Esercitazione dell' 11 aprile 2014

I primi due esercizi provengono dal libro di testo. Tuttavia, metto per esteso la soluzione e le integrazioni fatte in aula per coloro che erano assenti durante la prima ora.

Esercizio 9.16 p. 267 del libro di testo

In accordo col testo dell'esercizio, formuliamo le seguenti ipotesi:

- che la probabilità che la domanda superi lo stock sia la stessa, pari a 0.013, tutte le settimane dell'anno;
- che i superamenti siano indipendenti, cioè che sapere che in una certa settimana la domanda ha o non ha superato lo stock non ci fornisce informazioni su quello che accade nelle altre settimane.

Siamo, quindi, all'interno di uno **schema di prove ripetute di Bernoulli**, ove le prove sono 52 (il numero delle settimane) e la probabilità di *successo* (cioè, che la domanda superi lo stock) è 0.013. Allora, la variabile casuale *X* che conta il numero di *successi* (numero di settimane in cui la domanda supera lo stock) ha distribuzione Binomiale con parametri $n = 52$ e $p = 0.013$.

Pertanto,

a) la probabilità che durante l'anno la domanda non superi mai lo stock è

$$P(X=0) = \binom{52}{0} 0.013^0 (1-0.013)^{52} = 0.506$$

b) la probabilità che durante l'anno la domanda superi lo stock al massimo due volte è

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.506 + \binom{52}{1} 0.013^1 (1-0.013)^{51} + \binom{52}{2} 0.013^2 (1-0.013)^{50} =$$
$$= 0.970.$$

Ricordiamo che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Domanda aggiuntiva: qual è la probabilità che la domanda superi lo stock nella settimana di Ferragosto? *Risposta*: 0.013, perché per ipotesi la probabilità è la stessa in ciascuna settimana dell'anno.

Esercizio 9.27 del libro di testo

La variabile casuale *X* è una variabile assolutamente continua con densità di probabilità data dalla funzione $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ricordiamo che una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è una densità di probabilità se è non negativa, integrabile e $\int f(x)\,dx = 1$. In Figura 1 è rappresentata la funzione $f(x)$, chiaramente non negativa ed integrabile.

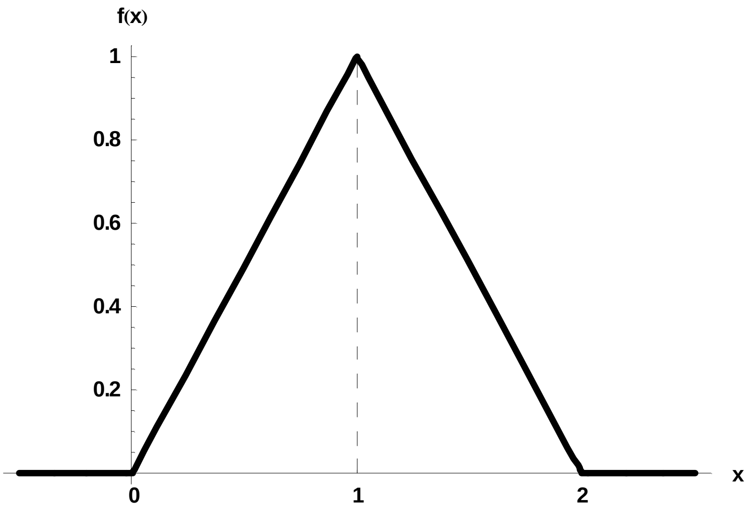

Figura 1 – Rappresentazione della funzione $f(x)$ dell'esercizio 9.27.

Completiamo la verifica calcolando, come semplice calcolo dell'area, l'integrale della funzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx = \frac{2\times 1}{2} = 1$$

Il calcolo risponde anche alla prima domanda dell'esercizio.

b) La risposta è data dall'area in giallo in Figura 2. Osservando che la funzione è simmetrica rispetto alla verticale per $x = 1$, si ha

$$P(0 < X < 1.2) = \frac{1}{2} + \int_{1}^{1.2} (2-x)dx = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)_{1}^{1.2} = 0.5 + 0.18 = 0.68$$

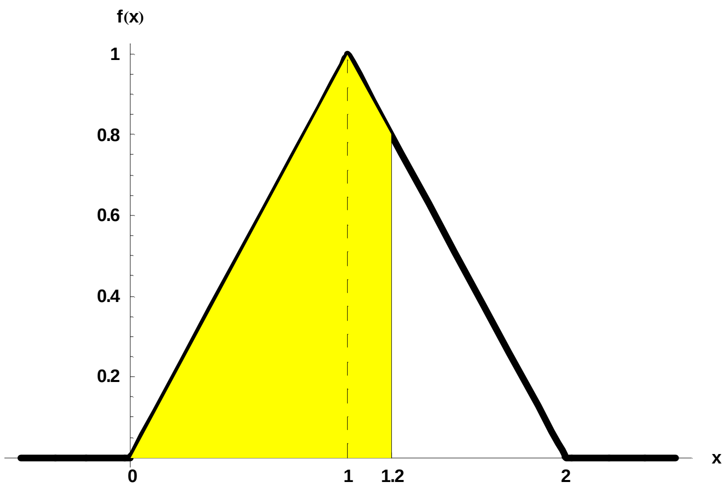

Figura 2

Ricordiamo che per le densità assolutamente continue $P(X=x) = 0$ qualunque sia il valore di x e, pertanto, $P(0 < X < 1.2) = P(0 \le X \le 1.2) = P(0 < X \le 1.2)$ ecc.

c) Ricordiamo che la funzione di ripartizione è definita come $F(x)$ = P($X \leq x$) per tutti i valori di x. In altre parole:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

che, nel nostro caso, significa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x u du & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \int_1^x (2-u)du & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

da cui:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2/2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -1 + 2x - x^2/2 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

La funzione è rappresentata in Figura 3.

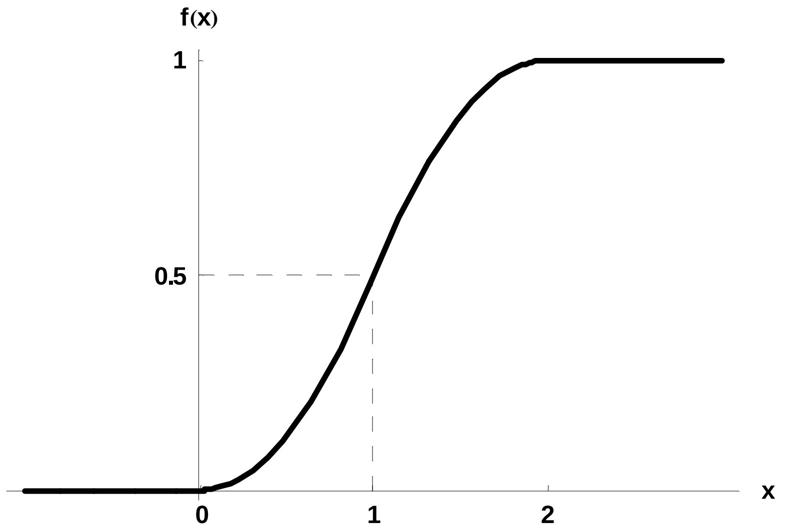

Figura 3 – Rappresentazione della funzione $F(x)$ dell'esercizio 9.27.

Dai conti svolti e dall'osservazione della Figura 3 si ottiene che P(X < 1) = 0.5 e P($X \geq 1$) = 0.5. Pertanto, il valore x = 1 rappresenta la *mediana* della distribuzione di X. Allo stesso modo, possiamo ricavare il *primo quartile*, per esempio: si tratta del valore y tale che P($X < y$) = 0.25 e P($X \geq y$) = 0.25. Chiaramente, y deve essere un valore tra 0 ed 1 e quindi lo ricaviamo risolvendo $F(y)$ = 0.25, cioè $y^2/2$ = 0.25 da cui $y = \sqrt{2}/2 = 0.707$.

Esercizio 4 (seconda parte) dal T.E. del 10/02/2014

Una nuovo incrocio di un certa varietà di frutta produce frutti di forma sferica con diametro che ha distribuzione uniforme tra una lunghezza minima di 2 cm e una lunghezza massima incognita, α.

Determinare α in modo tale che

1. il diametro medio dei frutti sia 2.5 cm.
2. La deviazione standard non sia più grande di 0.25 cm.
3. Non più del 10% dei frutti abbia diametro superiore a 3 cm.

Esercizio 9.8 dal libro di testo.

Abbiamo fatto alcuni punti e poi inventato per imparare l'uso della tavola della gaussiana.

Esercizio.

In una città gli uomini sono il 42% della popolazione ed hanno altezza distribuita come una gaussiana di media 178 cm e deviazione standard di 10 cm, mentre le donne hanno altezza distribuita come una gaussiana di media 168 cm e deviazione standard di 15 cm.

1. Qual è la probabilità che una persona scelta a caso in quella città sia più alta di 180 cm?
2. Se una persona scelta a caso è alta più di 180 cm, è più probabile che sia un uomo o una donna?

Nota. La risposta al punto 2. non dipende solo dal fatto che gli uomini sono in media più alti delle donne, ma anche dal fatto che di uomini ce ne sono tanti, non molti meno delle donne. Provate a rispondere alla stessa domanda nell'ipotesi che nella popolazione gli uomini siano solo il 20%.

Esercizio 10.11 dal libro di testo.

In aula non abbiamo svolto il punto c). *Provare come esercizio.*

Esercizio 10.10 dal libro di testo.