1

Capitolo W45
prontuario: equazioni differenziali, equazioni integrali

Contenuti delle sezioni

a. equazioni differenziali ordinarie, ossia ODE p. 2
b. equazioni integrali p. 3

3 pagine

W45 a. equazioni differenziali ordinarie, ossia ODE

W45 a.01 Per molti enunciati per la derivazione rispetto alla variabile x risulta conveniente usare la la notazione D_x
Qui le a_i, le α_i, β e le $\mathtt{C}_i$ e le $\mathtt{D}_i$ denotano costanti reali.

Sia $P(t)$ un polinomio della forma $a_n\,t^n + a_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots + a_1\,t + a_0$ per il quale, trattando equazioni lineari , spesso si può assumere $a_n = 1$.
Come argomento del polinomio si può assumere l'operatore D_x e si può trattare l'operatore differenziale applicabile a funzioni della x

$$P(\mathrm{D}_x) \;=\; {\mathrm{D}_x}^n + a_{n-1}\,{\mathrm{D}_x}^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathrm{D}_x + a_0 \;.$$

W45 a.02 ODE lineari: coefficienti costanti

Si considera l'equazione avente come incognita una funzione $y(x)$

$$P(\mathrm{D}_x)\,y(x) = Q(x) \quad \text{ossia} \quad \Big({\mathrm{D}_x}^n + a_{n-1}\,{\mathrm{D}_x}^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathrm{D}_x + a_0\Big)\,y(x) = R(x)$$

che denotiamo con $\boldsymbol{E}_R$. Insieme a questa conviene esaminare anche la sua corrispondente equazione omogenea relativa ad $R(x) = 0$ che possiamo denotare con $\boldsymbol{E}_0$.

Casi particolari

$$(\mathrm{D}_x - \alpha)y = 0 \implies y = \mathtt{C}\,\mathsf{e}^{\alpha\,x}$$

$$(\mathrm{D}_x - \alpha)^m\,y = 0 \implies y = \Big(\mathtt{C}_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + \mathtt{C}_1\,x + \mathtt{C}_0\Big)\,\mathsf{e}^{\alpha\,x}$$

$$\Big((\mathrm{D}_x - \alpha + \mathsf{i}\,\beta)\,(\mathrm{D}_x - \alpha - \mathsf{i}\,\beta)\Big)\,y(x) \implies y = (\mathtt{C}\,\cos\,\beta\,x + \mathtt{D}\,\sin\,\beta\,x)\,\mathsf{e}^{\alpha\,x}$$

$$\Big((\mathrm{D}_x - \alpha + \mathsf{i}\,\beta)^m\,(\mathrm{D}_x - \alpha - \mathsf{i}\,\beta)^m\Big)\,y(x) = 0 \implies$$

$$y = \Big(\big(\mathtt{C}_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + \mathtt{C}_1\,x + \mathtt{C}_0\big)\,\cos\,\beta\,x + \big(\mathtt{D}_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + \mathtt{D}_1\,x + \mathtt{D}_0\big)\,\sin\,\beta\,x\Big)\,\mathsf{e}^{\alpha\,x}$$

Nelle precedenti relazioni $\mathtt{C}$, $\mathtt{D}$ $\mathtt{C}_i$, $\mathtt{D}_i$ per $i \in \mathbb{N}$ denotano costanti reali arbitrarie.

Alla soluzione generale della $\boldsymbol{E}_R$ si può dare la forma $y(x) \;=\; y_p(x) + y_h(x)$, con y_p particolare soluzione della $\boldsymbol{E}_R$ e $y_h(x)$ soluzione della $\boldsymbol{E}_0$.
Questa si può ottenere sommando soluzioni delle equazioni precedenti.

W45 b. equazioni integrali

W45 b.01 equazioni di Fredholm

del primo genere $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del primo genere $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del secondo genere $\displaystyle y(x) - \int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

W45 b.02 equazioni di Volterra

del primo genere $\displaystyle\int_a^x \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del primo genere $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del secondo genere $\displaystyle y(x) - \int_a^x \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

Il problema di Cauchy $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})\ ,\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ equivale alla equazione integrale

$$\mathbf{y}(x) = \int_{x_0}^x \mathrm{d}t\, \mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t) \;+\; \mathbf{y}_0\ .$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php