# PROBABILITÀ

**Dipendenza ed indipendenza - II**

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T

b) della sequenza di tutte C

c) della sequenza: T T C T C C C T C T

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

**indipendenza?!?**

a) della sequenza di tutte T
b) della sequenza di tutte C
c) della sequenza: T T C T C C C T C T
d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T
e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) **della sequenza di tutte T** $\mathbf{0.5^{10}}$

b) della sequenza di tutte C

c) della sequenza: T T C T C C C T C T

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T $0.5^{10}$

b) **della sequenza di tutte C** $\mathbf{0.5^{10}}$

c) della sequenza: T T C T C C C T C T

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T $0.5^{10}$

b) della sequenza di tutte C $0.5^{10}$

c) **della sequenza: T T C T C C C T C T** $\mathbf{0.5^{10}}$

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T $0.5^{10}$

b) della sequenza di tutte C $0.5^{10}$

c) della sequenza: T T C T C C C T C T $0.5^{10}$

d) **che la sequenza contenga almeno 1 volta T**

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

**T** CCCCCCCCC
C **T**CCCCCCCC
…
CC CC **T**
**T** **T** CCCCCCCC
…

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T $0.5^{10}$

b) della sequenza di tutte C $0.5^{10}$

c) della sequenza: T T C T C C C T C T $0.5^{10}$

d) **che la sequenza contenga almeno 1 volta T**

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

**T** CCCCCCCCC
C **T**CCCCCCCC
…
CC CC **T**
**T T** CCCCCCCC
…

**= 1 – P( *NESSUNA* T)=**
**P(CCCCCCCCCC) =** $\mathbf{0.5^{10}}$
**come in b)**

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T $0.5^{10}$

b) della sequenza di tutte C $0.5^{10}$

c) della sequenza: T T C T C C C T C T $0.5^{10}$

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) **che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C**

# Esercizio 3

Immaginiamo di lanciare una moneta equilibrata 10 volte. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T $0.5^{10}$

b) della sequenza di tutte C $0.5^{10}$

c) della sequenza: T T C T C C C T C T $0.5^{10}$

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) **che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | T | | T | | T | | | T | |

Scelgo 4 posizioni distinte tra le 10 disponibili in cui mettere T e in tutte le altre caselle va C: posso fare questa scelta in

$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210$ modi $\Rightarrow$ $\binom{10}{4} \times 0.5^{10}$

# Esercizio 4

Immaginiamo di lanciare una moneta *taroccata* a favore di T: P(T)=0.65. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T

b) della sequenza di tutte C

c) della sequenza: T T C T C C C T C T

d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T

e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

# Esercizio 4, di compito

Immaginiamo di lanciare una moneta *taroccata* a favore di T: P(T)=0.65. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T
b) della sequenza di tutte C
c) della sequenza: T T C T C C C T C T
d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T
e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

**SUGGERIMENTO**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | C | T | C | T | C | C | T | C |
| 0.65 | 0.65 | 0.35 | 0.65 | 0.35 | 0.65 | 0.35 | 0.35 | 0.65 | 0.35 |

# Esercizio 4, di compito

Immaginiamo di lanciare una moneta *taroccata* a favore di T: P(T)=0.65. Calcolare la probabilità:

a) della sequenza di tutte T
b) della sequenza di tutte C
c) della sequenza: T T C T C C C T C T
d) che la sequenza contenga almeno 1 volta T
e) che la sequenza contenga esattamente 4T e 6C

**SUGGERIMENTO**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | C | T | C | T | C | C | T | C |
| 0.65 | 0.65 | 0.35 | 0.65 | 0.35 | 0.65 | 0.35 | 0.35 | 0.65 | 0.35 |

$$\mathbf{0.65}^{num\ di\ T} \times \mathbf{0.35}^{num\ di\ C} = \mathbf{0.65}^{5} \times \mathbf{0.35}^{5}$$

# Esercizio 5

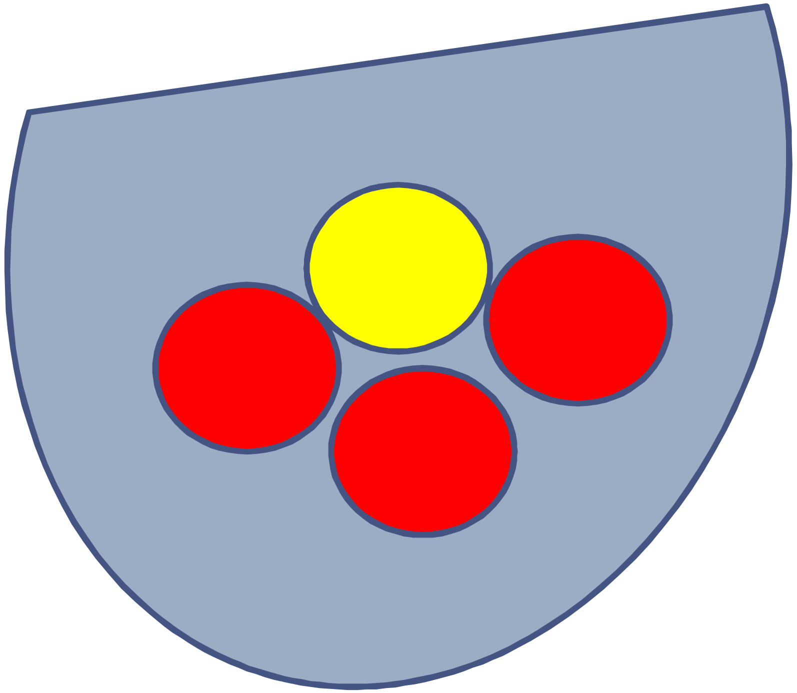
Se uno studente di Statistica viene all’esame senza aver studiato e tira ad indovinare la risposta delle 8 domande a scelta multipla, che hanno 4 risposte possibili, che probabilità ha di indovinarle tutte?

# Esercizio 7

sceglie a caso

Se uno studente … all'esame senza aver studiato e **tira ad indovinare** la risposta delle 8 domande a scelta multipla, che hanno **4 risposte possibili**, che probabilità ha di indovinarle tutte?

Ad ogni "estrazione" lo studente può dare la risposta **C**orretta, con probabilità: $0.25$ oppure quella **S**bagliata con probabilità $0.75$

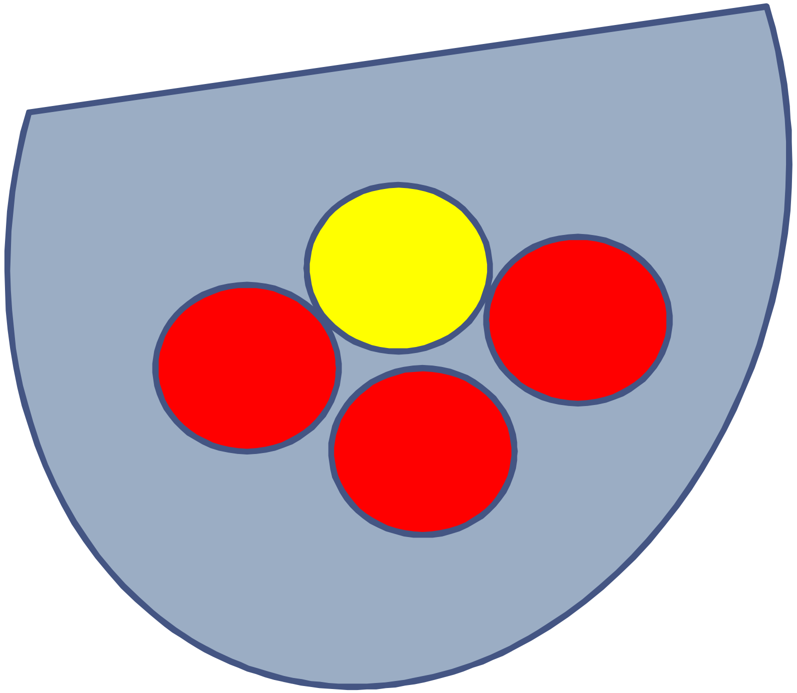


# Eserci

**sceglie a caso**

Se uno stude … ll'esame senza aver studiato e **tira ad indovinare** la risposta delle 8 domande a scelta multipla, che hanno **4 risposte possibili**, che probabilità ha di indovinarle tutte?

Ad ogni "estrazione" lo studente può dare la risposta **C**orretta, con probabilità: $0.25$ oppure quella **S**bagliata con probabilità $0.75$



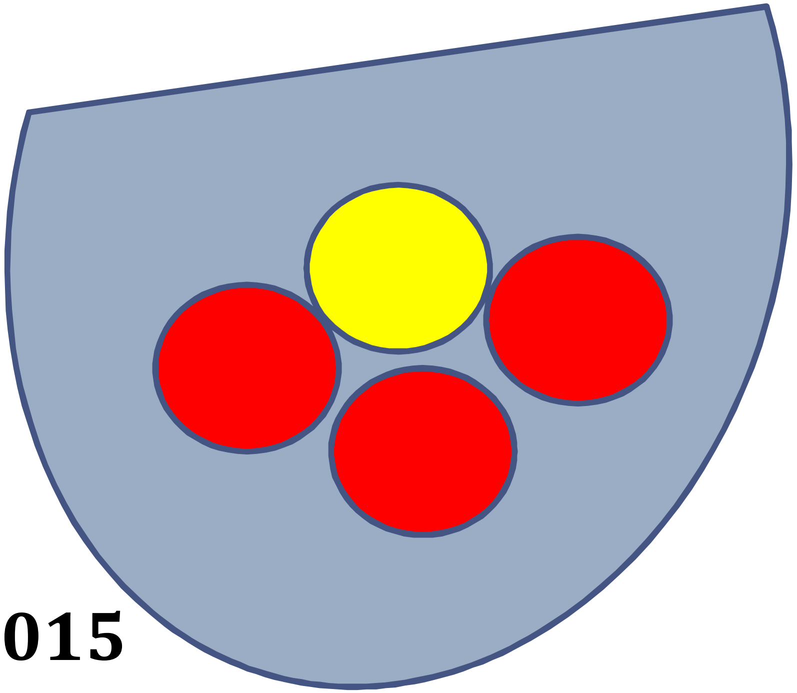
$$P(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_8) =$$

# Eserci

**sceglie a caso**

Se uno stude ll'esame senza aver studiato e **tira ad indovinare** la risposta delle 8 domande a scelta multipla, che hanno **4 risposte possibili**, che probabilità ha di indovinarle tutte?

Ad ogni "estrazione" lo studente può dare la risposta **C**orretta, con probabilità: $0.25$ oppure quella **S**bagliata con probabilità $0.75$



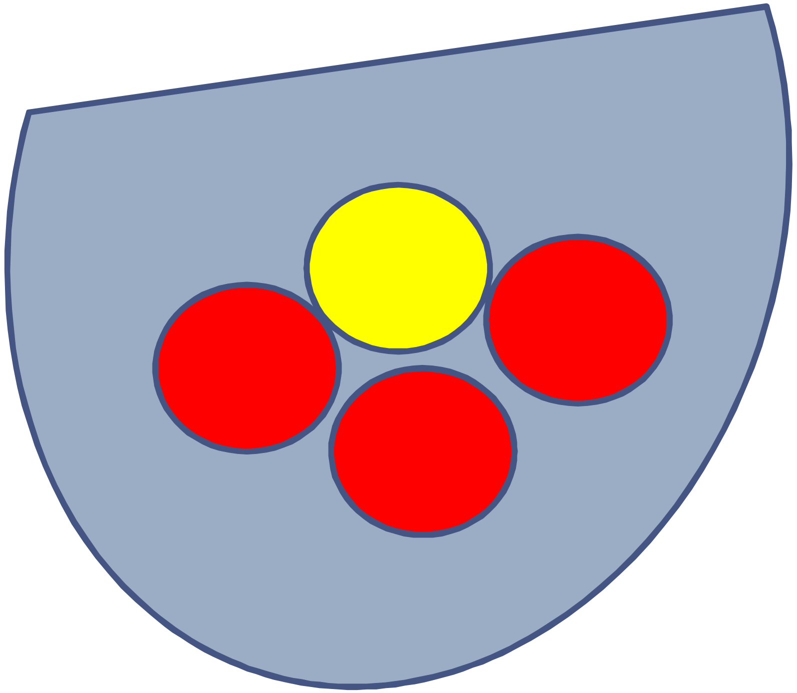
$$P(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_8) = 0.25^8 = \mathbf{0.000015}$$

indipendenza

# Esercizio 5

Se uno studente di Statistica viene all’esame senza aver studiato e **tira ad indovinare** la risposta delle 8 domande a scelta multipla, che hanno **4 risposte possibili**, che probabilità ha di indovinarle tutte?

Se ha risposto correttamente alle prime 4 domande, che probabilità ha di rispondere correttamente anche alla quinta domanda?

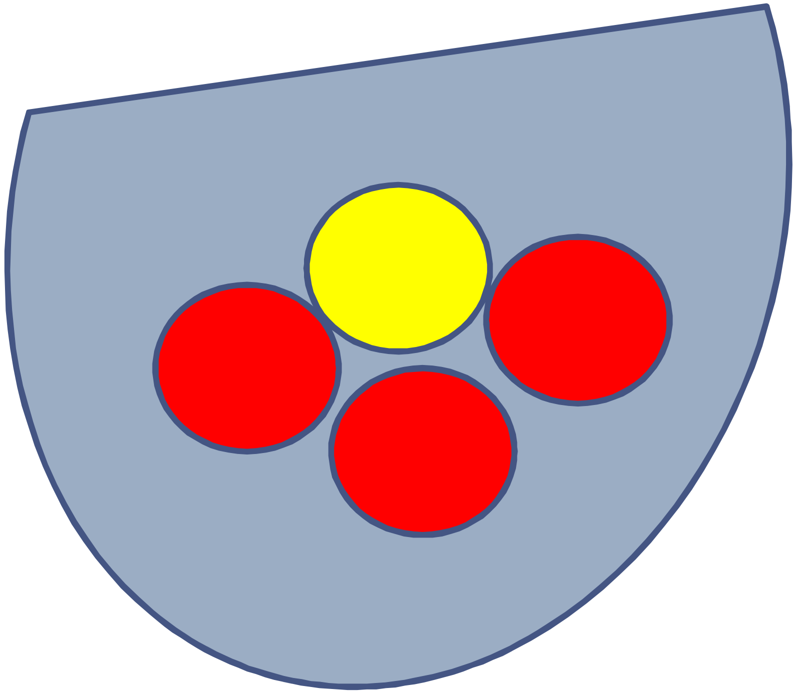


# Esercizio 5

Se uno studente di Statistica viene all'esame senza aver studiato e **tira ad indovinare** la risposta delle 8 domande a scelta multipla, che hanno **4 risposte possibili**, che probabilità ha di indovinarle tutte?

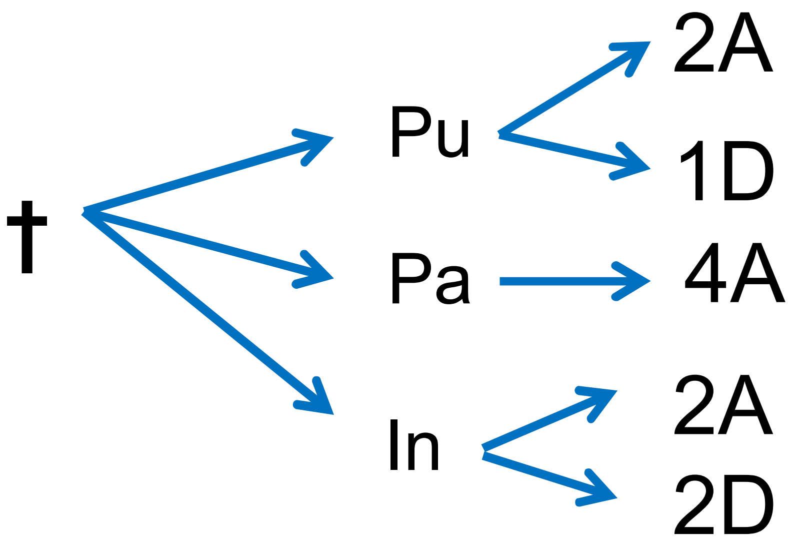
Se ha risposto correttamente alle prime 4 domande, che probabilità ha di rispondere correttamente anche alla quinta domanda?

**SEMPRE 0.25!**



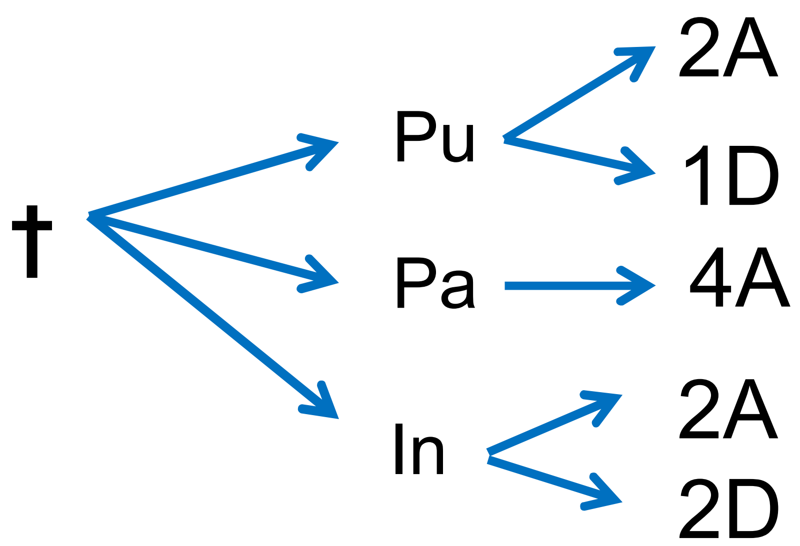
# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!



# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!

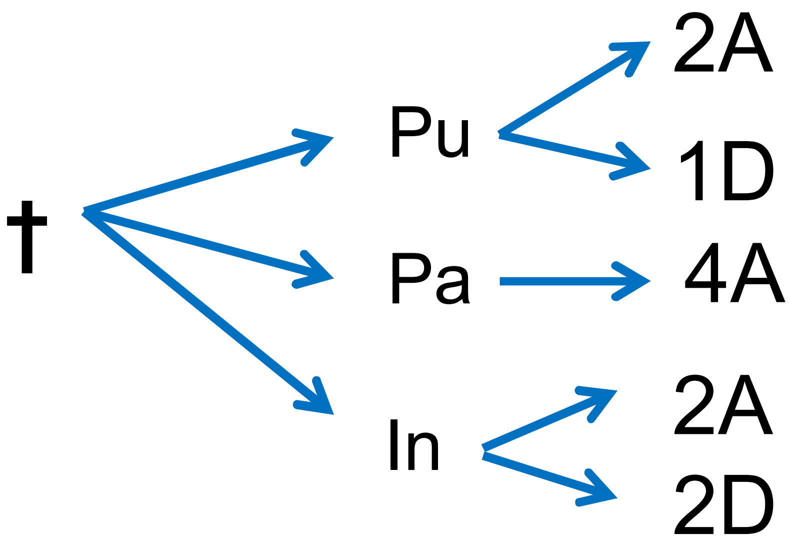



$$P(A) = P(In \cap A) + P(Pa \cap A) + P(Pu \cap A) =$$

$$= P(A|In)P(In) + P(A|Pa)P(Pa) + P(A|Pu)P(Pu) =$$

# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!



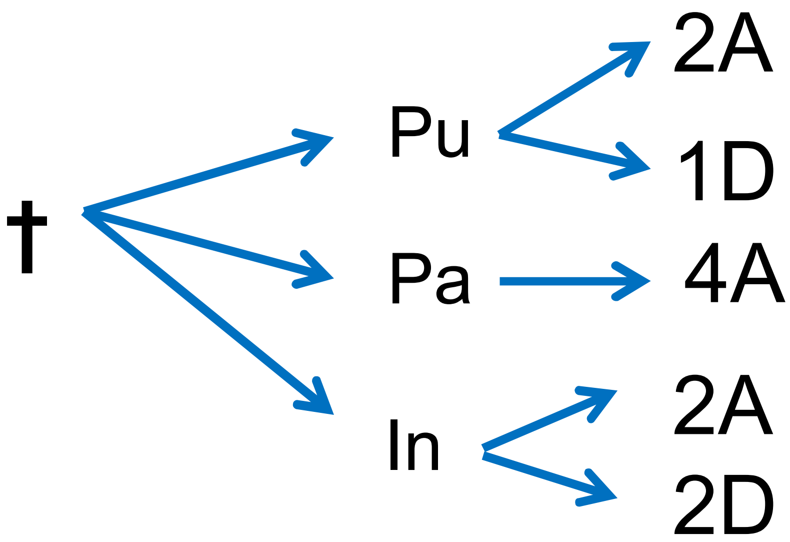

$$P(A) = P(A|In)P(In) + P(A|Pa)P(Pa) + P(A|Pu)P(Pu) =$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6 + 12 + 8}{36} = \frac{26}{36}$$

$72\%$

# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!

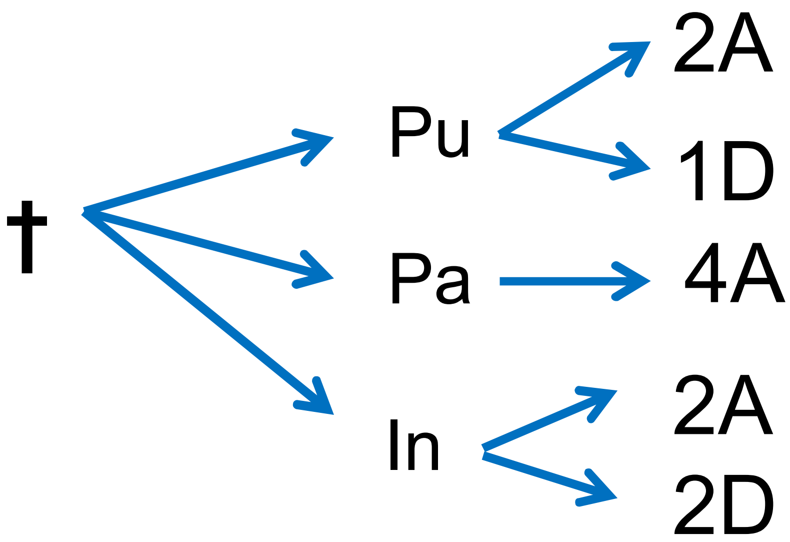



$$P(A) = \frac{26}{36} = 72\%$$

$$P(Pa|A) = \frac{P(Pa \cap A)}{P(A)} =$$

# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!



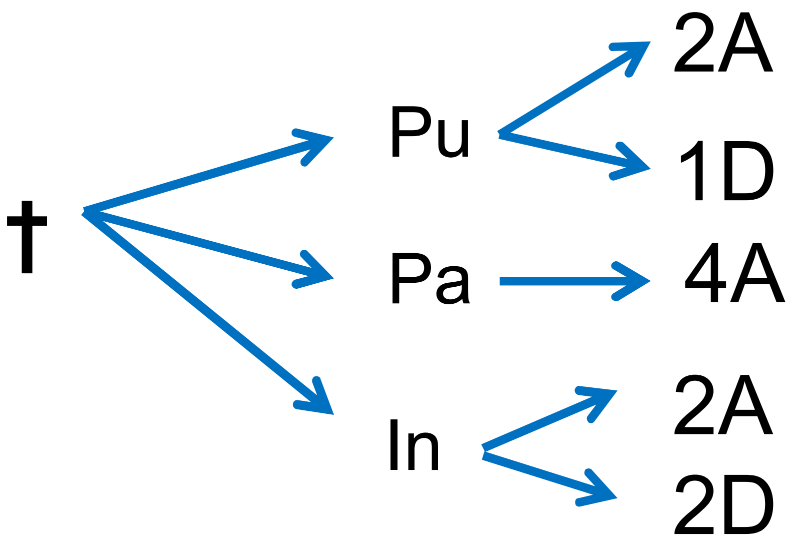

$$P(A) = \frac{26}{36} = 72\%$$

$$P(Pa|A) = \frac{P(Pa \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|Pa)P(Pa)}{P(A)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{26}{36}} = \frac{1}{3} \times \frac{36}{26} = \frac{12}{26}$$

$$46\%$$

# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!



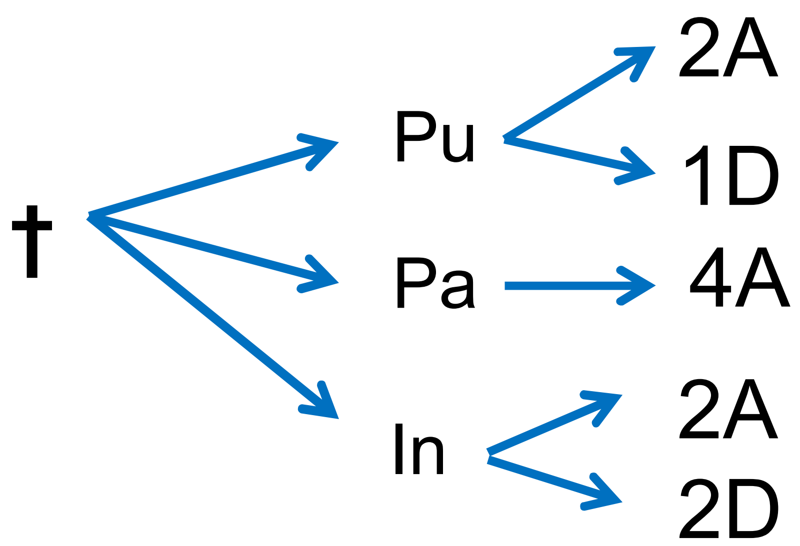

$$P(A) = P(A|In)P(In) + \boxed{P(A|Pa)P(Pa)} + P(A|Pu)P(Pu) =$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6 + 12 + 8}{36} = \boxed{\frac{26}{36}}$$

$72\%$

# Angeli e demoni

**Es. 1.6, p. 29** - modificato… in stile dantesco!



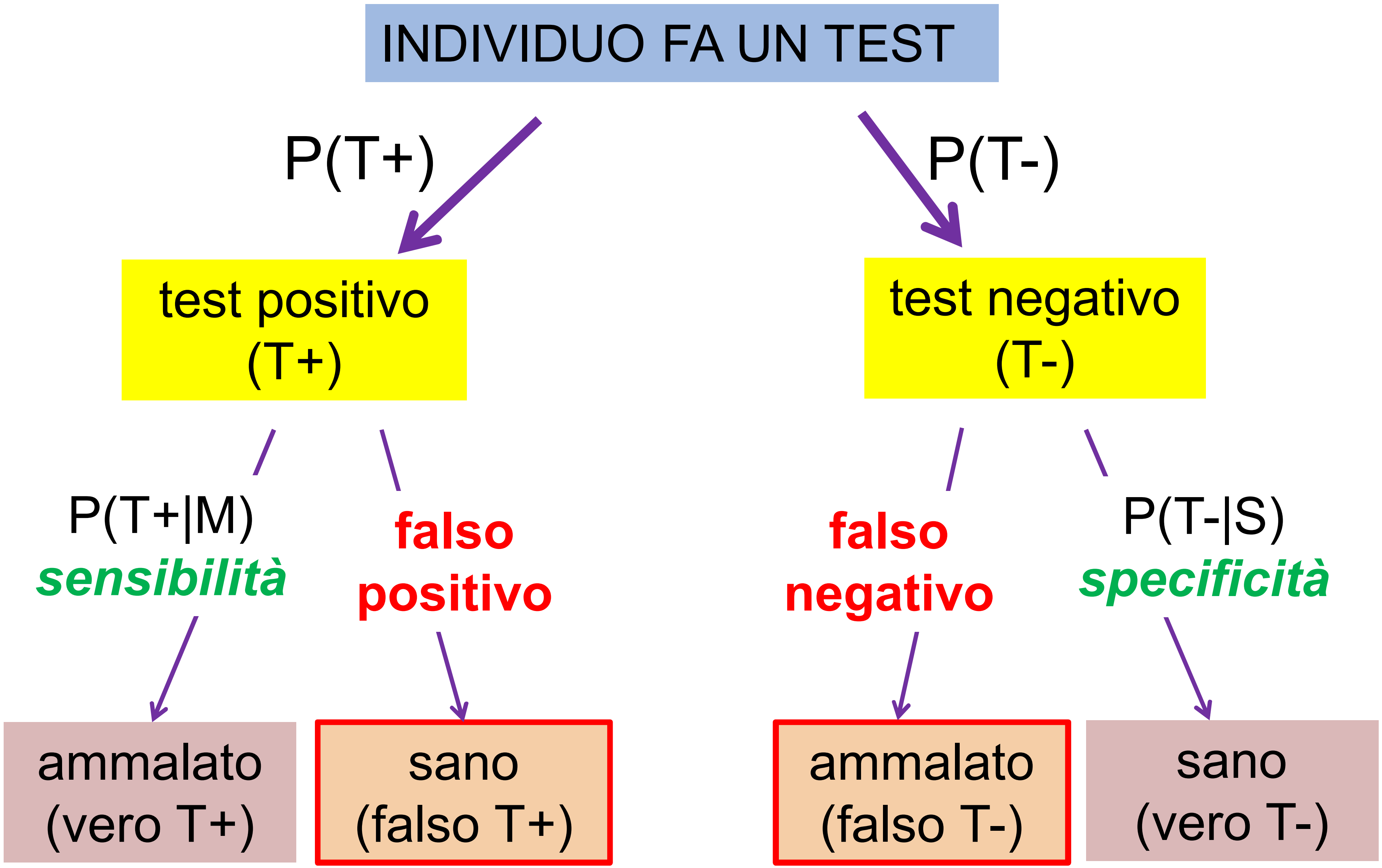

Compito: avendo visto un angelo, la porta del Paradiso è quella più probabile?

$$P(A) = P(A|In)P(In) + \boxed{P(A|Pa)P(Pa)} + P(A|Pu)P(Pu) =$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6+12+8}{36} = \boxed{\frac{26}{36}}$$

72%

# Gli esami clinici



# Gli esami clinici

$p = P(M)$ *prevalenza* : prob. che ad un certo tempo *t* una persona scelta a caso nella popolazione sia malata

***Io*** mi sottopongo al test T con $P(T+|M) = \alpha$ e $P(T-|S) = \beta$

$$P(M|T+) =$$

$$P(S|T-) =$$

# Gli esami clinici

$p = P(M)$ *prevalenza* : prob. che ad un certo tempo *t* una persona scelta a caso nella popolazione sia malata

***Io*** mi sottopongo al test T con $P(T+|M) = \alpha$ e $P(T-|S) = \beta$

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)P(M)}{P(T+|M)P(M)+P(T+|S)P(S)} = \frac{\alpha p}{\alpha p+(1-\beta)(1-p)}$$

$$P(S|T-) =$$

# Gli esami clinici

$p = P(M)$ *prevalenza* : prob. che ad un certo tempo *t* una persona scelta a caso nella popolazione sia malata

***Io*** mi sottopongo al test T con $P(T+|M) = \alpha$ e $P(T-|S) = \beta$

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)P(M)}{P(T+|M)P(M)+P(T+|S)P(S)} = \frac{\alpha p}{\alpha p+(1-\beta)(1-p)}$$

$$P(S|T-) = \frac{P(T-|S)P(S)}{P(T-|S)P(S)+P(T-|M)P(M)} = \frac{\beta(1-p)}{\beta(1-p)+(1-\alpha)p}$$

# Gli esami clinici

$p = P(M)$ *prevalenza* : prob. che ad un certo tempo *t* una persona scelta a caso nella popolazione sia malata

***Io*** mi sottopongo al test T con $P(T+|M) = \alpha$ e $P(T-|S) = \beta$

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)P(M)}{P(T+|M)P(M)+P(T+|S)P(S)} = \frac{\alpha p}{\alpha p+(1-\beta)(1-p)}$$

$$= 0.845$$

$p = 0.10$, $\alpha = 0.98$, $\beta = 0.98$

$$= 0.998$$

$$P(S|T-) = \frac{P(T-|S)P(S)}{P(T-|S)P(S)+P(T-|M)P(M)} = \frac{\beta(1-p)}{\beta(1-p)+(1-\alpha)p}$$

# Gli esami clinici

$p = P(M)$ *prevalenza* : prob. che ad un certo tempo *t* una persona scelta a caso nella popolazione sia malata

***Io*** mi sottopongo al test T con $P(T+|M) = \alpha$ e $P(T-|S) = \beta$

$$P(M|T+) = \frac{P(T+|M)P(M)}{P(T+|M)P(M)+P(T+|S)P(S)} = \frac{\alpha p}{\alpha p+(1-\beta)(1-p)}$$

$= 0.845$

$p = 0.10$, $\alpha = 0.98$, $\beta = 0.98$

$= 0.998$

$$P(S|T-) = \frac{P(T-|S)P(S)}{P(T-|S)P(S)+P(T-|M)P(M)} = \frac{\beta(1-p)}{\beta(1-p)+(1-\alpha)p}$$

compito: con questi numeri, calcolate $P(T+)$, la prob. che il test risulti positivo.

# Esercizio 6

Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando tre volte un dado equilibrato?

# Esercizio 6

Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando tre volte un dado equilibrato?

SNN, NSN,NNS,
SSN, SNS, NSS,
SSS (S=esce 6)

# Esercizio 6

Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando tre volte un dado equilibrato?

SNN, NSN,NNS,
SSN, SNS, NSS,
SSS (S=esce 6)

$$= 1 - \underbrace{\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}}_{\text{tutti} \neq 6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{125}$$

# Esercizio 6

Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando tre volte un dado equilibrato?

$$= \frac{91}{125} = 0.58$$

Qual è la probabilità che lanciando successivamente un dado equilibrato, la prima volta del 6 sia al quinto lancio?

# Esercizio 6

Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando tre volte un dado equilibrato?

$$= \frac{91}{125} = 0.58$$

Qual è la probabilità che lanciando successivamente un dado equilibrato, la prima volta del 6 sia al quinto lancio?

$$P(N \cap N \cap N \cap N \cap S) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} = 0.08$$

# Esercizio 6

Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando tre volte un dado equilibrato?

$$= \frac{91}{125} = 0.58$$

Qual è la probabilità che lanciando successivamente un dado equilibrato, la prima volta del 6 sia al quinto lancio?

$$P(N \cap N \cap N \cap N \cap S) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} = 0.08$$

Se al quarto lancio non è ancora uscito il 6, qual è la probabilità che esca al quinto?

# Esercizio 7

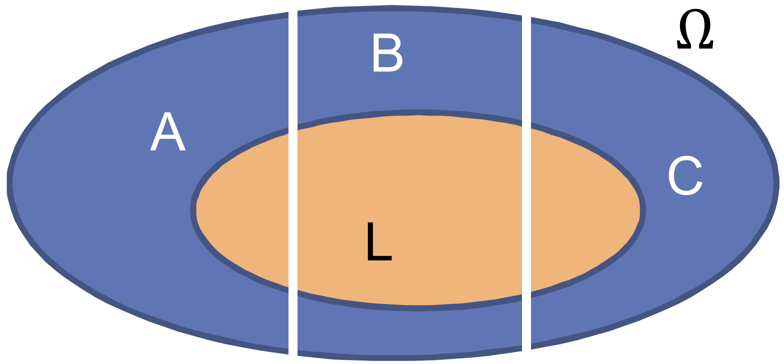
Un centralino ha tre linee telefoniche A, B, C che risultano libere con probabilità 0.7, 0.2, 0.3 rispettivamente. Componendo a caso uno dei tre numeri, qual è la probabilità di trovare la linea libera?

# Esercizio 7

Un centralino ha tre linee telefoniche A, B, C che risultano libere con probabilità 0.7, 0.2, 0.3 rispettivamente. Componendo a caso uno dei tre numeri, qual è la probabilità di trovare la linea libera?

Consideriamo gli eventi:

A = si compone il numero A
B = si compone il numero B
C = si compone il numero C
L = la linea è libera



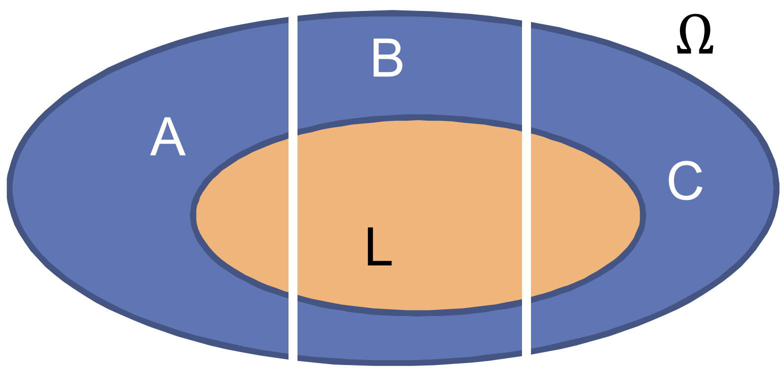

$$P(L) = P(A \cap L) + P(B \cap L) + P(C \cap L) =$$

# Esercizio 7

Un centralino ha tre linee telefoniche A, B, C che risultano libere con probabilità 0.7, 0.2, 0.3 rispettivamente. Componendo a caso uno dei tre numeri, qual è la probabilità di trovare la linea libera?

Consideriamo gli eventi:

A = si compone il numero A
B = si compone il numero B
C = si compone il numero C
L = la linea è libera




$$\boldsymbol{P(L) = P(A \cap L) + P(B \cap L) + P(C \cap L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) =}$$

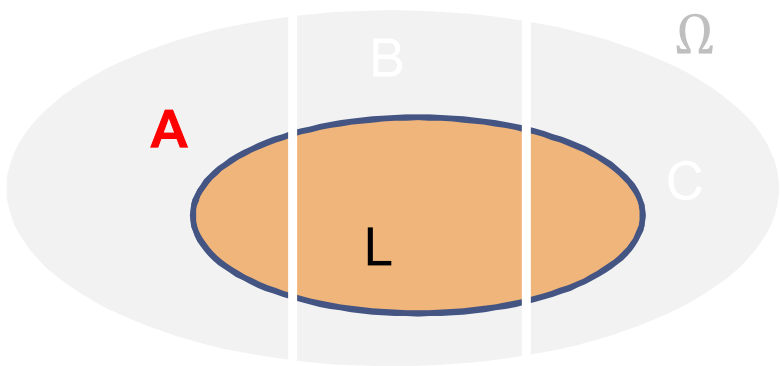
$$\boldsymbol{= 0.7 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.3 \times \frac{1}{3} = 1.2 \times \frac{1}{3} = 0.4}$$

# Esercizio 7

Un centralino ha tre linee telefoniche A, B, C che risultano libere con probabilità 0.7, 0.2, 0.3 rispettivamente. Qual è la probabilità di aver scelto il numero A se avete trovato la linea libera?

Consideriamo gli eventi:

A = si compone il numero A
B = si compone il numero B
C = si compone il numero C
L = la linea è libera




$$P(L) = P(A \cap L) + P(B \cap L) + P(C \cap L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) =$$

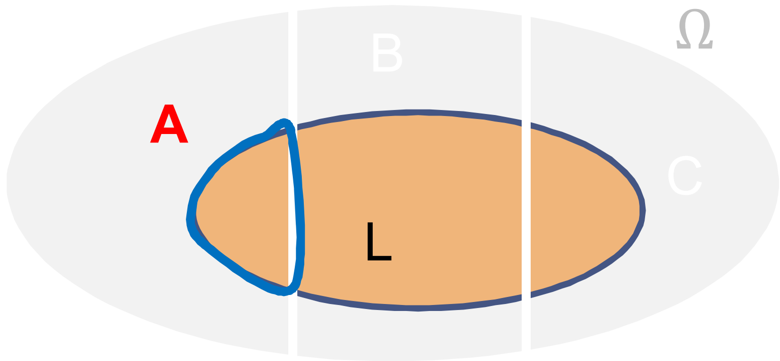
$$= 0.7 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.3 \times \frac{1}{3} = 1.2 \times \frac{1}{3} = 0.4$$

# Esercizio 7

Un centralino ha tre linee telefoniche A, B, C che risultano libere con probabilità 0.7, 0.2, 0.3 rispettivamente. Qual è la probabilità di aver scelto il numero A se avete trovato la linea libera?

Consideriamo gli eventi:

A = si compone il numero A
B = si compone il numero B
C = si compone il numero C
L = la linea è libera




$$P(L) = P(A \cap L) + P(B \cap L) + P(C \cap L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) =$$

$$= 0.7 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.3 \times \frac{1}{3} = 1.2 \times \frac{1}{3} = 0.4$$

$$\boldsymbol{P(A|L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L|A)P(A)}{0.4} = \frac{0.7 \times \frac{1}{3}}{0.4} = 0.583}$$