1

Capitolo W20
prontuario: funzioni trascendenti elementari e numeri complessi

Contenuti delle sezioni

a. esponenziali e logaritmi p. 2
b. numeri complessi p. 3
c. funzioni trigonometriche p. 5
d. funzioni trigonometriche inverse p. 8
e. funzioni iperboliche e loro inverse p. 9

10 pagine

W20 a. esponenziali e logaritmi

W20 a.01

$$a^0 := 1 \quad , \quad a^1 := a \quad , \quad a^n := a^{n-1}\, a \quad , \quad a^{1/k} = \sqrt[k]{a} \quad , \quad a^{h/k} = \sqrt[k]{a^h}$$

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\, a^{x_2} \quad , \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad , \quad (a\,b)^x = a^x\, b^x$$

$$\text{sia} \;\; b \in \mathbb{R} \quad , \quad y = \log_b x \iff x = b^y$$

$$\mathsf{e} := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\,18285\,59045$$

$$\ln x := \log_e x \quad , \quad y = \ln x \iff x = \mathsf{e}^y \quad , \quad x = b^y = \mathsf{e}^{y\,\ln b}$$

$$\log_b x_1\, x_2 = \log_b x_1 + \log_b x_2 \quad , \quad \log_b \frac{1}{x} = -\log_b x \quad , \quad \log_b \frac{x_1}{x_2} = \log_b x_1 - \log_b x_2$$

$$\log_b x^p = p \log_b x \quad , \quad \log_b \sqrt[p]{x} = = \frac{1}{p} \log_b x$$

$$\ln_b x_1\, x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 \quad , \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad , \quad \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 \quad , \quad \log_b x^p = p \log_b x$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\ln x}{\ln b} \qquad , \qquad y = \log_b x \implies b = x^{\frac{1}{y}}$$

W20 b. numeri complessi

W20 b.01 unità immaginaria $\mathsf{i} :=$ numero tale che $\mathsf{i}^2 = -1$

è rappresentabile con la matrice $\boldsymbol{matc}(i) := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ che sui vettori 2 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ effettua una rotazione intorno all'origine $\mathbf{0}_2$ di 90° nel verso antiorario; il suo quadrato $\boldsymbol{matc}(\mathsf{i}^2) := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ effettua il mezzogiro in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

numero complesso

numero rappresentabile nella sua forma rettangolare come $z = x + \mathsf{i}\,y$ o equivalentemente come coppia $\langle x, y \rangle$; oppure con la matrice $\boldsymbol{matc}(z) := \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$

insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} := \mathbb{R} + \mathsf{i} \cdot \mathbb{R}$

a partire da $z = x + \mathsf{i}\,y \in \mathbb{C}$ si ottengono la sua parte reale $\Re(z) := x$ e la sua parte immaginaria $\Im(z) := y$

ogni $z \in \mathbb{C}$ si può esprimere come $z = \Re(z) + \mathsf{i}\,\Im(z)$; l'unità immaginaria corrisponde alla coppia a $\langle 0, 1 \rangle$

I **numeri immaginari [puri]** sono i numeri complessi $= \mathsf{i} \cdot y$ con y reale, ossia i numeri dati dalle coppie $\langle 0, y \rangle$, oppure dai vettori colonna $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, oppure dalle matrici $\boldsymbol{matc}(\mathsf{i} \cdot y) := \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix}$

ogni numero reale x si identifica con il particolare complesso con $\Im(x) = 0$ ossia con $x = x^*$, ossia con il vettore colonna $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, ossia con la matrici $\boldsymbol{matc}(x) := \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ la matrice $\boldsymbol{matc}(x)$ agisce su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come omotetia di fattore x;
per ogni immaginario puro $\mathsf{i} \cdot y$ la matrice $\boldsymbol{matc}(\mathsf{i}\,y)$ agisce su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come l'omotetia di fattore y seguita (o preceduta) dalla rotazione oraria di 90° intorno all'origine
per ogni $z = x + \mathsf{i}\,y \in \mathbb{C}$ la matrice $\boldsymbol{matc}(z)$ trasforma un vettore di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nella somma del vettore ottenuto con l'omotetia $\boldsymbol{matc}(x)$ con il vettore ottenuto con l'omotetia $\boldsymbol{matc}(y)$ composta con la rotazione oraria di 90° intorno all'origine

i numeri complessi $z = x + \mathsf{i}\,y$ sono in biiezione con le matrici 2×2 della forma $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$,

W20 b.02 operazioni sui numeri complessi

coniugato di un numero complesso z è $z^* := x - \mathsf{i}\,y = \Re(z) + \mathsf{i}\,\Im(z)$; talora lo si denota con $\overline{z}$; si tratta di una involuzione

modulo di un numero complesso è il modulo del corrispondente vettore:

$$|z| := |x + \mathsf{i}\,y| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

somma di due numeri complessi $z_1 + z_2 := (x_1 + \mathsf{i}\,y_1) + (x_2 + \mathsf{i}\,y_2) = (x_1 + x_2) + \mathsf{i}(y_1 + y_2)$; si tratta di somma vettoriale commutativa e associativa

$$\boldsymbol{matc}(z_1 + z_2) = \boldsymbol{matc}(z_1) + \boldsymbol{matc}(z_2)$$

opposto di un numero complesso $-z := -x + (-y) = -\Re(z) - \Im(z)$

differenza di due complessi $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (x_1 + \mathsf{i}\,y_1) + (-x_2 - \mathsf{i}\,y_2) = (x_1 - x_2) + \mathsf{i}\,(y_1 + y_2)$

prodotto di due numeri complessi $z_1 \cdot z_2 := (x_1 + \mathsf{i}\,y_1) \cdot (-x_2 - \mathsf{i}\,y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathsf{i}\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

$$\boldsymbol{matc}(z_1 \cdot z_2) = \boldsymbol{matc}(z_1) \cdot \boldsymbol{matc}(z_2)$$

modulo come prodotto $z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 = (x + \mathsf{i}\,y) \cdot (x - \mathsf{i}\,y)$

passaggio al **reciproco del numero complesso** z nonnullo $\qquad z^{-1} := \dfrac{x_2 - \mathsf{i}\, y_2}{(x_2 + \mathsf{i}\, y_2)\,(x_2 - \mathsf{i}\, y_2)} = \dfrac{x_2 - \mathsf{i}\, y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$

divisione tra numeri complessi

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 + \mathsf{i}\, y_1}{x_2 + \mathsf{i}\, y_2} = \frac{(x_1 + \mathsf{i}\, y_1)(x_2 - \mathsf{i}\, y_2)}{(x_2 + \mathsf{i}\, y_2)(x_2 - \mathsf{i}\, y_2)} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + \mathsf{i}\,(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = {z_1}^* \pm {z_2}^* \qquad z_1 \cdot {z_2}^* = {z_1}^* \cdot {z_2}^* \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}$$

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

campo dei numeri complessi $\qquad \mathbb{C}_{fld} := \Big\langle \mathbb{C}\ ,\ +\ ,\ -\ ,\ \langle 0,0\rangle\ ,\ \cdot\ ,\ \langle 1,0\rangle\ ,\ {}^{-1} \Big\rangle$

forma polare dei numeri complessi o **forma trigonometrica dei numeri complessi**

$$z = x + \mathsf{i}\, y = r\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta) \quad \text{ove} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\ ,\ \theta = \arg z = \arctan\frac{y}{x}$$

formula di de Moivre $\qquad \forall n \in \mathbb{Z} \ :\ (\cos,\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta)^n = \cos n\,\theta + \mathsf{i}\,\sin n\,\theta$

formule di Eulero $\qquad \cos\theta = \dfrac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta} - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,\theta}}{2}$

forma esponenziale dei numeri complessi

$$z = x + \mathsf{i}\, y = r\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta) = r\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}$$

Consideriamo $z_1 = r_1\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_1}$ e $z_2 = r_2\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,r_2\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}(\theta_1+\theta_2)} \qquad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}(\theta_- \theta_2)} \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ :\ z^n = \left(r\, e_{\mathsf{i}\,\theta}\right)^n = r^n\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,n\,\theta} \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

W20 c. funzioni trigonometriche

W20 c.01 Nel piano cartesiano Oxy consideriamo circonferenze $Circf(A,r)$ e in particolare quelle con centro in $A = \mathbf{0}_2 = \langle 0,0\rangle$.
Si definisce il numero π come rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro e si trova

$$\pi \approx 3.14159\,26535\ .$$

Unità di misura proporzionali: $1^\circ := \dfrac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \approx 0.017543\,\mathrm{rad}$, $1\,\mathrm{rad} := \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295\,780$.

Consideriamo $C := \langle b,a\rangle$ con $a,b>0$, punto del primo quadrante (Iqdr), la circonferenza $Circf(\mathbf{0}_2,c)$ con $c=\sqrt{a^2+b^2}$, la proiezione di C su Ox $B=\langle b,0\rangle$ e il triangolo $\Delta(A,B,C)$ avente come angoli α in A, β in B e γ in C. definiamo le funzioni :

$$\textbf{seno} \qquad \sin\alpha := \frac{a}{c} \quad , \quad \textbf{coseno} \qquad \cos\alpha := \frac{b}{c}$$

Le definizioni si estendono a ogni angolo $\alpha\in\mathbb{R}$ (in attesa di estenderle ad argomenti complessi).

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1\ ,\ \ \sin(-x) = -\sin x\ ,\ \ \cos(-x) = \cos x\ .$$

$\sin\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha\in\{n\in\mathbb{Z} :|\ n\,\pi\} =: I_{sz}$, $\cos\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha\in\{n\in\mathbb{Z} :|\ n-1/2\,\pi\} =: I_{cz}$

Definiamo per ogni $\alpha\in\mathbb{R}\setminus I_{cz}$ **tangente** $\tan\alpha := \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = (\mathrm{Iqdr})\ \dfrac{a}{b}$.

Definiamo per ogni $\alpha\in\mathbb{R}\setminus I_{sz}$ **cotangente** $\cot\alpha := \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha} = (\mathrm{Iqdr})\ \dfrac{b}{a}$

Definiamo per ogni $\alpha\in\mathbb{R}\setminus I_{sz}$ **secante** $\sec\alpha := \dfrac{1}{\sin\alpha} = (\mathrm{Iqdr})\ \dfrac{c}{a}$

Definiamo per ogni $\alpha\in\mathbb{R}\setminus I_{sz}$ **cosecante** $\csc\alpha := \dfrac{1}{\cos\alpha} = (\mathrm{Iqdr})\ \dfrac{c}{b}$

W20 c.02

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \quad , \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot^2 x\ .$$

$$\tan(-x) = -\tan x\ ,\ \ \cot(-x) = -\cot x\ ,\ \ \sec(-x) = -\sec x\ ,\ \ \csc(-x) = \csc x\ .$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x = -\cos(\pi-x) \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x = \sin(\pi-x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x = -\cot(\pi-x) \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x = -\tan(\pi-x)$$

Valori per angoli particolari

x	0	$\frac{\pi}{12}=15^\circ$	$\frac{\pi}{10}=18^\circ$	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{5}=36^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$
$\sin x$	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan x$	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1
$\cot x$	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	1

W20 c.03

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x} = \frac{1}{\csc x}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\cot x}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}} = \frac{1}{\csc x} = \frac{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}{\sec x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} = \pm\sqrt{\sec^2 -1} = \frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$$

$$\cot x = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}} = \pm\sqrt{\csc^2 x - 1}$$

$$\sec x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\cos x} = \pm\sqrt{1+\tan^2 x} = \frac{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x} = \frac{\csc x}{\pm\sqrt{\csc^2 x - 1}}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x} = \pm\sqrt{1+\cot^2 x} = \frac{\sec x}{\pm\sqrt{\csc^2 x - 1}}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x \quad , \quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x \quad , \quad \tan\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x \quad , \quad \cot\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$$

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x \quad , \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos x \quad , \quad \tan(x \pm \pi) = \tan x \quad , \quad \cot(x \pm \pi) = \cot x$$

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \quad , \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x \quad , \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x \quad , \quad \cot(x \pm 2\pi) = \cot x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad , \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad , \quad \tan(\pi - x) = -\tan x \quad , \quad \cot(\pi - x) = -\cot x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \quad , \quad \cos(2\pi - x) = \cos x \quad , \quad \tan(2\pi - x) = -\tan x \quad , \quad \cot(2\pi - x) = -\cot x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad , \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad , \quad \cot(x \pm y) = \pm\frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad , \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad , \quad \tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

W20 c.04 **funzioni trigonometriche di angoli multipli e potenze**

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \quad , \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x \quad , \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad , \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad , \quad \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\sin 4x = 4\sin x \cos x - 8\sin^3 x \cos x \ , \ \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \ , \ \tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$$

$$\sin nx = n\sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x \cos^{n-3} x + \binom{n}{5}\sin^5 x \cos^{n-5} x - \cdots$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\sin^2 x \cos^{n-2} x + \binom{n}{4}\sin^4 x \cos^{n-4} x - \cdots$$

$$\sin^{2m} x = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\binom{2m}{m-j}\cos 2jx$$

$$\sin^{2m-1} x = \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\binom{2m-1}{m-j}\sin(2j-1)x$$

$$\cos^{2m} x = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{2m}{m-j}\cos 2jx$$

$$\cos^{2m-1} x = \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=1}^{m}\binom{2m-1}{m-j}\cos(2j-1)x$$

W20 c.05 **formule di prostaferesi**

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \quad , \quad \cos x \pm \cos y = \pm 2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} \quad , \quad \cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

combinazioni lineari di seno e coseno

$$a\cos x + b\sin x \;=\; r\cos(x-\phi) \quad , \quad a\sin x + b\cos x \;=\; r\sin(x+\phi) \quad \text{dove}$$

$$r \;:=\; \sqrt{a^2+b^2} \;\text{ e per l'ampiezza di fase }\quad \phi \;:=\; \arctan\frac{b}{a} \;\text{ se } a>0 \qquad \phi \;:=\; \pi + \arctan\frac{b}{a} \;\text{ se } a<0\ .$$

W20 d. funzioni trigonometriche inverse

W20 d.01

arcoseno $y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \text{dove} \quad -1 \le x \le 1\ ,\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

arcocoseno $y = \arccos x \iff x = \cos y \quad \text{dove} \quad -1 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le \pi$

arcotangente $y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \text{dove} \quad -\infty \le x \le +\infty\ ,\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

arcocotangente $y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y \quad \text{dove} \quad -\infty \le x \le +\infty\ ,\ 0 \le y \le \pi$

arcosecante $\arcsin x := \arccos\sqrt{1-x^2} = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

arcocosecante $\arccos x := \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccot}\frac{1}{x}$$

$$\operatorname{arccot} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arctan\frac{1}{x}$$

W20 e. funzioni iperboliche e loro inverse

W20 e.01

seno iperbolico $$\sinh x := \frac{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathsf{e}^{2x} - 1}{2\,\mathsf{e}^x} = \frac{1 - \mathsf{e}^{-2x}}{2\,\mathsf{e}^{-x}}$$

coseno iperbolico $$\cosh x := \frac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathsf{e}^{2x} + 1}{2\,\mathsf{e}^x} = \frac{1 + \mathsf{e}^{-2x}}{2\,\mathsf{e}^{-x}}$$

tangente iperbolica $$\tanh x := \frac{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}}{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}} = \frac{\mathsf{e}^{2x} - 1}{\mathsf{e}^{2x} + 1} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

cotangente iperbolica $$\coth x := \frac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}} = \frac{\mathsf{e}^{2x} + 1}{\mathsf{e}^{2x} - 1} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

secante iperbolica $$\operatorname{sech} x := \frac{2}{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}} = \frac{2\,\mathsf{e}^x}{\mathsf{e}^{2x} + 1} = \frac{1}{\cosh x}$$

cosecante iperbolica $$\operatorname{csch} x := \frac{2}{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}} = \frac{2\,\mathsf{e}^x}{\mathsf{e}^{2x} - 1} = \frac{1}{\sinh x}$$

V.f. `https://Hyperbolic functions#/media/File:Sinh_cosh_tanh.svg`

W20 e.02

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad , \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad , \quad \tanh(-x) = -\tanh x \quad , \quad \coth(-x) = \coth x$$

$$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x \quad , \quad \operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{\tanh x}{\sinh x} = \frac{1}{\cosh x} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{\coth x}{\cosh x} = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = \mathsf{e}^x \quad , \quad \cosh x - \sinh x = \mathsf{e}^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad , \quad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1 \quad , \quad \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

$$\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\cosh x = \frac{\sinh}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{|\coth x|}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \pm\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$

$$\coth x = \frac{\sqrt{1 + \sinh^2 x}}{\sinh x} = \pm\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\tanh x}$$

W20 e.03

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad , \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \quad , \quad \coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad , \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \quad , \quad \coth 2x = \frac{\coth^2 x + 1}{2 \coth^2 x}$$

$$\sinh \frac{x}{2} = \operatorname{sign} x\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad , \quad \cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

$$\tanh \frac{x}{2} = \operatorname{sign} x\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \quad , \quad \coth \frac{x}{2} = \operatorname{sign} x\sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1}$$

se $x \neq 0$, allora $\tanh \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \coth x - \operatorname{csch} x$

$$\mathsf{e}^x \;=\; \frac{1+\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh\frac{x}{2}} \;=\; \sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$$

$$\sinh x+\sinh y \;=\; 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} \quad , \quad \sinh x-\sinh y \;=\; 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x+\cosh y \;=\; 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} \quad , \quad \cosh x-\cosh y \;=\; 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

$$\tanh x\pm\tanh y \;=\; \frac{\sinh x\pm y}{\cosh x\cosh y} \quad , \quad \coth x\pm\coth y \;=\; \frac{\sinh x\pm y}{\sinh x\sinh y}$$

$$\sinh x\sinh y \;=\; \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y)-\cosh(x-y)\right] \quad , \quad \sinh x\cosh y \;=\; \frac{1}{2}\left[\sinh(x+y)+\sinh(x-y)\right]$$

$$\cosh x\cosh y \;=\; \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y)+\cosh(x-y)\right]$$

$$(\cosh x\pm\sinh x)^n=\cosh n\,x\pm\sinh n\,x \qquad \textbf{formula di de Moivre}$$

W20 e.04 funzioni iperboliche inverse

Tutte le funzioni iperboliche sono invertibili, con l'eccezione del coseno iperbolico invertibile limitatamente al subdominio $\mathbb{R}_{0+}$ o al subdominio $\mathbb{R}_{-0}$.

area del seno iperbolico $\quad x=\sinh y \iff y=\operatorname{arsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

area del coseno iperbolico $\quad x=\cosh y \iff y=\operatorname{arcosh}x=\begin{cases}\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) & \text{per } x\le 0\\ \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & \text{per } x\ge 0\end{cases}$

area della tangente iperbolica

$$x=\tanh y \iff y=\operatorname{artanh}x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{per } \; |x|<1$$

area della cotangente iperbolica

$$x=\coth y \iff y=\operatorname{arcoth}x=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1} \text{ per } \; |x|>1$$

$$\operatorname{arsech}x \;=\; \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \operatorname{arcsch}x \;=\; \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \operatorname{arcoth}x \;=\; \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Queste funzioni vengono chiamate anche argomento di seno/ ... , invece di area di seno/ ... .

$$\sinh \mathsf{i}\,x \;=\; \mathsf{i}\sin x \quad , \quad \cosh \mathsf{i}\,x \;=\; \mathsf{i}\cos x \quad , \quad \tanh \mathsf{i}\,x \;=\; \mathsf{i}\tan x \quad , \quad \coth \mathsf{i}\,x \;=\; \mathsf{i}\cot x$$

$$\sinh(x+\mathsf{i}\,y) \;=\; \sinh x\cos y+\mathsf{i}\cosh x\sin y \quad , \quad \cosh(x+\mathsf{i}\,y) \;=\; \cosh x\cos y+\mathsf{i}\sinh x\sin y$$

$$\tanh(x+\mathsf{i}\,y) \;=\; \frac{\tanh x+\mathsf{i}\tan y}{1+\mathsf{i}\tanh x\tan y} \quad , \quad \coth(x+\mathsf{i}\,y) \;=\; \frac{1-\mathsf{i}\coth x\cot y}{\coth x-\mathsf{i}\cot y}$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php