STATISTICA

Modelli probabilistici continui

Esercizio 3.5

Acquisto di un'azione per un controvalore di 65€, con l'intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell'azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

a) Prob. che il prezzo futuro sia minore di 20 €;

b) Prob. che il prezzo futuro sia maggiore di 30 €;

Esercizio 3.5

Acquisto di un'azione per un controvalore di 65€, con l'intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell'azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

a) Prob. che il prezzo futuro sia minore di 20 €;

b) Prob. che il prezzo futuro sia maggiore di 30 €;

$$X \sim N(65, 15^2)$$

$$P(X < 20) = P(X \leq 20) = P\left(\frac{X - 65}{15} \leq \frac{20 - 65}{15}\right) =$$

$$= P(Z \leq -3) = 0.00135$$

Esercizio 3.5

Acquisto di un'azione per un controvalore di 65€, con l'intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell'azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

a) Prob. che il prezzo futuro sia minore di 20 €;

b) Prob. che il prezzo futuro sia maggiore di 30 €;

$$\boldsymbol{\{P(65 - 3 \times 15 < X < 65 + 3 \times 15) = P(20 < X < 110) = 0.99730\}}$$

$$X \sim N(65, 15^2)$$

$$P(X < 20) = P(X \leq 20) = P\left(\frac{X - 65}{15} \leq \frac{20 - 65}{15}\right) =$$

$$= P(Z \leq -3) = 0.00135$$

Esercizio 3.5

Acquisto di un’azione per un controvalore di 65€, con l’intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell’azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

a) Prob. che il prezzo futuro sia minore di 20 €;

b) Prob. che il prezzo futuro sia maggiore di 30 €;

$$\{\boldsymbol{P(65-3\times 15<X<65+3\times 15)=P(20<X<110)=0.99730}\}$$

$$X \sim N(65, 15^2)$$

$$P(X>30)=1-P(X\leq 30)=1-P\left(\frac{X-65}{15}\leq\frac{30-65}{15}\right)=$$

$$1-P(Z\leq -2.3\bar{3})\ =1-0.0099=0.9901$$

Esercizio 3.5

Acquisto di un’azione per un controvalore di 65€, con l’intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell’azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

c) Sia $Y = X - 65$ (prezzo di vendita meno prezzo d’acquisto) il profitto dell’operazione. Qual è la prob. che il profitto sia maggiore di -10 € e minore di 20 € ?

Esercizio 3.5

Acquisto di un’azione per un controvalore di 65€, con l’intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell’azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

c) Sia $Y = X - 65$ (prezzo di vendita meno prezzo d’acquisto) il profitto dell’operazione. Qual è la prob. che il profitto sia maggiore di -10 € e minore di 20 € ?

$$Y = X - 65 \quad \Rightarrow \quad Y \sim N\big(E(X) - 65, Var(X)\big) = N(0, 15^2)$$

Esercizio 3.5

Acquisto di un'azione per un controvalore di 65€, con l'intenzione di tenerla in portafoglio per tre mesi e successivamente di venderla. Assumete che il prezzo futuro (*forward*) a tre mesi dell'azione si distribuisca secondo una legge Normale con media 65 € e deviazione standard di 15€.

c) Sia $Y = X - 65$ (prezzo di vendita meno prezzo d'acquisto) il profitto dell'operazione. Qual è la prob. che il profitto sia maggiore di -10 € e minore di 20 € ?

$$Y = X - 65 \quad \Rightarrow \quad Y \sim N\big(E(X) - 65, Var(X)\big) = N(0, 15^2)$$

$$P(-10 < Y < 20) = P\left(\frac{-10}{15} < \frac{Y}{15} < \frac{20}{15}\right) = P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq -0.66) =$$

$$= 0.90824 - 0.25463 = 0.65361$$

Esercizio 1

Per venire a fare lezione prendo il treno e poi la metro. Supponiamo che la durata del viaggio in treno sia una variabile gaussiana con media 55 min. e dev. stand. di 10 min., mentre la durata del viaggio in metro sia una gaussiana di media 20 min. con dev. stand. di 2 minuti. Come possiamo modellare il tempo che passo sui mezzi per arrivare in aula?

Esercizio 1

Per venire a fare lezione prendo il treno e poi la metro. Supponiamo che la durata del viaggio in treno sia una variabile gaussiana con media 55 min. e dev. stand. di 10 min., mentre la durata del viaggio in metro sia una gaussiana di media 20 min. con dev. stand. di 2 minuti. Come possiamo modellare il tempo che passo sui mezzi per arrivare in aula?

$X_T \sim N(55, 100)$, $\qquad X_M \sim N(20,4)$ $\qquad Y = X_T + X_M \sim ????$

Esercizio 1

Per venire a fare lezione prendo il treno e poi la metro. Supponiamo che la durata del viaggio in treno sia una variabile gaussiana con media 55 min. e dev. stand. di 10 min., mentre la durata del viaggio in metro sia una gaussiana di media 20 min. con dev. stand. di 2 minuti. Come possiamo modellare il tempo che passo sui mezzi per arrivare in aula?

$X_T \sim N(55, 100)$, $X_M \sim N(20,4)$

$$Y = X_T + X_M$$
$$Y \sim N(75, 100 + 4)$$

sotto l'ipotesi di indipendenza

Esercizio 1

Per venire a fare lezione prendo il treno e poi la metro. Supponiamo che la durata del viaggio in treno sia una variabile gaussiana con media 55 min. e dev. stand. di 10 min., mentre la durata del viaggio in metro sia una gaussiana di media 20 min. con dev. stand. di 2 minuti. Come possiamo modellare il tempo che passo sui mezzi per arrivare in aula?

$X_T \sim N(55, 100)$, $X_M \sim N(20,4)$

$$Y = X_T + X_M$$
$$Y \sim N(75,100+4)$$

sotto l'ipotesi di indipendenza

Quanto vale la probabilità che il tempo impiegato sui mezzi superi l'ora e mezza?

Esercizio 1

Per venire a fare lezione prendo il treno e poi la metro. Supponiamo che la durata del viaggio in treno sia una variabile gaussiana con media 55 min. e dev. stand. di 10 min., mentre la durata del viaggio in metro sia una gaussiana di media 20 min. con dev. stand. di 2 minuti. Quanto vale la probabilità che il tempo impiegato sui mezzi superi l'ora e mezza?

$X_T \sim N(55, 100)$, $\quad X_M \sim N(20,4)$

$$Y = X_T + X_M$$

$$Y \sim N(75, 100 + 4)$$

sotto l'ipotesi di indipendenza

$$P(Y > 90) = 1 - P(Y \leq 90) = 1 - P\left(\frac{Y - 75}{\sqrt{104}} \leq \frac{90 - 75}{\sqrt{104}}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.92922 = 0.07078$$

Esercizio 2

La percentuale nella popolazione italiana di soggetti con un basso livello di istruzione è del 22.4%. Estratto un campione casuale di 150 italiani, qual è la probabilità che meno di 30 abbiano un basso livello di istruzione?

Esercizio 2

La percentuale nella popolazione italiana di soggetti con un basso livello di istruzione è del 22.4%. Estratto un campione casuale di 150 italiani, qual è la probabilità che meno di 30 abbiano un basso livello di istruzione?

$$X_1, \ldots, X_{150} \ \mathbf{i.i.d.}, \qquad X_i \sim b(0.224\,)$$
$$\Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{150} \sim Bin(150{,}0.224)$$

$$P(Y < 30) = \sum_{k=0}^{29} \binom{150}{k} 0.224^k \, (1 - 0.224)^{150-k} = 0.21288$$

Esercizio 2

La percentuale nella popolazione italiana di soggetti con un basso livello di istruzione è del 22.4%. Estratto un campione casuale di 150 italiani, qual è la probabilità che meno di 30 abbiano un basso livello di istruzione?

$$X_1, \dots, X_{150} \ \mathbf{i.i.d.}, \qquad X_i \sim b(0.224\ )$$
$$\Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{150} \sim Bin(150{,}0.224)$$

$$P(Y < 30) = \sum_{k=0}^{29} \binom{150}{k} 0.224^k \, (1 - 0.224)^{150-k} = 0.21288$$

appross. con la $N(150 \times 0.224, 150 \times 0.224(1 - 0.224))$ se

$$\boxed{150 \times 0.224 = 33.6 \geq 5 \ \& \ 150 \times (1 - 0.224) = 116.4 \geq 5}$$

Esercizio 2

La percentuale nella popolazione italiana di soggetti con un basso livello di istruzione è del 22.4%. Estratto un campione casuale di 150 italiani, qual è la probabilità che meno di 30 abbiano un basso livello di istruzione?

$$X_1, \ldots, X_{150} \textbf{ i.i.d.}, \qquad X_i \sim b(0.224)$$

$$\Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{150} \sim Bin(150, 0.224) \approx N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = 150 \times 0.224 = 33.6, \sigma^2 = 33.6 \times 0.776 = 26.074$$

$$\boldsymbol{P(Y < 30) = P\left(\frac{Y - 33.6}{\sqrt{26.074}} < \frac{30 - 33.6}{5.11}\right) \approx P(Z < -0.71) = 0.23885}$$

$$P(Y < 30) = 0.21288$$

Esercizio 3

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

In un campione casuale di 150 donatori, qual è la probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$$X_1, \dots, X_{150} \ \mathbf{i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{150} \sim ???$$

$$E(\boldsymbol{X_1} + \cdots + \boldsymbol{X_{150}}) = 150 \times 4.80 = 720€$$

$$\sigma(\boldsymbol{X_1} + \cdots + \boldsymbol{X_{150}}) = \sqrt{150 \times 7.72^2} = 94.55€$$

Esercizio 3

Una Onlus ogni anno fa una campagna di raccolta fondi tramite sms e telefonate da fisso. Con un sms si donano 2 euro, con una telefonata da fisso si possono donare 5, 10 o 50 euro. Dai dati delle campagne precedenti si sono calcolate le frequenze delle donazioni:

euro	2	5	10	50
%	65%	20%	12.5%	2.5%

In un campione casuale di 150 donatori, qual è la probabilità di raccogliere almeno 900€ ?

$$\boldsymbol{P(Y > 900) = P\left(\frac{Y-720}{94.55} > \frac{900-720}{94.55}\right) \approx P(Z > 1.90) =}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \Phi(1.90) = 1 - 0.97128 = 0.02872}$$

$$X_1, \dots, X_{150}\ \textbf{i.i.d.} \Longrightarrow Y = X_1 + \cdots + X_{150} \sim ???$$

$$E(Y) = 150 \times 4.80 = 720€ \qquad \sigma(Y) = \sqrt{150 \times 7.72^2} = 94.55€$$