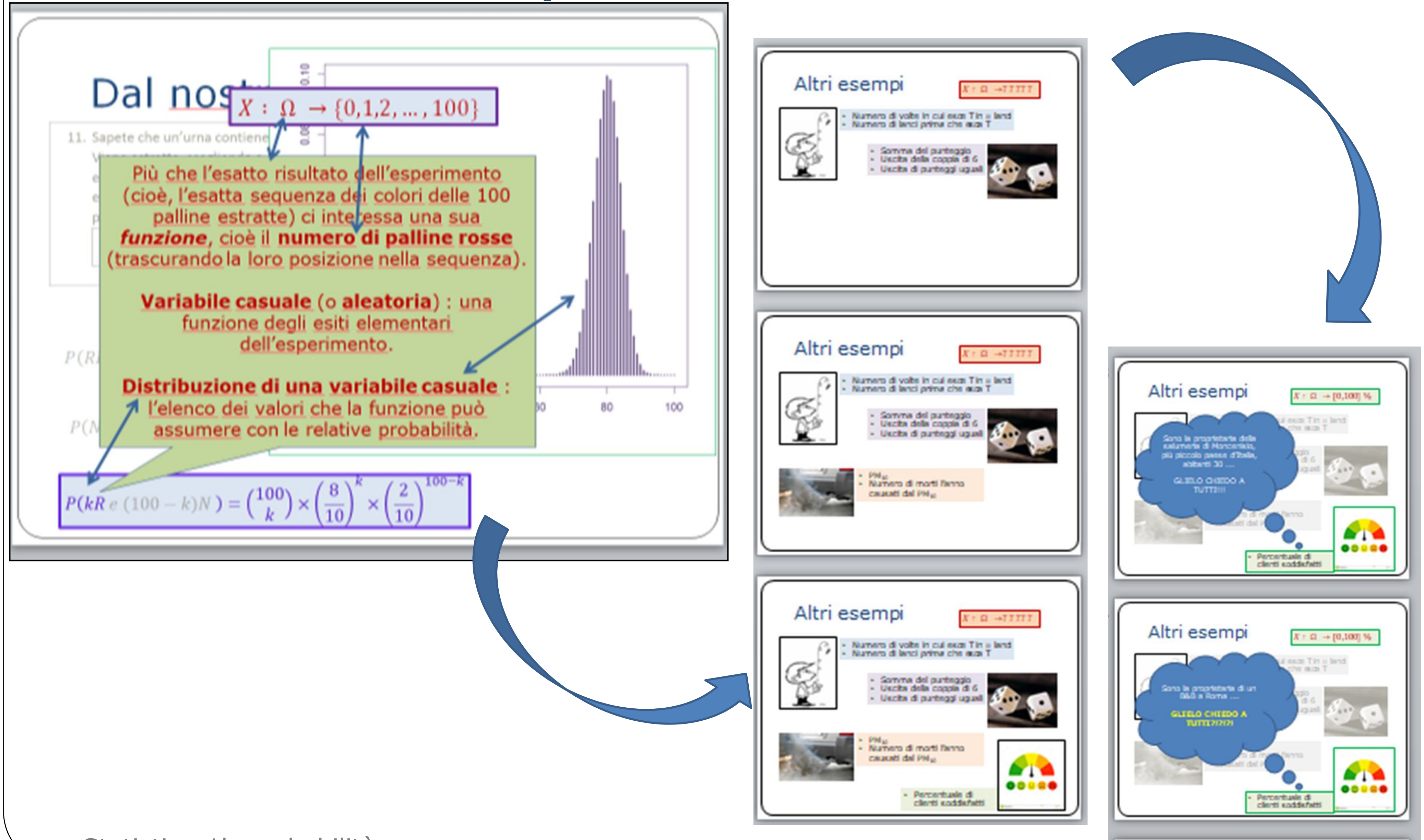
STATISTICA

I modelli probabilistici

I modelli probabilistici



I modelli probabilistici

- Numero di volte in cui esce T in n lanci
- Numero di lanci *prima* che esca T

- Somma del punteggio
- Uscita della coppia di 6
- Uscita di punteggi uguali

MONETA/DADO EQUILIBRATI → DISTRIBUZIONE NOTA

I modelli probabilistici

- Numero di volte in cui esce T in n lanci
- Numero di lanci *prima* che esca T

- Somma del punteggio
- Uscita della coppia di 6
- Uscita di punteggi uguali

MONETA/DADO
FORSE NON
EQUILIBRATI

DISTRIBUZIONE
NON NOTA

I modelli probabilistici

DISTRIBUZIONE
NON NOTA

- PM_{10}
- Numero di morti l'anno causati dal PM_{10}

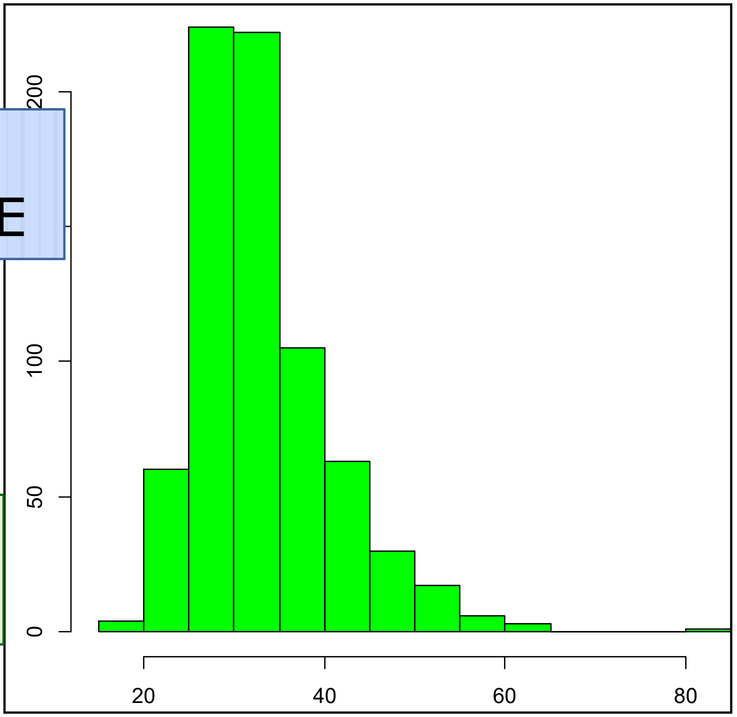
- Percentuale di clienti soddisfatti

I modelli probabilistici

INFO DAL CAMPIONE

DISTRIBUZIONE **NON** NOTA

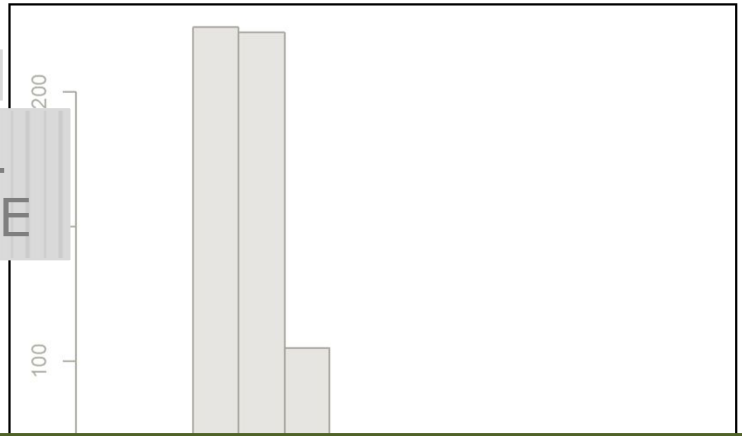
```
> summary(x)
  Min.  1st Qu.  Median   Mean   3rd Qu.   Max.
 17.60   27.80   32.00   33.21   36.60   87.90
```



- PM_{10}
- Numero di morti l'anno causati dal PM_{10}

- Percentuale di clienti soddisfatti

I modelli probabilistici



INFO DAL CAMPIONE

DISTRIBUZIONE
NON NOTA

PARAMETRICA!

Si fanno ipotesi sulla forma della distribuzione (per esempio, che sia Gaussiana), **forma** che è completamente **specificata da alcuni** (pochi) **parametri** (e.g, la media e la varianza).

Detective, romanziere o *statistico*?

Per risolvere i casi complicati bisogna essere capaci di **costruire una storia**, partendo dagli **indizi disponibili**, che contenga una **spiegazione plausibile** di tutti gli elementi che abbiamo. Ci vuole una certa dose di fantasia ed è un lavoro simile a quello di uno scrittore. Una volta costruita questa storia che è, in sostanza, un'**ipotesi** su come potrebbero essersi svolti i fatti, bisogna andare alla ricerca delle **conferme**.

G. Carofiglio
Una mutevole verità

Detective, romar … *tistico*?

LINGUAGGIO della PROBABILITA'

Per risolvere i casi complica … bisogna essere capaci di **costruire una storia**, partendo dagli **indizi disponibili**, che contenga una **spiegazione plausibile** di t…tti gli elementi che abbiamo. C… vuole una ce… i fantasia ed è u… simile a quello di uno scrittore. Una volta costruita questa storia che è, in sostanza, un… come potrebbero essersi svolti i fatti. …isogna andare alla ricerca delle **conferme**.

DATI

MODELLI

INFERENZA

(G. Carofiglio)

Detective, romar… *tistico*?

LINGUAGGIO della PROBABILITA'

« Per risolvere … bisogna essere

capaci di **cost…**

indizi disponi… …e

plausibile di … elementi che abb…

vuole una ce… …i fantasia ed è u…

simile a quello di uno scrittore. Una volta costruita

questa storia che è, in sostanza, u…

come potrebbero essersi svolti i fatti … bisogna

andare alla ricerca delle **conferme**.»

(G. Carofiglio)

DAL CAMPIONE (I DATI) ALLA POPOLAZIONE, TRAMITE I MODELLI

DATI

MODELLI

INFERENZA

Il campione

Sottoinsieme della **popolazione** di interesse, usato per trarre informazioni sull'intera popolazione.

$\Longrightarrow$ deve essere ***rappresentativo*** *della popolazione*

Il campione

Sottoinsieme della **popolazione** di interesse, usato per trarre informazioni sull'intera popolazione.

$\Longrightarrow$ deve essere ***rappresentativo*** *della popolazione*

tutte le parti della popolazione devono avere **uguale probabilità** di fare parte del campione.

Esempio dell'età: scelgo tra i nominativi sulla guida telefonica della città?

Il campione

Sottoinsieme della **popolazione** di interesse, usato per trarre informazioni sull'intera popolazione.

$\Longrightarrow$ deve essere ***rappresentativo*** *della popolazione*

tutte le parti della popolazione devono avere **uguale probabilità** di fare parte del campione.

Esempio dell'età: scelgo tra i nominativi sulla guida telefonica della città? Meglio dall'anagrafe, per non escludere i bambini, per esempio.

Il campione

Sottoinsieme della **popolazione** di interesse, usato per trarre informazioni sull'intera popolazione.

⟹ deve essere ***rappresentativo*** *della popolazione*

tutte le parti della popolazione devono avere **uguale probabilità** di fare parte del campione.

Esempio dell'età: scelgo tra i nominativi sulla guida telefonica della città? Meglio dall'anagrafe, per non escludere i bambini, per esempio.

scelta **completamente casuale** dalla popolazione:
Campione casuale (semplice) di k membri se questi sono scelti in modo che tutte le possibile scelte dei k membri dalla popolazione di interesse sono ugualmente probabili.

Il campione

Sottoinsieme della **popolazione** di interesse, usato per trarre in… popolazione.

$\Longrightarrow$ deve esse… *della popolazione*

tutte le … vono avere **uguale** p… el campione.

Esempio del… inativi sulla guida telefonica de… nagrafe, per non escludere i b…

scelta **completamente casuale** dalla popolazione:
Campione casuale (semplice) di *k* membri se questi sono scelti in modo che tutte le possibile scelte dei *k* membri dalla popolazione di interesse sono ugualmente probabili.

Il campione

Scegliamo a caso...

con **o** **senza** **reimmissione?**

A meno che non sia diversamente indicato,

quando diciamo che scegliamo **un campione a caso** da una popolazione, faremo come se le estrazioni fossero **con reimmissione**.
Le estrazioni in questo modo sono **indipendenti**: **sapere l'esito della prima estrazione non influenza l'esito della seconda, etc.**

Dal campione **alla popolazione**

Il Genetics and IVF Institute di Fairfax in Virginia ha sviluppato una tecnica in grado, sostengono, di aumentare la probabilità per una coppia di avere una figlia femmina. **Di 14 coppie scelte a caso** su cui è stata messa in atto, 13 hanno avuto una femmina.

Possiamo affermare che tale tecnica aumenta la probabilità di avere una femmina per *qualunque* coppia?

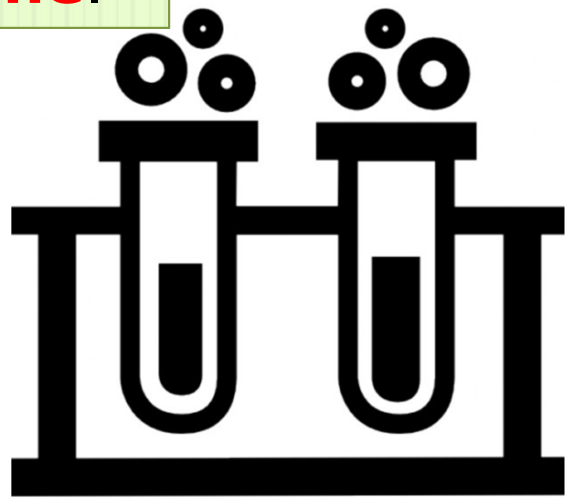
Dal campione **alla popolazione**

Durante le verifiche sulla qualità dell'acqua potabile di Milano si è misurata, in 5 punti dell'acquedotto, la quantità presente nell'acqua di arsenico, ottenendo i seguenti **valori campionari**: 15, 12.5, 7.0, 13.0, 7.5 $\mu\mathrm{g/L}$.

Sapendo che la legge impone una soglia massima per l'arsenico di 10 $\mu\mathrm{g/L}$, **si può affermare che *l'acqua potabile di Milano* non è a norma di legge**?

Dal campione **alla popolazione**

Ci serve un modo per capire se quello che vediamo sul **campione** vale anche sull'intera **popolazione**.

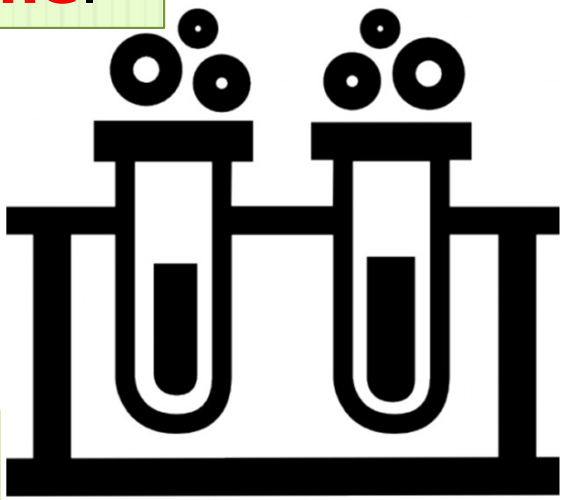


Dal campione **alla popolazione**

Tutti
i possibili
risultati

modello probabilistico

Ci serve un modo per capire se
quello che vediamo sul **campione**
vale anche sull'intera **popolazione**.



modello probabilistico

Uno dei tanti
possibili risultati

Dal campione **alla popolazione**

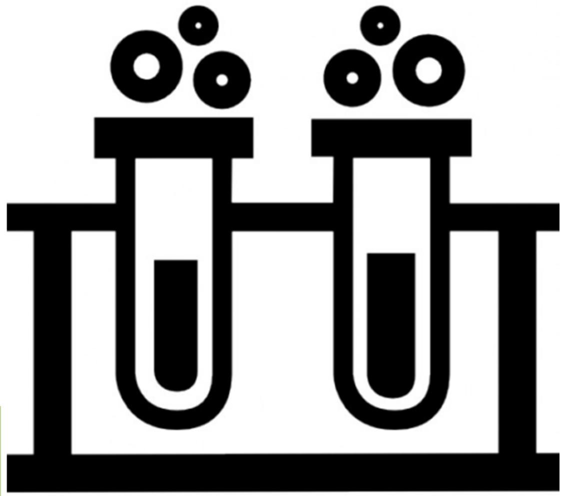
Tutti
i possibili
risultati

modello probabilistico

Il ***modello*** è una descrizione del meccanismo con cui si sviluppa il fenomeno (e, quindi, con cui sono prodotti i dati nel campione):

modello probabilistico

Uno dei tanti
possibili risultati



Dal campione **alla popolazione**

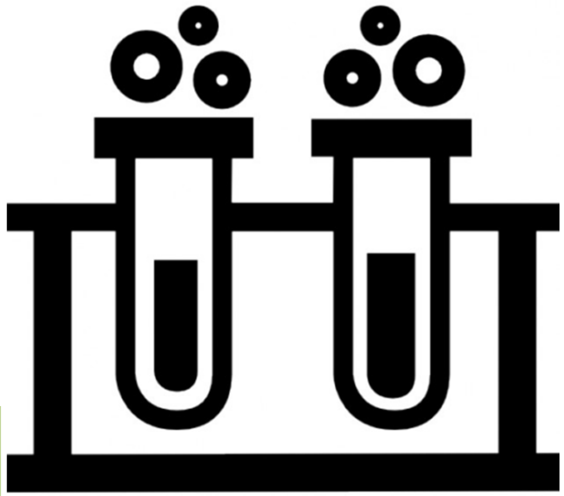
Tutti
i possibili
risultati

modello probabilistico

Il ***modello*** è una descrizione del meccanismo con cui si sviluppa il fenomeno (e, quindi, con cui sono prodotti i dati nel campione):

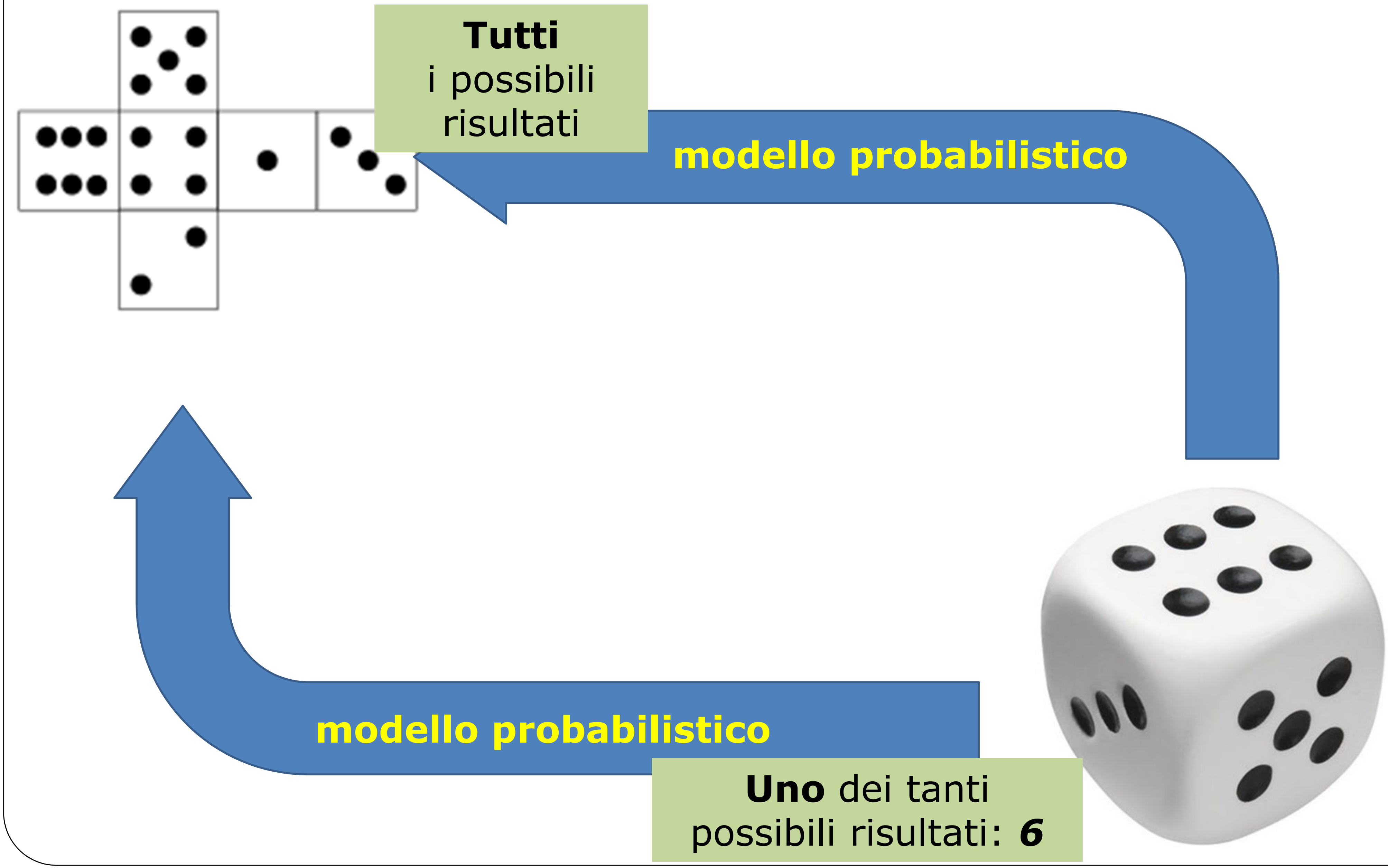
è in grado di darci informazioni sulle osservazioni *prima* di estrarre il campione (***osservazioni potenziali***)

modello probabilistico

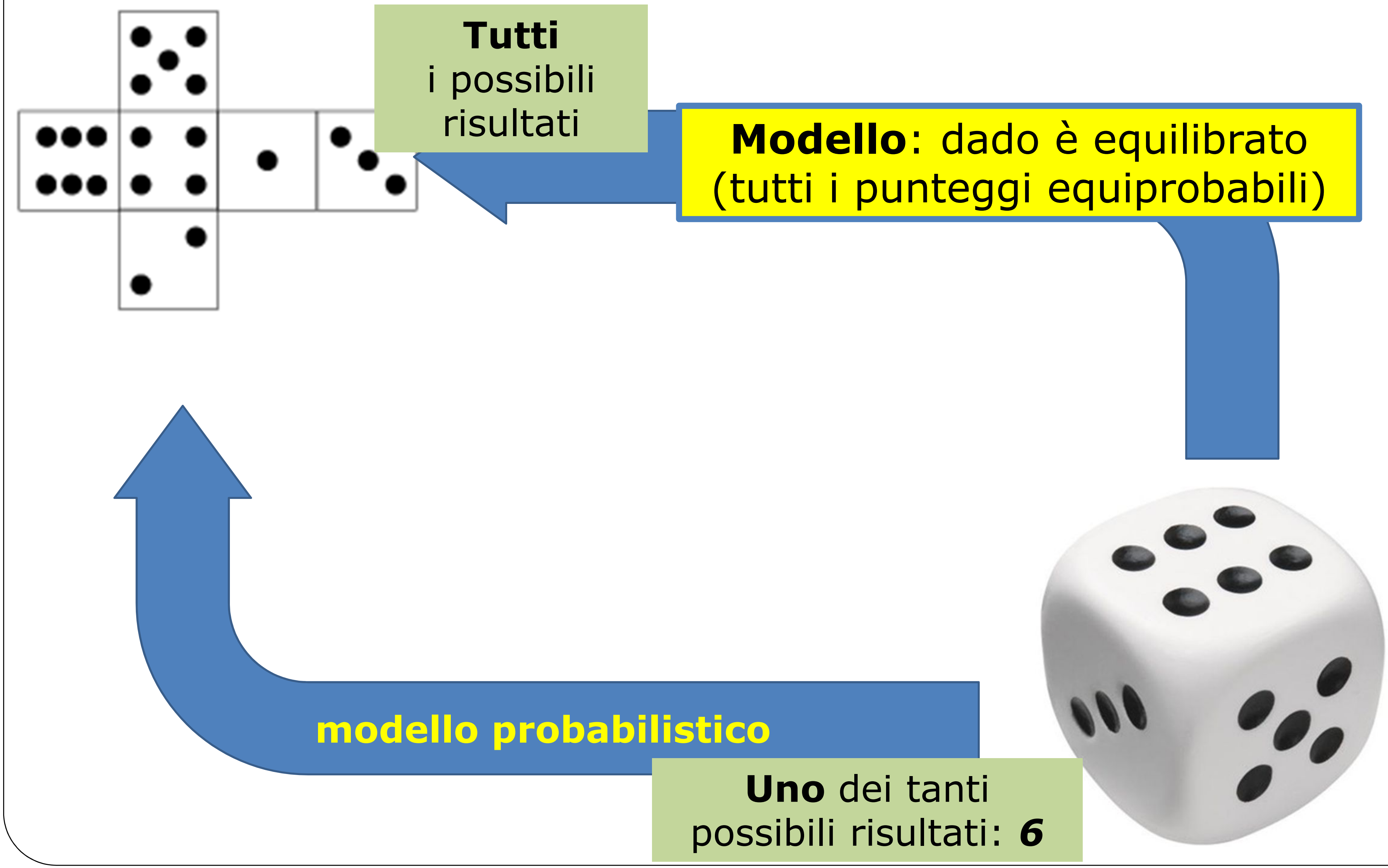


Uno dei tanti
possibili risultati

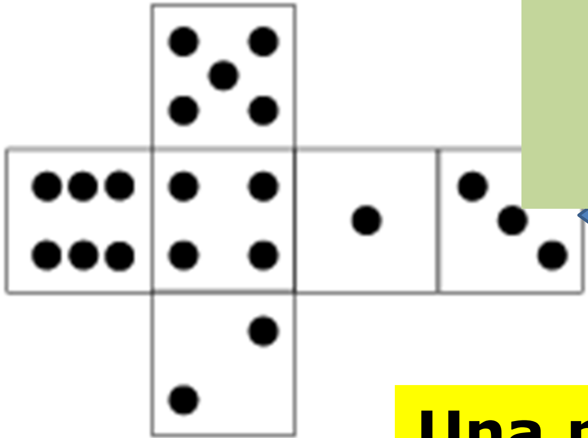
Dal campione **alla popolazione**



Dal campione **alla popolazione**



Dal campione **alla popolazione**



Tutti
i possibili
risultati

Modello: dado è equilibrato
(tutti i punteggi equiprobabili)

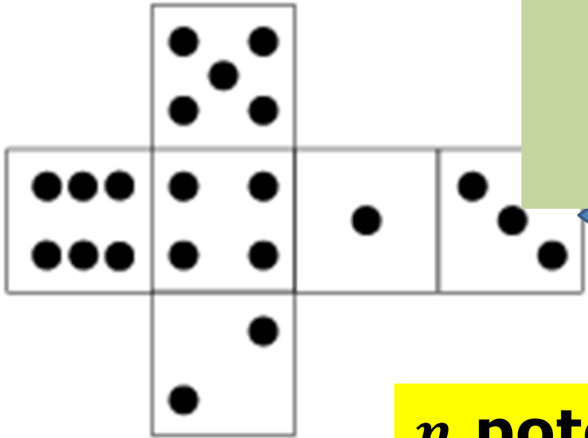
Una potenziale osservaz.: X **variabile casuale** che assume i valori $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e tale che

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \dots, 6$$

modello probabilistico

Uno dei tanti
possibili risultati: ***6***

Dal campione **alla popolazione**



Tutti
i possibili
risultati

Modello: dado è equilibrato
(tutti i punteggi equiprobabili)

$\boldsymbol{n}$ **potenziali osservaz.**: $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_n}$
indipendenti (come i lanci) **e** tutte
identiche con distribuzione

$$P(X_i = k) = \frac{1}{6}, \qquad k = 1, \dots, 6$$

modello probabilistico

Uno dei tanti
possibili risultati: ***6***

Dal campione **alla popolazione**

Modello: dado è equilibrato (tutti i punteggi equiprobabili)

Una potenziale osservaz.: X variabile casuale che assume i valori $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e tale che

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \dots, 6$$

$\boldsymbol{n}$ **potenziali osservaz.**: $X_1, X_2, \dots, X_n$ indipendenti (come i lanci) e tutte identiche con distribuzione

$$P(X_i = k) = \frac{1}{6}, \qquad k = 1, \dots, 6$$

Campione casuale osservato : esito di n lanci: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{1,3,2,1,1,6,2,3,4,4, \dots, 6\}$

Variabili casuali discrete

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$$\boldsymbol{X}: \quad (\cdots) \to \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad N \leq +\infty$$

distribuzione di X :

$$\boldsymbol{P(X = x_i)} \text{ per tutti gli } \boldsymbol{x_i}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{P(X = x_i)} \leq \mathbf{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{P(X = x_i)} = \mathbf{1}$$

Variabile casuale **uniforme**

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$$\boldsymbol{X} : \quad (\cdots) \to \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$$

distribuzione di X :

$$\boldsymbol{P(X = k) = 1/6, \quad k = 1, \ldots, 6}$$

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) = 1$$

Variabile casuale **bernoulliana**

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$\boldsymbol{X} : \quad (\cdots) \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

(numero di *successi* in una singola prova)

distribuzione di X :

$\boldsymbol{P(X = 1) = p}, \qquad \boldsymbol{P(X = 0) = 1 - p}$

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) = 1$$

Variabile casuale **bernoulliana**

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$X: \quad (\cdots) \to \{0, 1\}$

(numero di *successi* in una singola prova)

distribuzione di X :

$P(X = 1) = 0.5, \qquad P(X = 0) = 0.5$

Variabile casuale **bernoulliana**

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$X: \quad (\cdots) \rightarrow \{0, 1\}$

(numero di *successi* in una singola prova)

distribuzione di X :

$$P(X = 1) = 1/6, \qquad P(X = 0) = 5/6$$

La variabile bernoulliana

Il Genetics and IVF Institute di Fairfax in Virginia ha sviluppato una tecnica in grado, sostengono, di aumentare la probabilità per una coppia di avere una figlia femmina. Di 14 coppie scelte a caso su cui è stata messa in atto, 13 hanno avuto una femmina.

X variabile casuale che dice se il neonato è F: 1=sì, 0=no

$$P(X=1)=P(X=0)=\frac{1}{2}, normalmente$$

$X_1, X_2, \dots, X_{14}$ variabili casuali indipendenti ed identiche a X che dicono se il neonato di ciascuna coppia è (1) o meno (0) F

Campione casuale osservato: esito di 14 parti: $\{x_1, x_2, \dots, x_{14}\} = \{1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1\}$

La variabile bernoulliana

Il Genetics and IVF Institute di Fairfax in Virginia ha sviluppato una tecnica in grado, sostengono, di aumentare la probabilità per una coppia di avere una figlia femmina. Di 14 coppie scelte a caso su cui è stata messa in atto, 13 hanno avuto una femmina.

X variabile casuale che dice il sesso del neonato: 1=F, 0=M

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = q = 1 - p, \qquad con\ qualche\ tecnica$$

X è una variabile bernoulliana di *parametro* $p \in (0,1)$

$X_1 + X_2 + \ldots + X_{14}$ conta il numero di F (*successi*) nei 14 parti (*prove*)

$(1 + 1 + \cdots + 1 + 0 = 13)$

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ è una variabile **Binomiale**: $Bin(n, p)$

se possiamo supporre che le variabili siano indipendenti ed identiche

Variabile casuale **Binomiale**

$S_n = X_1 + X_2 + \ ... + X_n$ è una variabile **Binomiale**: $Bin(n, p)$

Modello probabilistico discreto:

$S_n: \quad (\cdots) \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$

(numero di *successi* in n prove indipendenti ed identiche)

distribuzione di S_n:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Variabile casuale **Binomiale**

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ è una variabile **Binomiale**: $Bin(n,p)$

Modello probabilistico discreto:

$S_n: \quad (\cdots) \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

(numero di *successi* in n prove indipendenti ed identiche)

distribuzione di S_n:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Se $p = 0.5, n = 14 \Rightarrow P(S_{14} = 13) = \frac{14!}{13!(14-13)!} 0.5^{13} (1-0.5)^{14-13} = 14 \times 0.5^{14} =$

$0.0008544922 \approx 0.001$

Variabile casuale **Binomiale**

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ è una variabile **Binomiale**: $Bin(n, p)$

Modello probabilistico discreto:

$S_n: \quad (\cdots) \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

(numero di *successi* in n prove indipendenti ed identiche)

distribuzione di S_n:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

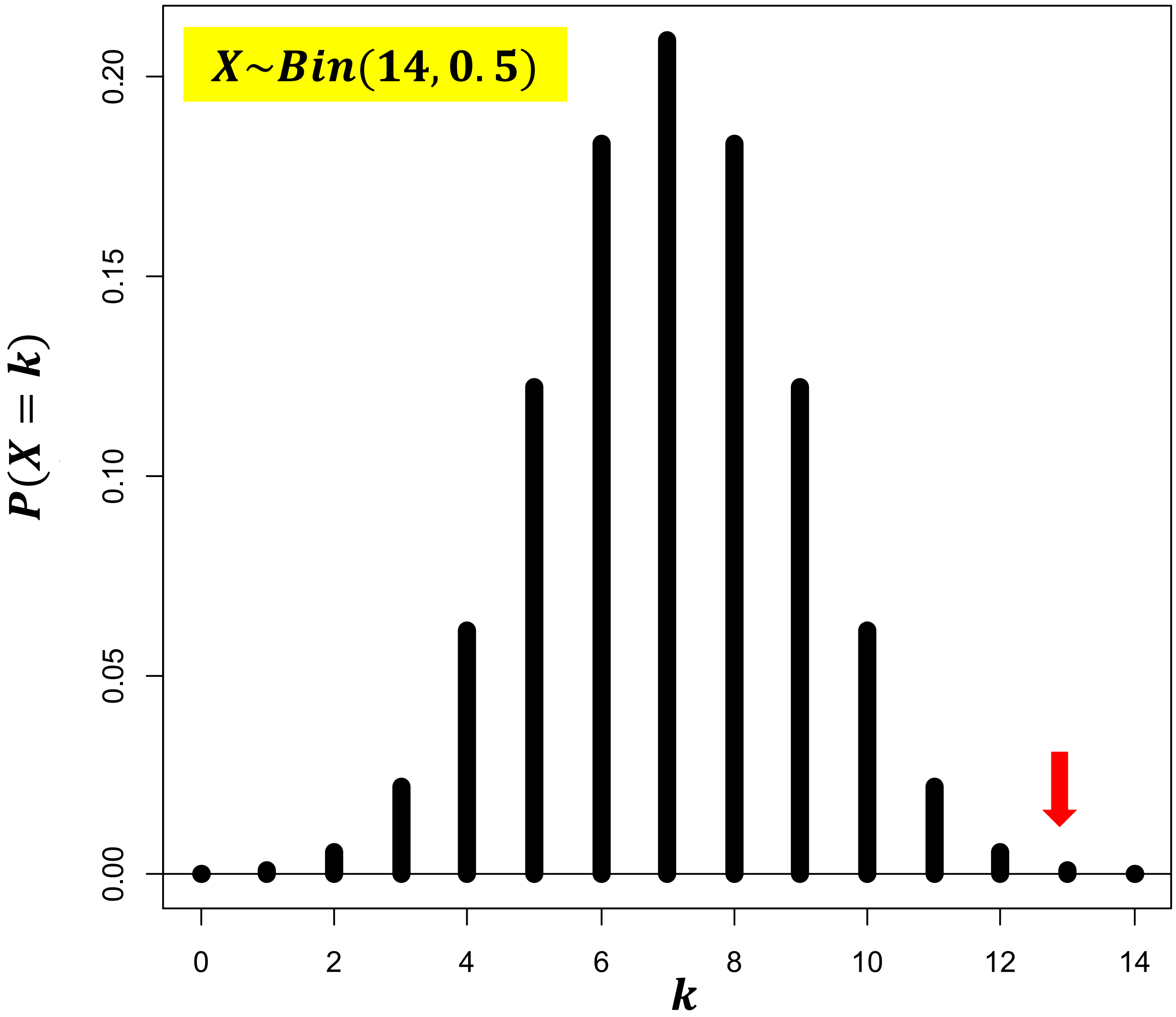
$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Se $p = 0.5, n = 14 \Rightarrow P(S_{14} = 13) = \frac{14!}{13!(14-13)!} 0.5^{13} (1-0.5)^{14-13} = 14 \times 0.5^{14} =$

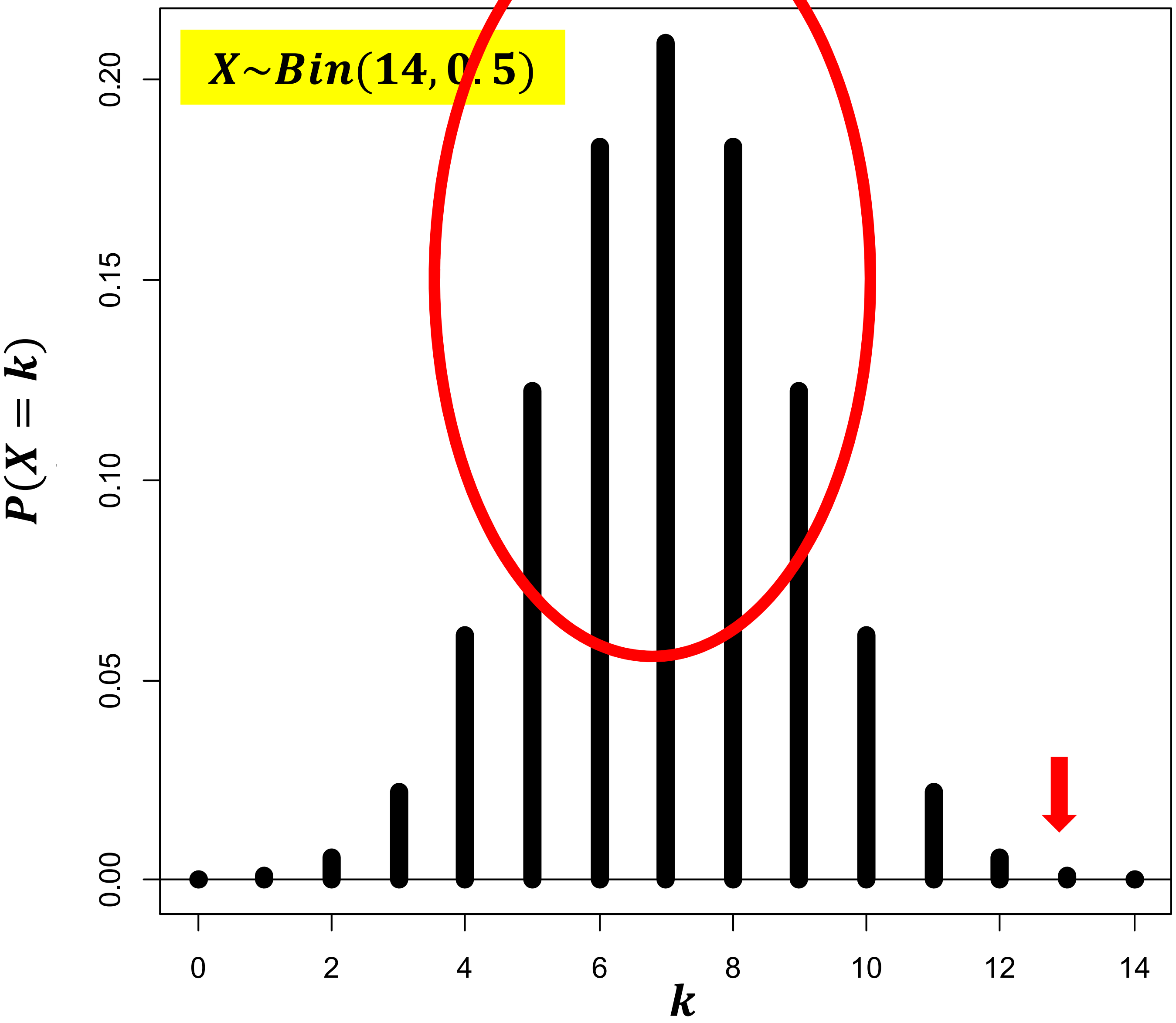
$0.0008544922 \approx 0.001$

Se la tecnica fosse inefficace, sarebbe altamente improbabile avere 13 F su 14 parti!

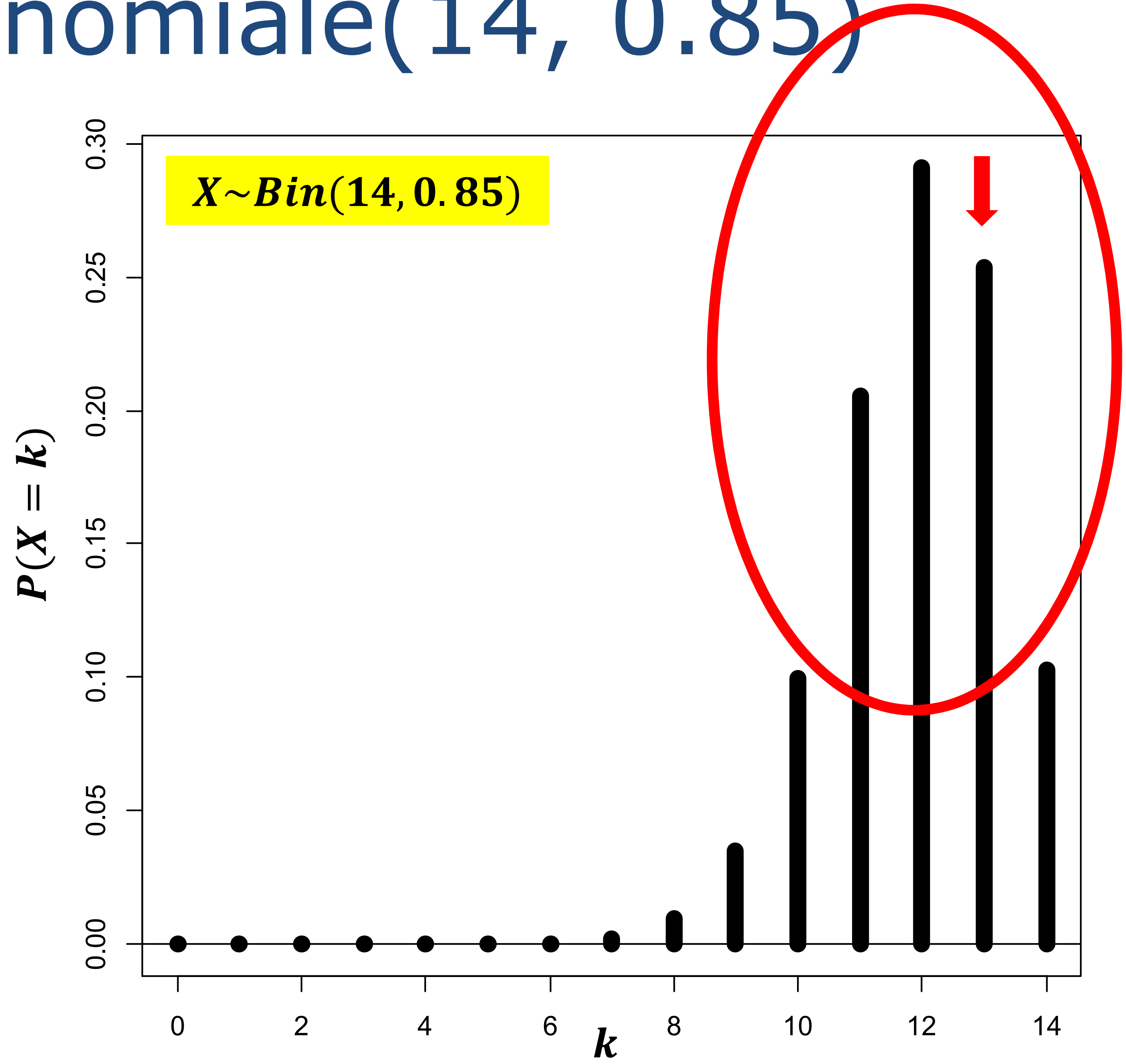
Binomiale(14, 0.5)



Binomiale(14, 0.5)



Binomiale(14, 0.85)



Esempio 1

Un test di ammissione ad un corso molto selettivo consiste di 15 domande a risposta multipla, con 3 risposte ciascuna di cui 1 sola corretta. Si è ammessi al corso solo rispondendo correttamente ad almeno 13 domande. Calcolare la probabilità di essere ammessi al corso rispondendo a caso a ciascuna domanda.

Esempio 1

Un test di ammissione ad un corso molto selettivo consiste di 15 domande a risposta multipla, con 3 risposte ciascuna di cui 1 sola corretta. Si è ammessi al corso solo rispondendo correttamente ad almeno 13 domande. Calcolare la probabilità di essere ammessi al corso rispondendo **a caso** a ciascuna domanda.

4. Lanciate due volte una moneta non truccata: dopo aver visto l'esito del primo lancio, potete prevedere l'esito del secondo?

SI	NO	NON SAPREI

9. Sapete che un'urna contiene 10 palline: 5 rosse e 5 nere, di uguali dimensioni e materiale. Viene estratta, scegliendo a caso, una pallina: la pallina estratta è rossa. Lasciate fuori dall'urna la pallina rossa estratta, e vi accingete a fare un'altra estrazione casuale. Allora:

E' più probabile che la seconda pallina sia nera	E' più probabile che la seconda pallina sia rossa	La seconda pallina potrà essere rossa o nera con uguale probabilità.

Esempio 1

Un test di ammissione ad un corso molto selettivo consiste di 15 domande a risposta multipla, con 3 risposte ciascuna di cui 1 sola corretta. Si è ammessi al corso solo rispondendo correttamente ad almeno 13 domande. Calcolare la probabilità di essere ammessi al corso rispondendo **a caso** a ciascuna domanda.

X = numero di risposte esatte

risposte **indipendenti**,
la prob. di indovinare è la stessa ad ogni domanda

4. Lanciate due volte una moneta non truccata: dopo aver visto l'esito del primo lancio, potete prevedere l'esito del secondo?

SI	NO	NON SAPREI

9. Sapete che un'urna contiene 10 palline: 5 rosse e 5 nere, di uguali dimensioni e materiale. Viene estratta, scegliendo a caso, una pallina: la pallina estratta è rossa. Lasciate fuori dall'urna la pallina rossa estratta, e vi accingete a fare un'altra estrazione casuale. Allora:

E' più probabile che la seconda pallina sia nera	E' più probabile che la seconda pallina sia rossa	La seconda pallina potrà essere rossa o nera con uguale probabilità.

Esempio 1

Un test di ammissione ad un corso molto selettivo consiste di 15 domande a risposta multipla, con 3 risposte ciascuna di cui 1 sola corretta. Si è ammessi al corso solo rispondendo correttamente ad almeno 13 domande. Calcolare la probabilità di essere ammessi al corso rispondendo **a caso** a ciascuna domanda.

X = numero di risposte esatte

$P(X \geq 13) = ?$

risposte **indipendenti**,
la prob. di indovinare è la stessa ad ogni domanda

Esempio 1

Un test di ammissione ad un corso molto selettivo consiste di 15 domande a risposta multipla, con 3 risposte ciascuna di cui 1 sola corretta. Si è ammessi al corso solo rispondendo correttamente ad almeno 13 domande. Calcolare la probabilità di essere ammessi al corso rispondendo **a caso** a ciascuna domanda.

X = numero di risposte esatte

$P(X \geq 13) = ?$

$X \sim Binomiale\left(15, \frac{1}{3}\right)$

risposte **indipendenti**,
la prob. di indovinare è la stessa ad ogni domanda

$$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15) = 1 - P(X \leq 12)$$

Esempio 1

Un test di ammissione ad un corso molto selettivo consiste di 15 domande a risposta multipla, c

ammessi al corso sol

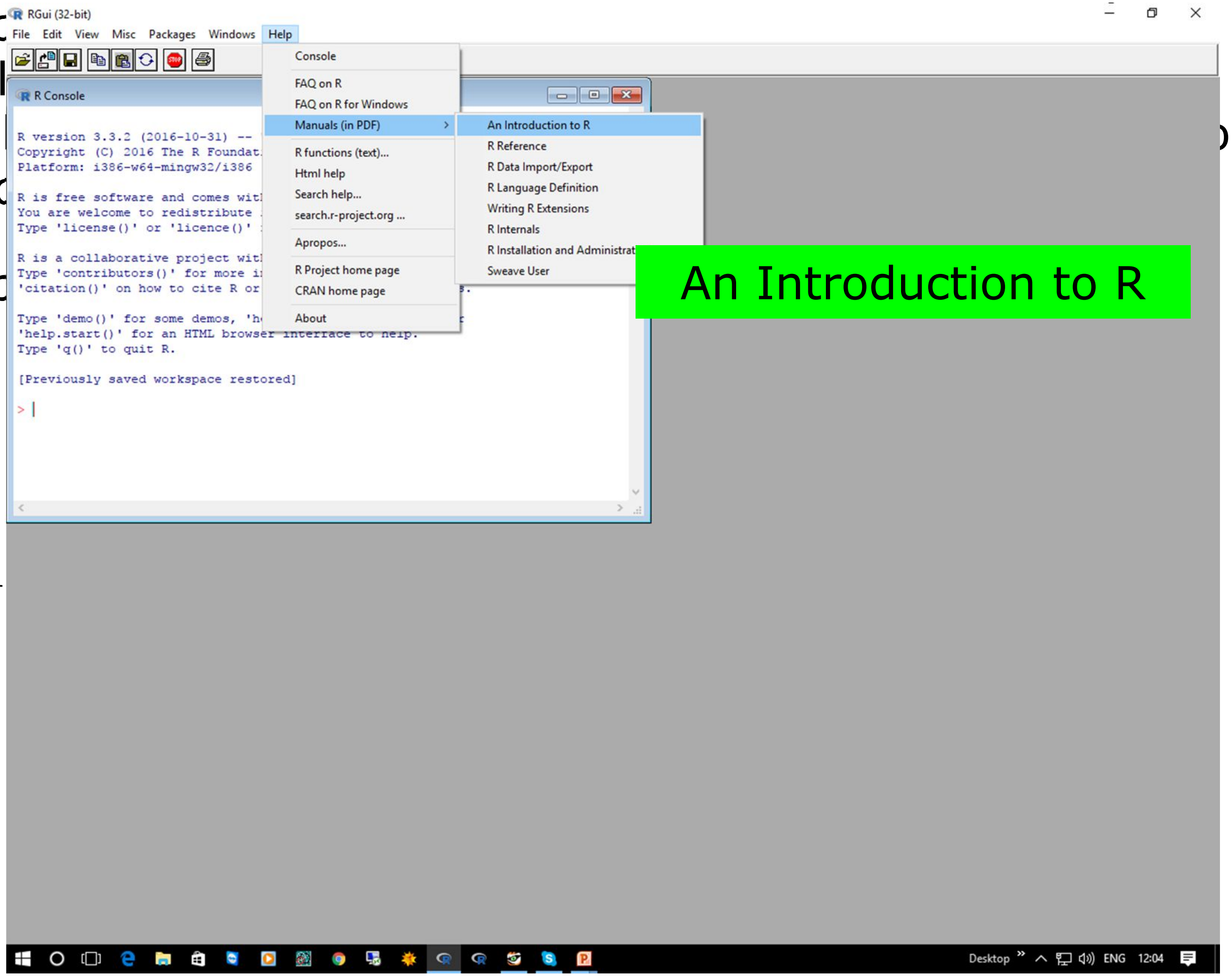
domande. Calcolare l

a caso a ciascuna d

$X =$ numero di risp

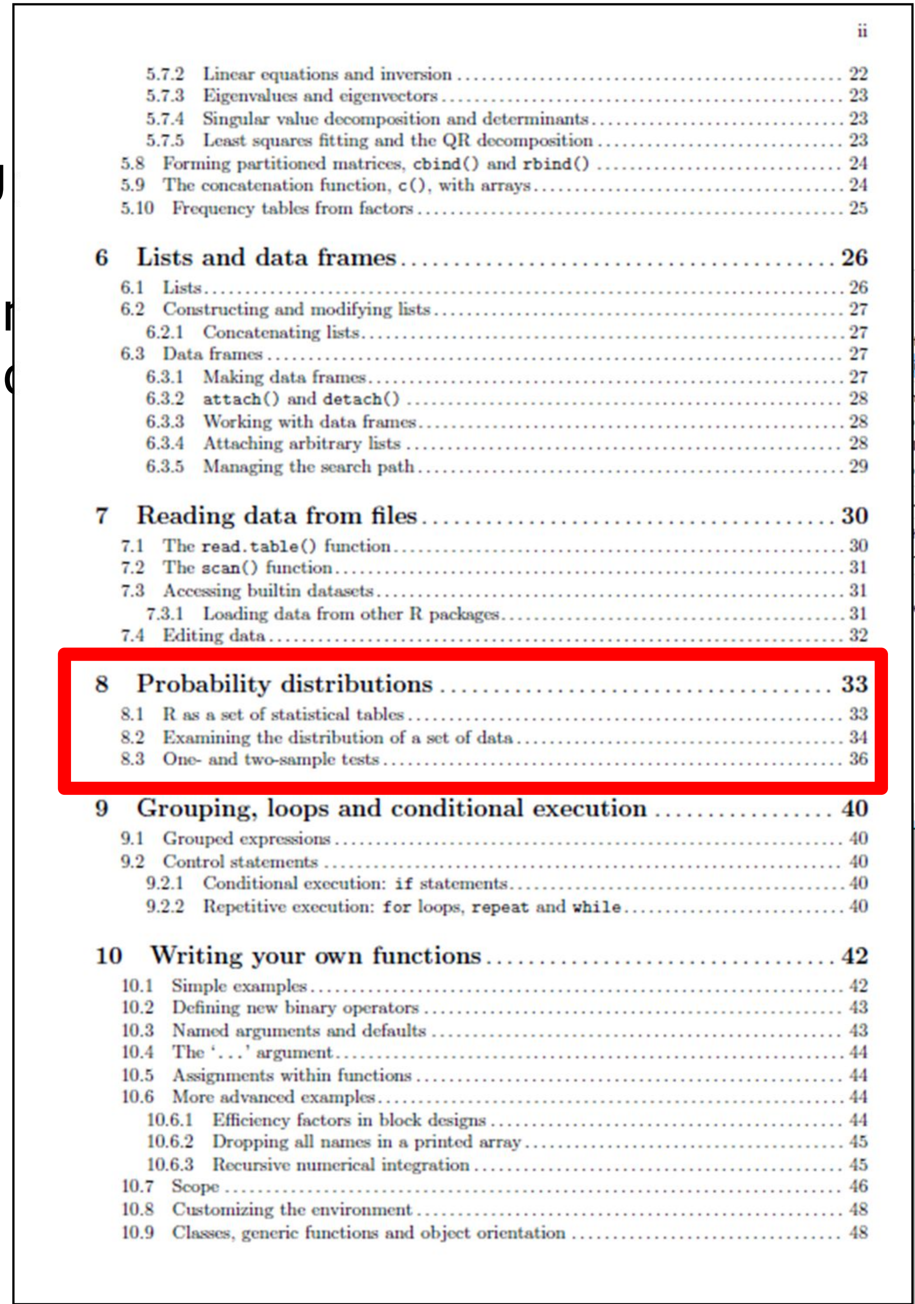
$X \sim Binomiale\left(15, \frac{1}{3}\right)$

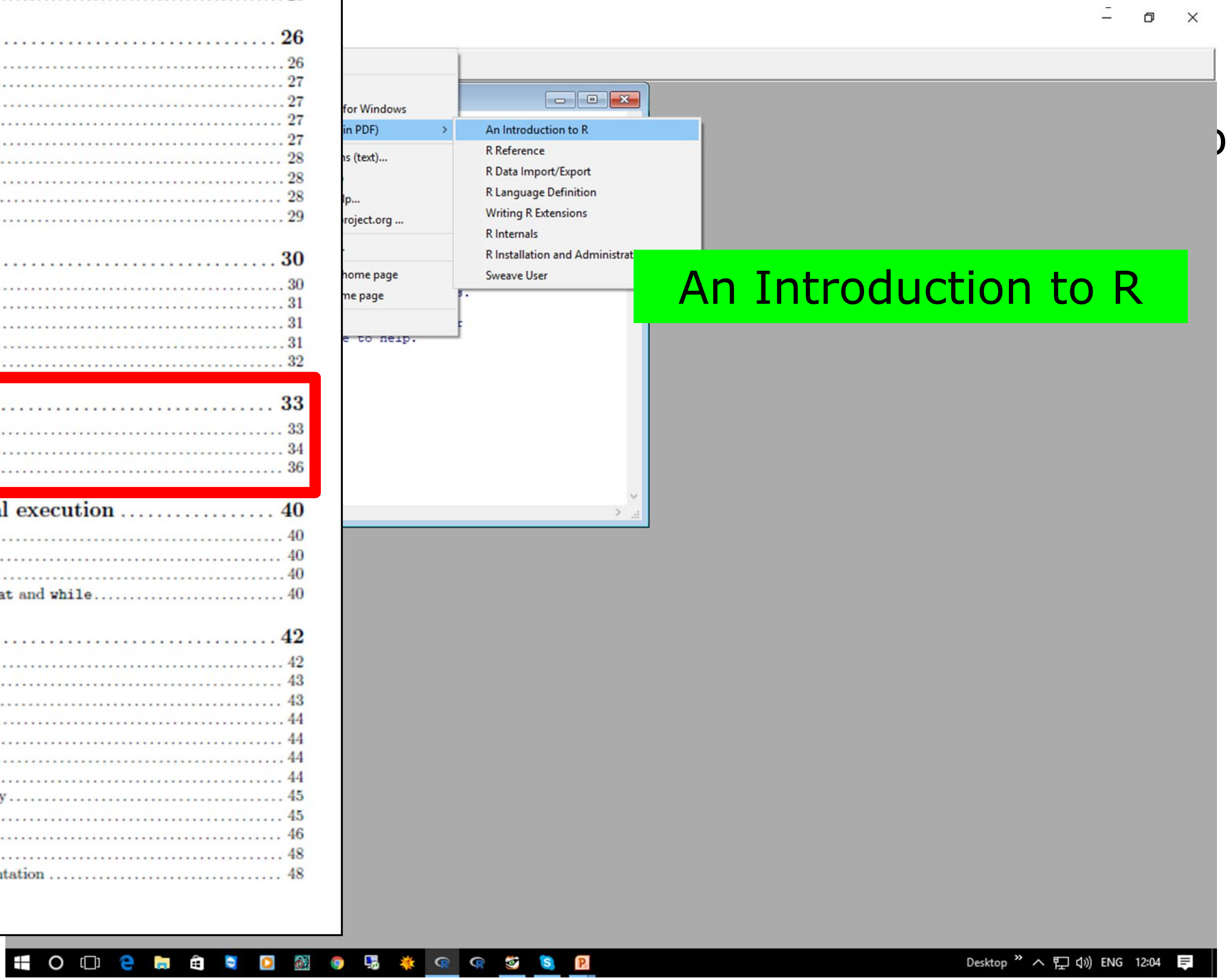
$P(X \geq 13) = P(X = 1$



An Introduction to R

U molto selettivo consiste di 15 domande
a
ar
do
a





An Introduction to R

8.1 R as a set of statistical tables

One convenient use of R is to provide a comprehensive set of statistical tables. Functions are provided to evaluate the cumulative distribution function $P(X \leq x)$, the probability density function and the quantile function (given q, the smallest x such that $P(X \leq x) > q$), and to simulate from the distribution.

Distribution	**R name**	**additional arguments**
beta	`beta`	`shape1, shape2, ncp`
binomial	`binom`	`size, prob`
Cauchy	`cauchy`	`location, scale`
chi-squared	`chisq`	`df, ncp`
exponential	`exp`	`rate`
F	`f`	`df1, df2, ncp`
gamma	`gamma`	`shape, scale`
geometric	`geom`	`prob`
hypergeometric	`hyper`	`m, n, k`
log-normal	`lnorm`	`meanlog, sdlog`
logistic	`logis`	`location, scale`
negative binomial	`nbinom`	`size, prob`
normal	`norm`	`mean, sd`
Poisson	`pois`	`lambda`
signed rank	`signrank`	`n`
Student's t	`t`	`df, ncp`
uniform	`unif`	`min, max`
Weibull	`weibull`	`shape, scale`
Wilcoxon	`wilcox`	`m, n`

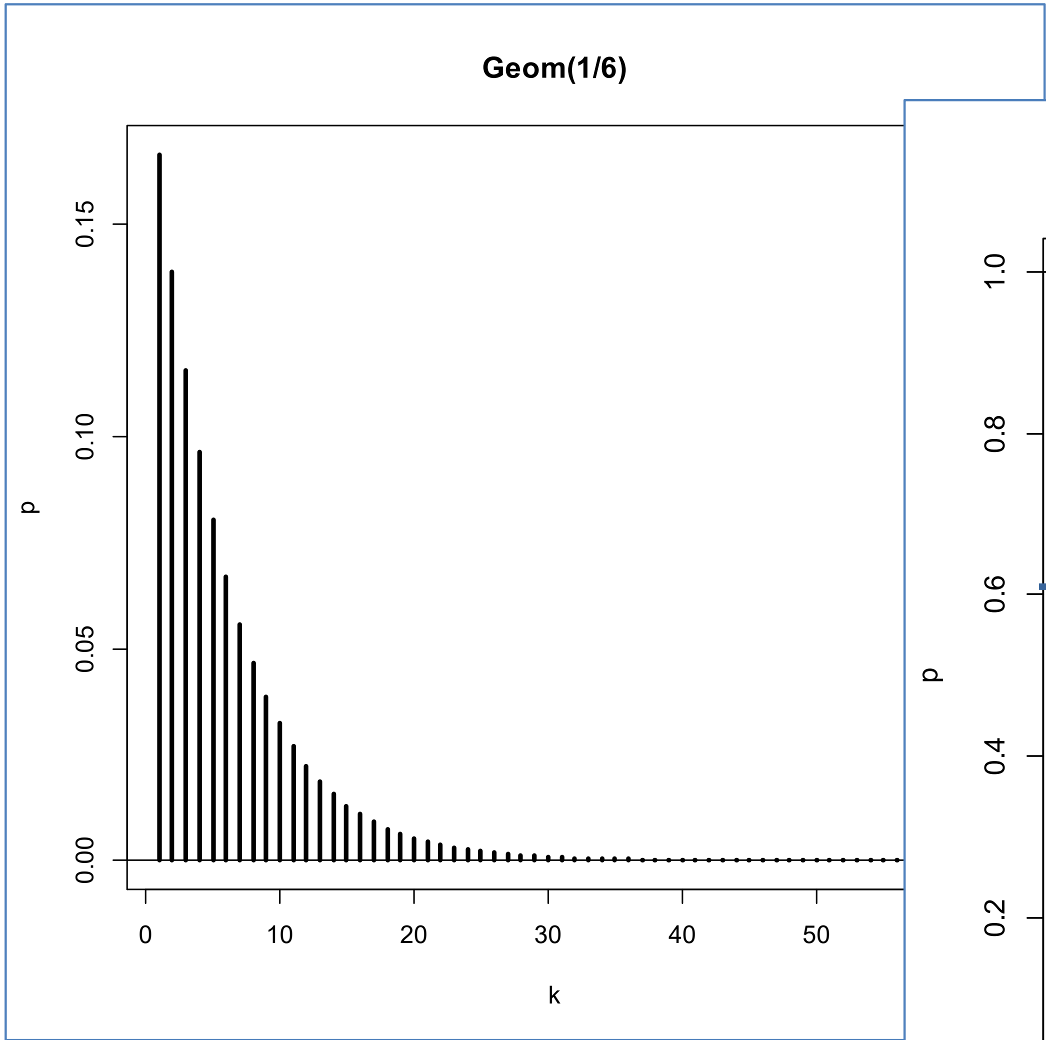
Prefix the name given here by 'd' for the density, 'p' for the CDF, 'q' for the quantile function and 'r' for simulation (*random deviates*). The first argument is `x` for `dxxx`, `q` for `pxxx`, `p` for `qxxx` and `n` for `rxxx` (except for `rhyper`, `rsignrank` and `rwilcox`, for which it is `nn`). In not quite all cases is the non-centrality parameter `ncp` currently available: see the on-line help for details.

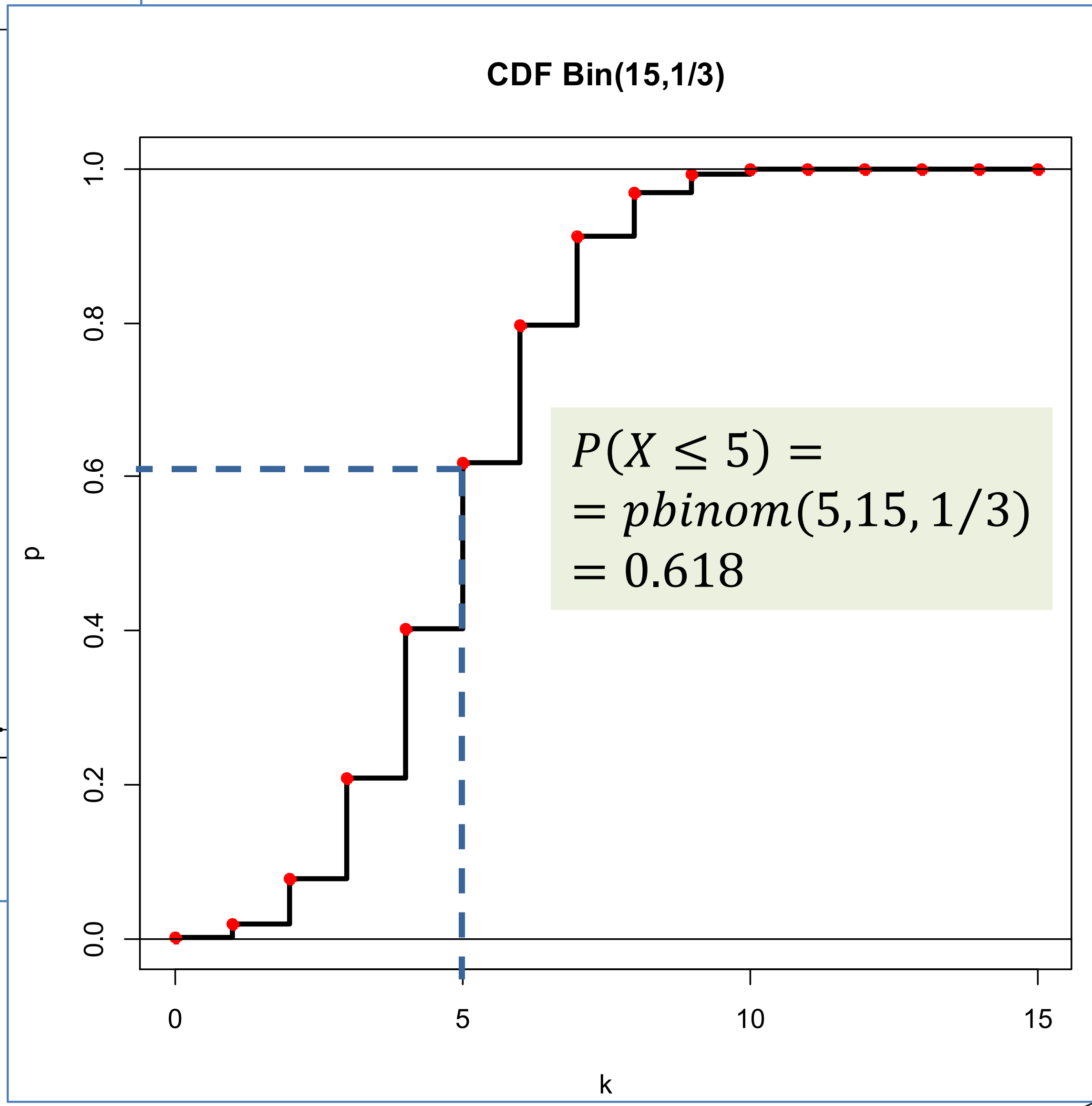
script2.R

domande

n to R

Facciamo un salto in R





Dal campione **alla popolazione**

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$\boldsymbol{X}: \quad (\cdots) \to \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_N}\}, \quad \boldsymbol{N} \leq +\infty$

distribuzione di X :

$\boldsymbol{P(X = x_i)}$ **per tutti gli** $\boldsymbol{x_i}$

Dal campione **alla popolazione**

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$\boldsymbol{X}: \quad (\cdots) \to \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_N}\}, \quad \boldsymbol{N} \leq +\infty$

distribuzione di X :

$\boldsymbol{P(X = x_i)}$ **per tutti gli** $\boldsymbol{x_i}$

dal censimento:

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \\ = \sum \left(x_i \times \frac{1}{n} \right)$$

$$\mu = E(X) = \sum\nolimits_{i=1,\ldots,N} x_i \, P(X = x_i)$$

Media e varianza

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$\boldsymbol{X}: \quad (\cdots) \to \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_N}\}, \quad \boldsymbol{N} \leq +\infty$

distribuzione di X :

$\boldsymbol{P(X = x_i)}$ **per tutti gli** $\boldsymbol{x_i}$

dal censimento:

$$\sigma^2 = \sum \frac{1}{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1,\dots,N} x_i \, P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1,\dots,N} (x_i - \mu)^2 \, P(X = x_i)$$

Media e varianza

Modello probabilistico discreto:

variabile casuale X :

$\boldsymbol{X}: \quad (\cdots) \rightarrow \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_N}\}, \quad \boldsymbol{N} \leq +\infty$

distribuzione di X :

$\boldsymbol{P(X = x_i)}$ **per tutti gli** $\boldsymbol{x_i}$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1,\dots,N} x_i P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1,\dots,N} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = \left[\sum_{i=1,\dots,N} {x_i}^2 P(X = x_i)\right] - \mu^2$$

Esercizio "di compito"

La variabile discreta X ha la distribuzione di frequenza data nelle seguente tabella:

x	0	1	2	10	20
$P(X = x)$	0.55	0.05	0.05	0.05	0.30

a) Rappresentare la distribuzione con un opportuno grafico
b) Calcolare $P(X \geq 10)$ e $P(X > 5)$
c) Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$

Soluzioni parziali: b) 0.35, 0.35; c) 6.65, 81.0275

Media e varianza

Modello probabilistico binomiale:

variabile casuale $\boldsymbol{X \sim Bin(n, p)}$:

$\boldsymbol{X}$: $(\cdots) \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}$, $\boldsymbol{N} \leq +\infty$

distribuzione di X :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mu = \boldsymbol{E(X) = np}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{Var(X) = np(1-p)} = npq$$

Media e varianza

$\boldsymbol{X \sim Bin(n, p)}$

$$\mu = E(X) = np$$

$$\sigma^2 = Var(X) = np(1-p) = npq$$

$Se\ p = 0.5$, il numero medio di F che mi aspetto in 14 nascite è $14 \times 0.5 = 7$

$Se\ p = \frac{1}{3}$, il numero medio di risposte esatte che mi aspetto in 15 domande a risposta multipla, con 3 risposte possibili, è $15 \times \frac{1}{3} = 5$

Dal nostro *test*

5. Lanciate 100 volte una moneta non truccata: quante monete vi aspettate diano esito testa?

CIRCA 50	NON SI PUO' SAPERE	NON SAPREI

Dal nostro *test*

5. Lanciate 100 volte una moneta non truccata: quante monete vi aspettate diano esito testa?

CIRCA 50	NON SI PUO' SAPERE	NON SAPREI

$$X \sim Binom(100, 0.5) \Longrightarrow E(X) = 100 \times 0.5 = 50$$

Dal nostro *test*

5. Lanciate 100 volte una moneta non truccata: quante monete vi aspettate diano esito testa?

CIRCA 50	NON SI PUO' SAPERE	NON SAPREI

$$X \sim Binom(100, 0.5) \Longrightarrow E(X) = 100 \times 0.5 = 50$$

7. Lanciate 120 volte un dado non truccato: quante volte vi aspettate che esca il numero 2?

$\boxed{\text{CIRCA 20}}$	NON SI PUO' SAPERE	NON SAPREI

$$X \sim Binom(120, 1/6) \Longrightarrow E(X) = 120 \times \frac{1}{6} = 20$$

Esercizio

Per i guidatori tra i 20 ed i 24 anni di età c'è un tasso annuo del 34% di incidenti d'auto (National Safety Council). Un investigatore assicurativo trova che in un gruppo di 500 guidatori scelti a caso a NY, tra i 20 e i 24 anni, il 42% ha avuto un incidente lo scorso anno.

a) quanti dei 500 hanno avuto un incidente?

Esercizio

Per i guidatori tra i 20 ed i 24 anni di età c'è un tasso annuo del 34% di incidenti d'auto (National Safety Council). Un investigatore assicurativo trova che in un gruppo di 500 guidatori scelti a caso a NY, tra i 20 e i 24 anni, il 42% ha avuto un incidente lo scorso anno.

a) quanti dei 500 hanno avuto un incidente?

Tra i 500 di NY, $500 \times 0.42 = 210$ hanno avuto un incidente

Esercizio

Per i guidatori tra i 20 ed i 24 anni di età c'è un tasso annuo del 34% di incidenti d'auto (National Safety Council). Un investigatore assicurativo trova che in un gruppo di 500 guidatori scelti a caso a NY, tra i 20 e i 24 ,il 42% ha avuto un incidente lo scorso anno.

b) Calcolare valore atteso e deviazione standard del numero di incidenti in un campione di 500 guidatori (20-24), secondo il NSC.

Tra i 500 di NY, $500 \times 0.42 = 210$ hanno avuto un incidente

$$X \sim Bin(500, 0.34) \Rightarrow$$
$$E(X) = 500 \times 0.34 = 170, Var(X) = 500 \times 0.34 \times 0.66 = 112.2$$
$$\Rightarrow \sqrt{Var(X)} = 10.59$$

Esercizio

Per i guidatori tra i 20 ed i 24 anni di età c'è un tasso annuo del 34% di incidenti d'auto (National Safety Council). Un investigatore assicurativo trova che in un gruppo di 500 guidatori scelti a caso a NY, tra i 20 e i 24 anni, il 42% ha avuto un incidente lo scorso anno.

c) Il risultato di NY sembra inusuale rispetto ai valori NSC? Si potrebbero giustificare assicurazioni più care per i Newyorkesi?

Tra i 500 di NY, $500 \times 0.42 = 210$ hanno avuto un incidente

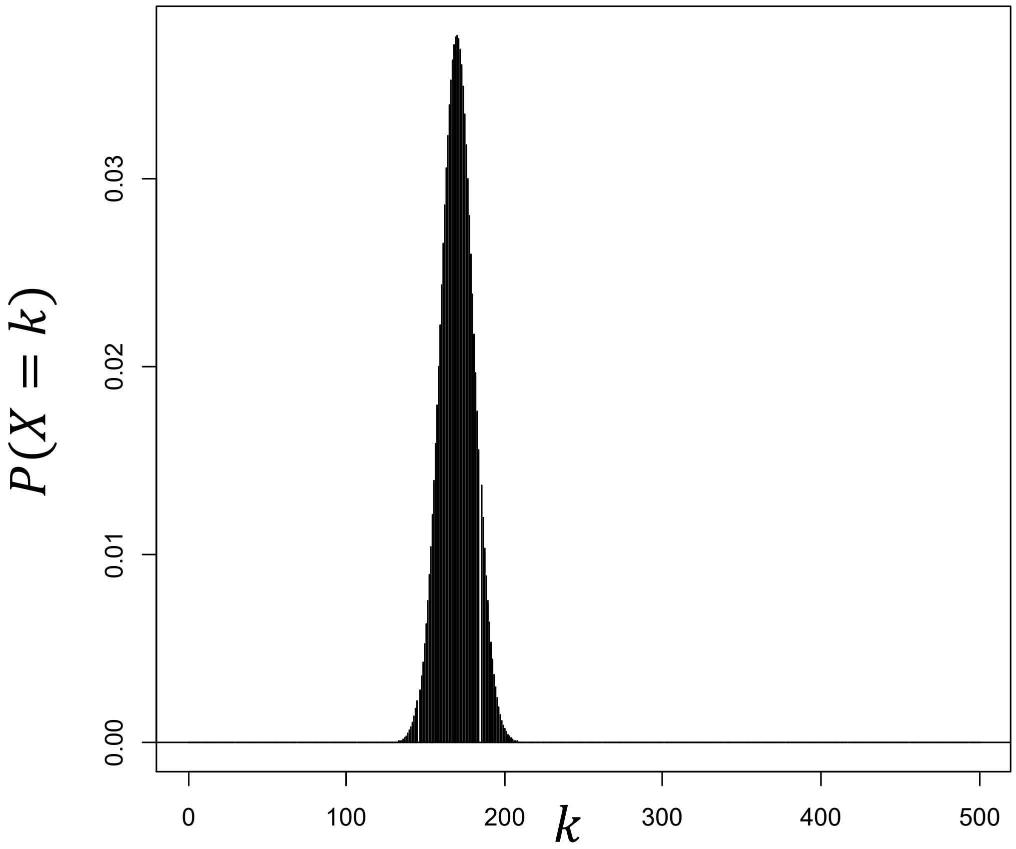
$X \sim Bin(500, 0.34) \Rightarrow$

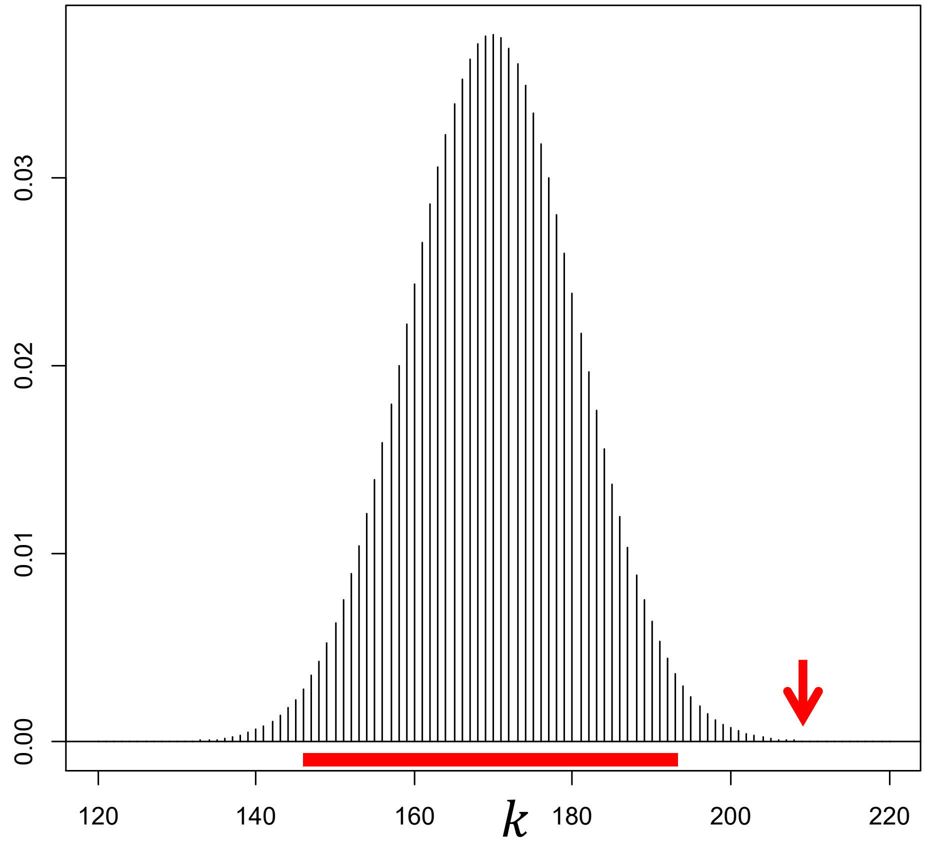
$E(X) = 500 \times 0.34 = 170, Var(X) = 500 \times 0.34 \times 0.66 = 112.2$

$$\Rightarrow \sqrt{Var(X)} = 10.59$$

Esercizio

$Bin(500, 0.34)$





Esercizio

Per i guidatori tra i 20 ed i 24 anni di età c'è un tasso annuo del 34% di incidenti d'auto (National Safety Council). Un investigatore assicurativo trova che in un gruppo di 500 guidatori scelti a caso a NY, tra i 20 e i 24 anni, il 42% ha avuto un incidente lo scorso anno.

c) Il risultato di NY sembra inusuale rispetto ai valori NSC? Si potrebbero giustificare assicurazioni più care per i Newyorkesi?

Tra i 500 di NY, $500 \times 0.42 = 210$ hanno avuto un incidente

$$P(X \geq 210) = 0.00012$$

e $P(149 \leq X \leq 191) = 0.96$

Esercizio

Per i guidatori tra i 20 ed i 24 anni di età c'è un tasso annuo del 34% di incidenti d'auto (National Safety Council). Un investigatore assicurativo trova che in un gruppo di 500 guidatori scelti a caso a NY, tra i 20 e i 24 anni, il 42% ha avuto un incidente lo scorso anno.

c) Il risultato di NY sembra inusuale rispetto ai valori NSC? Si potrebbero giustificare assicurazioni più care per i Newyorkesi?

Tra i 500 di NY, $500 \times 0.42 = 210$ hanno avuto un incidente

$$P(X \geq 210) = 0.00012$$

e $\quad P(149 \leq X \leq 191) = 0.96$

$$E(X) = 170, \sqrt{Var(X)} = 10.59 \Rightarrow$$
$$(149, 191) \approx (\mu \mp 3\sigma)$$

Dal nostro *test*

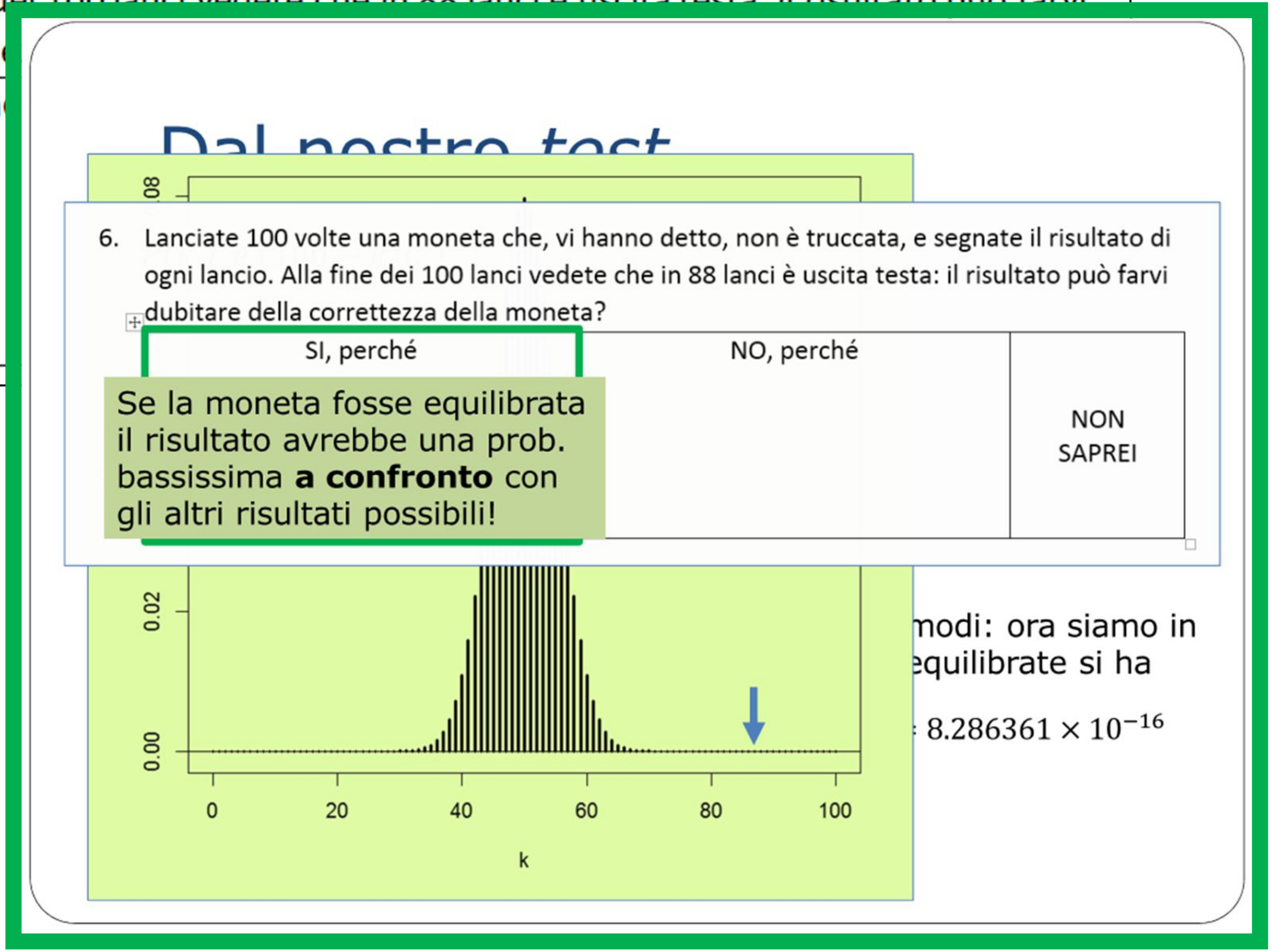
6. Lanciate 100 volte una moneta che, vi hanno detto, non è truccata, e segnate il risultato di ogni lancio. Alla fine dei 100 lanci vedete che in 88 lanci è uscita testa: il risultato può farvi dubitare della correttezza della moneta?

SI, perché	NO, perché	NON SAPREI

Dal nostro *test*

6. Lanciate 100 volte una moneta che, vi hanno detto, non è truccata, e segnate il risultato di ogni lancio. Alla fine d... dubitare della corrett...

SI, perch...



Dal nostro *test*

6. Lanciate 100 volte una moneta che, vi hanno detto, non è truccata, e segnate il risultato di ogni lancio. Alla fine dei 100 lanci vedete che in 88 lanci è uscita testa: il risultato può farvi dubitare della correttezza della moneta?

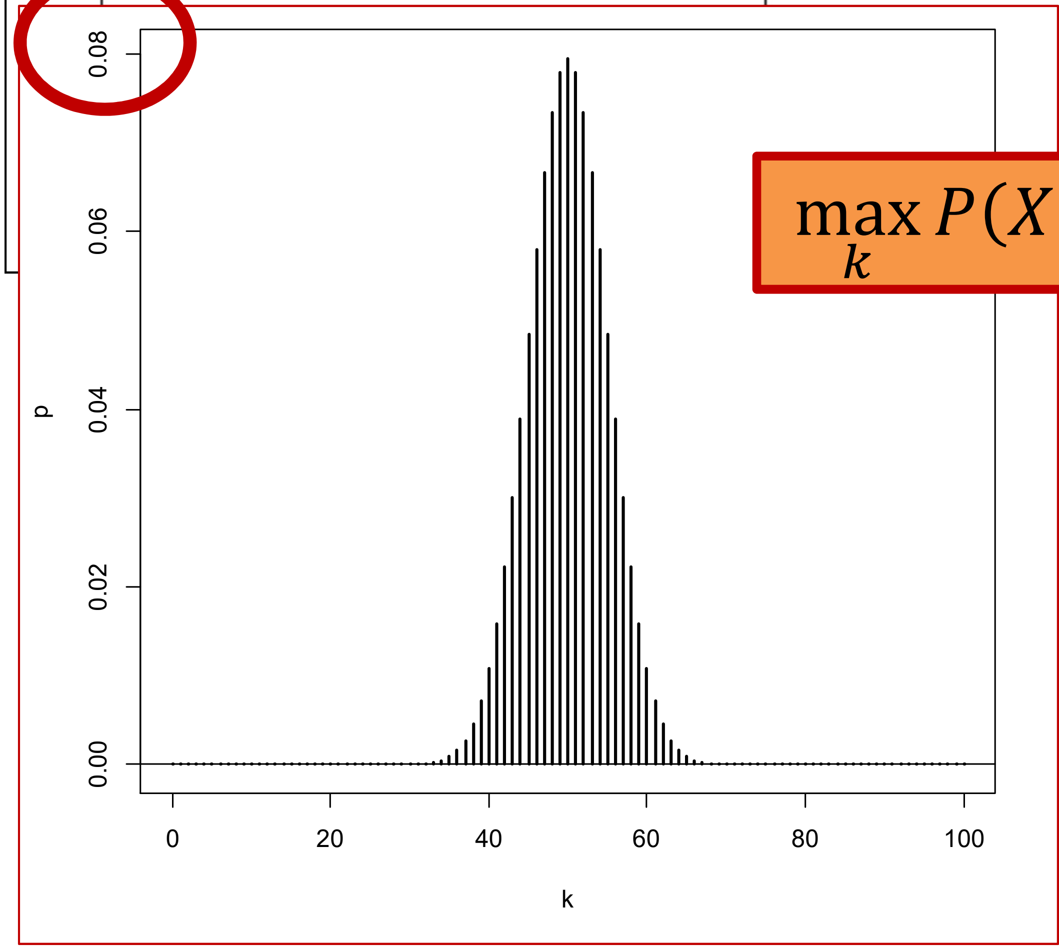
SI, perché	NO, perché	NON SAPREI

$$X \sim Binom(100{,}0.5) \Longrightarrow E(X) = 50 \; (\ll 88!), \boldsymbol{P(X \geq 88)} = 9.992007 \times 10^{-16}$$

Dal nostro *test*

6. Lanciate 100 volte una moneta che, vi hanno detto, non è truccata, e segnate il risultato di ogni lancio. Alla fine dei 100 lanci vedete che in 88 lanci è uscita testa: il risultato può farvi dubitare della correttezza della moneta?

SI, perché	NO, perché	NON SAPREI



$$\max_k P(X = k) \approx 0.08$$

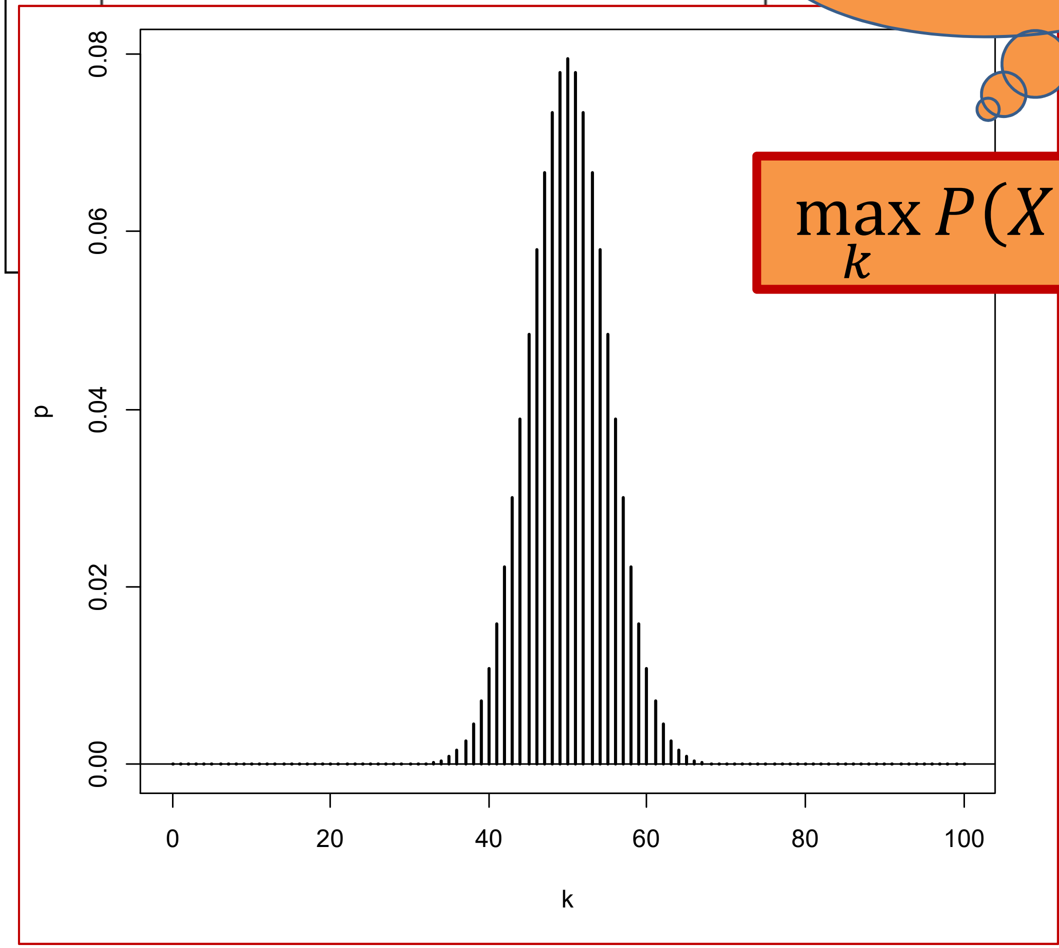
, $\boldsymbol{P(X \geq 88)} = 9.992007 \times 10^{-16}$

Dal nostro *test*

6. Lanciate 100 volte una moneta che
ogni lancio. Alla fine dei 100
dubitare della correttezza della

SI, perché	NON SAPREI

OGNI risultato ha una probabilità bassa!! Perché $\boldsymbol{n}$ è grande.



$$\boxed{\max_k P(X = k) \approx 0.08}$$

, $P(X \geq 88) = 9.992007 \times 10^{-16}$

Cfr è *sempre* con 1!

Dal nostro *test*

6. Lanciate 100 volte una moneta che, vi hanno detto, non è truccata, e segnate il risultato di ogni lancio. Alla fine dei 100 lanci vedete che in 88 lanci è uscita testa: il risultato può farvi dubitare della correttezza della moneta?

SI, perché	NO, perché	NON SAPREI

POSTILLA :

$$X \sim Binom(100{,}0.5) \Longrightarrow E(X) = 50\ (\ll 88!),\ \boldsymbol{P(X \geq 88)} = 9.992007 \times 10^{-16}$$

$\boldsymbol{P(X \geq 88) = 1 - P(X \leq 87)} =$
1-pbinom(87,100,0.5) con R

Attenzione che calcolato con R-studio viene un numero leggermente diverso, ma dello stesso ordine (8.881784×10^{-16})!