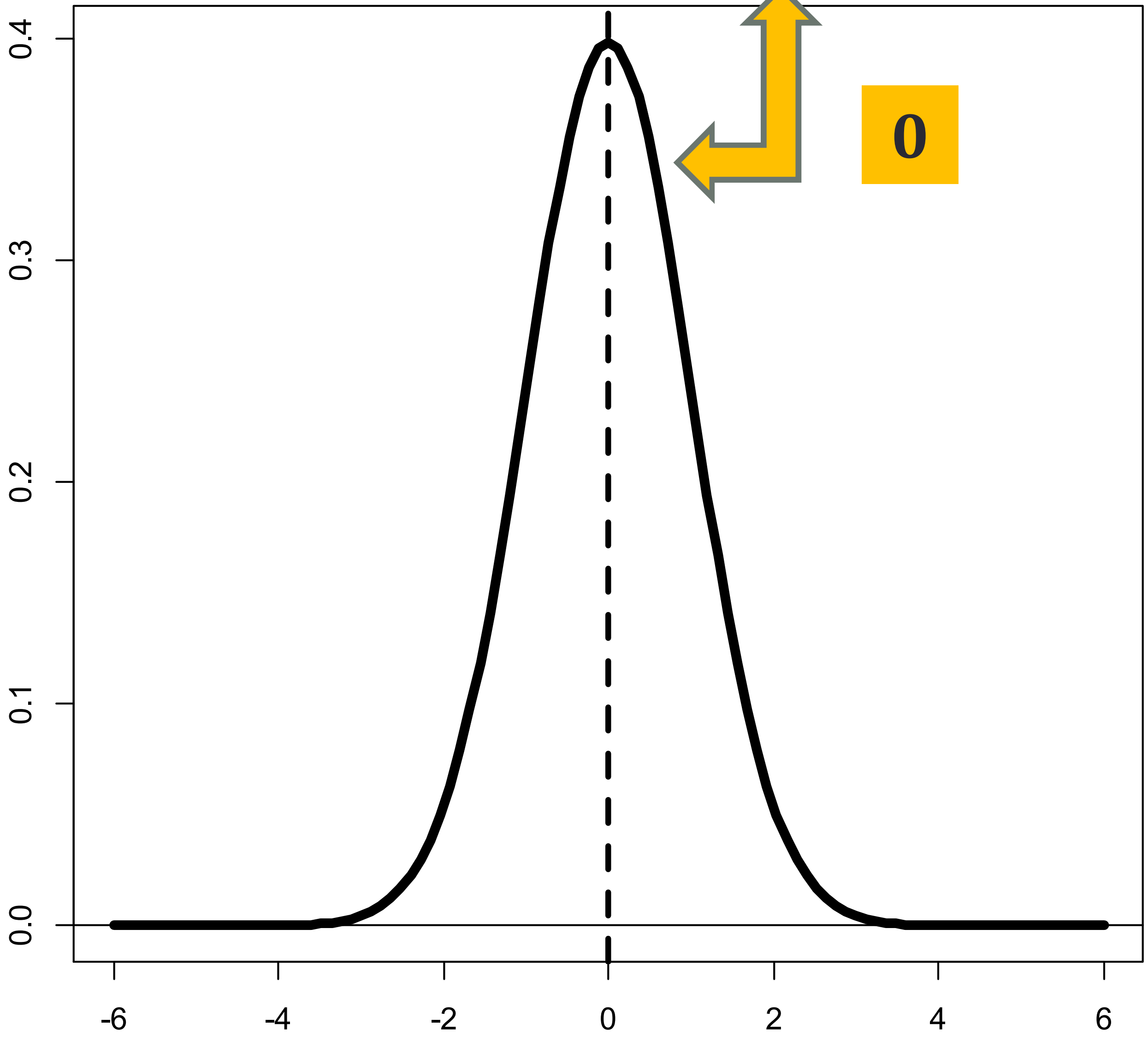
ESERCIZI

Esercizio 6

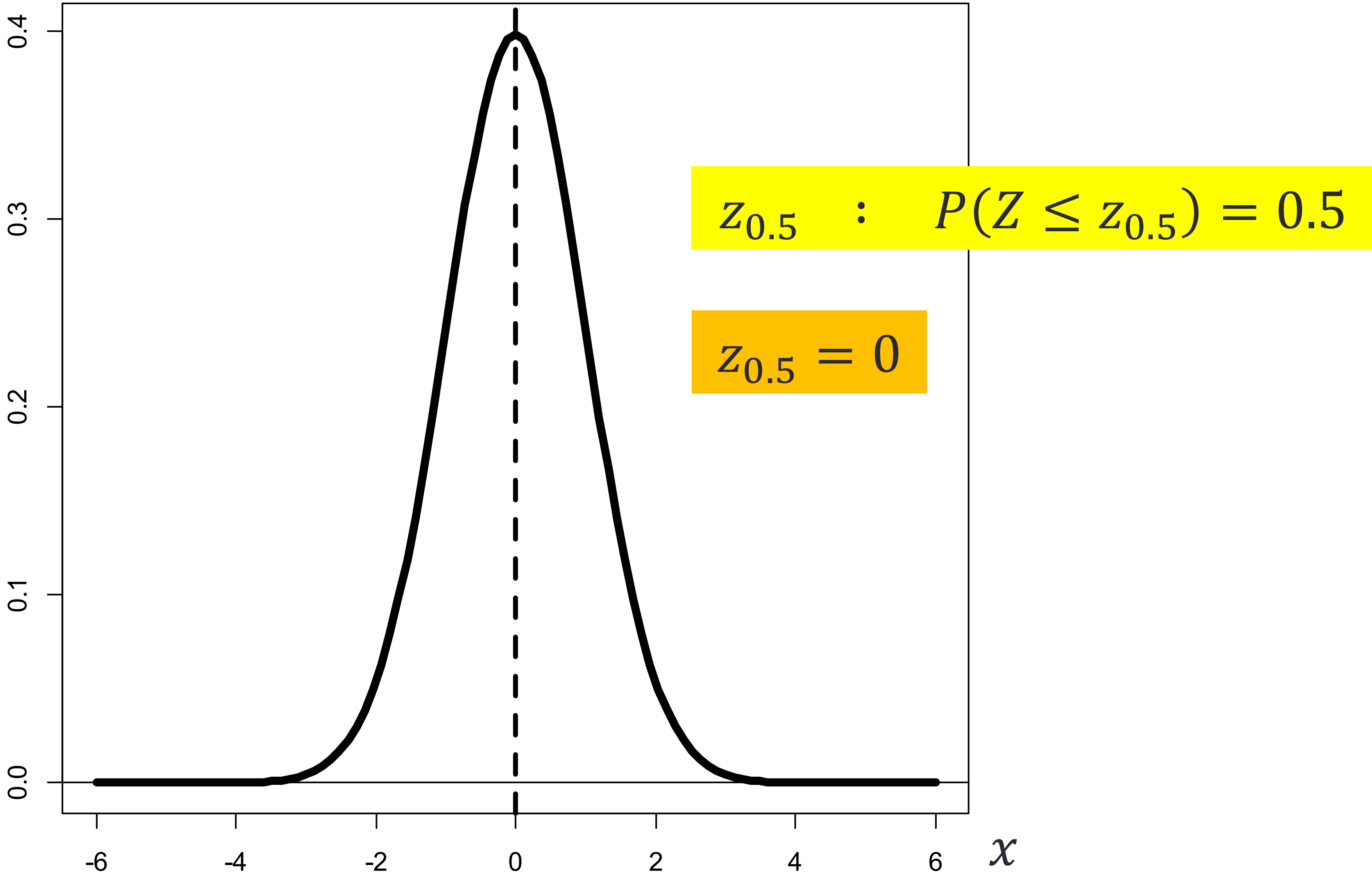
Sia $X \sim N(0,1)$. Quanto vale **la moda** della distribuzione?



0

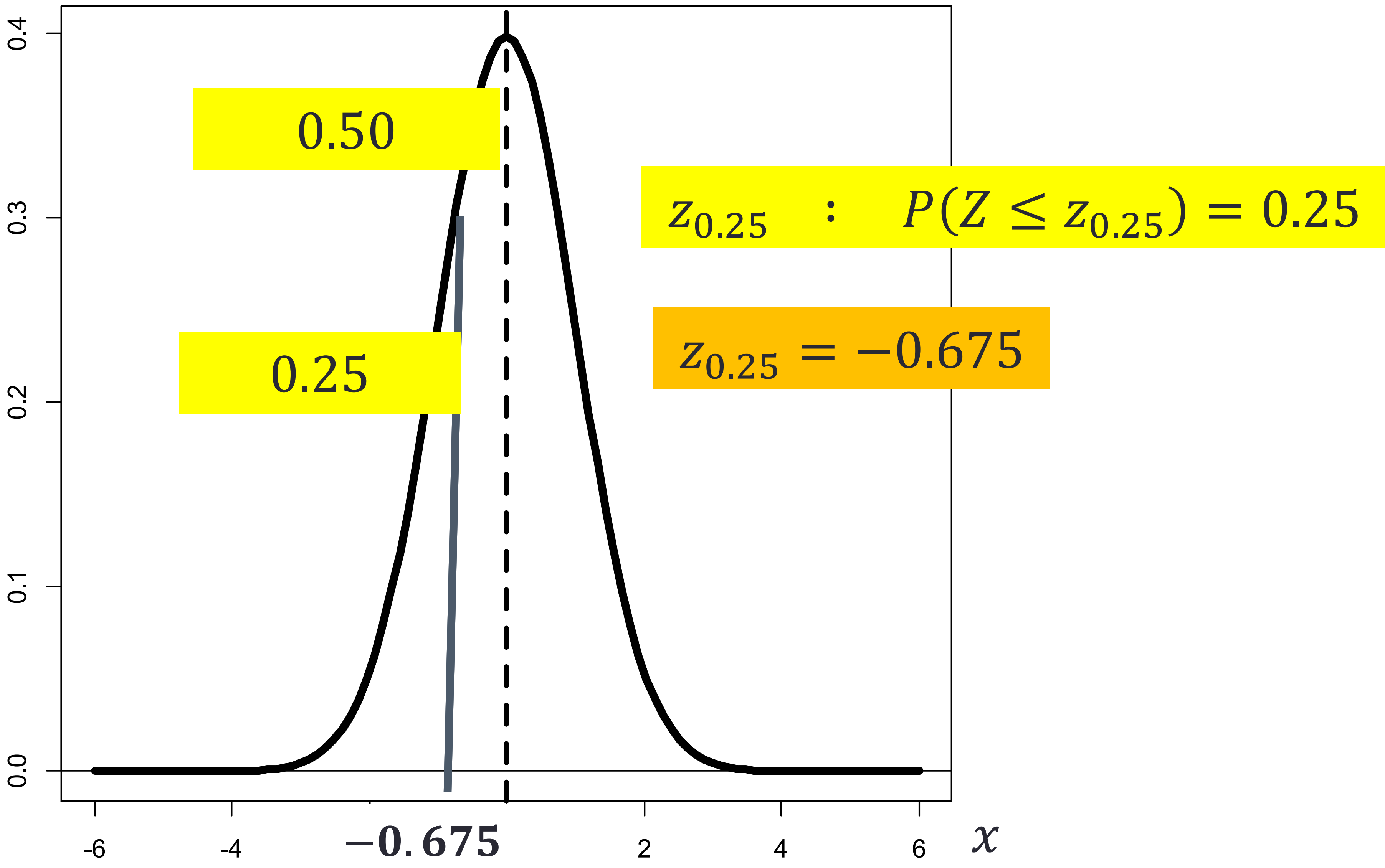
Esercizio 6

Sia $X \sim N(0,1)$. Quanto vale **la mediana** della distribuzione?



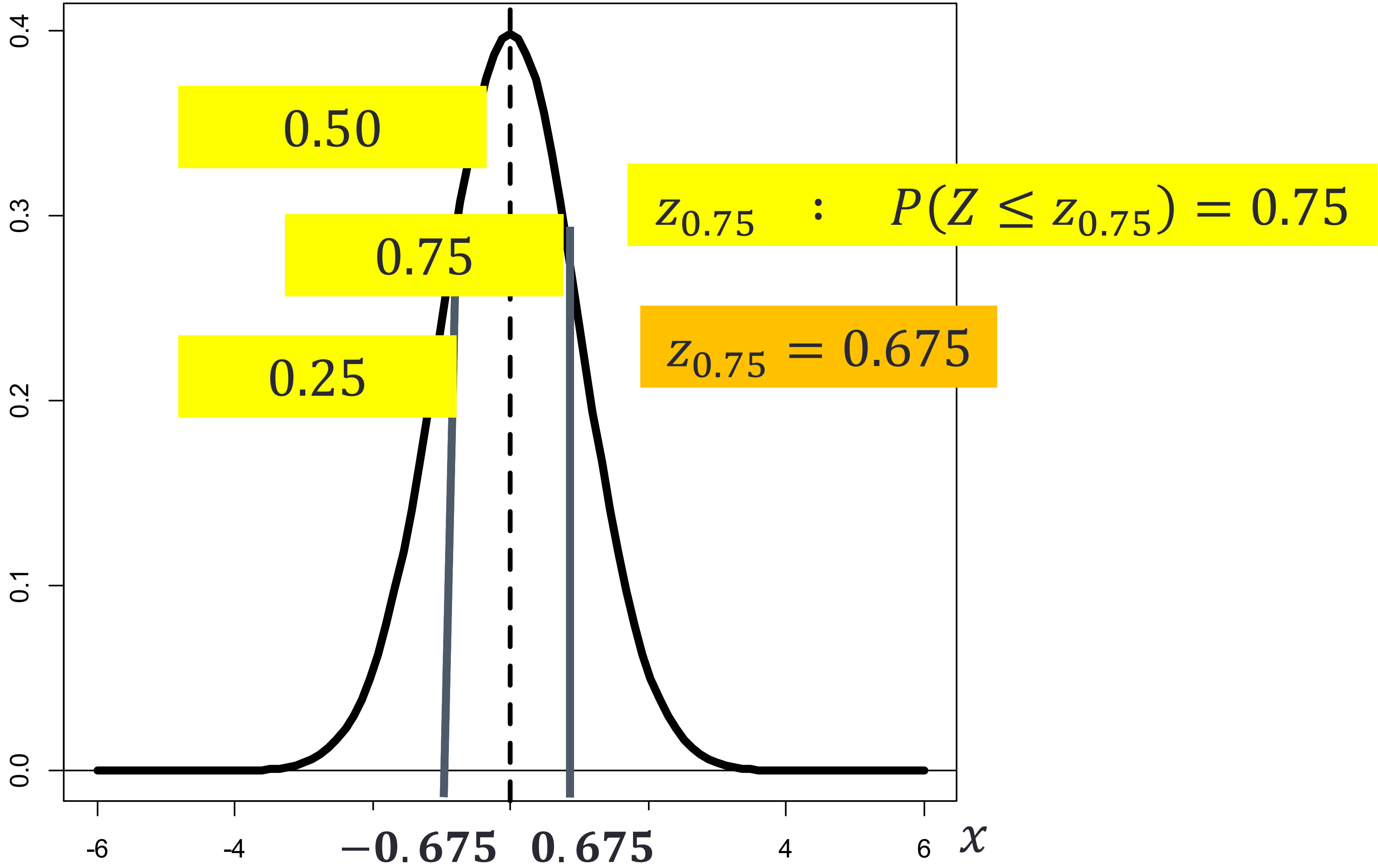
Esercizio 6

Sia $X \sim N(0,1)$. Quanto vale il **1mo quartile**?



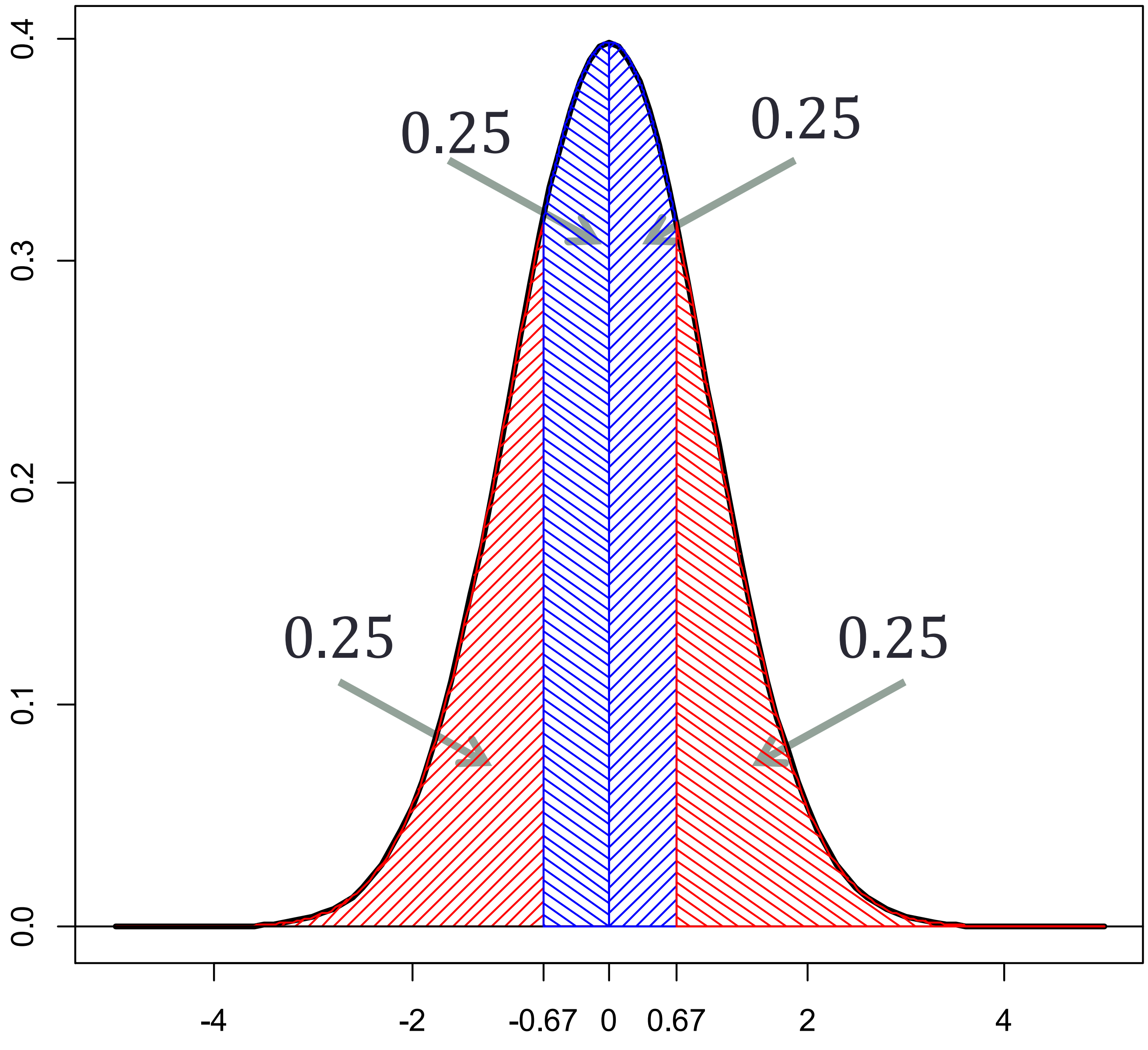
Esercizio 6

Sia $X \sim N(0{,}1)$. Quanto vale il **3o quartile** **senza fare conti**?



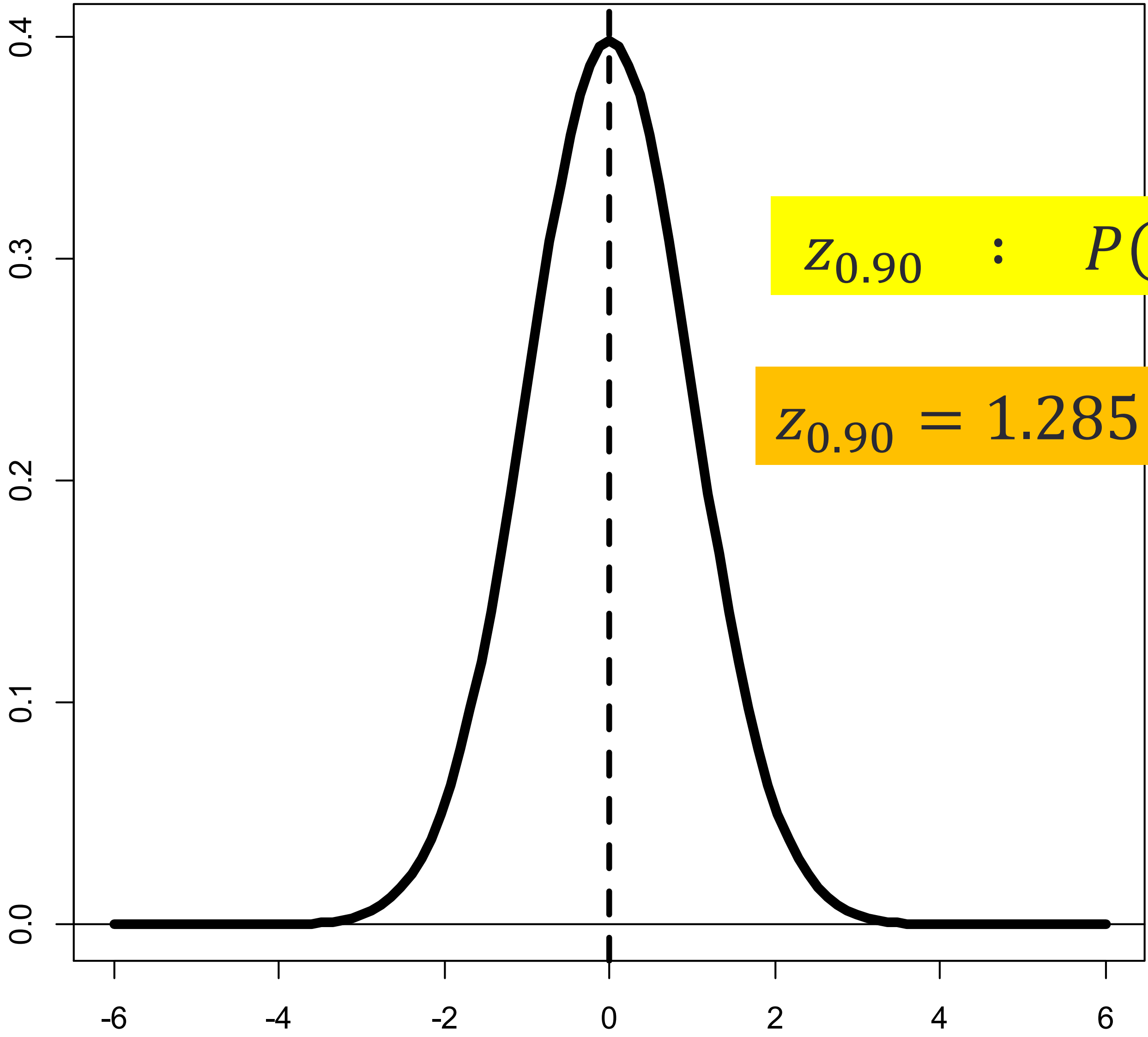
Esercizio 6

quartili
$\boldsymbol{N(0,1)}$



Esercizio 6

Sia $X \sim N(0{,}1)$. Quanto vale il **quantile di ordine 0.90**?

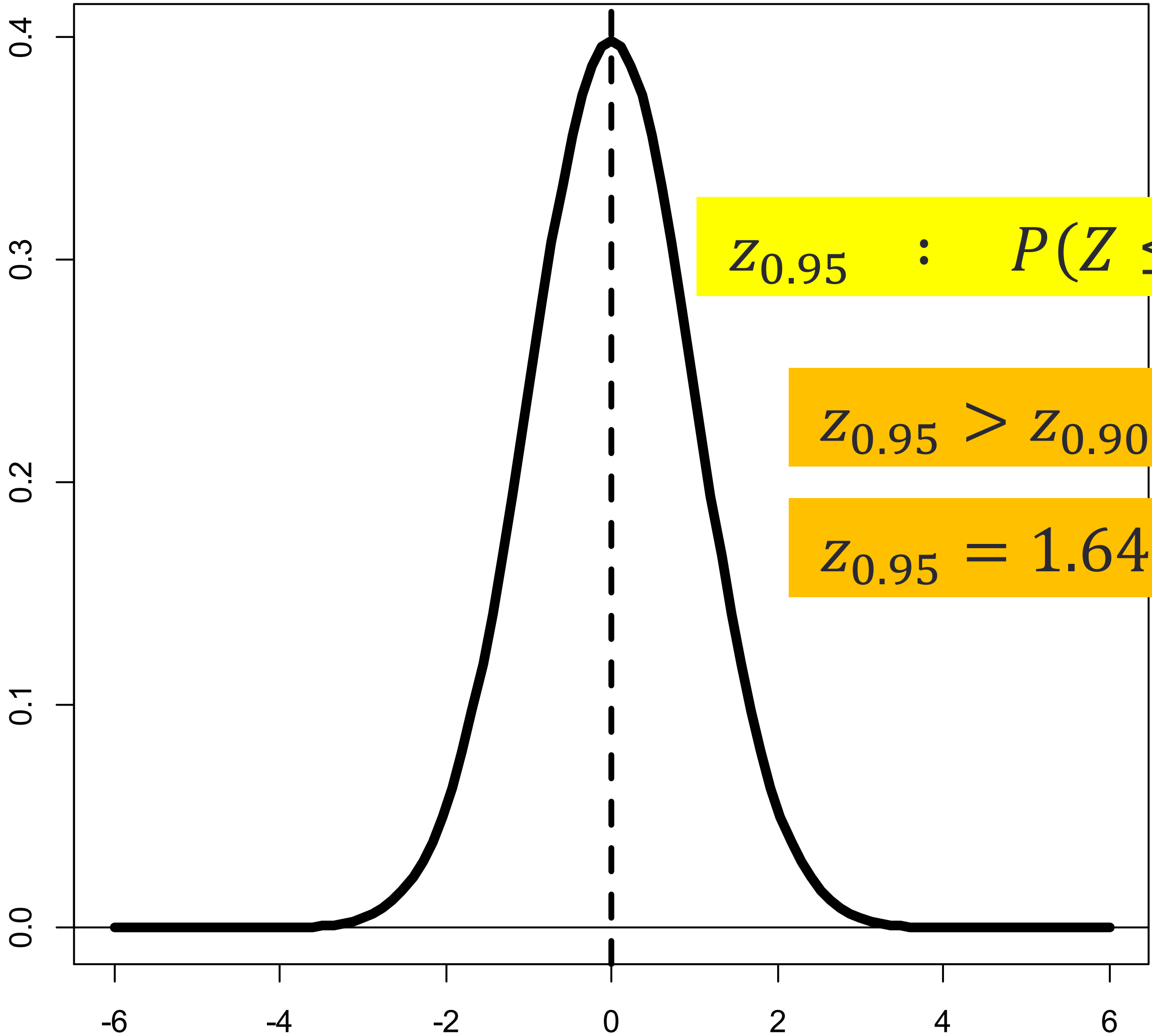


$z_{0.90} \quad : \quad P(Z \leq z_{0.90}) = 0.90$

$z_{0.90} = 1.285$ (a metà tra 1.28 e 1.29)

Esercizio 6

Sia $X \sim N(0,1)$. Quanto vale il **quantile di ordine 0.95**?



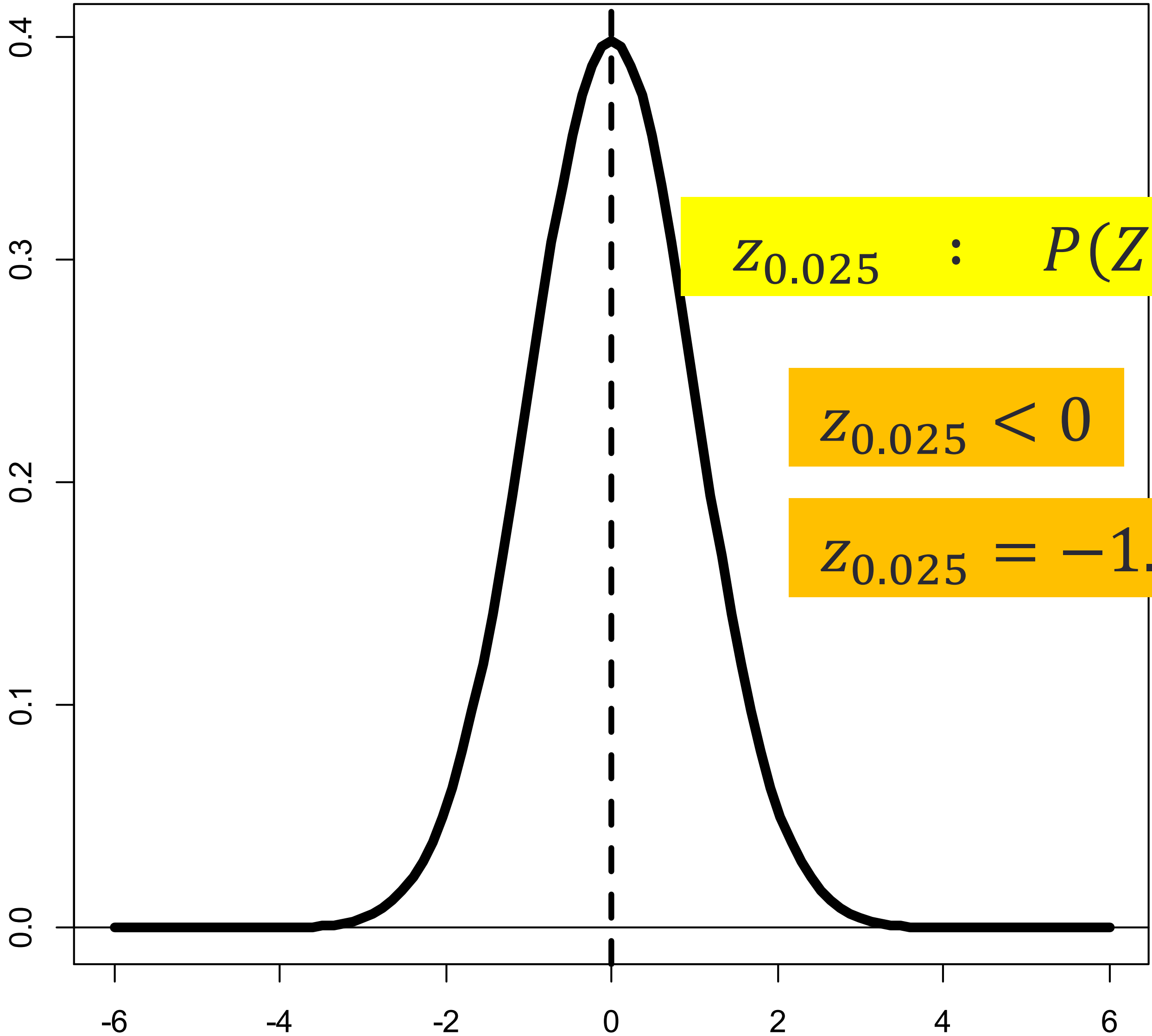
$z_{0.95} \quad : \quad P(Z \leq z_{0.95}) = 0.95$

$z_{0.95} > z_{0.90}$

$z_{0.95} = 1.645$

Esercizio 6

Sia $X \sim N(0,1)$. Quanto vale il **quantile di ordine 0.025**?



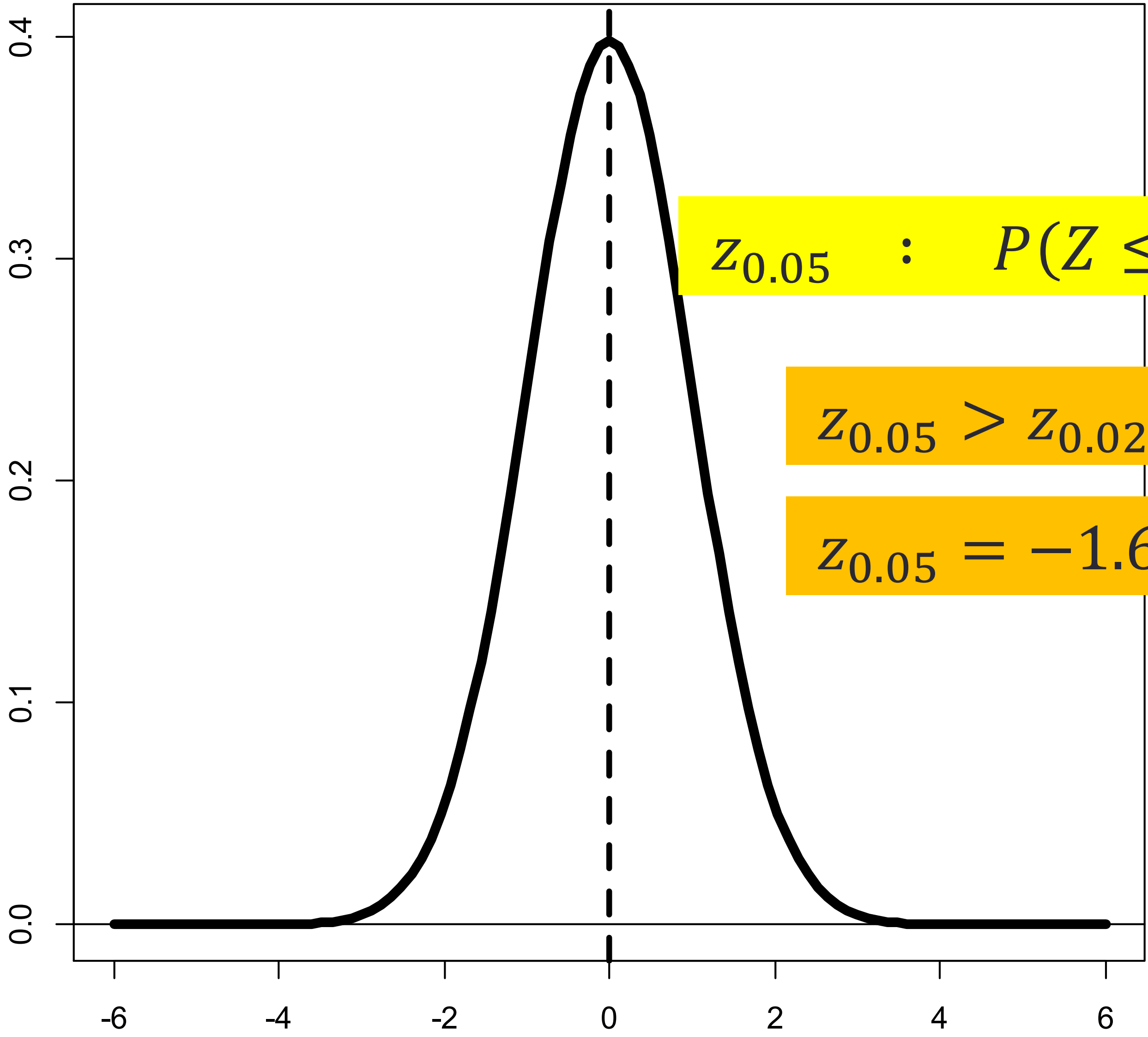
$$z_{0.025} \quad : \quad P(Z \leq z_{0.025}) = 0.025$$

$$z_{0.025} < 0$$

$$z_{0.025} = -1.96$$

Esercizio 6

Sia $X \sim N(0,1)$. Quanto vale il **quantile di ordine 0.05**?



$$z_{0.05} \quad : \quad P(Z \leq z_{0.05}) = 0.05$$

$$z_{0.05} > z_{0.025}$$

$$z_{0.05} = -1.645$$

Esercizio "di compito"

Abbinare ciascun quantile a)-e) con uno da f)-l) sulla base della simmetria della distribuzione

a) $z_{0.90}$	f) $z_{0.10}$
b) $z_{0.50}$	g) $z_{0.80}$
c) $z_{0.20}$	h) $z_{0.25}$
d) $z_{0.05}$	i) $z_{0.50}$
e) $z_{0.75}$	l) $z_{0.95}$

Esercizio 2

Sia X una variabile casuale con $E(X) = 0.5$ e $Var(X) = 2$.
Calcolare valore atteso e varianza di:

- $Y = 1 + 3X$
- $Y = 6X - 1$
- $Y = 5X$
- $Y = \frac{3}{4} - X$
- $Y = -X$

Esercizio 2

Sia X una variabile casuale con $E(X) = 0.5$ e $Var(X) = 2$.
Calcolare valore atteso e varianza di:

- $Y = 1 + 3X$: $E(Y) = 2.5, Var(Y) = 18$
- $Y = 6X - 1$: $E(Y) = 2, Var(Y) = 72$
- $Y = 5X$: $E(Y) = 2.5, Var(Y) = 50$
- $Y = \frac{3}{4} - X$: $E(Y) = 0.25, Var(Y) = 2$
- $Y = -X$: $E(Y) = -0.5, Var(Y) = 2$

Esercizio 2

Sia X una variabile casuale **normale** con $E(X) = 0.5$ e $Var(X) = 2$. Calcolare valore atteso e varianza di:

- $Y = 1 + 3X$
- $Y = 6X - 1$
- $Y = 5X$
- $Y = \frac{3}{4} - X$
- $Y = -X$

NON CAMBIA NULLA

Esercizio 2

Sia X una variabile casuale normale con $E(X) = 0.5$ e $Var(X) = 2$. La variabile $Y = -X$

a) è una v.c. negativa

b) $Y \sim N(-0.5, -2)$

c) $Y \sim N(-0.5, 2)$

d) $Y \sim N(0.5, 2)$

Una sola delle risposte è esatta: quale?

Esercizio 2

Sia X una variabile casuale normale con $E(X) = 0.5$ e $Var(X) = 2$. La variabile $Y = -X$

a) è una v.c. negativa

b) $Y \sim N(-0.5, -2)$

c) $\boldsymbol{Y \sim N(-0.5, 2)}$

d) $Y \sim N(0.5, 2)$

Una sola delle risposte è esatta: quale?

Esercizio 1

Supponiamo che il tempo di attesa nella pizzeria da asporto sia una variabile casuale continua X, normale con media $\mu = 9.5$ minuti e deviazione standard $\sigma = 3.25$ minuti.

a) Calcolare la probabilità che il tempo d'attesa sia inferiore ai 5 minuti

b) Calcolare la probabilità che il tempo d'attesa superi i 12 minuti

c) Calcolare la probabilità che il tempo d'attesa varî da 5 a 12 minuti

d) Se il tempo di attesa è di 17 minuti, posso dire che sto aspettando più del normale?

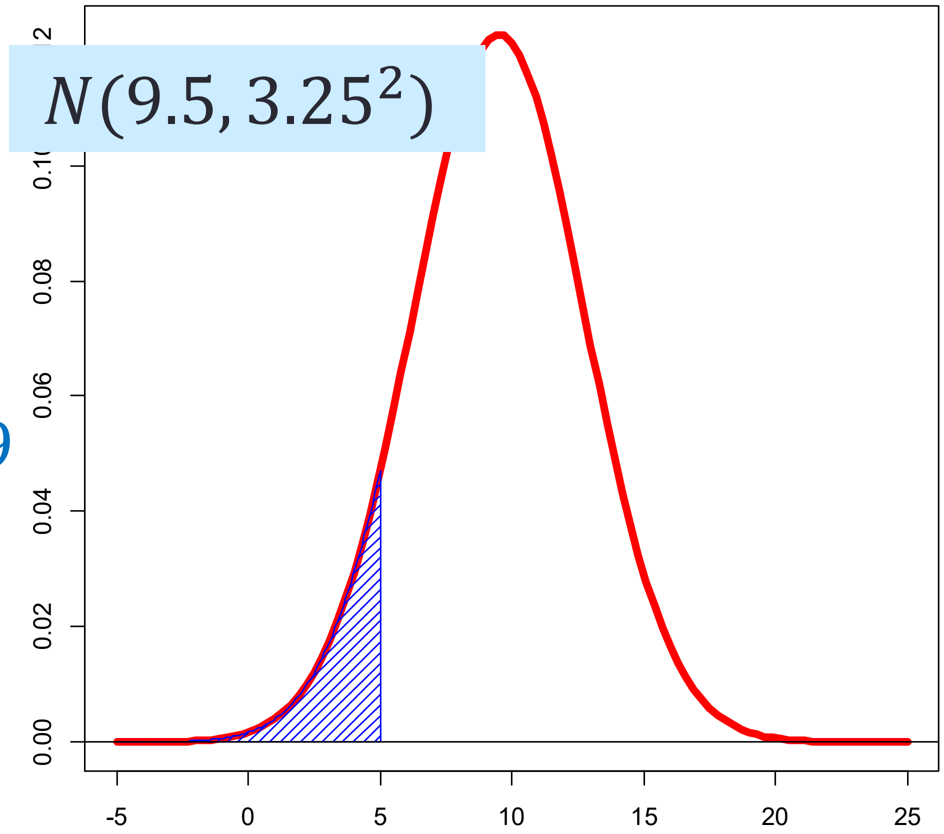
Esercizio 1

Supponiamo che il tempo di attesa nella pizzeria da asporto sia una variabile casuale continua X, normale con media $\mu = 9.5$ minuti e deviazione standard $\sigma = 3.25$ minuti.

a) Calcolare la probabilità che il tempo d'attesa sia inferiore ai 5 minuti

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 9.5}{3.25} \leq \frac{5 - 9.5}{3.25}\right)$$

$$= P(Z \leq -1.38) = 0.08379$$



Esercizio 1

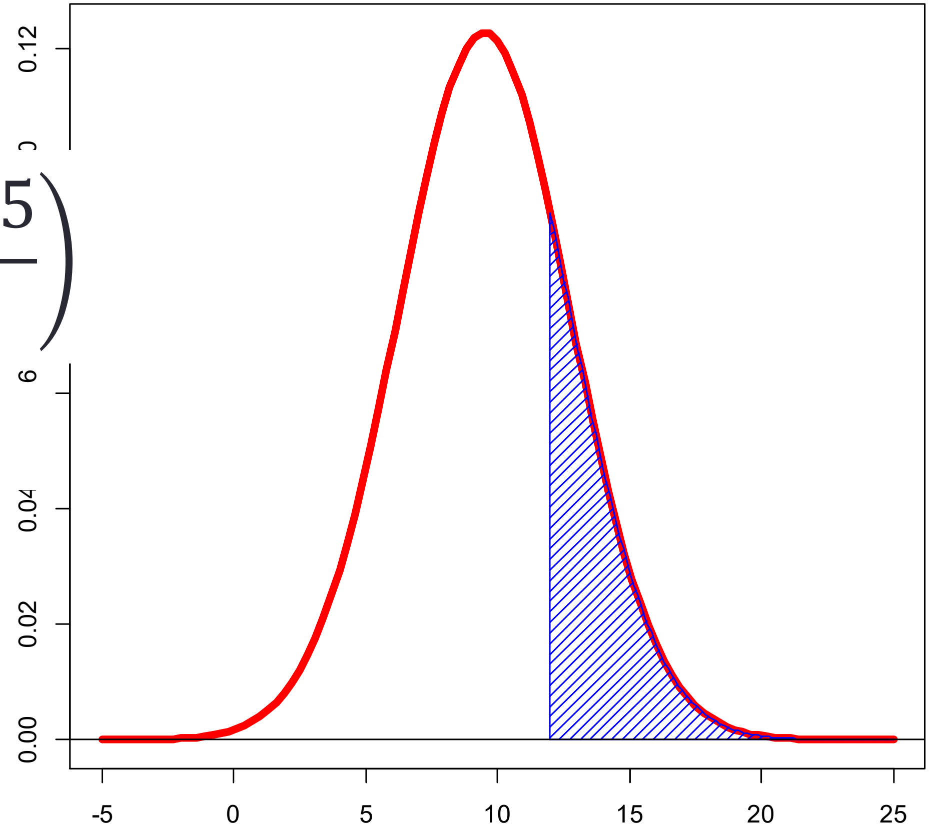
Supponiamo che il tempo di attesa nella pizzeria da asporto sia una variabile casuale continua X, normale con media $\mu = 9.5$ minuti e deviazione standard $\sigma = 3.25$ minuti.

b) Calcolare la probabilità che il tempo d'attesa superi i 12 minuti

$$P(X > 12) = P\left(\frac{X - 9.5}{3.25} > \frac{12 - 9.5}{3.25}\right)$$

$$= P(Z > 0.77) = 1 - P(Z \leq 0.77)$$

$$= 1 - 0.77935 = 0.22065$$



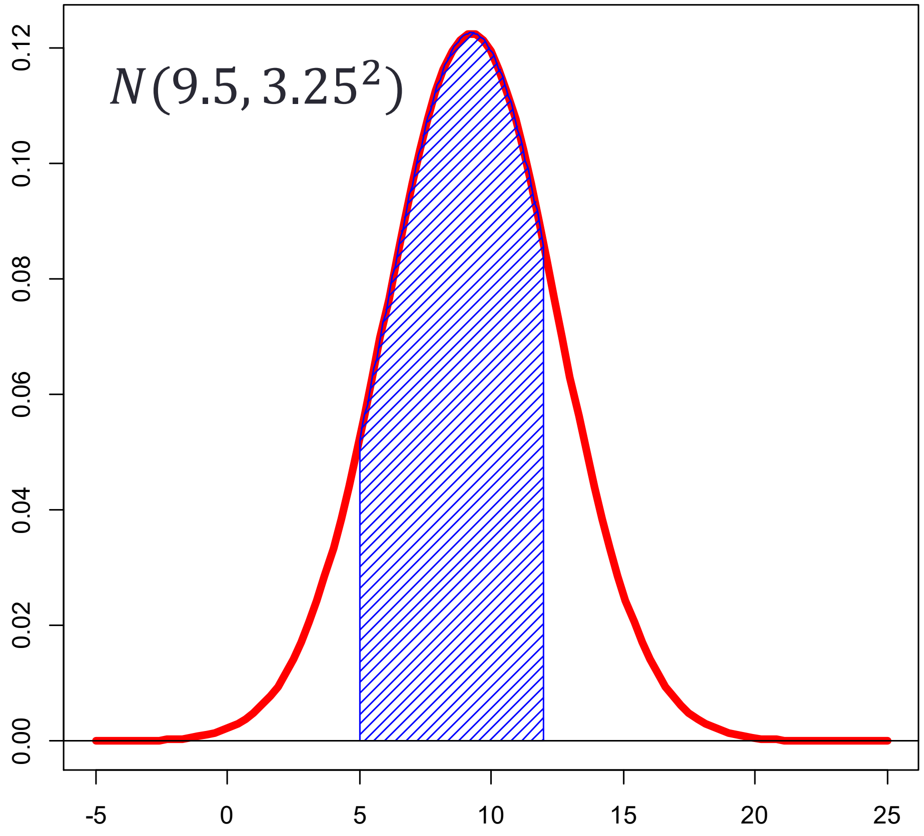
Esercizio 1

Supponiamo che il tempo di attesa nella pizzeria da asporto sia una variabile casuale continua X, normale con media $\mu = 9.5$ minuti e deviazione standard $\sigma = 3.25$ minuti.

c) Calcolare la probabilità che il tempo d'attesa varî da 5 a 12 minuti

$$P(5 < X \leq 12) =$$
$$P(X \leq 12) - P(X \leq 5) =$$

$$= 0.77935 - 0.08379 = 0.69556$$



Esercizio 1

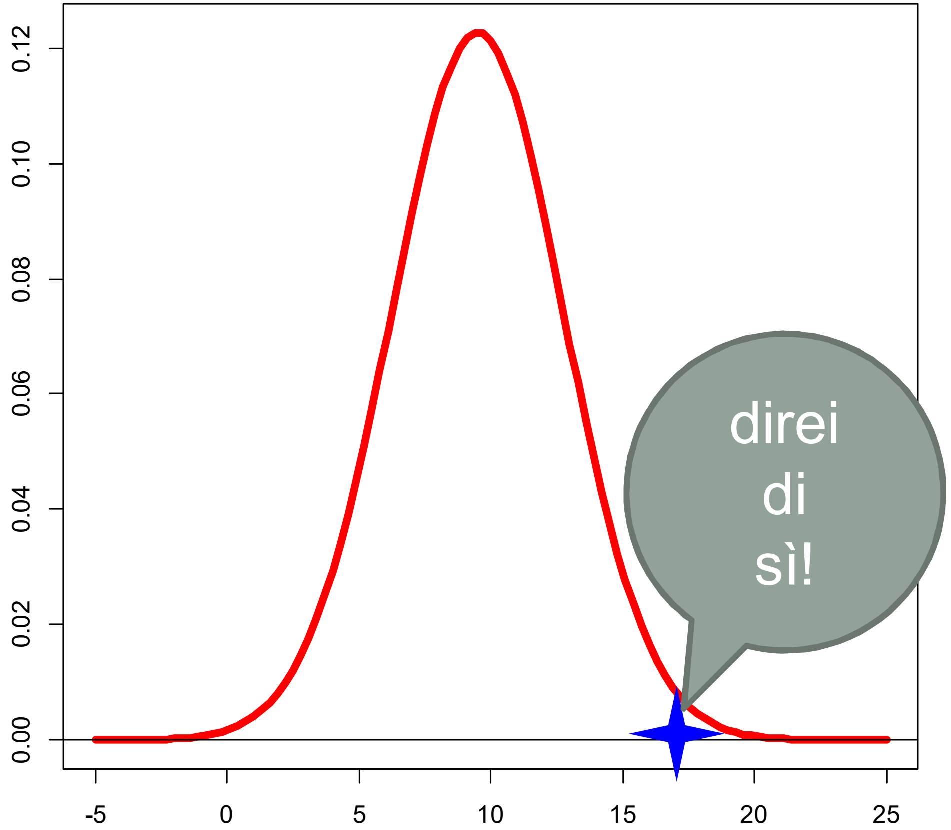
Supponiamo che il tempo di attesa nella pizzeria da asporto sia una variabile casuale continua X, normale con media $\mu = 9.5$ minuti e deviazione standard $\sigma = 3.25$ minuti.

d) Se il tempo di attesa è di 17 minuti, posso dire che sto aspettando più del dovuto?

$$P(X \geq 17) =$$

$$= P\left(\frac{X - 9.5}{3.25} \geq \frac{17 - 9.5}{3.25}\right)$$

$$= P(Z \geq 2.31) = 0.01044$$



Esercizio 1

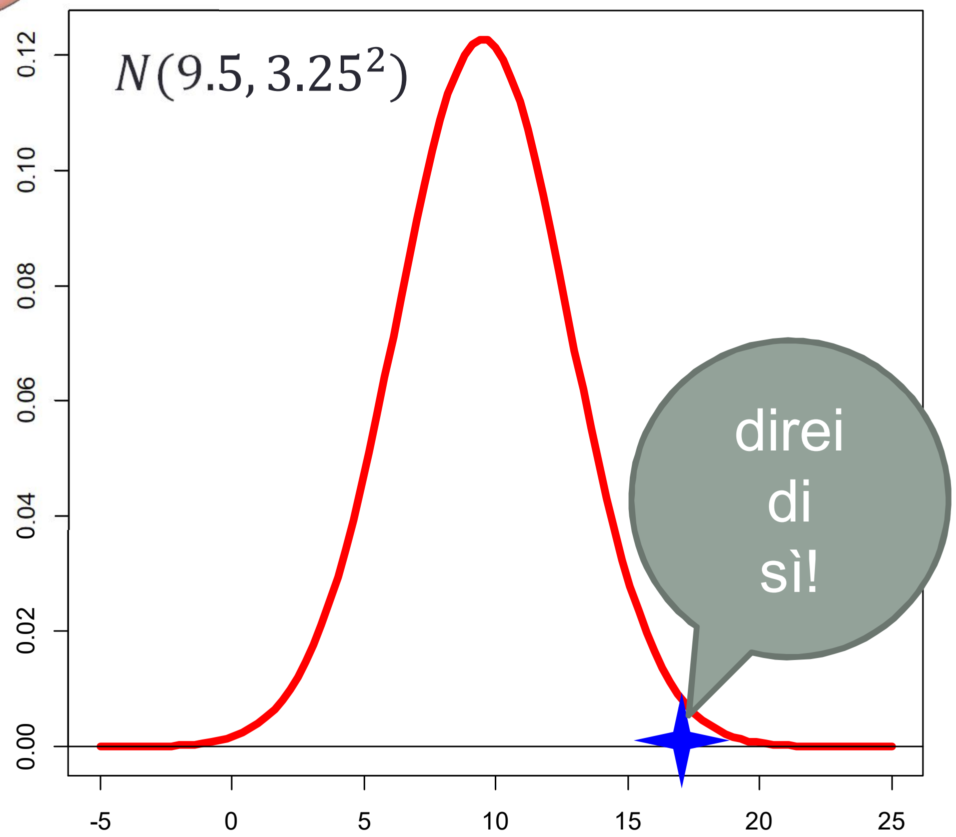
Supponiam… ch… ella pizzeria da asporto
sia una … rmale con media
$\mu =$ … 3.25 minuti.
d) S… , posso dire che sto
aspettan…

SOLO L'1% DEI CLIENTI ASPETTA QUANTO NOI O PIU'!

$$P(X \geq 17) =$$

$$= P\left(\frac{X - 9.5}{3.25} \geq \frac{17 - 9.5}{3.25}\right)$$

$$= P(Z \geq 2.31) = 0.01044$$



Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016).

a) Estratto a caso un campione di 10 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare la probabilità che 4 di essi siano laureati

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016).

a) Estratto a caso un campione di 10 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare la probabilità che 4 di essi siano laureati

$X\ v.c.\ che\ conta\ il\ num.\ di\ laureati\ in\ un\ camp.\ casuale\ di\ 10\ It.$

$X \sim Binom(10, 0.253)$

$$P(X=4) = \binom{10}{4} 0.253^4 (1-0.253)^6 =$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 0.253^4 \times 0.747^6 = 0.149$$

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016).

b) Estratto a caso un campione di 100 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare la probabilità che 40 di essi siano laureati

$X \; v.c. \; che \; conta \; il \; num. \; di \; laureati \; in \; un \; camp. \; casuale \; di \; 100 \; It.$

$X \sim Binom(100, 0.253)$

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} 0.253^{40}(1 - 0.253)^{60} = 0.00046$$

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016).

c) Estratto a caso un campione di 10 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare la probabilità che al massimo 4 di essi siano laureati

$$X \sim Binom(10, 0.253)$$

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$= \binom{10}{0} 0.253^0 (1 - 0.253)^{10} + \binom{10}{1} 0.253^1 (0.747)^9 + \binom{10}{2} 0.253^2 (0.747)^8 +$$

$$+ \binom{10}{3} 0.253^3 (0.747)^7 + \binom{10}{4} 0.253^4 (0.747)^6 = 0.918$$

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016).

d) Estratto a caso un campione di 10 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare il numero atteso di laureati, con la deviazione standard

$$X \sim Binom(10, 0.253)$$

$$E(X) = 10 \times 0.253 = 2.53$$

$$Var(X) = 10 \times 0.253 \times (1 - 0.253) = 2.53 \times 0.747 = 1.89$$

$$\Longrightarrow \ \sigma(X) = \sqrt{1.89} = 1.375$$

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016). Estratto a caso un campione di 150 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare

a) la probabilità che al massimo 20 di essi siano laureati;

b) la probabilità che il numero di laureati vari tra 30 e 40;

c) la probabilità che ci siano almeno 45 laureati.

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016). Estratto a caso un campione di 150 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare

a) la probabilità che al massimo 20 di essi siano laureati;

$$X \sim Binom(150, 0.253), \quad 150 \times 0.253 = 37.95, 150 \times 0.253 \times 0.747 = 28.35$$

$$P(X \leq 20) = \sum_{k=0}^{20} P(X = k) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \leq \frac{20 - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{X - 37.95}{\sqrt{28.35}} \leq \frac{20 - 37.95}{\sqrt{28.35}}\right) \approx P(Z \leq -3.37) \approx 0!$$

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un'altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016). Estratto a caso un campione di 150 italiani nella fascia d'età 30-34 anni, calcolare

b) la probabilità che il numero di laureati vari tra 30 e 40;

$$X \sim Binom(150, 0.253), E(X) = 37.95, Var(X) = 28.35$$

$$P(30 \leq X \leq 40) = \sum_{k=30}^{40} P(X = k) = P\left(\frac{30 - 37.95}{5.32} \leq \frac{X - 37.95}{5.32} \leq \frac{40 - 37.95)}{5.32}\right)$$

$$= P\left(-1.49 \leq \frac{X - 37.95)}{5.32} \leq 0.38\right) \approx P(-1.49 \leq Z \leq 0.38) = 0.64803 - 0.06811$$

$$= 0.57992$$

Esercizio 4

Nel XVIII rapporto Almalaurea si legge che la percentuale di persone in Italia fra i 30 ed i 34 anni che ha completato il ciclo di educazione terziaria (università o un’altra scuola tecnica) è del 25.3% (corriere.it, 27/04/2016). Estratto a caso un campione di 150 italiani nella fascia d’età 30-34 anni, calcolare

c) la probabilità che ci siano almeno 45 laureati;

$$X \sim Binom(150, 0.253), E(X) = 37.95, Var(X) = 28.35$$

$$P(X \geq 45) = \sum_{k=45}^{150} P(X = k) = P\left(\frac{X - 37.95}{5.32} \geq \frac{45 - 37.95)}{5.32}\right)$$

$$= P\left(\frac{X - 37.95}{5.32} \geq 1.32\right) \approx P(Z \geq 1.32) = 1 - 0.90658 = 0.09342$$

Esercizio 8

Lanciamo 100 volte una moneta che, ci hanno detto, non è truccata: otteniamo per 88 volte testa. Il risultato può farci dubitare della correttezza della moneta?

Esercizio 8

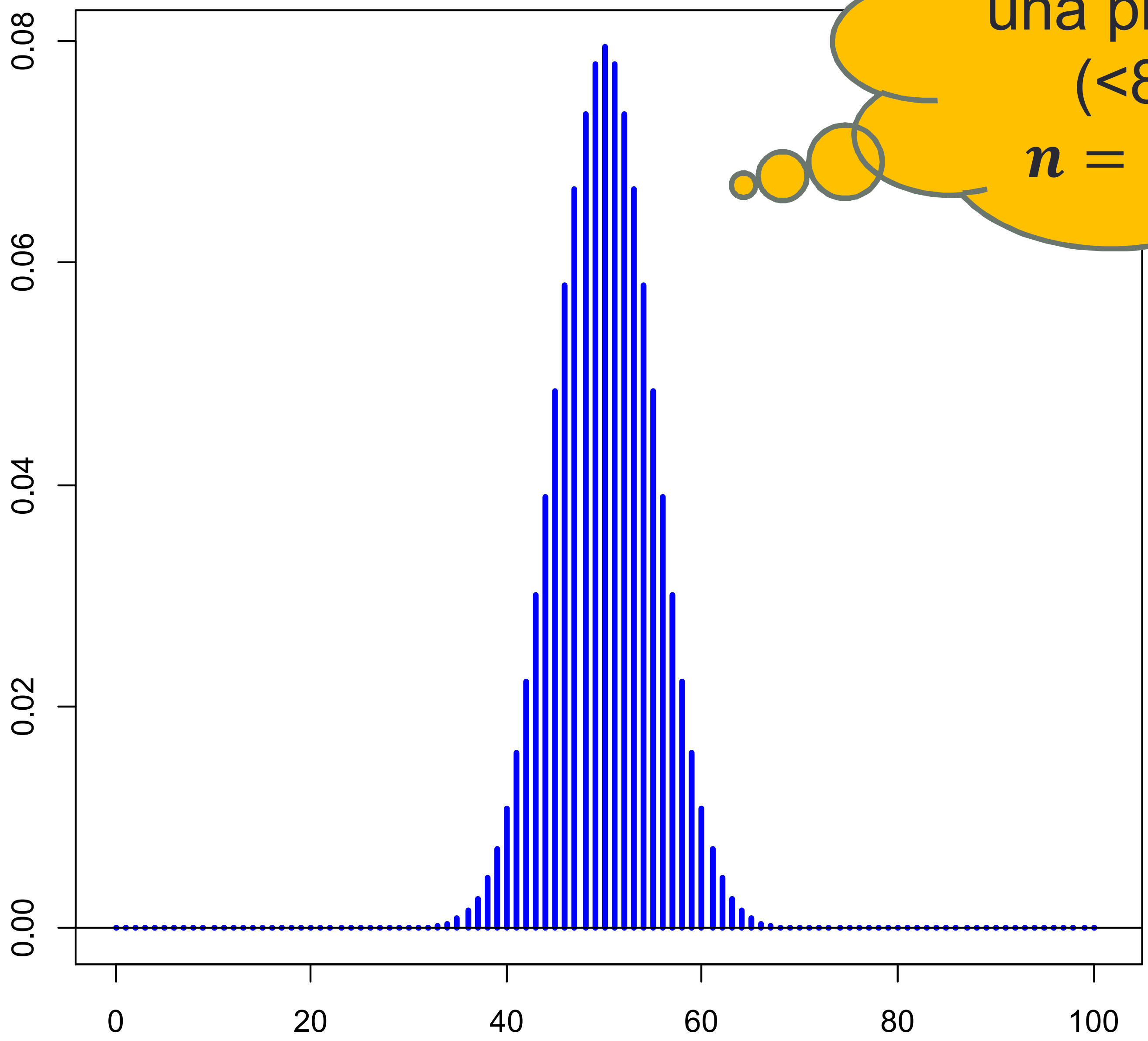
Lanciamo 100 volte una moneta che, ci hanno detto, non è truccata: otteniamo per 88 volte testa. Il risultato può farci dubitare della correttezza della moneta?

$$X \sim Binom(100, \mathbf{0.5}) \Longrightarrow$$

$$E(X) = 50 \; (\ll 88!), \qquad \sqrt{Var(X)} = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = 5$$

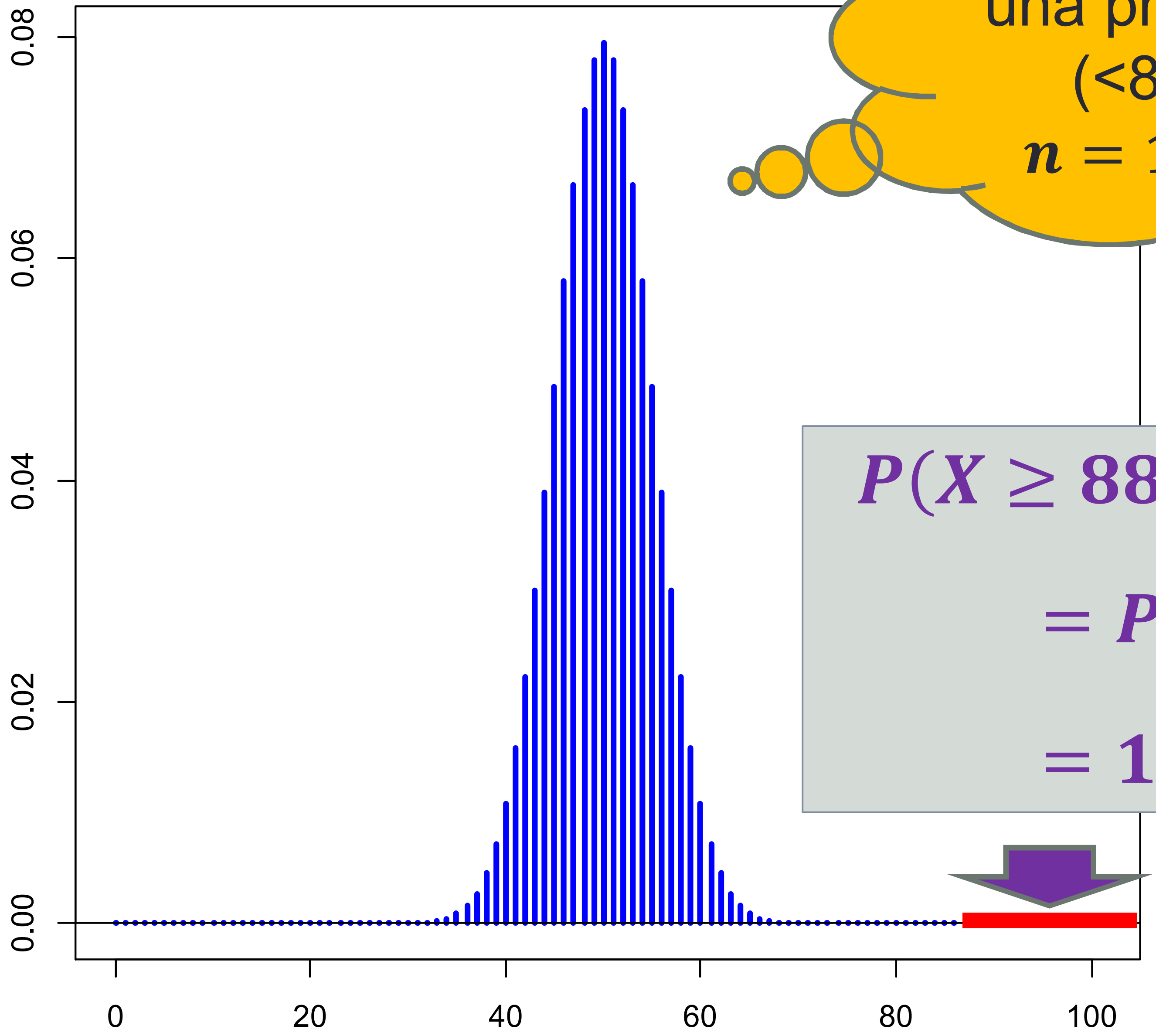
$$\boldsymbol{P(X = 88)} = \binom{100}{88} 0.5^{88} 0.5^{12} = 8.286361 \times 10^{-16}$$

Esercizio 8



OGNI risultato ha una probabilità bassa (<8%)!! Perchè $\boldsymbol{n = 100}$ è grande.

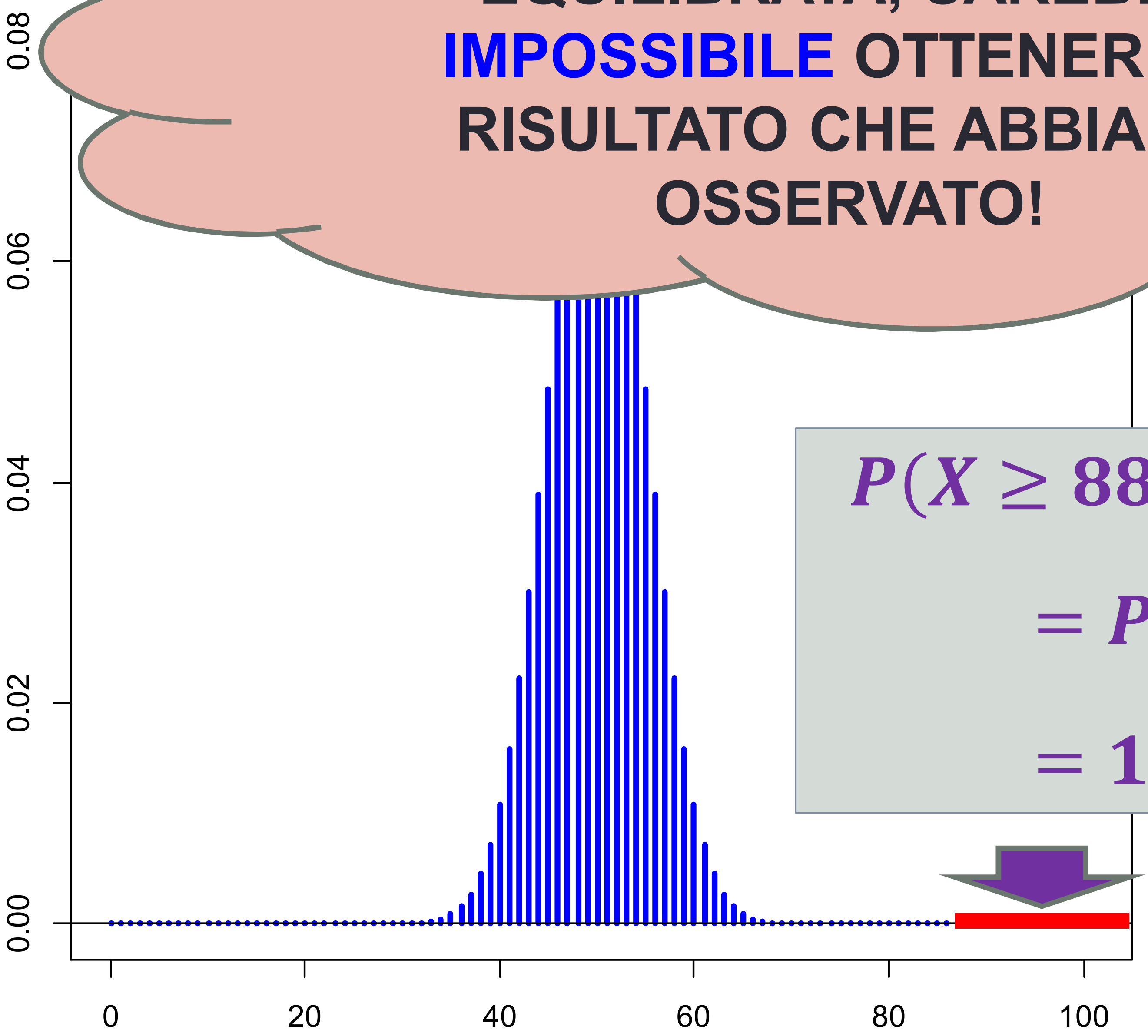
Esercizio 8



OGNI risultato ha una probabilità bassa (<8%)!! Perchè $\boldsymbol{n = 100}$ è grande.

$$\boldsymbol{P(X \geq 88) = P\left(Z \geq \frac{88-50}{5}\right) = 1 - \Phi(7.6) = 0!}$$

Eser



SE LA MONETA FOSSE EQUILIBRATA, SAREBBE IMPOSSIBILE OTTENERE IL RISULTATO CHE ABBIAMO OSSERVATO!

$$P(X \geq 88) = P\left(Z \geq \frac{88-50}{5}\right) = 1 - \Phi(7.6) = 0!$$

Per completezza

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

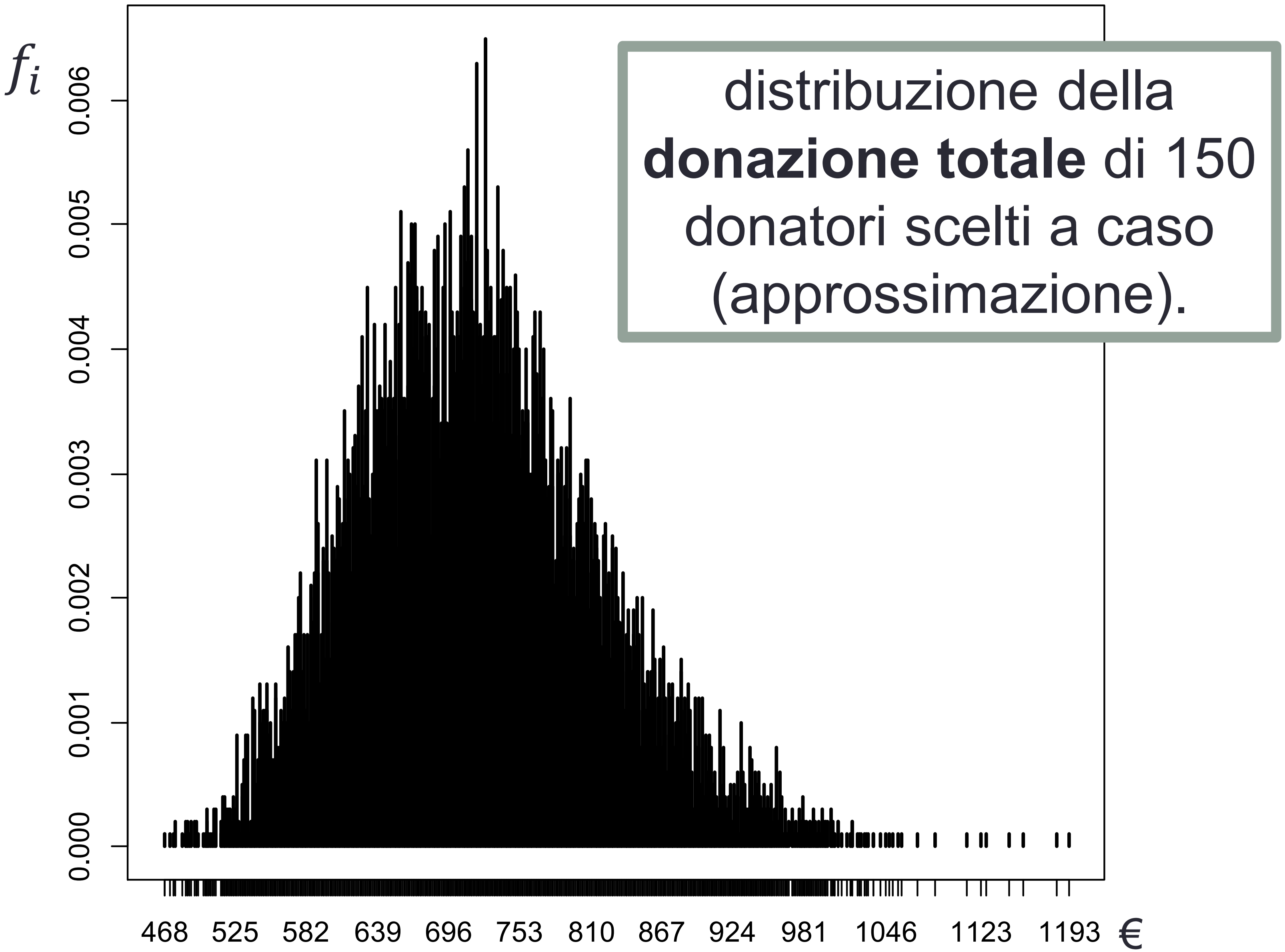
In un campione casuale di 150 donatori, qual è la probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$$\boldsymbol{P(Y > 900) = P\left(\frac{Y - 720}{94.55} > \frac{900 - 720}{94.55}\right) \approx P(Z > 1.90) =}$$
$$\boldsymbol{= 1 - \Phi(1.90) = 1 - 0.97128 = 0.02872}$$

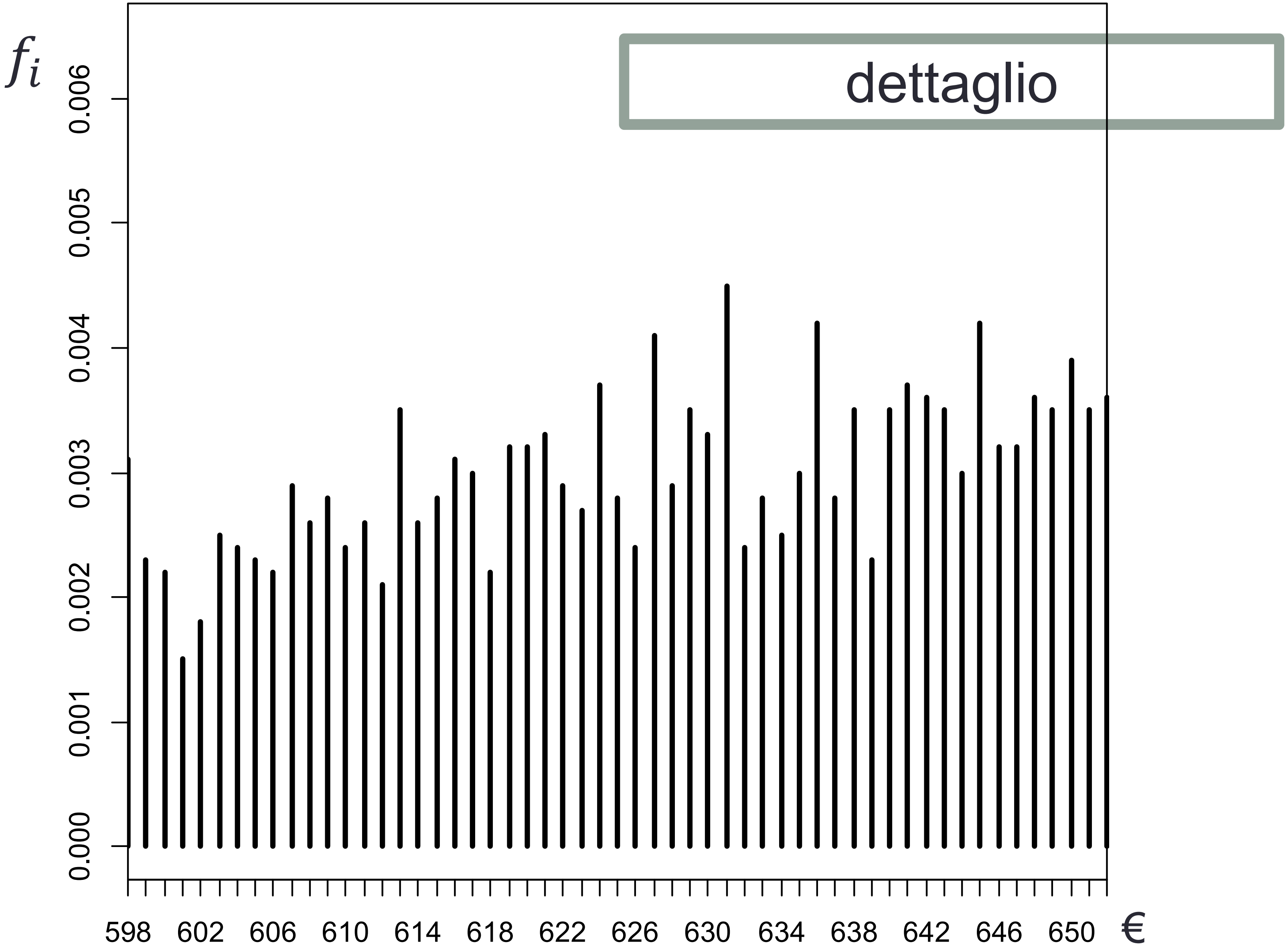
$$X_1, \dots, X_{150} \ \textbf{i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{150} \sim ???$$

$$E(Y) = 150 \times 4.80 = 720€ \qquad \sigma(Y) = \sqrt{150 \times 7.72^2} = 94.55€$$

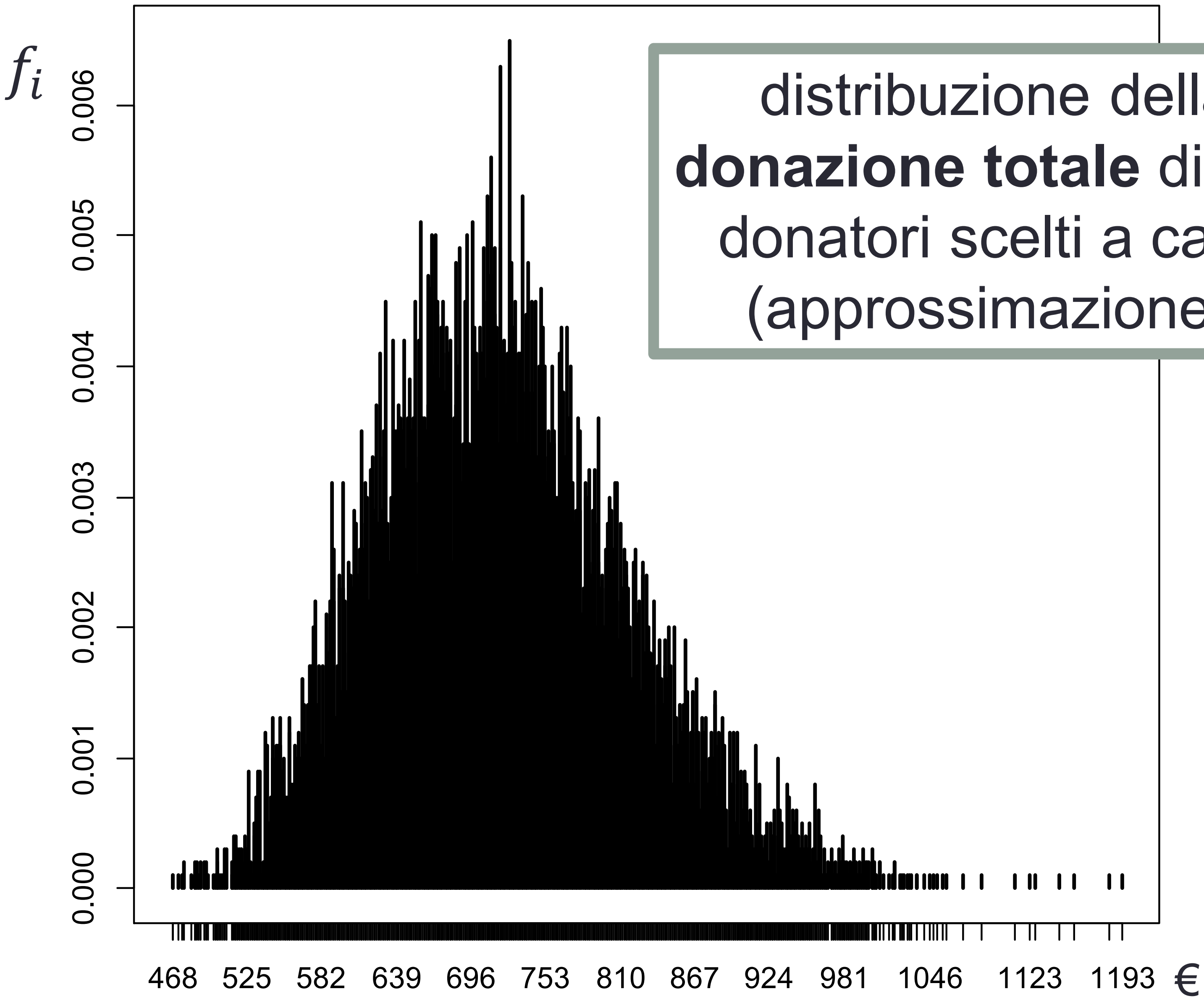
Per completezza



Per completezza

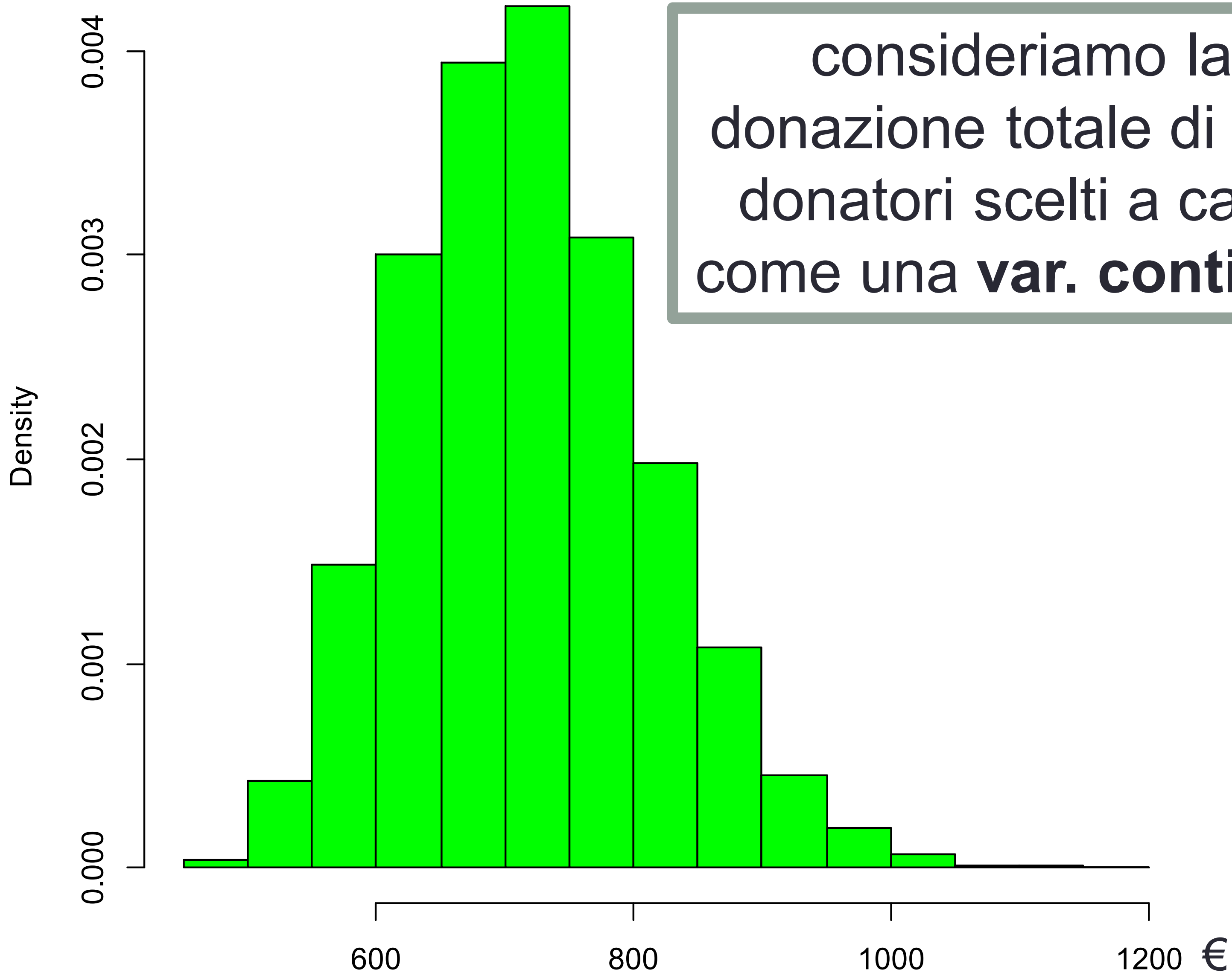


Per completezza, cont.



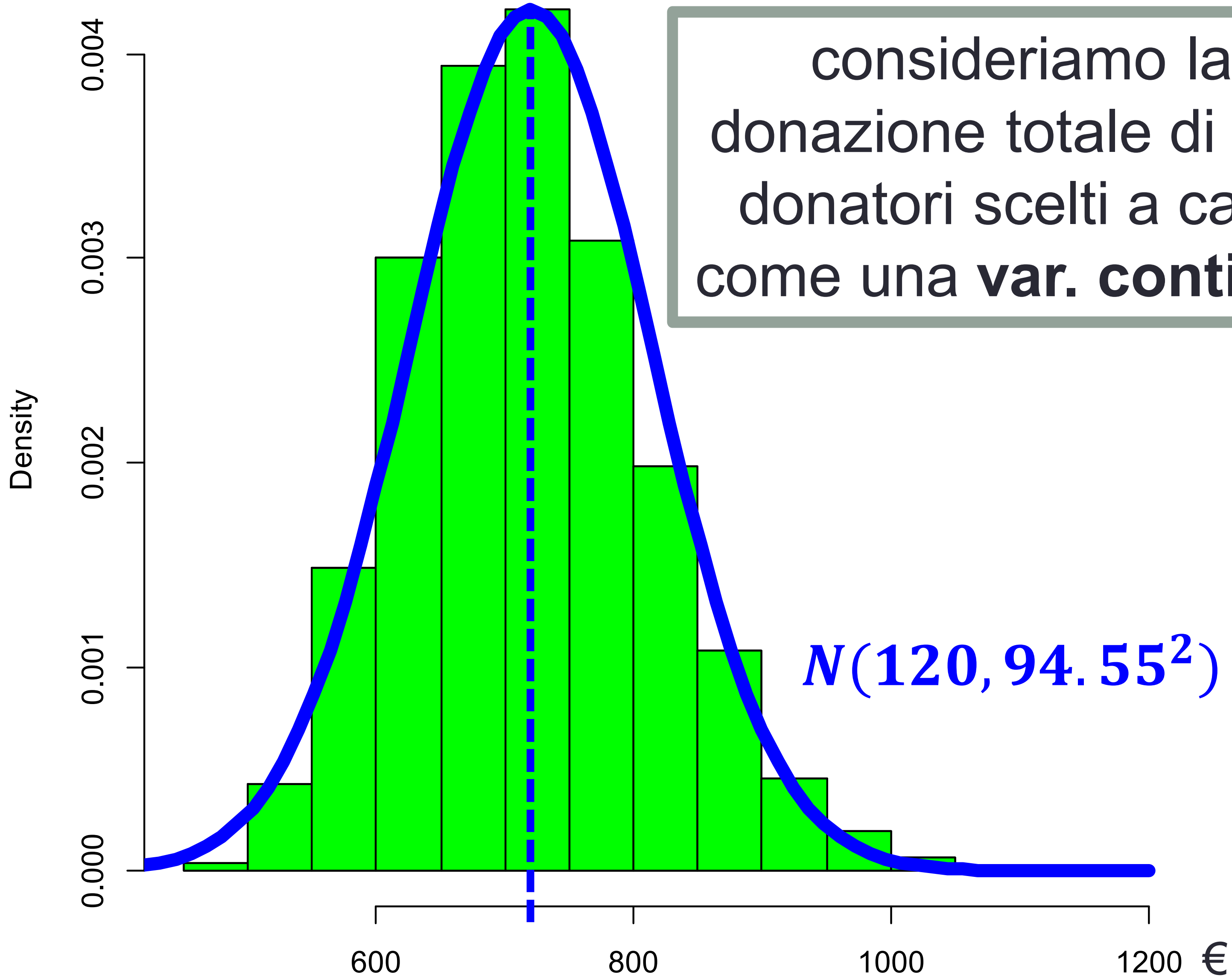
distribuzione della **donazione totale** di 150 donatori scelti a caso (approssimazione).

Per completezza, cont.



consideriamo la donazione totale di 150 donatori scelti a caso come una **var. continua**

Per completezza, cont.



consideriamo la donazione totale di 150 donatori scelti a caso come una **var. continua**

Per completezza, cont.

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

Quanti donatori dovranno partecipare alla campagna per avere il 90% di probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$X_1, \dots, X_{\boldsymbol{n}}$ **i.i.d.** $\Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{\boldsymbol{n}}$

$$E(Y) = \boldsymbol{n} \times 4.80€$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{\boldsymbol{n} \times 7.72^2€}$$

$$\boldsymbol{P(Y > 900) = 0.90}$$

Per completezza, cont.

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

Quanti donatori dovranno partecipare alla campagna per avere il 90% di probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$X_1, \dots, X_{\boldsymbol{n}}$ $\mathbf{i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{\boldsymbol{n}}$

$$E(Y) = \boldsymbol{n} \times 4.80€$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{\boldsymbol{n} \times 7.72^2}€$$

$$\mathbf{0.90} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} > \mathbf{900}) = \boldsymbol{P}\left(\frac{\boldsymbol{Y} - \mathbf{4.80}\boldsymbol{n}}{\sqrt{\mathbf{7.72}^2\boldsymbol{n}}} > \frac{\mathbf{900} - \mathbf{4.80}\boldsymbol{n}}{\sqrt{\mathbf{7.72}^2\boldsymbol{n}}}\right)$$

Per completezza, cont.

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

Quanti donatori dovranno partecipare alla campagna per avere il 90% di probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_n$$

$$E(Y) = n \times 4.80€$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{n \times 7.72^2}€$$

$$0.90 = P(Y > 900) = P\left(\underbrace{\boxed{\frac{Y - 4.80n}{\sqrt{7.72^2 n}}}}_{Z} > \frac{900 - 4.80n}{\sqrt{7.72^2 n}}\right)$$

Per completezza, cont.

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

Quanti donatori dovranno partecipare alla campagna per avere il 90% di probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$$X_1, \ldots, X_{\boldsymbol{n}} \ \mathbf{i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{\boldsymbol{n}}$$

$$E(Y) = \boldsymbol{n} \times 4.80€$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\boldsymbol{n} \times 7.72^2}€$$

$$\mathbf{0.90} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} > \mathbf{900}) = \boldsymbol{P}\left(\underbrace{\boxed{\frac{\boldsymbol{Y} - \mathbf{4.80}\boldsymbol{n}}{\sqrt{\mathbf{7.72}^2\boldsymbol{n}}}}}_{\boldsymbol{Z}} > \underbrace{\boxed{\frac{\mathbf{900} - \mathbf{4.80}\boldsymbol{n}}{\sqrt{\mathbf{7.72}^2\boldsymbol{n}}}}}_{\boldsymbol{z}_{\mathbf{0.10}}}\right)$$

Per completezza, cont.

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

Quanti donatori dovranno partecipare alla campagna per avere il 90% di probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$$X_1, \dots, X_{\boldsymbol{n}} \ \textbf{i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{\boldsymbol{n}}$$

$$E(Y) = n \times 4.80€$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{n \times 7.72^2}€$$

$$\frac{900 - 4.80n}{\sqrt{7.72^2 n}} = -1.285 \Leftrightarrow 4.80n - 9.92\sqrt{n} - 900 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{n \cong 218}$$