1

Capitolo W72
prontuario: meccanica e termodinamica

Contenuti delle sezioni

a. cinematica [W] p. 2
b. dinamica di base [W] p. 4
c. equilibrio, elasticità p. 11
d. gravitazione [W] p. 12
e. oscillazioni p. 14
f. fluidi p. 16
g. calore e teoria cinetica dei gas p. 17
h. termodinamica [W] p. 21

22 pagine

W72 a. cinematica [W]

W72 a.01 dn Moto rettilineo

Corpo puntiforme con posizione $s(t)$, velocità $v(t)5$, accelerazione $a(t)$; evoluzione tra i tempi t_1 a t_2

velocità media $\overline{v} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1)}$ velocità istantanea $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

accelerazione media $\overline{a} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ accelerazione istantanea $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

W72 a.02 dn moto rettilineo uniformemente accelerato

$v(t) = v(0) + a\,t$ $x(t) = x(0) + v(0)\,t + \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 = x(0) + \dfrac{1}{2}\,\big(v(0) + v(t)\big)\,t$

$v(t)^2 = v(0)^2 + 2\,(a(x(t) - x(0))$

W72 a.03 dn spostamento e movimento tridimensionale di corpo puntiforme

posizione $\mathbf{r} = \mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + x_3\,\mathbf{e}_3$

spostamento $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}$

velocità media $\overline{\mathbf{v}} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\,\mathbf{k}$

velocità istantanea $\mathbf{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$

accelerazione media $\overline{\mathbf{a}} = \dfrac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t}\,\mathbf{k}$

accelerazione istantanea $\mathbf{a} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{i} + \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{k} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$

W72 a.04 dn moto dei proiettili

proiettile = corpo lanciato nl campo gravitazionale terrestre con velocità v_0 e alzo θ_0

$x - x_0 = v_{0x}\,t = (v_0\,\cos\theta_0)\,t$

$y - y_0 = v_{0y}\,t - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 = v_0\,\sin\theta_0\,t - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$ consente di ricavare tempo di volo

equazione della traiettoria $y = \tan\theta_0\,x - \dfrac{g\,x^2}{2(v_0\,\cos\theta_0)^2}$

gittata della traiettoria con ritorno alla quota di partenza $\Delta x = \dfrac{v_0}{g}\,\sin(2\,\theta_0)$

W72 a.05 dn moto circolare uniforme

corpo che si muove su circonferenza di raggio r e centro nell'origine con velocità di modulo v.

posizione $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j}$

velocità $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} = (-v\,\sin\theta)\,\mathbf{i} + (v\,\cos\theta)\,\mathbf{j} = \left(-\dfrac{v\,y}{r}\right)\mathbf{i} + \left(-\dfrac{v\,x}{r}\right)\mathbf{j}$

accelerazione $\mathbf{a} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(-\dfrac{v^2}{r}\,\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(-\dfrac{v^2}{r}\,\sin\theta\right)\mathbf{j} = -\dfrac{v^2}{r}\,\mathbf{x}$

periodo della rivoluzione $T = \dfrac{2\,\pi\,r}{v}$

l'accelerazione è centripeta, diretta verso il centro, e di modulo $a = \dfrac{v^2}{T}$

W72 a.06 dn moto relativo classico

tempo assoluto; punto mobile P collocato nell'istante t da osservatore A nella posizione $\mathsf{x}_{A,P}(t)$ e da osservatore B nella posizione $\mathsf{x}_{B,P}(t)$

il collegamento tra osservatori è costituito da $\mathsf{x}_{A,B}(t)$ e da $\mathsf{x}_{B,A}(t)$, dagli orientamenti osservati delle terne di riferimento e dalle corrispondenti velocità e accelerazioni

relatività galileiana A e B osservatori coinerziali, ossia $\mathsf{a}_{A,B} = \mathsf{a}_{B,A} = \mathsf{0}$; assumiamo inoltre terne equiorientate

$\mathsf{v}_{A,B} = -\mathsf{v}_{B,A} = \mathsf{v}_{A,B}(t_0) =: \mathsf{v}_0$, $\mathsf{x}_{A,B} = -\mathsf{x}_{B,A} = \mathsf{x}_{A,B}(t_0) + \mathsf{v}_0(t - t_0)$

punto mobile P relazione tra posizioni $\mathsf{x}_{A,P} = \mathsf{x}_{B,P} + \mathsf{x}_{A,B}$

relazione tra velocità $\mathsf{v}_{A,P} = \mathsf{v}_{A,B} + \mathsf{v}_{B,P}$

relazione tra accelerazioni $\mathsf{a}_{A,P} = \mathsf{a}_{B,P}$

W72 b. dinamica di base [W]

W72 b.01 dn Leggi di Newton

prima legge di Newton: un corpo sul quale non agisce alcuna forza mantiene il suo moto rettilineo uniforme e in particolare rimane in uno stato di quiete

seconda legge di Newton: la forza risultatnte agente su un corpo è il prodotto della sua massa m per l'accelerazione corrispondente

$$\mathbf{F}_{ris} \;=\; m\,\mathbf{a}$$

terza legge di Newton: dati due corpi interagenti A e B, la forza esercitata da A su B è la opposta della forza esercitata da B su A $\quad \mathbf{F}_{A,B} \;=\; -\mathbf{F}_{B,A}$ $\quad$ (principio di azione e reazione)

W72 b.02 dn forza gravitazionale

forza approssimativamente costante in una regione limitata della superficie terrestre (o di un altro pianeta o satellite)

$\mathbf{F}_g \;=\; m\,(-g\,\mathbf{j}) \;=\; m\,\mathbf{g}$ $\quad$ con $\quad \mathbf{g} \;=\; -g\,\mathbf{j}$ $\quad$ accelerazione di gravità e $g \approx 9,81\mathrm{m/s^2}$

peso del corpo $\quad \mathbf{P} = m\,\mathbf{g}\;, \quad P = m\,g$

W72 b.03 dn Forze d'attrito

forza di attrito statico $\quad \leq\; \mu_s\,F_\perp$, con μ_s coefficiente di attrito statico

forza di attrito dinamico $\quad \mu_d\,F_{/\!/}$, con μ_d coefficiente di attrito dinamico $\quad \mu_d < \mu_s$

resistenza aerodinamica di un gas (aria)

$R_{aer} \;=\; \dfrac{1}{2}\,C\,\rho\,A\,v^2$ con ρ massa volumica del gas, A area della sezione del corpo ortogonale al vettore velocità $\mathbf{v}$ e C coefficiente di resistenza aerodinamica determinato empiricamente

velocità limite di corpo che cade nell'aria $\quad v_{lim} \;=\; \sqrt{\dfrac{2\,F_g}{C\,\rho\,A}}$

W72 b.04 dn energia cinetica

energia: grandezza associata a un corpo o a un sistema di corpi che si può presentare in molte forme diverse, può essere attribuite a molte cause, può trasformarsi in molti modi in relazione a molti tipi di processi, ma che in un sistema isolato rimane sempre invariata.

energia cinetica: energia associata allo stato di moto di un corpo

per un corpo di massa m e velocità di modulo v è $\quad K \;=\; \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$

W72 b.05 dn lavoro

lavoro: grandezza scalare, positiva o negativa, che corrisponde all'energia fornita o tolta a un corpo attraverso l'azione di una forza che agisce su di esso

lavoro effettuato da una forza $\mathbf{F}$ costante per effettuare lo spostamento $\mathbf{d}$ di un corpo di massa m $L \;=\; \mathbf{f}\cdot\mathbf{d}$.

se tra le direzioni dei vettori $\mathbf{F}$ e $\mathbf{d}$ si ha l'angolo ϕ, ossia $\;\phi \;=\; \widehat{\mathbf{F}\,\mathbf{d}}$, si ha il lavoro : $L \;=\; F\,d\,\cos\phi$

tale lavoro cambia la velocità del corpo da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$

$$L \;=\; \frac{1}{2}\,m\,{v_2}^2 - \frac{1}{2}\,m\,{v_1}^2 \;=\; K_2 - K_1$$

il lavoro compiuto su un corpo da più forze è la somma dei lavori compiuti dalle singole forze

il lavoro compiuto su un corpo scomponibile in più parti da una stessa forza è la somma dei lavori compiuti dalla forza sulla singole parti

lavoro compiuto dalla forza gravitazionale $-m\,g\,\mathbf{j} \;=\; \mathbf{F}_g$ nello spostamento $\mathbf{d}$ del corpo

$L_g \;=\; m\,g\,d\,\cos\phi \;\;\text{con}\;\; \phi \;=\; \widehat{\mathbf{F}\,\mathbf{d}}$

lavoro positivo se il corpo si abbassa, negativo se si alza

lavoro compiuto da una forza artificiale $\mathbf{F}_a$ per lo spostamento $\mathbf{d}$ di un corpo $\quad L_a \;=\; \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{d}$

lavoro positivo se il corpo si alza, negativo se si abbassa

variazione dell'energia cinetica di un corpo pesante mosso da forza artificiale

$\Delta K \;=\; K_f - K_i \;=\; L_a + L_g$

se si sposta il corpo tra due posizioni nel quale si trova fermo $\quad \Delta K \;=\; 0 \quad$ e $\quad L_a \;=\; -L_g$

lavoro compiuto per spostare il corpo lungo l'asse Ox da una forza variabile solo con la posizione

$$L \;=\; \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$$

W72 b.06 dn Forza elastica

legge di Hooke: forza di richiamo di una molla $\quad \mathbf{F} \;=\; -k\,\mathbf{d} \quad$ con k costante elastica della molla e $\mathbf{d}$ spostamento del corpo lungo l'asse della molla rispetto alla sua posizione di riposo

lavoro compiuto da una forza elastica per spostare il corpo di massa m da x_i a x_f

$$L_m \;=\; \frac{1}{2}\,k\,{x_i}^2 - \frac{1}{2}\,k\,{x_f}^2$$

variazione dell'energia cinetica del corpo per spostare corpo su asse Ox sul quale agiscono molla e forza esterna $\mathbf{F}_e \quad \Delta K \;=\; K_f - K_i \;=\; L_e + L_m$

se si sposta il corpo tra due posizioni nel quale è fermo $\quad \Delta K \;=\; 0 \qquad$ e $\qquad L_e \;=\; -L_g$

W72 b.07 dn potenza

potenza esercitata da una forza: grandezza che esprime la rapidità con la quale una forza compie un lavoro L

potenza media: $\quad \overline{P} \;=\; \dfrac{L}{\Delta t} \qquad ,\qquad$ potenza istantanea $\quad P \;=\; \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

si misura in watt: 1 W $=$ 1 J/s o riferendoso al wattora: 1 Wh $=$ 3600 J

potenza di una forza $\mathbf{F}$ che sposta un corpo che si muove con velocità $\mathbf{v}$

$P \;=\; \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \;=\; F\,v\,\cos\phi \quad$ con $\quad \phi \;=\; \widehat{\mathbf{F}\,\mathbf{d}}$

W72 b.08 dn energia potenziale

Energia potenziale U associata alla configurazione di un sistema di corpi interagenti, ovvero a forze che producono azioni reversibili: energia immagazzinata dal sistema che può essere restituita in altra forma.

Per il lavoro compiuto da tale forza per passare dalla configurazione (posizione) P_i alla P_f

$\Delta_{if}U \;=\; -L_{if}$, ossia $\;U_f \;=\; U_i - L_{if}$

energia potenziale gravitazionale U_g dipendente dalla distanza tra i corpi che si attraggono o dipendente dalla altitudine del corpo soggetto alla forza di gravità terrestre e lavoro compiuto dalla forza gravitazionale

$\Delta U_g \;=\; -L_g$

energia potenziale elastica esercitata da una molla con coefficiente k $\Delta U_e = -L_e$
forza conservativa: forza posizionale tale che quando fa passare dalla configurazione (posizione) P_i alla P_f o viceversa corrisponde a lavori per i quali $L_{if} = -L_{fi}$
il lavoro L_{if} compiuto da forza conservativa per passare da P_i a P_f non dipende dal percorso, ovvero il lavoto compiuto da una forza conservativa lungo un percorso chiuso è nullo: $L_{ii} = 0$
lavoro di una forza conservativa diretta come $\mathbf{i}$, $\mathbf{F} = F(x)\,\mathbf{i}$: $L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x$
energia potenziale di forza di gravità terrestre $m\,\mathbf{g}$: $\Delta U_g = m\,g\,(y_f - y_i)$
energia potenziale elastica di una molla: $\Delta U_e = \frac{1}{2}\,k\,{x_i}^2 - \frac{1}{2}\,k\,{x_f}^2$

W72 b.09 dn conservazione dell'energia meccanica

energia meccanica di un sistema: somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale

$E_{mecc} := K + U$

per il lavoro compiuto da una forza conservativa $\Delta K = L$ e $\Delta U = -L$ implicano $\Delta K = -\Delta U$
per il passaggio da configurazione 1 a configurazione 2

$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1)$ ovvero $K2 + U_2 = K_1 + U_1$

in un sistema isolato sul quale agiscono solo forze conservative l'energia meccanica rimane invariata

$\Delta E_{mecc} = \Delta K + \Delta U = 0$ principio di conservazione dell'energia meccanica

ricavare la forza conservativa dalla energia potenziale
situazione monodimensionale e forza $F(x)$ $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$
per l'energia potenziale gravitazionale $F_g(y) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(m\,g\,y) = -k\,y$
per l'energia potenziale elastica di una molla $F_e(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\,k\,x^2\right) = -k\,x$

W72 b.10 **presenza di forze d'attrito**

corpo di massa m che spinto da forza $\mathbf{F}$ scivola su pavimento scabro subendo la forza di attrito dinamico $\mathbf{f}_d$ esercitata dal pavimento e dovuta al suo peso

$\mathbf{F} - \mathbf{f}_d = m\,\mathbf{a} =$ costante

nel caso di movimento sul piano $F\,d = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 + f_d\,d = \Delta_{mecc} + f_d\,d$
la forza d'attrito comporta riscaldamento ossia variazione dell'energia termica $\Delta F_{th} = f_d\,d$
quindi per il lavoro compiuto: $L = \Delta E_{mecc} + \Delta_{th}$

W72 b.11 dn centro di massa

centro di massa o centroide (e quindi baricentro), in breve cdm
Sistema di n corpi P_i per $i = 1, 2, ..., n$, l'i-esimo avente massa m_i e posizione $\mathbf{x}_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$; massa totale $M := \sum_{i=1}^{n} m_i$.
corpi allineati sull'asse Ox

$$x_{cdm} = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + \cdots + m_n\,x_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i$$

due corpi $\quad x_{cdm} \;=\; \dfrac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1+m_2} \;=\; x_1 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,(x_2 - x_1)$
corpi collocati nelle tre dimensioni

$$\mathbf{x}_{cdm} \;=\; x_{cdm}\,\mathbf{i} + y_{cdm}\,\mathbf{j} + z_{cdm}\,\mathbf{k} \;:=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{x}_i$$

$$x_{cdm} \;=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i \quad , \quad y_{cdm} \;=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i \quad , \quad z_{cdm} \;=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i$$

$$\mathbf{v}_{cdm} \;=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{v}_i \quad , \quad \mathbf{a}_{cdm} \;=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{F}_{ris} \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \;=\; M\,\mathbf{a}_{cdm}$$

$$F_{cdm,x} \;=\; M\,a_{cdm,x} \quad , \quad F_{cdm,y} \;=\; M\,a_{cdm,y} \quad , \quad F_{cdm,z} \;=\; M\,a_{cdm,z}$$

W72 b.13 dn quantità di moto

quantità di moto di un punto $\quad \mathbf{p} \;:=\; m\,\mathbf{v}$;
quindi $\;\mathbf{F} \;=\; m\,\mathbf{a}\;$ equivale a $\;\mathbf{F} \;=\; \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \;=\; m\,\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$
sistema di n punti P_i aventi masse m_i, velocità $\mathbf{v}_i$ e quantità di moto $\mathbf{p}_i$

$$\mathbf{P} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i \;=\; M\mathbf{v}_{cdm} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \;=\; M\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{cdm}}{\mathrm{d}t} \;=\; M\,\mathbf{a}_{cdm}$$

sistema di corpi puntiformi isolato, ossia con forze esterne a risultante nulla;

$\mathbf{P}_f \;=\; \mathbf{P}_i$ conservazione della quantità di moto

W72 b.13 dn urti e impulso

urto causato da azione di una forza intensa di breve durata

impulso della forza $\mathbf{F}$ sul proiettile per urto da t_i a t_f

$$\mathbf{J} \;=\; \Delta\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\mathbf{p}$$

teorema dell'impulso $\quad \Delta\mathbf{p} \;=\; \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \;=\; \mathbf{J}$

ovvero $\quad p_{f,x} - p_{i,x} \;=\; \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} F_x\,\mathrm{d}t \quad , \quad p_{f,y} - p_{i,y} \;=\; \int_{t_i}^{t_f} F_y\,\mathrm{d}t \quad , \quad p_{f,z} - p_{i,z} \;=\; \int_{t_i}^{t_f} F_z\,\mathrm{d}t$

intensità media dell'impulso $\quad J \;=\; \overline{F}\,\Delta t$

Serie di urti di proiettili di massa m in una direzione $J = -n\Delta p$
Forza media esercitata sul bersaglio $\overline{F} = \dfrac{j}{\Delta t} = -\dfrac{n}{\Delta t} m\Delta v$
$\dfrac{n}{\Delta t}$ frequenza degli urti dei proiettili; $\Delta v = v_f - v_i$ variazione della velocità
urti con assorbimento $\Delta v = -v$; urti elastici $\Delta v = -2v$

W72 b.14 dn quantità di moto ed energia cinetica negli urti

conservazione della quantità di moto in un sistema isolato $\;\mathbf{P}$ costante, ossia $\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_i$

urto elastico tra due corpi: l'energia cinetica $K = K_1 + K_2$ si conserva
urto completamente anelastico: i due corpi procedono incollati
$v_{2,i} = 0\ ,\ m_1\,v_{1,i} \;=\; m_1 + m_2 V_{12,f} \Rightarrow V \;=\; \dfrac{m_1}{m_1+m_2} v_{1,i}$

$\mathbf{P} \;=\; M\mathbf{v}_{cdm}\;;\;\; \mathbf{v}_{cdm} \;=\; \dfrac{\mathbf{p}_{1,i}+\mathbf{p}_{2,i}}{m_1+m_2}$

W72 b.15 dn moti rotazionali

corpo di massa M e momento di inerzia risp. cdm I_{cdm};
se ruota con velocità angolare ω intorno ad un asse A distante h dal suo cdm possiede energia cinetica $K=\dfrac{1}{2}\,I_A\,\omega^2$ con momento d'inerzia $I_A = I_{cdm} + M\,h^2$ ossia $K=\dfrac{1}{2}\,I_{cdm}\,\omega^2+\dfrac{1}{2}\,M\,{v_{cdm}}^2$

sistema con momento di inerzia I ruotante con velocità angolare ω intorno all'asse Oz: $\;L_z = I\,\omega$

momento angolare risp. $\mathbf{0}$ del punto di posizione $\mathbf{r}$ e massa m: $\;\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=m\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$

$|\mathbf{l}| = rmv\sin\theta = rmv_\perp = r_\perp mv$ con $\theta := \widehat{\mathbf{r}\mathbf{p}}$, $v_\perp$ componente di $\mathbf{v}$ perpendicolare a $\mathbf{r}$ e $r_\perp$ componente di $\mathbf{r}$ perpendicolaare a $\mathbf{v}$

momento torcente risp. $\mathbf{0}$ del punto di posizione $\mathbf{r}$ soggetto a forza $\mathbf{F}$:
$\vec{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}\qquad |\vec{\tau}| = rF\sin\phi \;\;$ con $\phi=\widehat{\mathbf{F}\mathbf{r}}$
seconda legge di Newton $\quad \vec{\tau} \;=\; \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t}$

sistema di n particelle di massa m_i, posizione $\mathbf{x}_i$ etc

momento angolare $\mathbf{L}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbf{l}_i$ $\quad$ seconda legge di Newton $\vec{\tau}_{ris} \;=\; -\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$
conservazione del momento angolare di sistema isolato,ossia relativo a $\;\vec{\tau}_{ris}=0$:
$\quad\mathbf{L}$ costante, ossia $\mathbf{L}_f=\mathbf{L}_i$

W72 b.16 dn centri di massa e momenti di inerzia di corpi omogenei

scriviamo M per la massa del corpo, $\mathbf{x}_C \;=\; \mathbf{C}\langle x_C,y_C,z_C\rangle$ per il centro di massa, $I[\textit{equazione asse di rotazione}]$ per il momento di inerzia, R per raggio di circonferenza o sfera

asta sottile di lunghezza L: $x_C=\dfrac{L}{2}\;,\; I[y=x_C]=\dfrac{1}{12}ML^2\;,\; I[y=0]=\dfrac{1}{3}ML^2$

triangolo con vertici in $\langle x_i,y_i,z_i\rangle$ $(i=1,2,3)$
$\mathbf{x}_C \;=\; \left\langle\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right\rangle$
triangolo piano $\quad\Delta\Big(\langle -a,0\rangle,\langle b,0\rangle\langle 0,h\rangle\Big)$
$\mathbf{x}_C \;=\; \left\langle\dfrac{b-a}{3},\dfrac{h}{3}\right\rangle \;\;,\;\; I[y\;=\;0]\;=\;\dfrac{1}{6}Mh^2 \;\;,\;\; I[x\;=\;0]\;=\;\dfrac{1}{6}M\dfrac{a^3+b^3}{a+b} \;\;,\;\; I[y\;=\;h/3]\;=\;\dfrac{1}{18}Mh^2$
$,\; I[y=h]=\dfrac{1}{2}Mh^2$

rettangolo-xy con vertici opposti origine e $\langle a,b\rangle \quad \mathbf{x}_C=\left\langle\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right\rangle$
$I[x=0]=\dfrac{1}{3}Mb^2 \;\;,\;\; I[y=0]=\dfrac{1}{3}Ma^2 \;\;,\;\; I[x=a/2]=\dfrac{1}{12}Mb^2 \;\;,\;\; I[y=b/2]=\dfrac{1}{12}Ma^2$

cerchio $\;[x^2+y^2\le R^2]$, con centro e centro di massa nell'origine
$I[x=0]=I[y=0]=\dfrac{1}{4}MR^2 \;\;,\;\; I[x=\pm R]=I[y=\pm R]=\dfrac{5}{4}MR^2 \;\;,\;\; I[x=y=0]=\dfrac{1}{2}MR^2$

settore circolare con centro nell'origine, raggio R per angoli da $-\alpha$ a $+\alpha$
$\mathbf{x}_C=\left\langle\dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha},0\right\rangle \;\;,\;\; I[x=0]=\dfrac{1}{4}MR^2\left(1+\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \;\;,\;\; I[y=0]=\dfrac{1}{4}MR^2\left(1-\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$

corona circolare delimitata dalle circonferenze $[x^2+y^2\le r^2]$ e $[x^2+y^2\le R^2]$

$I[x=0]=I[y=0]=\dfrac{1}{4}M(R^2-r^2)$, $I[x=\pm R]=I[y=\pm R]=\dfrac{1}{4}M(5R^2-r^2)$

anello circolare sottile $[x^2+y^2=R^2]$, con centro e centro di massa nell'origine
$I[x=0]=I[y=0]=\dfrac{1}{2}MR^2$, $I[x=\pm R]=I[y=\pm R]=\frac{3}{2}MR^2$, $I[x=y=0]=MR^2$

cuboide rettangolare-xyz con un vertice in $\langle 0,0,0\rangle$ e l'opposto in $\langle a,b,c\rangle$ $\quad \mathsf{x}_C=\left\langle \frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right\rangle$
$I[x=a/2,y=b/2]=\dfrac{1}{12}M(a^2+b^2)$ e simili , $I[x=0,y=b/2]=\dfrac{1}{3}M(4a^2+c^2)$ e simili ,
$I[x=0,y=0]=\dfrac{1}{3}M(a^2+b^2)$ e simili

sfera $[x^2+y^2+z^2\le R^2]$, con centro e centro di massa nell'origine
$I[x=0,y=0]=I[x=0,z=0]=I[y=0,z=0]=\dfrac{2}{5}MR^2$, $I[x=R,y=0]=I[x=0,y=R]=$
$I[x=R,z=0]=...=\dfrac{7}{2}MR^2$, $I[x=R,y=R]=I[x=R,z=R]=I[y=R,z=R]=\dfrac{12}{2}MR^2$

superficie sferica $[x^2+y^2+z^2=R^2]$, con centro e centro di massa nell'origine
$I[x=0,y=0]=I[x=0,z=0]=I[y=0,z=0]=\dfrac{2}{3}MR^2$,
$I[x=R,y=0]=I[x=0,y=R]=I[x=R,z=0]=...=\dfrac{5}{3}MR^2$,
$I[x=R,y=R]=I[x=R,z=R]=I[y=R,z=R]=\dfrac{8}{3}MR^2$

cilindro pieno $[x^2+y^2\le R^2,-h/2\le z\le h/2]$ con centri in $\mathbf{0}_3$
$I[x=0,y=0]=\dfrac{1}{2}MR^2$, $I[y=0,z=0]=I[x=0,z=0]=\dfrac{1}{12}M(3R^2+h^2)$,
$I[y=0,z=\pm h/2]=\dfrac{1}{12}M(3R^2+4h^2)$

tubo cilindrico sottile $[x^2+y^2=R^2,-h/2\le z\le h/2]$ con centri in $\mathbf{0}_3$
$I[x=0,y=0]=MR^2$, $I[y=0,z=0]=I[x=0,z=0]=\dfrac{1}{12}M(6R^2+h^2)$,
$I[y=0,z=\pm h/2]=\dfrac{1}{6}M(3R^2+2h^2)$

tubo cilindrico spesso $[r^2\le x^2+y^2=R^2,-h/2\le z\le h/2]$ con centri in $\mathbf{0}_3$
$I[x=0,y=0]=\dfrac{1}{2}M(R^2+r^2)$,
$I[y=0,z=h/2]=I[x=0,z=h/2]=\dfrac{1}{12}M(3R^2+3r^2+4h^2)$,
$I[x=R,y=0]=I[x=0,y=R\ =,\dfrac{1}{2}M(3R^2+r^2)$

cono retto pieno con base $[x^2+y^2\le R^2]$ e vertice in $\langle 0,0,h\rangle$ $\quad \mathsf{x}_C=\langle 0,0,h/4\rangle$
$I[x=0,y=0]=\dfrac{3}{10}MR^2$, $I[y=0,z=0]=I[x=0,z=0]=\dfrac{1}{20}M(3R^2+h^2)$, $I[y=0,z=h/4]=\dfrac{3}{80}M(4R^2+h^2)$, $I[y=0,z=h]=\dfrac{3}{20}M(R^2+4h^2)$

superficie conica aperta alla base $[x^2+y^2=R^2]$ e vertice in $\langle 0,0,h\rangle$ $\quad \mathsf{x}_C=\langle 0,0,h/3\rangle$
$I[x=0,y=0]=\dfrac{1}{2}MR^2$, $I[y=0,z=h/3]=\dfrac{1}{18}M(9R^2+10h^2)$, $I[y=0,z=h]=\dfrac{1}{4}M(R^2+2h^2)$

tetraedro regolare di spigolo s e massa M
tetraedro pieno $I[\textit{asse per un vertice e cdm}]=\dfrac{1}{20}Ms^2$
tetraedro cavo $I[\textit{asse per un vertice e cdm}]=\dfrac{1}{12}Ms^2$

ottaedro regolare di spigolo s e massa M
ottaedro pieno $I[asse\ per\ un\ vertice\ e\ cdm] = \frac{1}{10}Ms^2$
ottaedro cavo $I[asse\ per\ un\ vertice\ e\ cdm] = \frac{1}{6}Ms^2$

dodecaedro regolare di spigolo s e massa M
dodecaedro pieno $I[asse\ per\ un\ vertice\ e\ cdm] = \frac{39\varphi + 28}{150}Ms^2$,
dodecaedro cavo $I[asse\ per\ un\ vertice\ e\ cdm] = \frac{39\varphi + 28}{90}Ms^2$, con $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

icosaedro regolare di spigolo s e massa M
icosaedro pieno $I[asse\ per\ un\ vertice\ e\ cdm] = \frac{\varphi^2}{10}Ms^2$,
icosaedro cavo $I[asse\ per\ un\ vertice\ e\ cdm] = \frac{\varphi^2}{6}Ms^2$

toro regolare pieno con raggio maggiore R, raggio minore r e massa M
$I[asse\ perpendicolare\ ai\ diametri\ maggiori] = \frac{1}{4}M\left(4R^2 + 3r^2\right)$,
$I[asse\ comprendente\ uno\ dei\ diametri\ maggiori] = \frac{1}{8}M\left(4R^2 + 5r^2\right)$

elissoide pieno con semiassi a, b, e c, con massa M e centro in $\mathbf{0}_3$ $I[x = 0, y = 0] = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$, $I[x = 0, z = 0] = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2)$, $I[y = 0, z = 0] = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$

poligono regolare con n lati e massa M $I[x = 0, y = 0] = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi}{n}\right)$

triangolo isoscele con due lati lunghi L con vertice A e angolo relativo 2β
$I\Big[asse\ perpendicolare\ e\ passante\ per\ A\Big] = \frac{1}{2}ML^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\beta\right)$

W72 c. equilibrio, elasticità

W72 c.01 equilibrio statico di un sistema isolato

conservazione della quantità di moto del sistema $\mathbf{P}$: $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \implies \mathbf{F}_{ris} = \mathbf{0}$
conservazione del momento angolare del sistema risp. ad ogni punto e in particolare risp. al suo cdm C, di posizione $\mathbf{x}_C$:
$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \implies \vec{\tau}_{ris} = \mathbf{0}$
nel campo gravitazionale terrestre $\mathbf{F}_g = Mg(-\mathbf{k})$; momento torcente $\vec{\tau}_{ris} = \tau_{ris}(-kSd)$
baricentro $\mathbf{x}_{bc} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i\, m_i = \mathbf{x}_{cdm}$

W72 c.02 elasticità

sforzo := modulo di elasticità · deformazione

una forza $\mathbf{F}$ agisce su un corpo che le oppone un'area A

la trazione / compressione perpendicolare dell'area A comporta un allungamento / accorciamento del corpo:
sforzo $= \dfrac{F}{A}$, deformazione $= \dfrac{\Delta L}{L}$, modulo di allungamento o di Young E : $\dfrac{F}{A} = E\dfrac{\Delta L}{L}$

una forza parallela al piano della sezione A del corpo corrisponde a uno sforzo trasversale $\dfrac{F}{A}$ che e produce uno scorrimento Δx (o un taglio):
$\dfrac{F}{A} = G\dfrac{\Delta x}{L}$ con G modulo di scorrimento o taglio
forza di compressione idraulica uniforme sopra un corpo fluido di volume V che oppone una pressione p e subisce una variazione di volume ΔV;
$p = B\dfrac{\Delta V}{V}$ con B modulo di comprimibilità del fluido

W72 d. gravitazione [W]

W72 d.01

due corpi puntiformi, $\boldsymbol{P}_1$ di massa M_1 e posizione P_1 e $\boldsymbol{P}_2$ di massa M_2 e posizione P_2;
poniamo $\mathsf{r} := P_2 - P_1$

legge di gravitazione di Newton: P_1 esercita su P_2 la forza di attrazione $\mathsf{F}_{1,2} = G\,\dfrac{M_1\,M_2}{r^2}\,\mathsf{r}/r$

con $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 = 6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$, costante gravitazionale

un corpo esteso sferico attira un corpo esterno come se la sua massa fosse concentrata nel suo centro

per il principio di azione e reazione $\mathsf{F}_{2,1} = -\mathsf{F}_{1,2}$ – ciascuno dei due corpi attira l'altro

molti corpi puntiformi $\boldsymbol{P}_i$ di massa M_i e posizione P_i per $i = 0, 1, .., n$ con posizioni relative $\mathsf{r}_{i,j}$ e forze di mutua attrazione $\mathsf{F}_{i,j}$
per il principio di sovrapposizione la forza di attrazione esercitata da $\boldsymbol{P}_0$ sugli altri corpi è
$\mathsf{F}_{0,ris} = \mathsf{F}_{0,1} + \mathsf{F}_{0,2} + \cdots + \mathsf{F}_{0,n}$

W72 d.02 dati astronomici

proprietà	Sole	Terra	Luna	Marte	Giove
massa (kg)	$19 \cdot 10^{30}$	$5,97 \cdot 10^{24}$	$7,35 \cdot 10^{22}$	$6,4185 \cdot 10^{23}$	$1,8982 \cdot 10^{27}$
massa / massa della Terra	$3,333 \cdot 10^{5}$	1	$1,231 \cdot 10^{-2}$	0,107	318
raggio medio (m)	$6,96 \cdot 10^{8}$	$6,37 \cdot 10^{6}$	$1,74 \cdot 10^{6}$	$6,78 \cdot 10^{6}$	$71,5 \cdot 10^{6}$
accelerazione grav. sup. $(\mathrm{m/s})^2$)	274	9,81	1,62	3,76	22,9
velocità di fuga (km/s)	618	11,2	1,38	5,0	59,5
periodo di rotazione (d)	26-37	0,997	27,3	1,03	0,409

anno giuliano 1 y = 365,25 d = 8766 h = 520 960 sec = $3,1557 \cdot 10^{7}$ s
unità astronomica au = 149 597 870 707 m = valore convenzionale della distanza media Terra Sole
anno luce ly = $9,461 \cdot 10^{15}$ m = 63 284 au, parsec pc = 3,26 ly,

gravità sulla superficie terrestre di corpo di massa m $F = G\,\dfrac{M_\oplus\,m}{r^2} = m\,g$ con $M_\oplus$ massa della Terra, r distanza del corpo dal centro della Terra accelerazione di gravità pura , $a_g = G, \dfrac{M_\oplus}{r^2}$
la piccola variazione di altitudine $\mathrm{d}r$ di un corpo di massa m provoca la piccola variazione del suo peso $m\,\mathrm{d}g = G\,\dfrac{M_T}{r^3}\,\mathrm{d}r$

posizione	**altitudine**	**accelerazione** g
superficie in media a lat. 45,5°	0 m	9.83 $\mathrm{m/s}^2$
Monte Everest	8.846 m	9.80 $\mathrm{m/s}^2$
pallone alla massima quota	36.6 km	9.71 $\mathrm{m/s}^2$
apogeo della Stazione spaziale internazionale	410 km	8.70 $\mathrm{m/s}^2$
satellite per telecomunicazioni	35.700 km	0.225 $\mathrm{m/s}^2$

la Terra ruota intorno al suo asse con un raggio di rotazione dipendente dall'angolo latitudine θ; quindi un corpo di massa m ruota intorno all'asse subendo la accelerazione centripeta ${\omega_T}^2\,R_T\cos\theta$; la sua forza peso vale quindi $m\,g - m\,{\omega_T}^2\,R_T\,\cos\theta$ e quindi subisce la accelerazione gravitazionale $g - {\omega_T}^2\,R_T$
con $R_T = 6.378 \cdot \mathrm{m/s}^2$ ed $\omega_T = 2\,\pi/86\,400\mathrm{s} = 7.2685 \cdot 10^{-5}$ rad/2^2.
quindi accelerazione espressa da $g(r) = a_g - \omega^2\,r$

Per valutare con la massima precisione l'accelerazione gravitazionale nei diversi punti della Terra si deve tenere conto di vari fatti.
La Terra non è omogenea: la sua densità cresce con forti irregolarità con l'avvicinamento al suo centro; non è sferica ma piuttosto un elissoide appiattito ai poli, con i poli più vicini al centro di 21 km rispetto ai punti dell'equatore; le superfici equipotenziali, in particolare la superficie equipotenziale del valore g standard, chiamata geoide, presenta deformazioni dovute alle diverse altitudini raggiunte delle masse pesanti, rocciose; inoltre le superfici dei mari si alzano e si abbassano con le maree, duvute all'attrazione della Luna sulle acque.

valori di g in m/s^2 in alcune località: Anchorage 9,8189, Oslo 9,81189, Londra 9,81144, Bolzano 9,80548, Milano 9,80505, Firenze 9,80483, Roma 9,80352, Napoli 9,80296, Palermo 9,80054, New York 9,8024, Quito 9,7724, Buenos Aires 9,7979, Sidney 9,7979 Giacarta 9,7814, Johannesburg 9,7919

W72 d.03 Forza di gravità esercitata da un corpo sferico di raggio R di massa M e di densità costante $\rho \;=\; \dfrac{M}{(4/3)\,\pi\,R^3}$ su un corpo di massa m : $\;\mathsf{F}(\mathsf{r}) \;=\; -K\,\mathsf{r}\;$ con $\;K \;:=\; \dfrac{4}{3}\,\pi\,m\,\rho$

sistema di due corpi puntiformi con masse M_1 e M_2 con distanza r;
energia potenziale gravitazionale (coulombiana) $\;U \;=\; -G\,\dfrac{M_1\,M_2}{r}$
lavoro svolto dalla forza gravitazionale esercitata da un corpo puntiforme di massa M nell'origine $\mathbf{0}_3$ su un corpo puntiforme di massa m per spostarlo da $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$

$$L \;=\; -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathsf{F}(r)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \;=\; -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Big(-G\,\frac{M_1\,M_2}{r^2}\Big)\,\mathrm{d}r \;=\; GM_1\,M_2\Big(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\Big) \;=\; -(U_2-U_1)$$

Velocità di fuga di un proiettile di massa m dalla Terra: velocità minima v tale da rendere la sua energia cinetica maggiore o uguale al modulo della sua energia potenziale $\;-G\,\dfrac{m\,M_\oplus}{R_T}$

$$v \;=\; \sqrt{\frac{2\,G\,M_\oplus}{R_T}} \;\approx\; 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

W72 d.04 leggi di Keplero: riguardano il moto di un corpo leggero di massa m attratto da un corpo pesante di massa M, moto che non consente la sua fuga all'infinito e non lo costringe a cadere sul corpo pesante
formulazione per i pianeti che si muovono intorno al Sole

prima legge (delle orbite): i pianeti si muovono su orbite ellittiche che hanno il Sole in un suo fuoco

seconda legge (delle aree): il segmento tra sole e pianeta descrive settori di ellisse con aree proporzionali ai tempi impiegati (quindi si muove più lentamente quando è più lontano)
$\Delta A \approx \dfrac{1}{2}r^2$ e $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \;=\; \dfrac{L}{2\,m}$ con $L = mr^2\omega$ modulo del momento angolare del pianete rispetto al Sole

terza legge (dei periodi): il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo dell'asse maggiore dell'ellisse della sua orbita
$T^2 \;=\; \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M}\,r^3$
energia potenziale ed energia cinetica di un pianete di massa m e velocità di modulo v
$U = -G\dfrac{m\,M_S}{r}$ e $K \;=\; \dfrac{1}{2}mv^2 \;=\; G\,\dfrac{mM_S}{2r}$
orbita circolare di raggio r : $\;U = -G\dfrac{mM_S}{r}\;$, $\;K = -\dfrac{U}{2}\;$, $\;E = K + U = -G\dfrac{mM_S}{r} = -K$
orbita ellittica $\;E \;=\; -G\,\dfrac{m\,M_t}{2\,a}\;$ con a asse maggiore dell'ellisse

W72 e. oscillazioni

W72 e.01 moto armonico o moto periodico semplice: moto monodimensioale di un corpo dovuto a una forza di richiamo che lo trattiene in una posizione di equilibrio proporzionale al suo allontanamento da tale posizione facendolo oscillare

frequenza f numero di oscillazioni al secondo periodo = durata dell'oscillazione $T = \dfrac{1}{f}$

pulsazione o frequenza angolare $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ T in secondi, f e ω in Hertz 1 Hz = 1 s^{-1}

moto armonico traslazionale di un corpo puntiforme di massa M

posizione $x(t) = x_m \cos(\omega\, t + \phi)$ con x_m ampiezza massima dello spostamento rispetto alla posizione di equilibrio, ϕ costante di fase, $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\, f$, $\omega\, t + \phi$ fase all'istante t

velocità $v(t) = \omega\, x_m \sin(\omega\, t + \phi)$ ampiezza $v_m = \omega\, x_m$

accelerazione $a(t) = -\omega^2\, x_m \cos(\omega\, t + \phi)$ ampiezza $a_m = \omega^2\, x_m$

dovuto a forza di richiamo $F = -k\, x$ (legge di Hooke), con k costante elastica misurata in N/m = kg m^{-2}

legge $F = -kx(t) = Ma(t) = -M\omega^2 x(t) \implies \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

il corpo possiede energia cinetica $K(t) = \dfrac{1}{2}\, M\, v(t)^2$, energia potenziale $U(t) = \dfrac{1}{2}\, k\, x(t)^2$

energia meccanica totale costante $E = \dfrac{1}{2}\, M\, {v_m}^2 = \dfrac{1}{2}\, k\, {x_m}^2$; da qui $v_m = \sqrt{\dfrac{2E}{M}}$ $x_m = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

per pulsazione da valori istantanei di posizione e acelerazione: $\omega = \sqrt{-\dfrac{a(t)}{x(t)}}$

W72 e.02 moto armonico rotazionale di corpo la cui posizione è esprimibile da una coordinata angolare $\theta(t)$ casi: pendolo di torsione, barra oscillamte, pendolo semplice, pendolo reale

posizione $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega\, \theta + \phi)$ con θ_m ampiezza angolare massima

velocità angolare $\theta'(t) = \omega\, \theta_m \sin(\omega\, t + \phi)$ ampiezza $\theta'_m = \omega\, x_m$

accelerazione angolare $\alpha(t) = -\omega^2\, \theta_m \cos(\omega\, t + \phi) = -\omega^2\, \theta(t)$ ampiezza $\alpha_m = \omega^2\, \theta_m$

moto dovuto a momento torcente di richiamo $\tau = -\kappa\, \theta$ con κ costante di torsione

moto riconducibile a momento di inerzia del corpo rispetto ad asse di rotazione I_a e caratterizzato da $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_a}{\kappa}}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{\kappa}{I_a}}$, $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\kappa}{I_a}}$

pendolo di torsione con momento di inerzia I: $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{I}{\kappa}}$

pendolo semplice: corpo puntiforme di massa M soggetto a forza di gravità $F_g = M\, g$ volta verso il basso appeso a un perno tramite filo di lunghezza L

momento torcente $\tau = -L\,(F_g \sin\theta \approx -LMg\theta$ se effettua piccole oscillazioni con buona approssimazione si muove di moto armonico rotazionale

$T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ $\omega = \sqrt{\dfrac{L}{g}}$ $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

pendolo reale con massa M, momento di inerzia I e centro di massa a distanza h dal perno:

$T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{I}{M\,g\,h}}$ $\omega = \sqrt{\dfrac{M\,g\,h}{I}}$ $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{M\,g\,h}{I}}$

per i momenti d'inerzia v. :b16
asta omogenea di massa M e lunghezza L $I[risp.\ centro] = \frac{1}{12}\,M\,L^2$ $I[risp.\ stremo] = \frac{1}{3}\,M\,L^2$
disco omogeneo di massa M e raggio r risp. centro $I = \frac{1}{3}ML^2$
risp. a perno distante $r + L$ $I = \frac{1}{3}Mr^{+}M(r+L)^2$

W72 e.03 moto armonico smorzato: moto oscillatorio di un corpo puntiforme la cui energia meccanica totale va diminuendo a scapito della termica dovuta ad attriti rappresentati da una forza smorzante
$\mathsf{F}_{smrz} = -b\,\mathsf{v}$
$x(t) = x_m\,\mathsf{e}^{-\frac{bt}{2M}}\,\cos(\omega_{smrz}\,t + \phi)$ con $\omega_{smrz} = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4\,M^2}}$
se b è piccola l'energia meccanica è espressa da $\frac{1}{2}\,k\,{x_m}^2\,\mathsf{e}^{-\frac{b\,t}{M}}$

oscillazioni forzate di sistema oscillante con pulsazione ω dovute a forza motrice esterna periodica con pulsazione ω_{frz} poco diversa dalla ω: oscillazioni con pulsazione ω_{frz} e ampiezza molto aumentata, situazione detta risonanza

W72 f. fluidi

W72 f.01 dn moto dei fluidi massa volumica o densità di una porzione di una sostanza di posizione x: $\rho(\mathsf{x}) = \dfrac{\Delta M}{\Delta V}$

per un corpo omogeneo $\rho = \dfrac{M}{V}$

pressione di un fluido esercitata come forza perpendicolare ΔF applicata a una porzione di area ΔA posizionata in x della parete che lo contiene: $p = \dfrac{\Delta F}{\Delta A}$

Per un fluido che esercita una forza uniforme su un'area A: $p = \dfrac{F}{A}$

fluido sottoposto alla gravità in zona contenuta della superficie terrestre

pressioni p_1 e p_2 esercitate da un fluido omogeneo a riposo due diverse altitudini y_1 e y_2 del suo contenitore: $p_2 - P_1 + \rho\, g\, (y_2 - y_1)$

principio di Archimede sopra un corpo parzialemte immerso in un fluido agisce una forza di galleggiamento esercitata dal fluido F_A, spinta di Archimede, diretta verso l'alto proporzionale alla massa m_f del fluido spostato: $F_A = m_f\, g$

Un corpo di peso P che che galleggia in un fluido, a causa della forza di galleggiamento rivolta verso l'alto F_A presenta un peso apparente P_{app} $P_A = P - F_A = P - m_f\, g$

Equazione di Bernoulli per il flusso di un fluido ideale di densità ρ applicabile ad ogni tubo di flusso con velocità di modulo v

$p + \dfrac{1}{2}\,\rho\, v^2 + \rho\, g\, y = costante$ conseguenza della conservazione dell'energia meccanica

W72 g. calore e teoria cinetica dei gas

W72 g.01 temperatura di un corpo: grandezza macroscopica che misura i movimenti traslatori e vibratori più o meno intensi delle particelle (molecole) che compongono il corpo;
si misura con termometri di vari generi che accostano al corpo di cui si misura la temperatura un corpo in grado di raggiungere l'equlibrio termico in breve tempo e in modo controllato
scala Kelvin basata sulla temperatura assoluta del punto triplo dell'acqua posta uguale a 273.16 K ove K denota 1 grado Kelvin
temperatura misurata da un temometro che si serve di gas a volume costante

$$T \;=\; (273.16K)\left(\lim_{V_{gas}\to 0}\frac{p}{p_{trpl}}\right)$$

con p pressione del gas da misurare e p_{trpl} pressione del gas al punto triplo dell'acqua

$T_K = x\,\mathrm{K}$ temperatura assoluta o Kelvin , $T_C = x\,^\circ\mathrm{C}$ temperatura Celsius o centigrada , $T_F = x\,^\circ\mathrm{F}$ temperatura Fahrenheit , $T_R = x\,^\circ\mathrm{Re}$ temperatura Réaumur
le corrispondenti scale termiche sono collegate da relazioni lineari

$$x\,\mathrm{K} = (x-273.15)^\circ\mathrm{C} = (x-273.15)\,\frac{4}{5}\,^\circ\mathrm{Re}\quad x\,^\circ\mathrm{C} = (x+273.15)\,\mathrm{K} = \left(x\,\frac{9}{5}+32\right)^\circ\mathrm{F} = \frac{4}{5}\,^\circ\mathrm{Re}$$

$$x\,^\circ\mathrm{F} = (x+459.67)\,\frac{5}{9}\,\mathrm{K} = (x-32)\,\frac{5}{9}\,^\circ\mathrm{C} == (x-32)\,\frac{4}{9}\,^\circ\mathrm{Re}$$

$$x\,^\circ\mathrm{Re} = \left(x\,\frac{5}{4}+273.15\right)\mathrm{K} = x\,\frac{4}{5}\,^\circ\mathrm{C} = \left(x\,\frac{9}{4}+32\right)^\circ\mathrm{F}$$

$0\mathrm{K} = -273.15\,^\circ\mathrm{C} = -459.67^\circ\mathrm{F} = -218.52\,^\circ\mathrm{Re}$, $0^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K} = 32\,^\circ\mathrm{F} = 0\,^\circ\mathrm{Re}$, $100^\circ\mathrm{C} = 373.15\,\mathrm{K} = 212\,^\circ\mathrm{F} = 80\,^\circ\mathrm{Re}$

W72 g.02 dn grandezze termiche

dilatazione termica di un corpo, conseguenze di un aumento ΔT della sua temperatura:
variazione di una estensione lineare l $\Delta l = \alpha\, l\, \Delta T$ con α coefficiente di dilatazione lineare
variazione del volume V di un solido o di un liquido $\Delta V = \beta\, B\, \Delta T$ con β coefficiente di dilatazione volumica

calore, energia trasferita da un corpo all'ambiente più freddo; unità di misura joule, caloria, British thermal unit:
$1\ \mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^3 = \mathrm{kg\,m^2}\,s^{-2}$, cal = 4.1868 J , 1 Btu = 1.05435 J - 1.05967 J $\approx$ 252.2 cal = 1055.1 J

variazione di temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ dovuta a fornitura di calore Q a un corpo omogeneo di massa M:
$Q = C\,\Delta T = C(T_1 - T_1) = c\,M\,\Delta T = c\,M(T_1 - T_2)$ con C capacità termica del corpo e c calore specifico del materiale, ossia capacità termica per unità di massa, costituente il corpo
calore specifico molare = capacità termica per una mole del materiale, ossia per $6.02\cdot 10^{23}$ unità elementari (molecole) del materiale

calore latente di una sostanza = calore scmbiato da una unitdì massa di una sostanza sostanza per modificare il sui stato fisico; per un corpo di massa M si ha $Q = L\,M$ con L calore latente
calore latente di evaporazione = quantità di calore da fornire a un liquido di massa unitaria per farlo evaporare = quantità di calore persa da una massa unitaria di gas con la sua liquefazione
calore latente di fusione = quantità di calore da fornire a un solido di massa unitaria per farlo fondere = quantità di calore persa da una massa unitaria liquida con la sua solidificazione

W72 g.03 dn primo principio della termodinamica

un corpo può scambiare energia con il suo ambiente attraverso un lavoro

lavoro e variazione di volume V dal valore V_1 a V_2 di un corpo omogeneo la cui pressione è data da $p(V)$:

$L = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$

primo principio della termodinamica: conseguenza della conservazione dell'energia sulla energia interna E_{int} per un corpo che nella trasformazione dallo stato i allo stato f scambia calore e lavoro con il suo ambiente; si suppone che stato ed energia interna del corpo dipendano solo da volume, pressione e temperatura

$\Delta E_{int} = E_{int,f} - E_{int,i} = Q - L$ dove:

Q calore scambiato positivo se il corpo acquista calore, negativo se lo perde; L lavoro positivo se il corpo si espande vincendo forze esercitate dall'ambiente , negativo se si contrae;

Q ed L dipendono dal percorso sugli stati da i ad f, E_{int} no

trasformazioni adiabatiche $Q = 0$, $\Delta E_{int} = -L$

trasformazioni isocore, a volume costante $L = 0$, $\Delta E_{int} = Q$

trasformazioni cicliche $\Delta E_{int} = 0$, $Q = L$

trasformazioni con espansione libera $\Delta E_{int} = Q = L = 0$

W72 f.04 dn trasferimento di calore

conduzione di calore, trasferimento di calore attraverso un corpo le cui parti non subiscono spostamenti macroscopici

conduzione di quantità di calore nell'unità di tempo relativa a durata Δt attraverso lastra di materiale conduttore con due superfici di area A, distanti d e tenute alle temperature T_1 e T_2 $(< T_1)$

$P_c = \dfrac{Q}{\Delta t} = k\,\dfrac{A}{d}\,(T_1 - T_2)$ con k conducibilità termica della lastra

convezione termica, trasferimento di calore attraverso un corpo fluido consentito da movimenti macroscopici di parti del corpo

riguarda in articolare liquidi scaldati in recipienti opportuni, masse caratterizzate da viscosità all'interno del mantello terrestre e l'interno di stelle come il Sole; deve essere trattata con equazioni differenziali alle derivate parziali

irraggiamento, trasferimento di calore attraverso emissione o assorbimento di radiazioni elettromagnetiche

potenza irradiata da un corpo $P_r = \sigma\,\epsilon\,A\,T^4$ dove

$\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ costante di Stefan-Boltzmann

ϵ emittanza della superficie del corpo irradiante, A area di tale superficie, T sua temperatura assoluta (in kelvin)

potenza radiativa assorbita da un corpo con area esposta A da un ambiente a temperatura uniforme assoluta T_{amb}

$P_a = \sigma\,\epsilon\,A\,{T_{amb}}^4$

W72 f.06 dn teoria cinetica dei gas

collega proprietà macroscopiche dei gas, in particolare pressione e temperatura, con grandezze microscopici, come ele nergie cinetiche delle molecole

costante di Avogadro $N_A = 6\,022\,140\,76{\cdot}10623$ numero intero che definisce il numero di unità elementari di una sostanza (tipicamente atomi, molecole e ioni) che costituiscono una mole di tale sostanza nel sistema Internazionale, nella assunzione che le unità elementari siano identiche
è il fattore adimensionato che collega la massa di una particella m, la massa molare M di una mole di una sostanza con la massa media delle particelle costituenti elementari della sostanza: $M = n \cdot N_A$

se la massa della particella, ad esempio, viene espressa in grammi, la massa molare della sostanza si esprime in grammi per mole, g/mol

un campione s di sostanza di massa M_s costituito da N_s molecole di massa m presenta un numero di moli $= n$ e una massa molare M tali che $n = \dfrac{N}{N_A} = \dfrac{M_s}{M} = \dfrac{1}{N_a}\,\dfrac{M_s}{m}$

gas perfetto gas ideale per il quale $pV = n\,R\,T = N\,k_B\,T$
dove n è il numero delle moli del campione considerato, N il numero delle sue molecole,
$R = 8.31$ J/(mol K) 'e detta costante dei gas e $k_B = \dfrac{R}{N_A} = 1.38{\cdot}10^{-23}$ J/K è la costante di Boltzmann

lavoro svolto da n moli di un gas perfetto in una trasformazione isoterma che fa passare da volume V_1 a volume V_2 $L = n\,R\,T\,\ln\frac{V_2}{V_1}$

pressione di n moli di gas perfetto di massa molare M che occupa il volume V $p = \dfrac{n\,M}{3\,V}\,{v_{qm}}^2$

con v_{qm} velocità quadratica media delle molecole $v_{qm} := \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3\,R\,T}{M}}$

energia cinetica traslazionale media del gas perfetto $\overline{K} = \dfrac{3}{2}\,k\,T$

cammino libero medio di una molecola di gas avente diametro d $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi\,d^2\,N/V}}$

distribuzione di Maxwell delle velocità molecolari $P_{Mxwl} = 4\,\pi\left(\frac{M}{2\,\pi\,R\,T}\right)^{3/2} v^2\,\mathrm{e}^{\frac{-M\,v^2}{2\,R\,T}}$

velocità media delle molecole $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8\,R\,T}{\pi\,M}}$, velocità con massima probabilità $v_{mp} = \sqrt{\frac{2\,R\,T}{M}}$

calore specifico molare di determinato tipo di gas a volume costante $C_V = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{Q}{\Delta T} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\Delta E_{int}}{\Delta T}$ " con n moli del campione e Q calore trasferito per modificare la sua temperatura (e la sua energia interna)
per gas perfetto monoatomico $C_V = \dfrac{3}{2}\,R = 12.5$ J/(mol K)

calore specifico molare di gas a pressione costante $C_p = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{Q}{\Delta T}$ con n, Q come sopra
$C_p = C_V + R$ e per campione di n moli $E_{int} = n\,C_V\,T$
variazione dell'energia interna di n moli di gas perfetto contenuto in recipiente chiuso per qualsiasi trasformazione con variazione di temperatura ΔT $\Delta E_{int} = n\,C_V\,\Delta T$

teorema della equipartizione dell'energia: ogni molecola di un tipo di gas alla temperatura T immagazzina l'energia $f\,\dfrac{1}{2}\,k\,T$ con f numero dei suoi gradi di libertà, mentre ogni mole immagazzina l'energia $f\,\dfrac{1}{2}\,R\,T$
quindi $E_{int} = \dfrac{f}{2}\,n\,R\,T$ e $C_V = \dfrac{f}{2}\,R = f\,4.16$ J/(mol K)
gas monoatomici 3 gradi di libertà traslazionali; gas biatomici $f = 5$, 3 traslazionali e 2 rotazionali

per trasformazione adiabatica, modifica lenta del volume con calore scambiato trascurabile: $p\,V^{\gamma} = costante$, con $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$
nel caso di espansione libera $p\,v = costante$

W72 h. termodinamica [W]

W72 h.01 sistema fisico $\boldsymbol{S}$ caratterizzato dagli stati $\mathbf{s}$ nei quali si può trovare, da pensare come punti di uno spazio delle variabili di stato (caso dei gas: pressione, volume, temperatura, ...)
trasformazione del sistema $\boldsymbol{S}$ dallo stato iniziale $\mathbf{i}$ allo stato finale $\mathbf{f}$ da rappresentare come traiettoria nello spazio degli stati
trasformazione irreversibile di $\boldsymbol{S}$: la sua inversa, corrispondente alla traiettoria inversa, non può essere ottenuta con una sequenza di modifiche infinitesime dell'ambiente (e del suo stato corrente)

entropia: funzione dello stato di un sistema fisico

variazione della entropia S del sistema $\boldsymbol{S}$ nel passaggio dallo stato iniziale $\mathbf{i}$ allo stato finale $\mathbf{f}$ attraverso gli stati sSd della traiettoria $\Gamma(\mathbf{i},\mathbf{f})$

$$\Delta S = S_{\mathbf{f}} - S_{\mathbf{i}} \;=\; \int_{\Gamma(\mathbf{i},\mathbf{f})} \frac{\mathrm{d}Q}{T(\mathbf{s})}$$

con Q energia scambiata da $\boldsymbol{S}$ sotto forma di calore e T temperatura assoluta

per trasformazione isoterma reversibile $\Delta S = S_{\mathbf{f}} - S_{\mathbf{i}} = \dfrac{Q}{T}$

nel caso di variazioni di temperatura piccole rispetto a quelle degli stati iniziale e finale $\delta S \approx \dfrac{Q}{\overline{T}}$ con $\overline{T}$ temperatura media nel corso del processo

trasformazione di n moli di un gas ideale dallo stato $\mathbf{i}$ con temperatura T_i e volume V_i a llo stato $\mathbf{f}$ con temperatura T_f e volume V_f

$$\Delta S = S_{\mathbf{f}} - S_{\mathbf{i}} = n\,R\,\ln\tfrac{v_f}{V_i} + n\,C_V\,\tfrac{T_f}{T_i}$$

postulato dell'entropia: in ogni processo irreversibile di un sistema fisico isolato l'entropia aumenta

secondo principio della termodinamica: in una trasformazione di un sistema isolato la sua entropia si conserva se la trasformazione è reversibile, aumenta se è irreversibile, dunque non diminuisce mai,

$$\Delta S \geq 0$$

W72 h.02

macchina termica apparecchiatura, chiamata anche motore termico, in grado di effettuare una sequenza di trasformazioni cicliche nella quale preleva una quantità di calore Q_1 da una sorgente calda a temperatura T_1, esegue un lavoro L e trasferisce una quantità di calore Q_2 ad un serbatoio termico a temperatura T_2 inferiore

rendimento della macchina termica $\quad \eta \;=\; \dfrac{\text{energia ottenuta}}{\text{energia spesa}} \;=\; \dfrac{L}{Q_1}$

Un motore termico ideale compie solo trasformazioni reversibili (evita attriti, turbolenze e altri sprechi di energia) tenendo bassa $T_1 - T_2$

ciclo di Carnot: costituito dalle trasformazioni: isotermica a T_2, adiabatica senza scambio di calore, isotermica a T_1 e adiabatica

macchina termica ideale di Carnot $\quad$ rendimento $\;\eta_C \;=\; 1 - \dfrac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$

macchina frigorifera macchina che con una sequenza di trasformazioni termodinamiche trasferisce energia sotto forma di calore da sorgente fredda ad ambiente più caldo

efficienza $\;\epsilon = \dfrac{\text{energia utile}}{\text{energia immessa}} = \dfrac{|Q_2|}{L}$

macchina frigorifera di Carnot $\;\epsilon_C = \dfrac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$

W72 h.03 entropia e statistica

l'entropia di un sistema costituito da un numero molto grande N di molecole identiche viene considerata funzione delle possibili situazioni microscopiche (che si riescono a distinguere) del complesso delle sue molecole, ossia dei suoi **microstati**

i diversi microstati equivalenti per la scambiabilità delle molecole sono i costituenti di una cosiddetta configurazione del sistema

molteplicità $W(\mathsf{C})$ di una configurazione C := numero dei microstati che la costituiscono

la meccanica statistica assume che tutti i microstati di una configurazione siano equiprobabili

se si riescono a distinguere k configurazioni, se per $i = 1, 2, ..., k$ n_i denota il numero delle molecole nella configurazione C_i e se $N := \sum_{i=1}^{k} n_i$, allora per il numero dei microstati del sistema si ha

$$\frac{N!}{n_1!\, n_1! \cdots n_k!}$$

i valori maggiori, di molto, si hanno quando i valori degli n_i sono poco diversi

equazione dell'entropia di Boltzmann $S = k_B \ln W$

per situazioni reali numeri molto grandi, ad esempio per N vicino al numero di Avogadro, si devono trattare numeri superiori a 10^{23}; per i calcoli si deve ricorrere alla

approssimazione di Stirling $\ln N! \approx N(\ln N) - N$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php