STATISTICA

VERIFICA D'IPOTESI - 1

Verifica di ipotesi

Nelle ultime elezioni il partito del *Grifondoro* ha preso il 28.64%: l'attuale consenso è superiore?

Il dado che stiamo lanciando è equilibrato?

Il peso medio dei fustini da 45 misurini di detersivo *Tuttosplende* è conforme a quanto dichiarato?

La quantità di crosta nelle buste di grana padano grattuggiato è conforme ai limiti di legge?

Verifica di ipotesi

Nelle ultime elezioni il partito del *Grifondoro* ha preso il 28.64%: l’attuale consenso è superiore?

Il dado che stiamo lanciando è equilibrato?

Il peso medio dei fustini da 45 misurini di detersivo *Tuttosplende* è conforme a quanto dichiarato?

La quantità di crosta nelle buste di grana padano grattuggiato è conforme ai limiti di legge?

Verifica di ipotesi

Nelle ultime elezioni il partito del *Grifondoro* ha preso il 28.64%: l'attuale consenso è superiore?

Il dado che stiamo lanciando è equilibrato?

Il peso medio dei fustini da 45 misurini di detersivo *Tuttosplende* è conforme a quanto dichiarato?

La quantità di crosta nelle buste di grana padano grattuggiato è conforme ai limiti di legge?

Cerchiamo una strategia che ci permetta di "confermare o meno" un'ipotesi sulla base di un campione che andremo ad osservare.

Verifica di ipotesi

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$

con riferimento ad una certa strategia, sulla base di un campione si decide se **rifiutare** o **non rifiutare** l'ipotesi nulla H_0

Verifica di ipotesi

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$

con riferimento ad una certa strategia, sulla base di un campione si decide se **rifiutare** o **non rifiutare** l'ipotesi nulla H_0

	Rifiuto H_0	**Non rifiuto H_0**
E' vera H_0	Errore primo tipo	Nessun errore
E' falsa H_0	Nessun errore	Errore secondo tipo

Verifica di ipotesi

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso dichiarato

$\boldsymbol{H_1}$ **alternativa**, es. $\boldsymbol{\mu \neq \mu_0}$

$\boldsymbol{H_0}$ **ipotesi nulla, es.** $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$

con riferimento ad una certa strategia, sulla base di un campione si decide se **rifiutare** o **non rifiutare** l'ipotesi nulla $\boldsymbol{H_0}$

	Rifiuto $\boldsymbol{H_0}$	**Non rifiuto** $\boldsymbol{H_0}$
E' vera $\boldsymbol{H_0}$	Errore primo tipo	Nessun errore
E' falsa $\boldsymbol{H_0}$	Nessun errore	Errore secondo tipo

Verifica di ipotesi

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$; H_1 alternativa, es. $\mu \neq \mu_0$

$\alpha = P(\text{rifiutare } H_0 \mid H_0$ è vera)

	Rifiuto H_0	**Non rifiuto H_0**
E' vera H_0	Errore primo tipo	Nessun errore
E' falsa H_0	Nessun errore	Errore secondo tipo

$\beta = P(\text{non rifiutare } H_0 \mid H_0$ falsa)

Verifica di ipotesi

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$; H_1 alternativa, es. $\mu \neq \mu_0$

$\alpha = P(\text{rifiutare } H_0 \mid H_0$ è vera)

	Rifiuto H_0	**Non rifiuto H_0**
E' vera H_0	Errore primo tipo	Nessun errore
E' falsa H_0	Nessun errore	Errore secondo tipo

$\beta = P(\text{non rifiutare } H_0 \mid H_0$ falsa)

piccole!

Verifica di ipotesi

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$; H_1 alternativa, es. $\mu \neq \mu_0$

	Rifiuto H_0	**Non rifiuto H_0**
E' vera H_0	α **Errore primo tipo**	Nessun errore
E' falsa H_0	Nessun errore	Errore secondo tipo β

Livello di significatività del test: fissato, piccolo a piacere (5%, 1%, ecc.)

Verifica di ipotesi

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$; H_1 alternativa, es. $\mu \neq \mu_0$

	Rifiuto H_0	**Non rifiuto H_0**
E' vera H_0	α **Errore primo tipo**	Nessun errore
E' falsa H_0	Nessun errore	Errore secondo tipo β

Livello di significatività del test: fissato, piccolo a piacere (5%, 1%, ecc.)

QUALE STRATEGIA?

Verifica di ipotesi

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, con σ^2 nota.

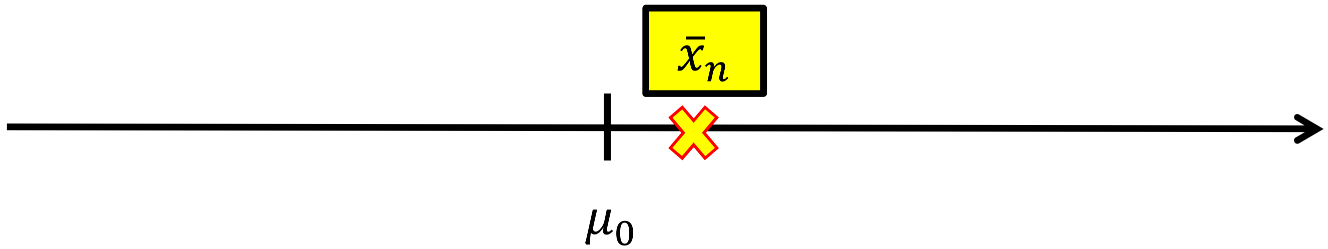
Sia μ_0 valore di riferimento per la media μ
(es., il peso *dichiarato* del fustino)

H_0 ipotesi nulla, es. $\mu = \mu_0$; H_1 alternativa, es. $\mu \neq \mu_0$

	Rifiuto H_0	**Non rifiuto H_0**
E' vera H_0	α **Errore primo tipo**	Nessun errore
E' falsa H_0	Nessun errore	Errore secondo tipo β

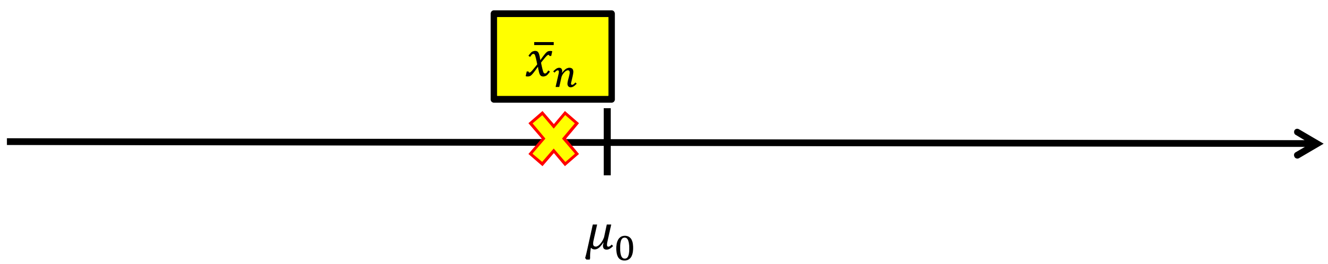
$\bar{X}_n$ (stimatore della media) a confronto con μ_0:
se H_0 è vera («*sotto* H_0») $\Rightarrow$ la media campionaria deve essere vicina a μ_0

Verifica d'ipotesi



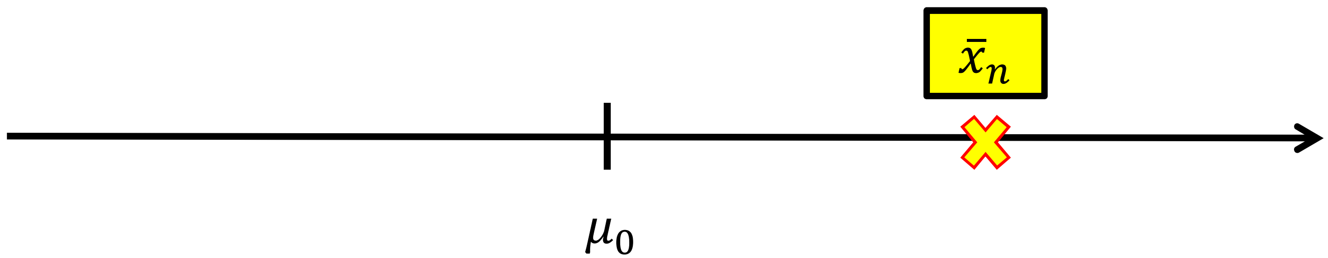
sotto H_0

Verifica d'ipotesi



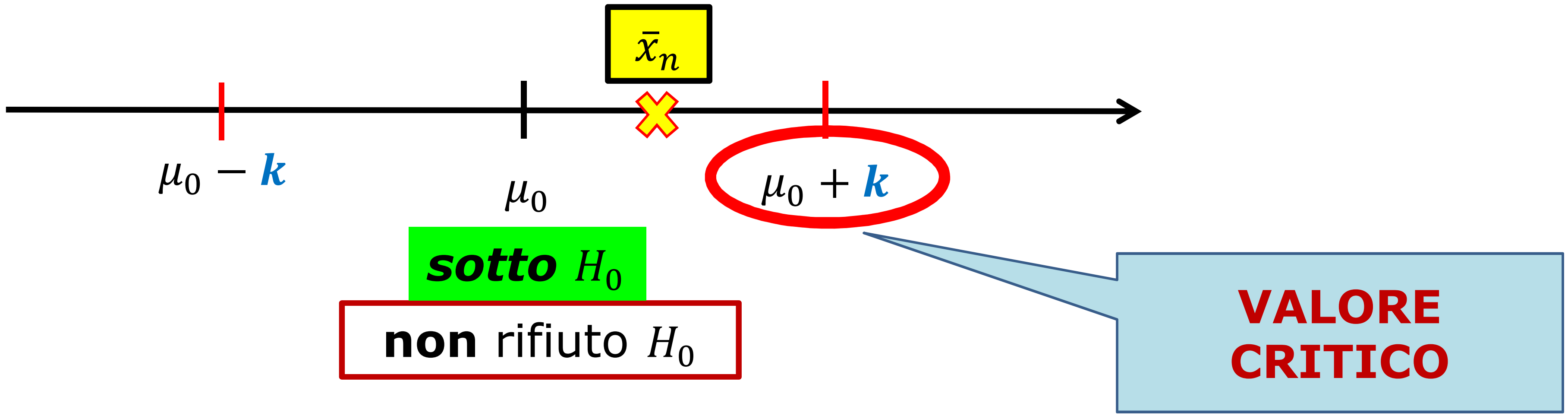
sotto H_0

Verifica d’ipotesi

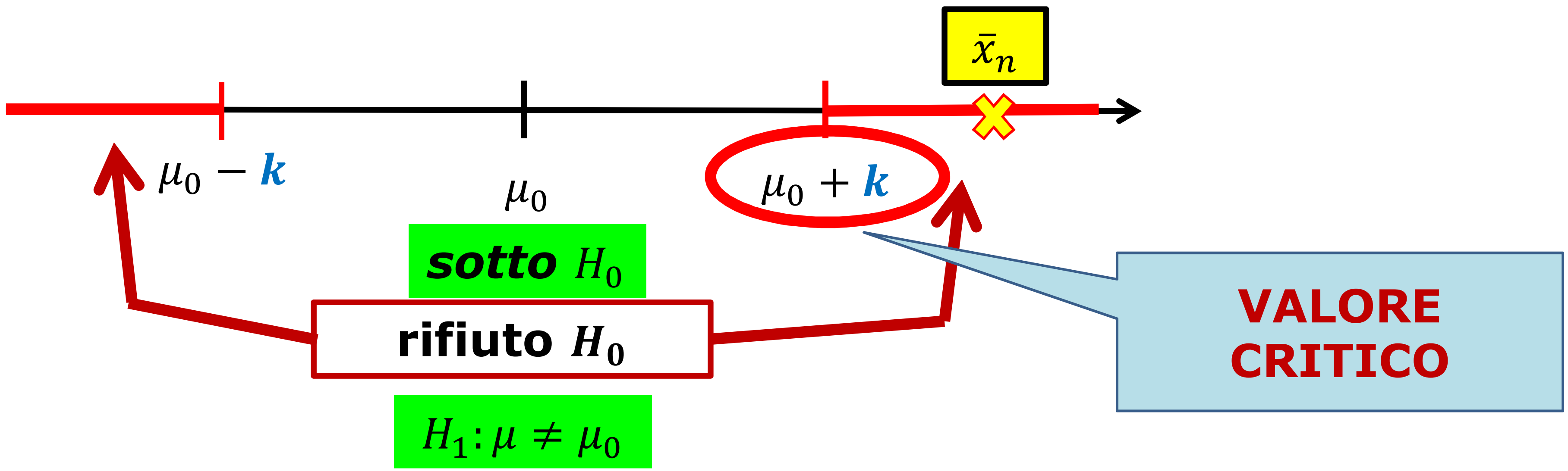


sotto H_0

Verifica d'ipotesi

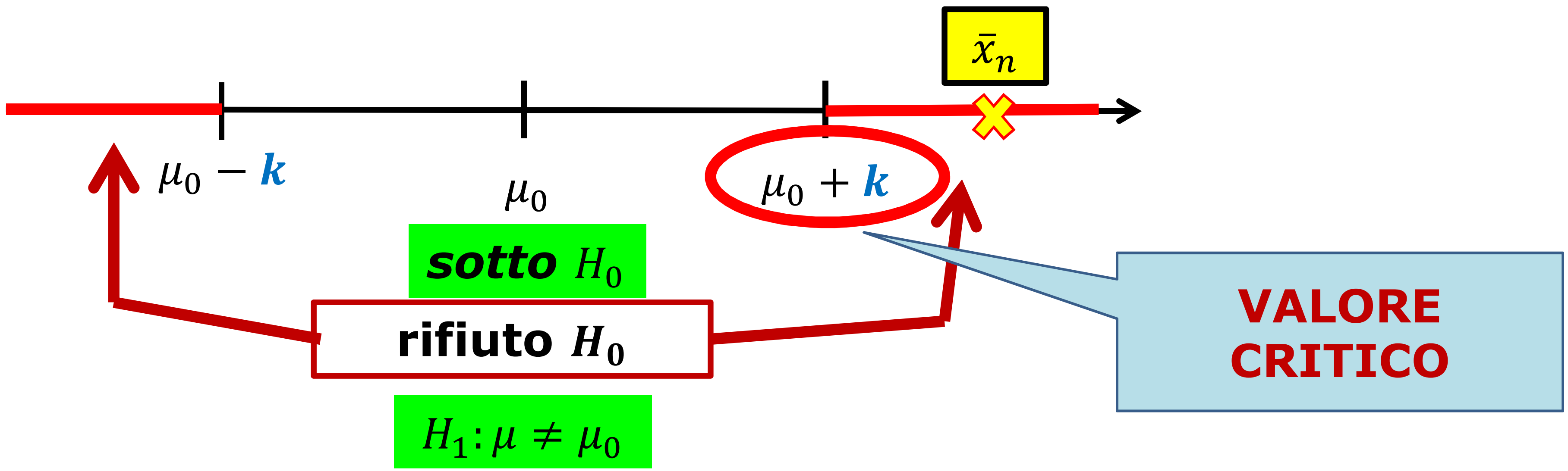


Verifica d'ipotesi



Verifica d'ipotesi

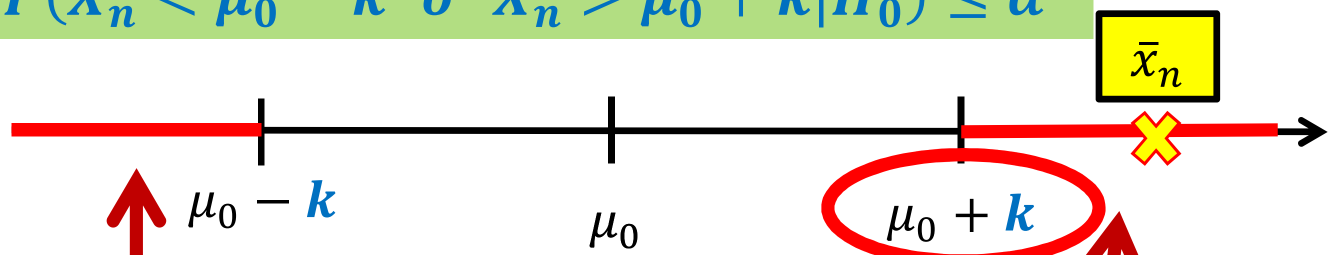
Come stabilisco $\boldsymbol{k}$? In modo che
l'errore di prima specie,
cioè **la probabilità di rifiutare H_0**
quando H_0 E' VERA,
sia $\leq \alpha$
il livello massimo prefissato



Verifica d'ipotesi

Come stabilisco $\boldsymbol{k}$? In modo che
l'errore di prima specie,
cioè **la probabilità di rifiutare $\boldsymbol{H_0}$**
quando $\boldsymbol{H_0}$ E' VERA,
sia $\leq \alpha$
il livello massimo prefissato

$$\boldsymbol{P(\bar{X}_n < \mu_0 - k \ \ o \ \ \bar{X}_n > \mu_0 + k | H_0) \leq \alpha}$$



sotto H_0

rifiuto $\boldsymbol{H_0}$

(regione di rifiuto)

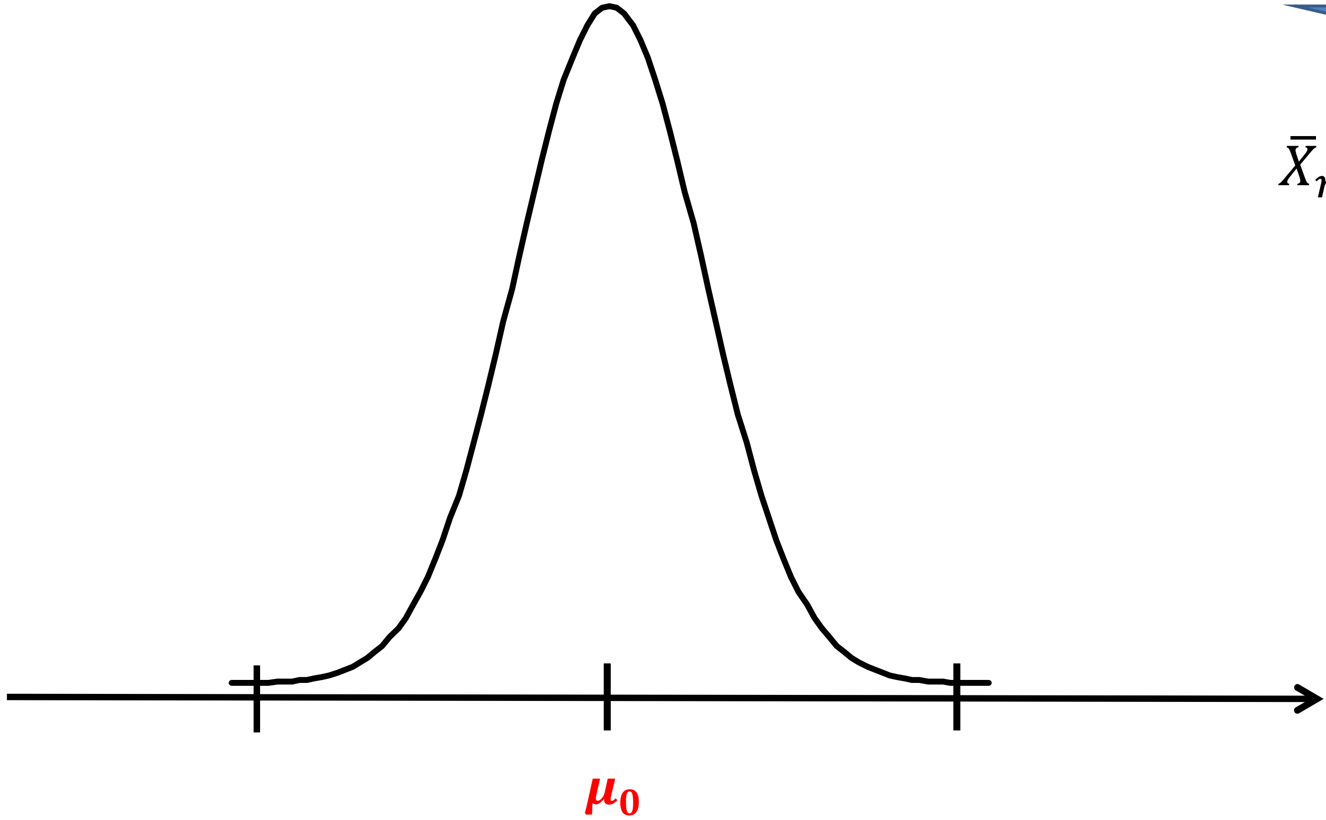
$H_1 : \mu \neq \mu_0$

VALORE CRITICO

Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0: \mu = \mu_0$ è vera

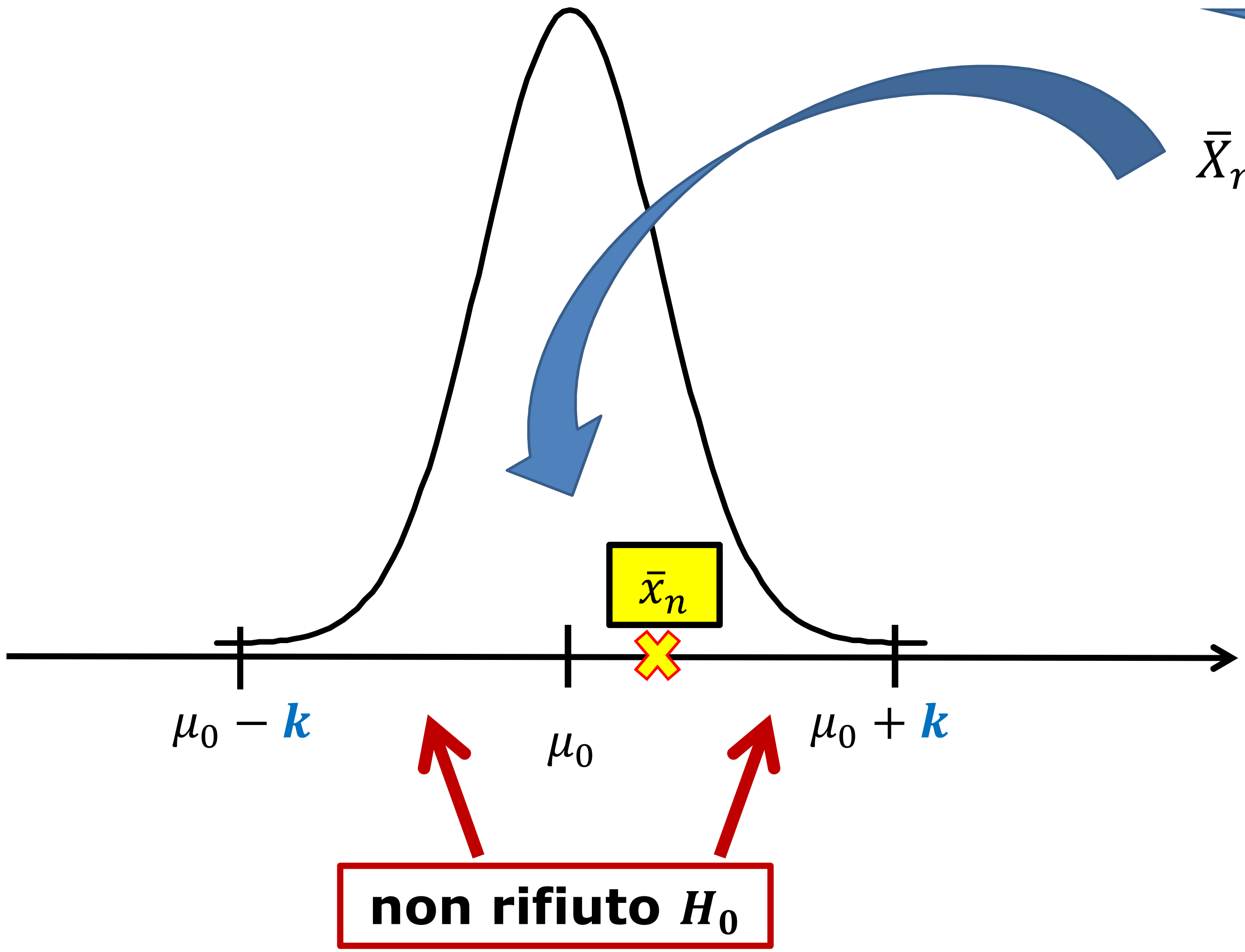
$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0\!: \mu = \mu_0$ è vera

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

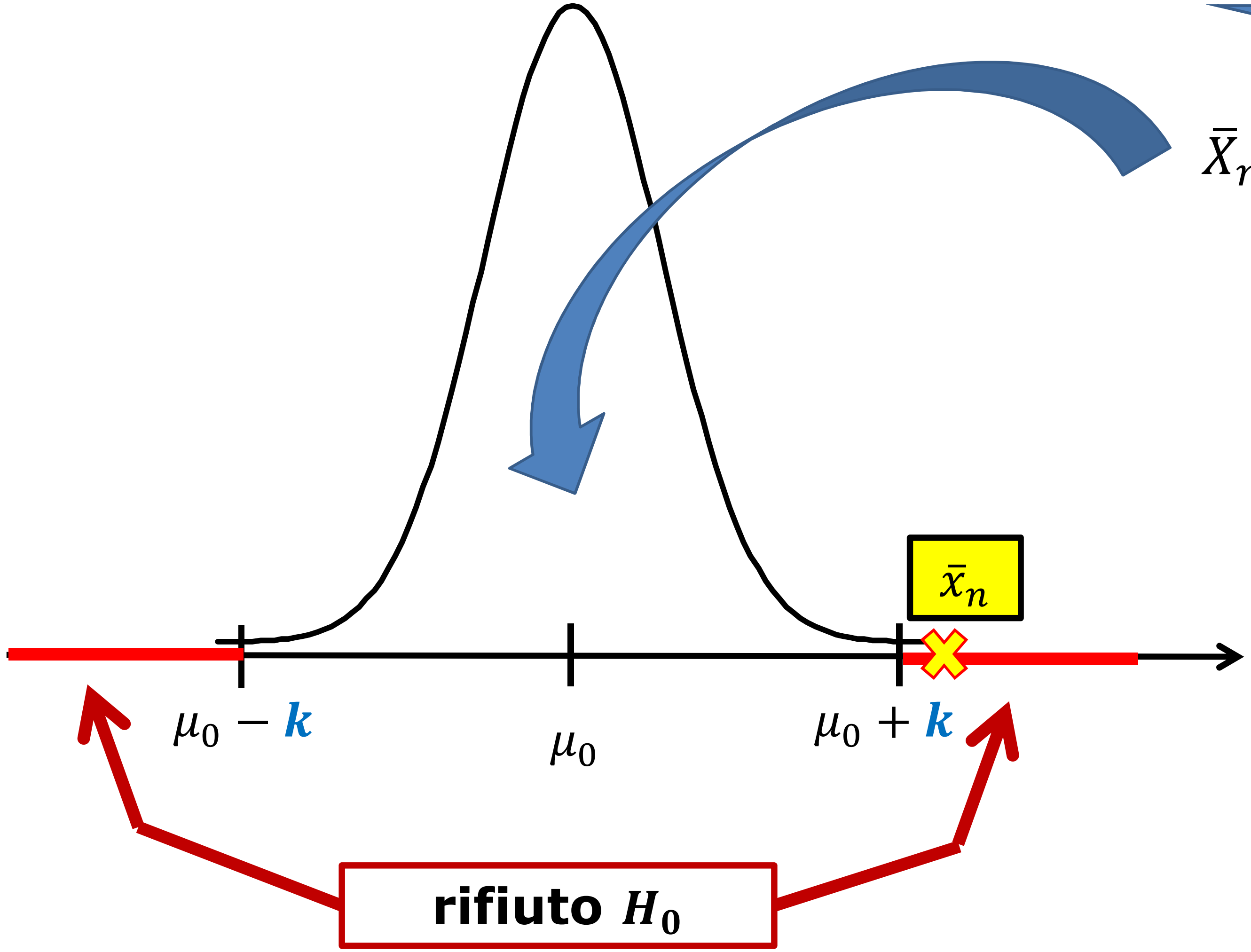


Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0: \mu = \mu_0$ è vera

$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$



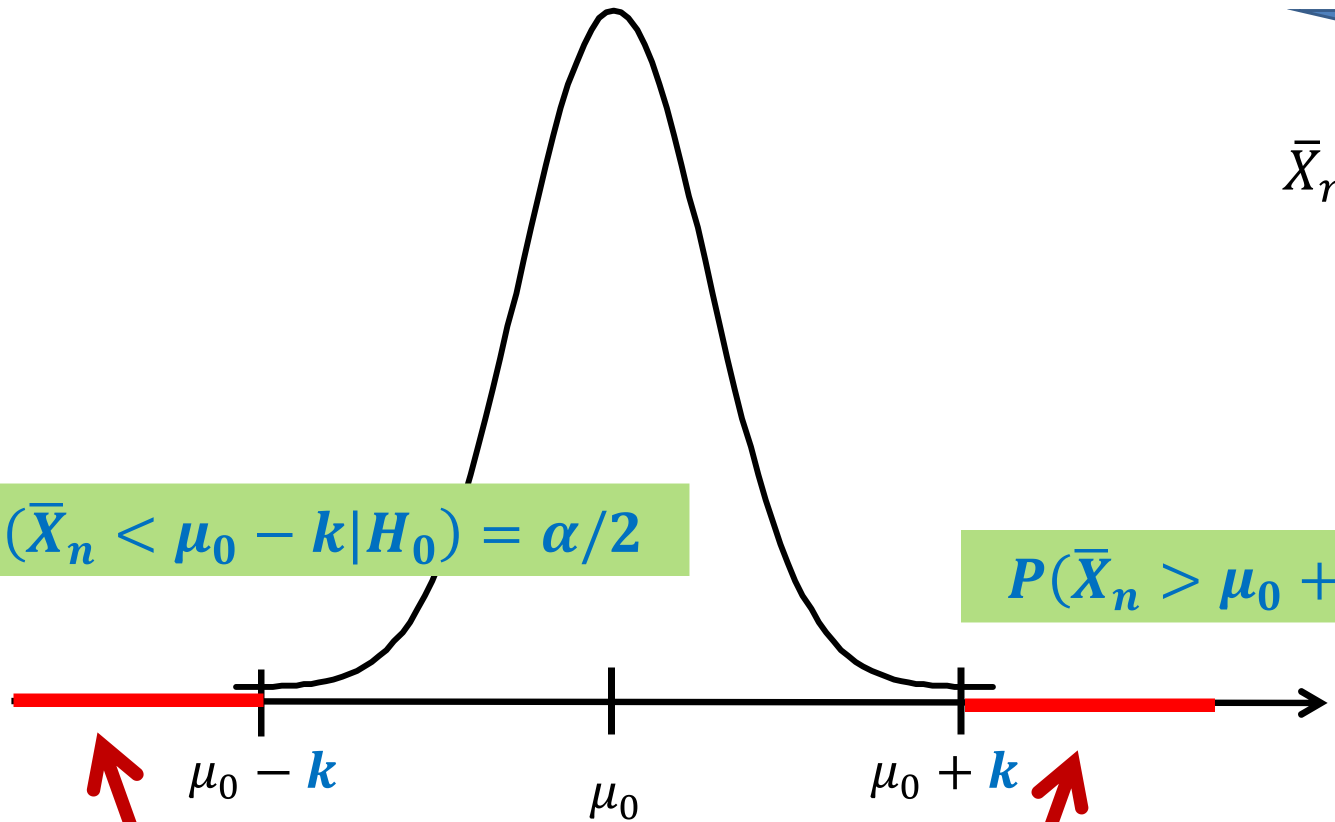
Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 nota e $H_0: \mu = \mu_0$ è vera

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$P(\bar{X}_n < \mu_0 - k | H_0) = \alpha/2$

$P(\bar{X}_n > \mu_0 + k | H_0) = \alpha/2$



rifiuto H_0

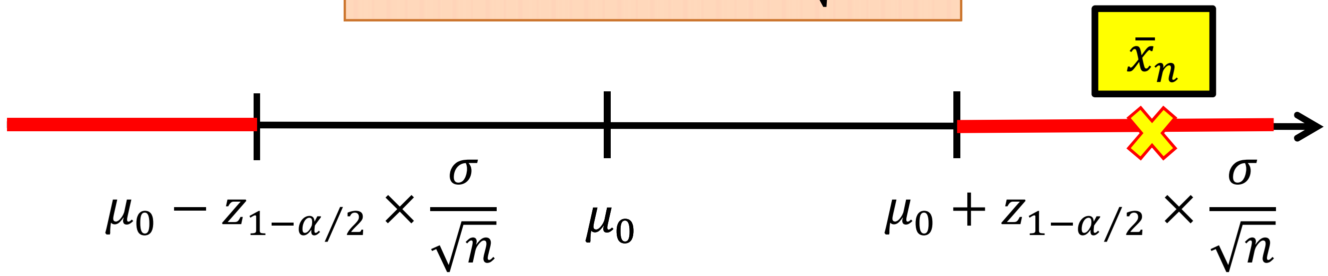
Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0: \mu = \mu_0$ è vera

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$\Rightarrow \bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\Rightarrow$ $$\boxed{k = z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$



Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \dots, X_n$ $\mathrm{i.i.d.}$, $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0 : \mu = \mu_0$ è vera

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\boxed{k = z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)}$$

Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0: \mu = \mu_0$ è vera

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\boxed{k = z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)}$$

$$\boxed{k = z_{1-\alpha/2}}$$

Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0 \colon \mu = \mu_0$ è vera

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$H_1 \colon \mu \neq \mu_0$

$$k = z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$k = z_{1-\alpha/2}$$

Si rifiuta H_0 al livello di significatività α se:

$$\left|\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Verifica d'ipotesi con modello Gaussiano

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $\boldsymbol{X_i \sim N(\mu, \sigma^2)}$, con σ^2 nota e $H_0: \mu = \mu_0$ è vera

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu = \mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\boxed{k = z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

STATISTICA TEST

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \sim N(0,1)$$

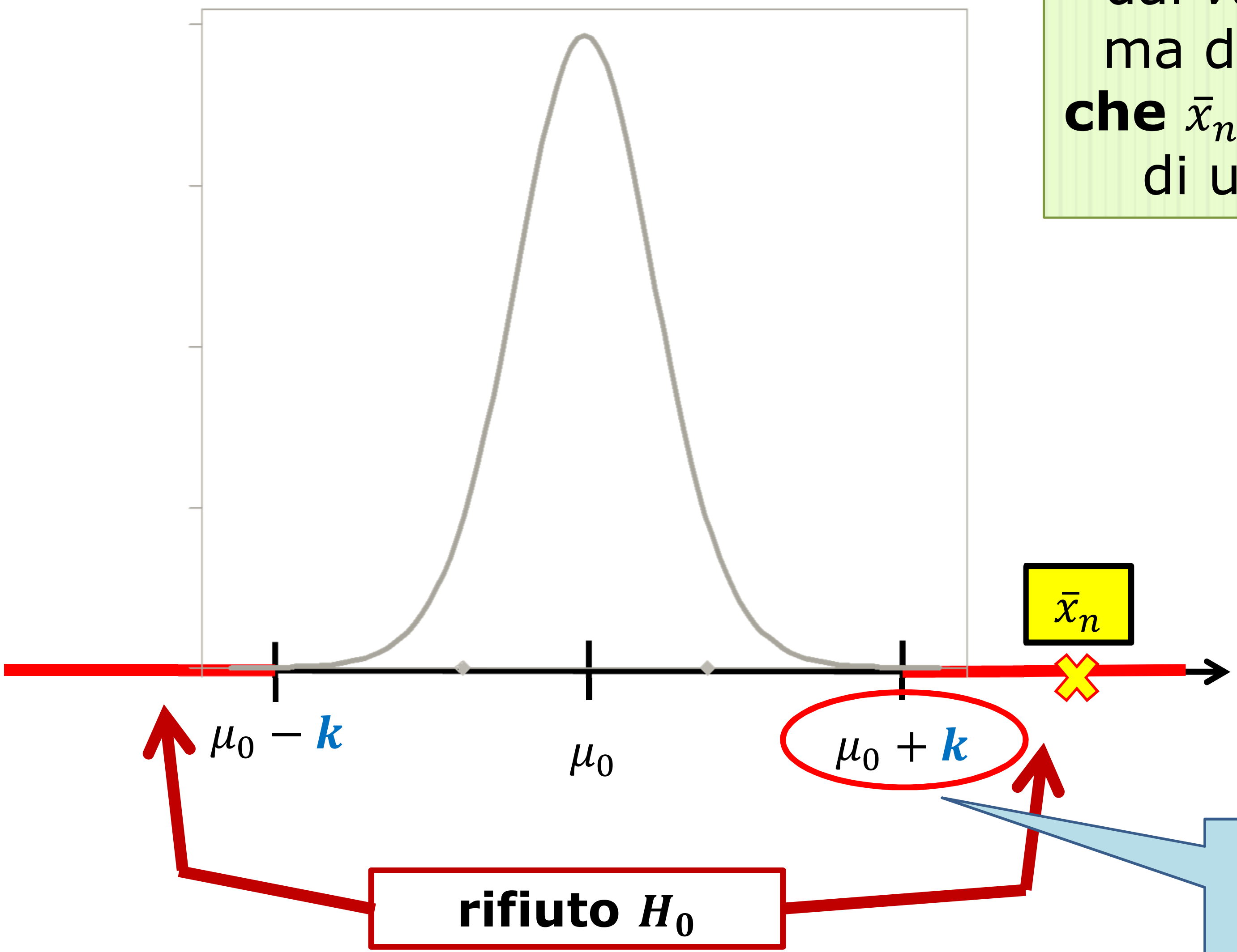
$$\boxed{k = z_{1-\alpha/2}}$$

Si rifiuta H_0 al livello di significatività α se:

$$\boxed{\left|\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Il rifiuto non dipende dal *valore* di $\bar{x}_n$ in sè, ma dalla **probabilità che $\bar{x}_n$ sia più estremo** di una certa soglia

Test bilatero



VALORE CRITICO

Esempi

$$\left|\frac{\bar{x}_n - \mathbf{3}}{\sqrt{7/n}}\right| > z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Per un campione gaussiano di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 7$, verificare al livello $\alpha = 0.05$ l'ipotesi $H_0\ :\ \mu = 3$ contro l'alternativa $H_1\ :\ \mu \neq 3$ nei seguenti casi:

a) $n = 30,\ \bar{x} = 3.2 \Rightarrow \left|\frac{3.2-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 0.41$

b) $n = 30,\ \bar{x} = 2.2 \Rightarrow \left|\frac{2.2-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 1.66$

c) $n = 30,\ \bar{x} = 3.9 \Rightarrow \left|\frac{3.9-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 1.86$

d) $n = 30,\ \bar{x} = 4.1 \Rightarrow \left|\frac{4.1-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 2.28$

Esempi

$$\left|\frac{\bar{x}_n - \mathbf{3}}{\sqrt{7/n}}\right| > z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Per un campione gaussiano di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 7$, verificare al livello $\alpha = 0.05$ l'ipotesi $H_0\ :\ \mu = 3$ contro l'alternativa $H_1\ :\ \mu \neq 3$ nei seguenti casi:

a) $n = 30,\ \bar{x} = 3.2 \Rightarrow \left|\frac{3.2-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 0.41$

b) $n = 30,\ \bar{x} = 2.2 \Rightarrow \left|\frac{2.2-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 1.66$

c) $n = 30,\ \bar{x} = 3.9 \Rightarrow \left|\frac{3.9-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 1.86$

non rifiuto

d) $n = 30,\ \bar{x} = 4.1 \Rightarrow \left|\frac{4.1-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 2.28$

rifiuto

Esempi

$$\left|\frac{\bar{x}_n - \mathbf{3}}{\sqrt{7/n}}\right| > z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Per un campione gaussiano di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 7$, verificare al livello $\alpha = 0.05$ l'ipotesi $H_0 : \mu = 3$ contro l'alternativa $H_1 : \mu \neq 3$ nei seguenti casi:

a) $n = 10, \bar{x} = 3.2 \Rightarrow \left|\frac{3.2-3}{\sqrt{7/10}}\right| = 0.24$ ⇨ non rifiuto H_0

b) $n = 10, \bar{x} = 2.2 \Rightarrow \left|\frac{2.2-3}{\sqrt{7/10}}\right| = 0.96$ ⇨ non rifiuto H_0

c) $n = 10, \bar{x} = 3.9 \Rightarrow \left|\frac{3.9-3}{\sqrt{7/10}}\right| = 1.08$ ⇨ non rifiuto H_0

d) $n = 10, \bar{x} = 4.1 \Rightarrow \left|\frac{4.1-3}{\sqrt{7/10}}\right| = 1.31$ ⇨ **non rifiuto** H_0

pur con la stessa media!!

Esempi

$$\left|\frac{\bar{x}_n - \mathbf{3}}{\sqrt{7/n}}\right| > z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Per un campione gaussiano di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 7$, verificare al livello $\alpha = 0.05$ l'ipotesi $H_0 : \mu = 3$ contro l'alternativa $H_1 : \mu \neq 3$ nei seguenti casi:

a) $n = 100, \bar{x} = 3.2 \Rightarrow \left|\frac{3.2-3}{\sqrt{7/100}}\right| = 0.76$ ⇨ non rifiuto H_0

b) $n = 100, \bar{x} = 2.2 \Rightarrow \left|\frac{2.2-3}{\sqrt{7/100}}\right| = 3.02$ ⇨ **rifiuto H_0**

c) $n = 100, \bar{x} = 3.9 \Rightarrow \left|\frac{3.9-3}{\sqrt{7/100}}\right| = 3.40$ ⇨ **rifiuto H_0**

d) $n = 100, \bar{x} = 4.1 \Rightarrow \left|\frac{4.1-3}{\sqrt{7/100}}\right| = 4.16$ ⇨ **rifiuto H_0**

Esempi

$$\left|\frac{\bar{x}_n - \mathbf{3}}{\sqrt{7/n}}\right| > z_{1-\alpha/2} = \boldsymbol{z_{0.995}} = \mathbf{2.5758}$$

Per un campione gaussiano di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 7$, verificare al livello $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ l'ipotesi $H_0 : \mu = 3$ contro l'alternativa $H_1 : \mu \neq 3$ nei seguenti casi:

a) $n = 30, \bar{x} = 3.2 \Rightarrow \left|\frac{3.2-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 0.41$ ⇒ non rifiuto H_0

b) $n = 30, \bar{x} = 2.2 \Rightarrow \left|\frac{2.2-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 1.66$ ⇒ non rifiuto H_0

c) $n = 30, \bar{x} = 3.9 \Rightarrow \left|\frac{3.9-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 1.86$ ⇒ non rifiuto H_0

d) $n = 30, \bar{x} = 4.1 \Rightarrow \left|\frac{4.1-3}{\sqrt{7/30}}\right| = 2.28$ ⇒ **non rifiuto** H_0

Il rifiuto non dipende dal *valore* di $\bar{x}_n$ in sè, ma dalla **probabilità che $\bar{x}_n$ sia più estremo** di una certa soglia**,** cioè dal **livello di significatività** e dalla **dimensione del campione**