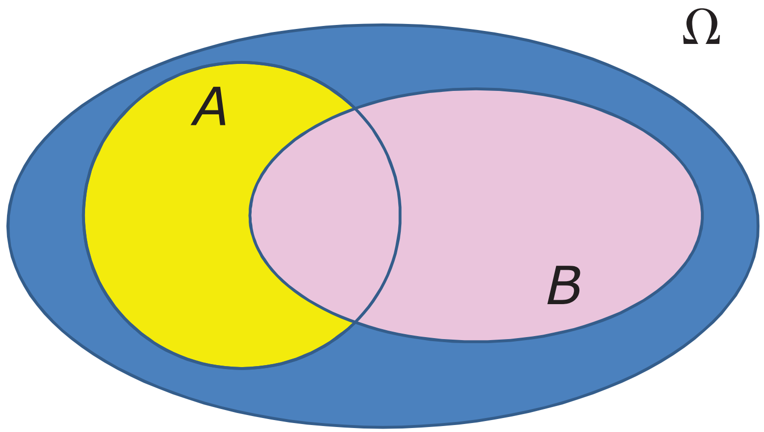
Esercizio

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.9$.

a) $P(A \cap B) = ?$, $P(A|B) = ?$

b) A e B sono indipendenti?

c) A e B sono incompatibili?



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.9 = 0.1$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

b) Gli eventi **non** sono indipendenti

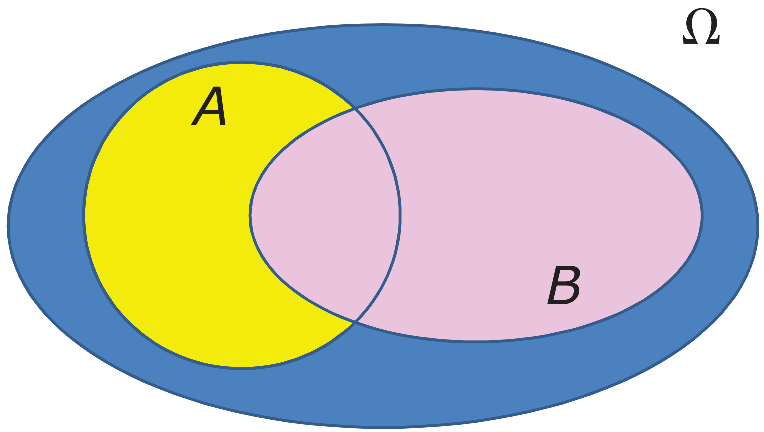
Esercizio

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4\ e\ \ P(A \cup B) = 0.9.$

a) $\mathrm{P(A \cap B) =?,\ \ P(A|B) =?}$

b) A e B sono indipendenti?

c) A e B sono incompatibili?



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.9 = 0.1$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.6} = 0.167$$

Il Teorema di Bayes

	B Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza) $\overline{B}$	Marginale gravidanza
A Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
Marginale test	**83**	16	*99*

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{83}} = 0.964$$

Il Teorema di Bayes

	B Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza) $\overline{B}$	Marginale gravidanza
A Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
Marginale test	**83**	16	*99*

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{83}} = 0.964$$

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è negativo**?

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}} = 0.312$$

Il Teorema di Bayes

	B Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza) $\overline{\mathbf{B}}$	Marginale gravidanza
A Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
Marginale test	**83**	16	*99*

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{83}} = 0.964$$

P(A)=?

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è negativo**?

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}} = 0.312$$

Il Teorema di Bayes

	B Test positivo (gravidanza)	Test negativo (no gravidanza) $\bar{B}$	Marginale gravidanza
A Incinta	80	5	**85**
Non incinta	3	11	14
Marginale test	**83**	16	*99*

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è positivo**?

$$\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{83}} = 0.964$$

$$\mathbf{P(A)} = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \mathbf{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

Scegliendo **a caso** una donna nel campione, qual è la prob. **che sia incinta sapendo che il test è negativo**?

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}} = 0.312$$

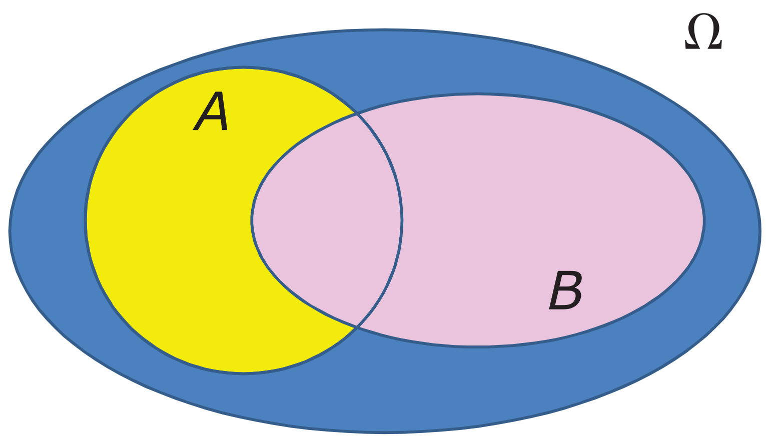
Il Teorema di Bayes

Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

RIASSUNTO



$0 \leq P(A) \leq 1$ qualunque sia A

$P(\Omega) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

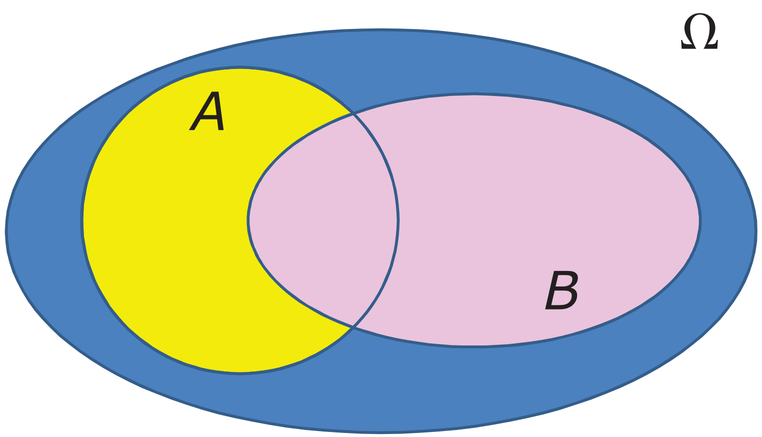
Se $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

regola della somma

RIASSUNTO



$0 \leq P(A) \leq 1$ qualunque sia A

$P(\Omega) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Se $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

regola della somma

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

prob. condizionata & Teo. Bayes

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ **indipendenza**

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

regola del prodotto

Cap. 3.1-3.5, 3.8

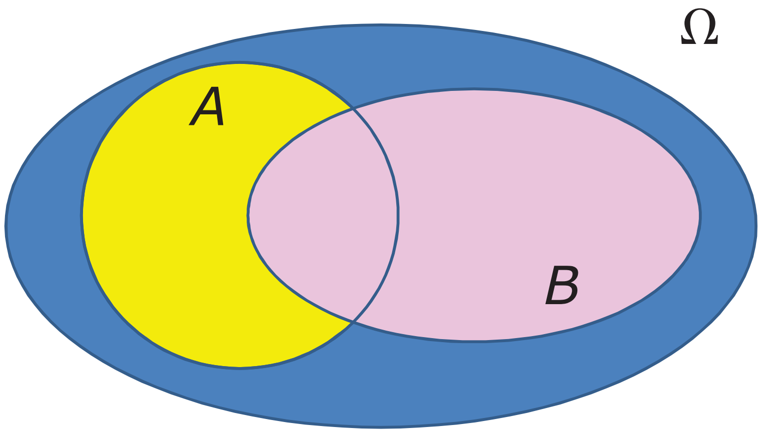
Esercizio di compito

Siano A e B due eventi con $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = \mathbf{0.76}$.

a) $P(A \cap B) = ?$, $P(A|B) = ?$

b) A e B sono indipendenti?

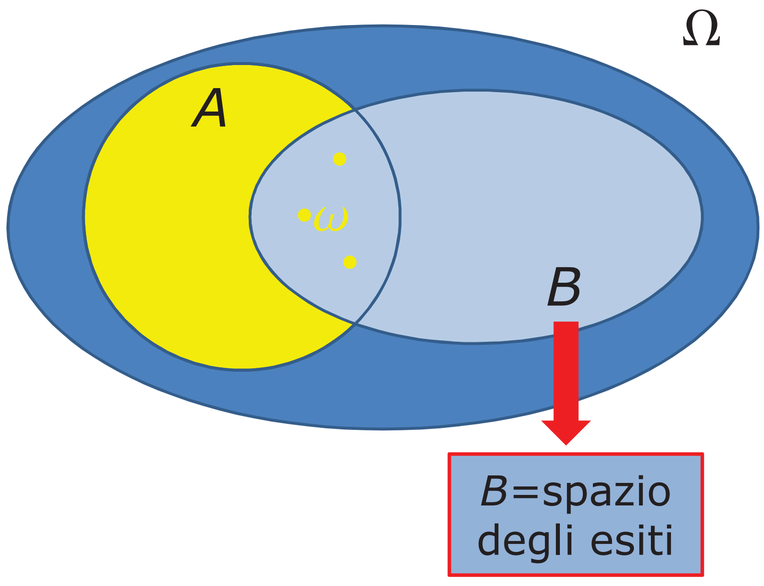
c) A e B sono incompatibili?



La definizione di probabilità

Probabilità condizionata: $P(B) \neq 0$

$$\mathbf{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}},$$



Indipendenza

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) indipendenti se

$$\mathbf{P(A|B) = P(A)}$$

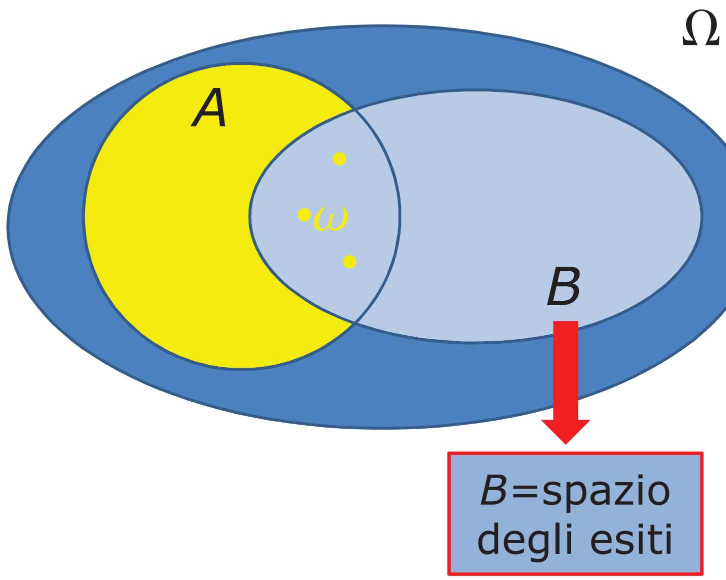
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

La definizione di probabilità

Probabilità condizionata: $P(B) \neq 0$

$$\mathbf{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}},$$



Indipendenza

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) indipendenti se

$$\mathbf{P(A|B) = P(A)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

(*successione indipendente*)

$\forall\, n, \forall\, A_1, \ldots, A_n$ si ha $P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

La definizione di probabilità

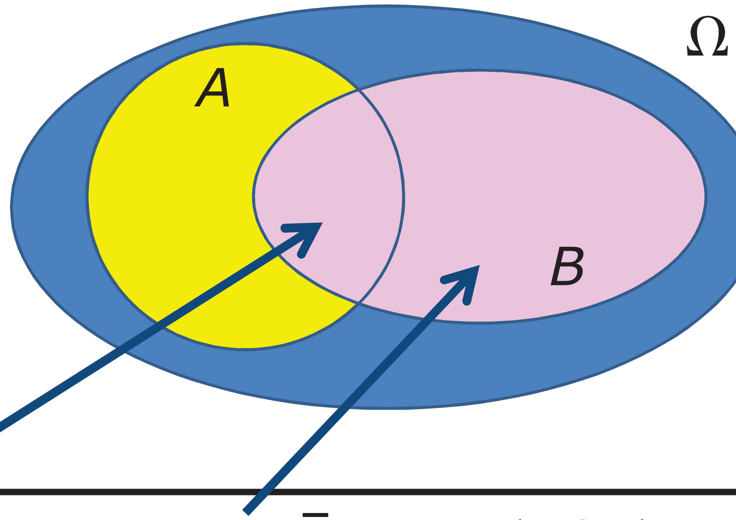
Indipendenza

Gli eventi A e B si definiscono (*stocasticamente*) **indipendenti** se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0$$



$$\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

La definizione di probabilità

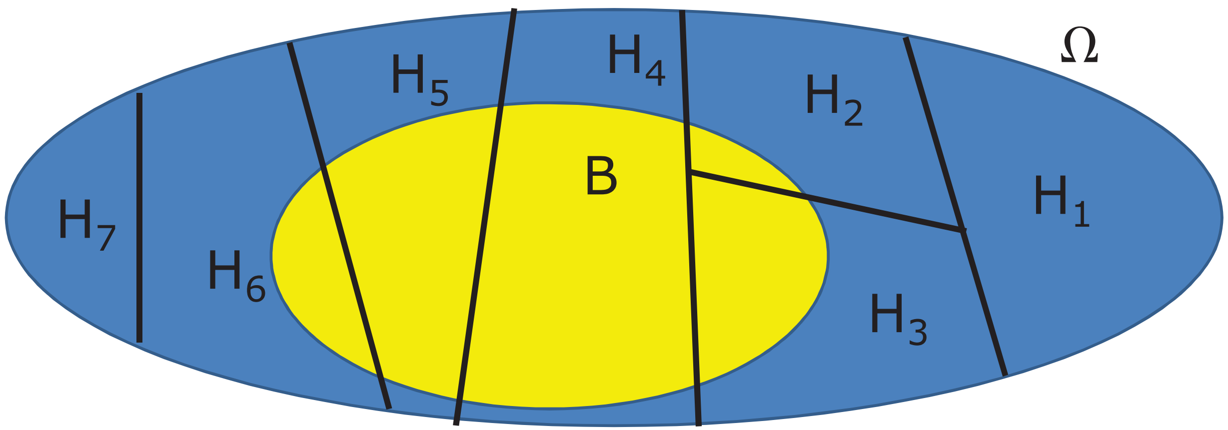
Principio delle probabilità totali

$H_1, H_2, \dots, H_n$ eventi a due a due disgiunti tali che $\cup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Per ogni evento B si ha :

$$\boldsymbol{P(B) = P(B \cap H_1) + P(B \cap H_2) + \cdots P(B \cap H_n) =}$$

$$\boldsymbol{= P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2) + \cdots + P(B|H_n)P(H_n)}$$



La definizione di probabilità

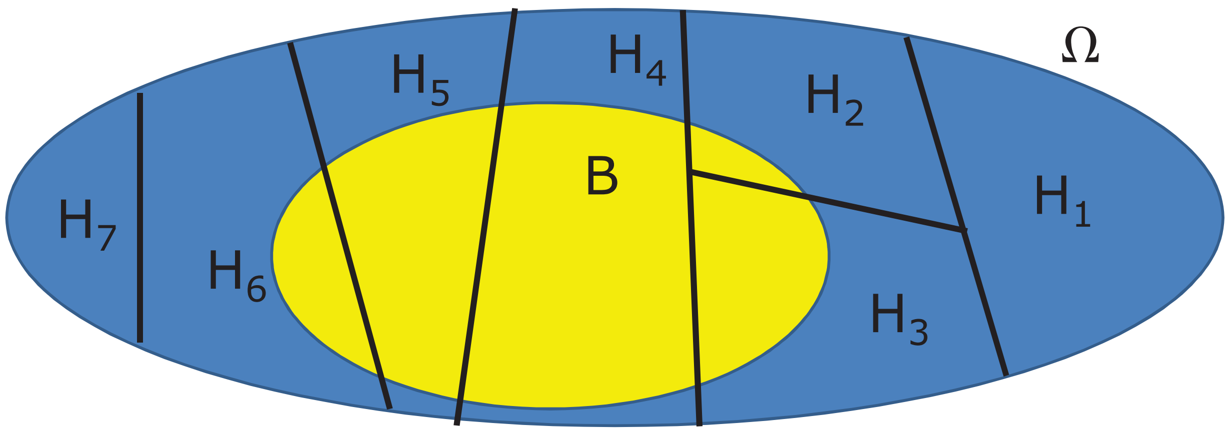
Principio delle probabilità totali

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ eventi a due a due disgiunti tali che $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Per ogni evento B si ha :

$$\boldsymbol{P\left(H_j \middle| B\right) = \frac{P(B \cap H_j)}{P(B)} = \frac{P\left(B \middle| H_j\right) P(H_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|H_k) P(H_k)}}$$

formula di Bayes



Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

Quale malattia ha con maggiore probabilità colpito il paziente?

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

Quale malattia ha con maggiore probabilità colpito il paziente?

$$P(H_i|Ipert.) = ?? \quad , \quad i = 1,2,3$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_i|Ipert.) = \frac{P(H_i \cap Ipert.)}{P(Ipert.)} = \frac{P(Ipert.|H_i)P(H_i)}{P(Ipert.)}$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_i|Ipert.) = \frac{P(H_i \cap Ipert.)}{P(Ipert.)} = \frac{P(Ipert.|H_i)P(H_i)}{P(Ipert.)}$$

$$P(Ip.) = P(Ip.|H_1) \times P(H_1) + P(Ip.|H_2) \times P(H_2) + P(Ip.|H_3) \times P(H_3)$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(Ip.) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{2}{10} = \mathbf{\frac{11}{30}}$$

$$P(Ip.) = P(Ip.|H_1) \times P(H_1) + P(Ip.|H_2) \times P(H_2) + P(Ip.|H_3) \times P(H_3)$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_i|Ipert.) = \frac{P(H_i \cap Ipert.)}{{}^{11}/_{30}} = \frac{P(Ipert.|H_i)P(H_i)}{{}^{11}/_{30}}$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_1|Ipert.) = \frac{P(Ipert.|H_1)P(H_1)}{{}^{11}/_{30}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{10}}{{}^{11}/_{30}} = \frac{5}{11}$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_2|Ipert.) = \frac{P(Ipert.|H_2)P(H_2)}{11/30} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}}{11/30} = \frac{6}{11}$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_3|Ipert.) = \frac{P(Ipert.|H_3)P(H_3)}{11/30} = \frac{0}{11/30} = 0$$

Esercizio

Un paziente va dal medico con certi sintomi (febbre, dolori articolari, secchezza delle fauci). Secondo il medico, solo tre malattie producono quei sintomi. La probabilità che il paziente abbia ciascuna delle tre malattie è: $P(H_1) = \frac{5}{10}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{2}{10}$.

Il medico sa che anche l'ipertensione potrebbe essere dovuta a ciascuna delle patologie, anche se con diversa probabilità:

$$P(Ipert.|H_1) = \frac{1}{3}, P(Ipert.|H_2) = \frac{2}{3}, P(Ipert.|H_3) = 0$$

Misurata la pressione del paziente, il medico scopre che in effetti egli è anche iperteso.

$$P(H_1|Ipert.) = \frac{5}{11} \qquad \boxed{P(H_2|Ipert.) = \frac{6}{11}} \qquad P(H_3|Ipert.) = 0$$