1

Capitolo P14
statica

Contenuti delle sezioni

a. statica [1] p. 2
b. forze applicate ai corpi rigidi p. 5
c. momento delle forze applicate ai corpi rigidi p. 7
d. peso e baricentro di un corpo rigido p. 11
e. equilibrio dei corpi rigidi liberi p. 14
f. equilibrio dei corpi rigidi vincolati e attrito p. 15
g. statica dei sistemi articolati p. 16
h. statica dei fili e delle verghe p. 18

18 pagine

P14 0.01 Queste pagine sono dedicate alla introduzione della statica, la parte della meccanica newtoniana che studia i corpi che si trovano in condizioni di equilibrio, ossia i corpi soggetti ad azioni esterne che non producono alcuna accelerazione delle sue componenti e quindi lo lasciano in quiete rispetto a un qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

In particolare la statica studia le condizioni che mantengono un corpo rigido in una situazione stabile, instabile o indifferente.

Queste condizioni si possono derivare da due leggi della dinamica newtoniana, la legge della conservazione della quantità di moto e la legge della conservazione del momento angolare.
Esse tuttavia possono essere ottenute autonomamente a partire da assiomi che riguardano solo corpi e sistemi in equilibrio, evitano di far intervenire il tempo e costituiscono una presentazione più economica di quella che particolarizza la dinamica newtoniana classica.

in effetti lo studio della statica ha rivestito da sempre grande importanza per le sue implicazioni sulle costruzioni meccaniche e architettoniche e si è sviluppata ben prima della dinamica newtoniana.

La sua nascita risale agli studi di Archimede nel III secolo a.C., è stata ampiamente utilizzata nell'antichità e ha ottenuto nuovi notevoli risultati nel mondo scientifico arabo, in particolare dai lavori del siriano Thabit ibn Qurra nel IX secolo.

P14 0.02 Si comincia con la presentazione degli scopi e delle caratteristiche generali della statica.

Si esaminano poi la statica del corpo puntiforme e quella dei sistemi di punti.

Successivamente si affronta la statica dei corpi rigidi, dedicando particolare attenzione alla nozione di momento delle forze.

Dopo aver esaminato le condizioni di equilibrio dei corpi rigidi liberi, vengono considerati i corpi liberi vincolati e vengono studiati gli attriti in grado di mantenere le condizioni di equilibrio di questi corpi.

Successivamente si inizia l'esame della statica dei sistemi deformabili trattando l'equilibrio dei sistemi articolati, la statica dei fili e la statica delle verghe.

Alberto Marini

P14 a. statica [1]

P14 a.01 Una presentazione rigorosa della statica basata su un numero ridotto di assiomi fisico-matematici Lo studio della statica si può svolgere come esame delle situazioni particolari trattabili con la dinamica newtoniana e mriguardante sistemi in quiete respetto a un osservatore inerziale.

Qui si segue una diversa strada: dato che le situazioni di equilibrio si possono trattare più semplicemente di quelle con corpi in moto, si possono ottenere evidenti vantaggi con presentazioni della statica indipendenti dalla dinamica che non richiedono di considerare lo scorrere del tempo, ossia che non devono affrontare processi di evoluzione.

Si può procedere in questo senso anche facendo ricorso alla sola intuizione, senza preoccuparsi di garantire un completo rigore ed ottenenere vari risultati utili per importanti applicazioni pratiche, basandosi sul fatto che il rigore delle affermazioni ricavate procedendo con relativa facilità può essere garantito ricorrendo alle argomentazioni più generali e rigorose della dinamica newtoniana.

Qui procediamo invece in modo rigoroso e specifico partendo da assiomi che fanno riferimento a un modello dei sistemi materiali in equilibrio che si trovano in condizioni particolari, assiomi che in queste condizioni sono ben verificate sperimentalmente.

Qui ci occuperemo soprattutto della statica dei sistemi materiali che si trovano in una zona limitata della superficie terrestre nella quale la forza di gravità può essere considerata uniforme, pari a $m\,\mathbf{g}$; evidentemente questi sistemi sono quelli che interessano un gran numero di applicazioni di interesse pratico, le applicazioni che storicamente hanno determinato i primi fondamentali studi della statica.

Va segnalato anche che la trattazione della statica che segue può trarre vantaggio da procedimenti geometrici ben definiti e codificati che costituiscono le tecniche della cosiddetta "statica grafica", oggi correntemente automatizzate.

P14 a.02 Nella statica le forze, dovendo servire a rendere conto di situazioni nelle quali non si hanno movimenti, possono essere definite come grandezze vettoriali misurabili che consentono di esprimere tutte le azioni che vengono esercitate sul corpo in quiete in esame da parte dei corpi che si considarano in grado di influenzarlo.

Queste forze si distinguono in forze dovute ad azioni di contatto e forze riconducibili a campi generati a distanza.
Tutte le prime si assume che possano ridursi a trazioni effettuate da funi e a pressioni esercitate da aste rigide; i campi generati a distanza considerati dalla meccanica classica possono essere campi elettrostatici, campo magnetostatici e campi gravitazionali.
Tra i campi di forze si dà meggiore importanza al campo gravitazionale terrestre responsabile della forza peso dei corpi materiali e particolarmente al campo che si riscontra in zone limitate della superficie terrestre nelle quali sia lecito considerarlo uniforme e rivolto verso il basso.

Assumiamo quindi che le forze agenti su un corpo si possano rappresentare con vettori applicati a determinati punti del corpo in esame: si ammette che ciascuna delle le forze di trazione e di pressione sia applicata a un determinato punto del corpo e che le forze dovute alla gravità si possano considerare applicabili al cosiddetto **baricentro del corpo**.

P14 a.03 Tra iI corpi in quiete studiati dalla staticadistinguiamo i singoli corpi puntiformi caratterizzati da massa e posizione spaziale, i sistemi discreti costituiti da n corpi puntiformi, corpi continui rigidi e corpi continui deformabili.

I corpi possono essere consideratipotenzialmente liberi di muoversi vincolati nei loro movimenti potenziali; i corpi rigidi si possono considerare siatemi di corpuscoli puntiformi vincolati a muoversi mantenendo tutte le mutue distanze.

Vediamo come si possono misurare le forze su un corpo in quiete $\boldsymbol{P}$ rispetto a un osservatore inerziale e in particolare rispetto ad un ossevatore giudicato fisso o in moto rettilineo uniforme rispetto al suolo terrestre.

Una forza applicata in un punto$P$ di $\boldsymbol{P}$ è rappresentata da un vettore applicato in P avente la direzione nella quale si dovrebbe muovere se la forza stessa fosse aumentata.
Per misurare la sua intensità si riesce mediante accurati confronti a fare riferimento a una forza di trazione misurabile che può esercita un filo in una arbitraria direzione; questa forza in un campo gravitazionale limitato è realizzabile agganciando un corpo di peso conosciuto al filo avvolto su una carrucola perfettamente scorrevole e posizionata in modo da portare alla trazione nella direzione desiderata.
L'intensità di questa forza può essere espressa come multiplo della unità di misura convenuta per le forze peso, in particolare con il peso di un kg di un corpo campione stndard (tradizionalmente una massa di platino conservata a Sévres).
Alternativamente si può far uso di un dinamometro, dispositivo con una parte elastica, casi più semplici una molla, la cui lunghezza, quando gli si applica una forza, subisce una estensione o una contrazione che si trova sperimentalmente proporzionale alla forza applicata.

P14 a.04 Affrontiamo il problema dell'equilibrio di un corpo puntiforme $\boldsymbol{P}$ identificabile con la sua posizione P iniziando dal caso in cui non sia soggetto a vincoli.

Consideriamo $\boldsymbol{P}$ in equilibrio ; l'esperienza mostra che quando alle forze che agiscono su $\boldsymbol{P}$ se ne aggiunge una il corpo perde l'equilibrio e si muove; quando se ne aggiungono due mantiene l'equilibrio sse le due forze sono uguali e contrarie; quando se ne aggiungono tre o più mantiene l'equilibrio sse la loro risultante è nulla. Si noti che l'osservazione dell'ultimo caso generalizza le due precedenti.

Questo giustifica la rappresentazione delle forze con vettori applicati e consente di affermare che non si altera l'equilibrio di un corpo puntiforme sostituendo alcune delle forze che agiscono su di esso con altre che presentano la stessa somma.

Più formalmente affermiamo che se su un corpo puntiforme libero da vincoli agiscono le forze FSd_1, F_2, ... ,F_k, condizione necessaria e sufficiente per il suo equilibrio è l'annullamento del risultante di tali forze

$$\mathsf{R} \;:=\; \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 + \cdots + \mathsf{F}_k \;=\; \mathsf{0} \quad .$$

Consideriamo in particolare un corpo puntiforme soggetto alla forza gravitazionale in una zona limitata dlla superficie terrestre.
Se non si agisce su di esso con pressioni o tensioni il corpo cade verso il bas, mentre si mantiene in quiete sse gli si applica una forza volta verso l'alto uguale ed opposta al suo peso.

P14 a.05 Consideriamo un corpo puntiforme vincolato a muoversi su una superficie o su una linea, o per essere costretto a stare in contatto con superficie materiale o con oggetto materiale filiforme o per essere sottoposto a forze particolari; ad esempio un corpo fissato all'estremità di un'asta rigida con l'atre estrmità fissata vìncolato a muoversi su una superficie sferica.

Si constata che un tale corpo può mantenere il suo equilibrio anche se sottoposto ad una forza nonnulla F che chiamiamo "forza attiva"; questo, per la a04(1), implica che il vincolo esercita una forz $\mathsf{V} = -\mathsf{F}$ chiamata **reazione vincolare**.

Se il vincolo si può considerare perfettamene liscio la forza attiva non rompe l'equilibrio solo se non presenta una componente tangente alla superficie o alla linea costituente il vincolo.

Se viceversa il vincolo va considerato scabro, il mantenimento dell'equilibrio o meno è determinato dalla forza attiva.

Per quantificare la situazione supponiamo che il vincolo sia espresso da una superficie o da una linea geometricamente regolare (continua, derivabile, ...) e consideriamo la forza scomponibile come $\mathbf{F} =: \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_{/\!/}$, con $\mathbf{F}_\perp$ perpendicolare al vincolo e $\mathbf{F}_{/\!/}$ tangenziale, ossia parallela ad esso.
Si trova sperimentalmente che l'equilibrio è mantenuto sse la direzione della forza attiva è tale che $|\mathbf{F}_{/\!/}| \leq \mu_s |\mathbf{F}_\perp|$, dove μ_s è un parametro che dipende dalle caratteristiche materiali del corpo in esame e del vincolo ed è indipendente dalla estensione dei punti di contatto.
Questo parametro viene detto **coefficiente di attrito statico**, in genere viene precisato empiricamente e ha valori in ogni caso inferiori ad 1. I valori vanno da 0,07 per superfici cosparse di lubrificante, intorno a 0,20 per contatti tra metalli fino a 0,75 per pietre rugose.

Nel caso di vincolo perfettamente liscio $\mu_s = 0$ e la condizione che caratterizza l'equilibrio si riduce alla $|\mathbf{R}_{/\!/}| = 0$.

P14 a.06 Consideriamo le condizioni di equilibrio dei sistemi di corpi discreti o continui. Su ciascuno dei punti di un sistema discreto e su ciascuna delle porzioni infinitesime di un sistema continuo agiscono forze interne e forze esterne ciascuna delle quali può essere forza attiva o reazione vincolare.

Come condizione necessaria e sufficiente dell'equilibrio del sistema assumiamo che sia la condizione di equilibrio di ogni sua parte.

Possiamo riprendere le considerazioni sui singoli corpi puntiformo pe raffermare che non si altera l'equilibrio di un sistema di corpi se si sostituiscono talune delle forze agenti su ciascuno dei suoi punti o delle sue porzioni infinitesime can forze osservabili o fittizie aventi la stessa somma.
Questo è detto "principio statico del parallelogramma delle forze".

P14 b. forze applicate ai corpi rigidi

P14 b.01 La statica dei corpi rigidi, detti anche corpi solidi, si può ricavare da due postulati in accordo con le esperienze; il primo ddi questi vale per ogni insiemi di punti ed è stato giaà incontrato:

(1) Non si altera l'equilibrio di un corpo se si sostituiscono alcune delle forze che agiscono in un suo punto acon altre aventi la stessa somma.

(2) Non si altera l'equilibrio di un corpo rigido se si trasla il punto di applicazione di una forza lungo la retta alla quale la forza appartiene.

Da quest'ultimo segue che non cambia l'equilibrio del sistema aggiungendo alle sue forze due forze $\mathbf{f}$ e $-\mathbf{f}$ applicate a due punti della stessa retta diretta come $\mathbf{f}$.

Questa proprietà è peculiare per i corpi rigidi, non è applicabile, evidentemente ai due capi di un fili elastico.

P14 b.02 Due sistemi di forze, misurabili o fittizie, applicate a un corpo rigido si dicono **sistemi di forze equipollenti** se trasformando l'uno nell'altro non cambia l'equilibrio del corpo. La sostituzione di un sistema di forze con uno equipollente si qualifica come **sostituzione di forze invariantiva**.
Queste sostituzioni si ottengono applicando più volte le sostituzioni elementari suggerite dai due postulati in :b01, cioè la sostituzione di due forze applicate in un punto con la loro somma applicata nello stesso punto, la sostituzione opposta e lo spostamento di una due forza lungo la retta che la contiene. Evidentemente due sistemi di forze equipollenti hanno lo stesso vettore risultante.

Si trova facilmente che più forze applicate a un corpo rigido che concorrono in un solo punto Q sono equipollenti al risultante dei relativi vettori applicato nel punto Q oppure in un altro punto della retta che lo caratterizza.

Passiamo a esaminare il caso di più forze attive parallele con risultante nonnullo; si tratta di un caso particolare del precedente relativo al concorrere ad un unico punto all'infinito che occorre precisare in termini costruttivi.
Consideriamo per primo il caso di due forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ che non sono opposte e sono applicate nei due punti P_1 e P_2.
Si aggiungono due forze fittizie opposte $\mathbf{F}$ applicata in P_1 e $-\mathbf{F}$ applicata in P_2 e si ottiene il sistema equipollente costituito da $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}$ applicato in P_1 e da $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}$ applicato in P_2. Questo concorrono in un punto e come nel caso precedente sono equipollenti alla forza risultante $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ applicata in un punto qualsiasi della retta per Q che lo contiene.

P14 b.03 Nel caso di più forze piane a risultante nonnullo si può applicare il cosiddetto **metodo del poligono funicolare** e giungere ancora a un unico vettore equipollente

P14 b.04 Abbiamo dunque che ogni sistema di forze che agiscono su un corpo rigido, se sono concorrenti in un punto, parallele o appartenenti a un solo piano si possono ridurre a una sola forza equipollente e applicata in un arbitrario punto di una retta opportuna.

Dimostriamo ora che ogni sistema di forze che agiscono su un corpo rigido, se non si può ridurre a una sola forza equipollente, si può ridurre a due forze, una delle quali applicata aun punto arbitrariamente prefissabile.

Preliminarmente introduciamo la nozione generale di **equivalenza-eqp** e la conseguente nozione di **trasformazione-eqp**.

Due nozioni o due strutture si dicono equivalenti-eqp sse si possono trasformare l'una nell'altra e viceversa mantenendo le corrispondenti proprietà.
L'equipollenza tra forze applicate è un caso particolare di equivalenza-eqp; la relativa trasformazione di sistemi di forze sarà chiamata **trasformazione-eqpo**
Torniamo ai sistemi di forze agenti su un corpo rigido. Per prima cosa si osserva che ogni forza FSd si può trasformare-eqp con tre forze applicate a tre punti non allineati prefissabili ad arbitrio.
Infatti, detti A, B e C questi tre punti e scelto ad arbitrio un punto Q sulla retta che caratterizza $\mathbf{F}$, si può esprimere questa forza come somma di tre vettori diretti, risp., come QA, QB e QC , che conviene denotare con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, risp. . e quindi applicarli, risp., ad A, B, e C.

P14 b.05 Diciamo **coppia di forze applicate opposte**, in breve **coppia-aof**, una coppia costituita da due forze, chiamiamole $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$, applicate a due punti che qui denotiamo con P e Q.

A una tale coppia sono associate le due rette rette complanari che, risp., le contengono, il piano che contiene tali rette, la distanza tra le due rette, che chiamiamo **braccio della coppia-aof** e un verso.

Una coppia-aof, in accordo con l'essere un sistema di vettori-a in un piano, può essere trasformata-eqP (in un'altra equipollente) con gli stessi punti di applicazione con le forze componenti ortogonali al vettore.a $\overrightarrow{PQ}$.

Da questo segue la possibilità di trasportare-eqP una forza da un punto di applicazione ad un altro con l'aggiunta di una coppia-aof

Si può quindi affermare che un qualsiasi sistema di forze applicate a un corpo rigido è equipollente a una forza, il risultante delle forze date, applicata a un punto arbitrario,e a una coppi-aof.

P14 c. momento delle forze applicate ai corpi rigidi

P14 c.01 Consideriamo una forza F applicata in un punto P e un altro punto O; Si dice momento della forza F applicata a P rispetto al polo O

$$\mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P], O \ := \ (P - O) \wedge \mathsf{F} \ ,$$

Si tratta di una grandezza vettoriale che ha le dimensioni del lavoro e che spesso si considera un vettore.a al polo O. Questo vettore è ortogonale al piano definiti dalla forza F applicata a P e dal polo, ha la orientazione dell'indice di una mano destra con il medio orientato come $P - O$ e il pollice come la forza F e ha il modulo dato dall'area del parallelogramma definito da $P - O$ ed F, ovvero uguale a $b\,|\mathsf{F}|$ con b distanza di O dalla retta contenente F che denotiamo con $\mathcal{R}$.

Si osserva che il momento non cambia quamdo si cambia il punto di applicazione della forza con un qualsiasi altro punto di $\mathcal{R}$ e che il momento $\mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O]$ con $\mathsf{F} \neq \mathbf{0}$ è il vettore nullo sse $P \in \mathcal{R}$.

Il momento rispetto a un polo cambia se si cambia il polo:

$$\mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O'] \ = \ (P - O') \wedge \mathsf{F} \ = \ [(P - O) + (O - O')] \wedge \mathsf{F} \ = \ \mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O] + (O - O') \wedge \mathsf{F} \ .$$

Tuttavia il momento non cambia se il polo sostitutivo O' appartiene alla retta passante per O e parallela alla retta contenente la forza, in quanto $(O - O') \wedge \mathsf{F} = \mathbf{0}$.

P14 c.02 Consideriami ancora una forza F applicata nel punto P e una retta orientata individuata da un versore a alla quale diamo il ruolo di "asse"; siano O e O' due punti dell'asse; ricordiamo che

$$\mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O'] \ = \ \mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O] + (O' - O) \wedge \mathsf{F}$$

e constatiamo che $(O' - O) \wedge \mathsf{F} \cdot \mathsf{a} \ = \ 0$, in quanto $(O' - O)$ e a sono vettori paralleli. Si conclude che

$$\mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O'] \ = \ \mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O] \ ,$$

ovvero che
Per questa grandezza scalare scriviamo

$$\mathsf{Mmnta}[\mathsf{F}, P, \mathsf{a}] \ := \ \mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}, P, O) \cdot \mathsf{a} \ := \ (P - O) \wedge \mathsf{F} \cdot \mathsf{a} \ ,$$

quale che sia $O \in \mathsf{SetY}(\mathbb{R}\,\mathsf{a})$; risulta quindi lecito chiamarla **momento della forza rispetto all'asse**.

Si osserva che se la forza non è nulla, $\mathsf{Mmnta}[\mathsf{F}, P, \mathsf{a}]$ è nullo sse la forza e l'asse giacciono sullo stesso piano.

Nel caso particolare in cui la retta di applicazione della forza, $\mathbb{R}\,\mathsf{F}$, e l'asse $\mathbb{R}\,\mathsf{a}$ sono ortogonali abbiamo $\mathsf{Mmnta}[\mathsf{F}, P, \mathsf{a}] \ = \ \pm b\,|\mathsf{F}|$, con b distanza tra le rette suddette, grandezza chiamata braccio del momento in esame, e con il secondo membro positivo se $(P - O) \wedge \mathsf{F}$ ha la orientazione di a, negativo in caso contrario.

P14 c.03 Consideriamo più in generale un insieme $\mathfrak{F}$ di n forze F_i applicate, risp., nei punti P_i, con $i = 1, 2, ..., n$; scelto come polo un punto O diciamo **momento dell'insieme di forze applicate rispetto al polo** O la somma dei momenti delle singole forze rispetto a O, ovvero

$$\mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O] \ := \ \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Mmnt}[\mathsf{F}_i, P_i, O] \ = \ \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathsf{F}_i \ .$$

Fissato un asse **a** definiamo **momento dell'insieme di forze applicate rispetto all'asse a** la somma dei momenti delle singole forze rispetto ad **a**

$$\mathsf{Mmnta}[\mathfrak{F}, \mathbf{a}] \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Mmnta}[\mathbf{F}_i, P_i, \mathbf{a}] \;=\; \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}.\mathbf{a} \quad .$$

Per la distributività del prodotto scalare rispetto alla somma vettoriale

$$\mathsf{Mmnta}[\mathfrak{F}, \mathbf{a}] \;=\; \mathsf{Mmnt}[FEf, O] \cdot \mathbf{a} \quad .$$

Se in particolare tutte le forze sono applicate allo stesso punto P, introdotto il risultane dell'insieme delle forze **R** abbiamo

$$\mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O] \;=\; (P - O) \wedge \mathbf{R} \qquad , \qquad \mathsf{Mmnta}[\mathfrak{F}, \mathbf{a}] \;=\; (P - O) \wedge \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} \quad .$$

Questa espressione costituisce il teorema di Varignon, risultato fondativo della statica.

Per la variazione del momento di un insieme di forze applicate al variare del polo si trova

$$\mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O'] \;=\; \mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O] + (O' - O) \wedge \mathbf{R} \quad . \tag{1}$$

Se il risultante delle forze è nullo, in particolare se il sistema delle forze si riduce a una coppia-aof, il momento del sistema è lo stesso per ogni scelta del polo.

Quando $\mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O] \neq \mathbf{0}$ il momento non cambia passando da un polo ad un altro sse i due punti definiscono una retta parallela al vettore risultante.

Se si considerano i prodotti scalari per **R** dei due membri della (1) si ottiene

$$\mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O'] \cdot \mathbf{R} \;=\; \mathsf{Mmnt}[\mathfrak{F}, O] \cdot \mathbf{R} \;\; ;$$

quindi al variare del polo in generale varia il momento rispetto ad esso, ma non il suo prodotto scalare per il risultante. Questa grandezza riguardante un sistema di forze applicate $\mathfrak{F}$ è invariante al variare del polo, lo denotiamo con $IMR[\mathfrak{F}]$ e lo chiamiamo **invariante-MR**; esso viene detto anche "automomento" e "invariante scalare".

P14 c.04 Il risultante e il momento delle forze applicate a un corpo rigido costituiscono gli elementi essenziali per l'equilibrio dei corpi rigidi in virtù del seguente teorema fondamentale.

Teorema Consideriamo due insiemi di forze applicate a un corpo rigido. I due insiemi sono equipollenti $\iff$ i due insiemi hanno lo stesso risultante e lo stesso momento rispetto a un polo.

Dim.: .....

P14 c.05 La classificazione dei sistemi di forze agenti sopra i corpi rigidi è possibile e conveniente effettuarla riferendosi ai rispettivi risultanti e momenti.

Un sistema di forze avente nulli il risultante nullo e il momento rispetto a un polo particolare è equipollente al sistema di forze nulle.

Un sistema di forze con risultante nonnullo e memento rispetto a un polo $\overline{O}$ nullo è equipollente alla sol forza risultante applicata in $\overline{O}$ o in un qualunque altro punto della **retta di applicazione del risultante**, retta passante per $\overline{O}$ e con la direzione del risultante.

Per trovare la retta di applicazione del risultante di un sistema serve la proprietà che segue.

Prop. Consideriamo un sistema $\mathfrak{F}$ di forze applicate a un corpo rigido a risultante **R** nonnullo. Si trova un polo $\overline{O}$ tale che $\mathsf{Mmnta}[\mathfrak{F}, \overline{O}] \;=\; \mathbf{0} \iff$ è nullo il suo invariante-MR

$$IMR[\mathfrak{F}] \;:=\; \mathsf{Mmnta}[\mathfrak{F}, \overline{O}] \cdot \mathbf{R} \;=\; 0 \; .$$

Dim.: "$\Longrightarrow$": ovvio
"$\Longleftarrow$": $IMR[\mathfrak{F}] = 0$ implica che per qualsiasi polo O, posto $\mathsf{M}_O := \mathsf{Mmnta}[\mathfrak{F}, O]$ abbiamo

$$(\mathsf{R} \wedge \mathsf{M}_O) \wedge \mathsf{R} = (\mathsf{R} \cdot \mathsf{R})\mathsf{M}_O - (\mathsf{M}_O \cdot \mathsf{R})\mathsf{R} = |\mathsf{R}|^2 \, \mathsf{M}_O \quad .$$

Quindi

$$\mathsf{M}_{O'} = \mathsf{M}_O + (O - O') \wedge \mathsf{R} = \left[O - O' + \frac{1}{|\mathsf{R}|^2} (\mathsf{R} \wedge \mathsf{M}_O) \right] \quad .$$

quindi

$$\mathsf{M}_O = \mathsf{0} \iff O - O' + \frac{1}{|\mathsf{R}|^2} (\mathsf{R} \wedge \mathsf{M}_O) \mathbin{/\!/} \mathsf{R} \quad .$$

Quindi la retta di applicazione del risultante è l'insieme dei punti della forma:

$$O' = O + \frac{1}{|\mathsf{R}|^2} (\mathsf{R} \wedge \mathsf{M}_O) + \lambda \, \mathsf{R} \quad , \tag{1}$$

con λ reale arbitrario, evidentemente si tratta di una retta parallela al risultante QED

P14 c.06 Per individuare effettivamente la retta di applicazione basta determinare un solo $\overline{O}$ fornito dall'espressione c05(1), ad esempio quello relativo a $\lambda = 0$, ossia

$$\overline{O} = O + \frac{1}{|\mathsf{R}|^2} (\mathsf{R} \wedge \mathsf{M}_O) \quad . \tag{1}$$

Esiste una retta di applicazione del risultante nel caso di forze applicate concorrenti in un punto C e in tal caso $\mathsf{M}_C = \mathsf{0}$, ossia $\overline{O} = C$.

Esiste una retta di applicazione del risultante anche nel caso di forze applicate parallele: in questo caso R ha la orientazione comune alle varie forze.
Denotiamo con k il versore con la stessa orientazione delle forze e del risultante, introduciamo le componenti secondo la orientazione k delle varie forze: $R := \mathsf{R} \cdot \mathsf{k}$ e $F_i := \mathsf{F} \cdot \mathsf{k}$ per $i = 1, 2, ..., n$ e osserviamo che $\mathsf{R} = R\,\mathsf{k}$ e $\mathsf{F}_i = F_i\,\mathsf{k}$.
Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \overline{O} - O &= \frac{1}{R} \left[\mathsf{k} \wedge \sum_{i=1}^{n} [(P_i - O) \wedge F_i \, \mathsf{k}] + \lambda \, R \, \mathsf{k} \right] \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) F_i}{R} + \left[\lambda \, R - \frac{\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \cdot F_i \, \mathsf{k})}{R} \right] \mathsf{K} \end{aligned} \quad .$$

Se si sceglie $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \cdot F_i \, \mathsf{k})}{R^2}$ si ottiene

$$\overline{O} - O = \frac{\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) F_i}{R} \quad .$$

Si osserva che il punto di applicazione del risultante non dipende da k, cioè dalla direzione delle forze applicate; esso viene chiamato **centro delle forze parallele**.

Esiste una retta di applicazione del risultante anche quando le forze applicate sono complanari. In tale caso R giace nel piano delle forze, M_O è ortogonale a questo piano e quindi $IMR[\mathfrak{F}] = 0$ e il punto $\overline{O}$ si ottiene facilmente dalla (1).

P14 c.07 Esaminiamo il caso in cui il risultante è nullo, mentre il momento che denotiamo con M non lo è, caso in cui il sistema delle forze è una coppia-aof che assumiamo costituita dalle forze f e $-\mathsf{f}$ applicate, risp., nei punti O e Q; con questi elementi abbiamo

$$(Q - O) \wedge \mathsf{f} = \mathsf{M} \quad .$$

Il momento $\mathbf{M}$ è lo stesso rispetto ad ogni scelta per il polo e quindi lecito chiamarlo **momento della coppia-aof**.
Chiaramente due coppie-aof con lo stesso momento sono equipollenti.

P14 c.08 Un dato sistema di forze $\mathfrak{F}$ con invariante-RM nonnullo abbiamo visto essere equipollente a due forze che hanno come somma il risultante $\mathbf{R}$ e come momento rispetto a un particolare polo O $\mathbf{M}_O$, valori uguali a quelli ottenibili dal dato $\mathfrak{F}$.
È ragionevole cercare un polo $\overline{O}$ che rende minimo $\mathbf{M}_O$. minimo.

Per questo scomponiamo il momento generico come $\mathbf{M}_O =: \mathbf{L} + \mathbf{N}_O$ con $\mathbf{L}$ parallelo ed $\mathbf{N}_O$ normale ad $\mathbf{R}$.
Dato che $IMR_O = \mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R} = \mathbf{L} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{N}_O \wedge \mathbf{R} = \mathbf{N}_O \wedge \mathbf{R}$, solo la componente normale ad $\mathbf{R}$ dipende dal polo, non così la parallela. Abbiamo quindi

$$\overline{O}(\lambda) - O = \frac{\mathbf{N}_O \wedge \mathbf{R}}{R^2} + \lambda \mathbf{R} \ ,$$

con λ reale arbitrario; quindi il luogo dei punti $\overline{O}(\lambda)$ è una retta parallela ad $\mathbf{R}$ che viene detta "asse centrale del sistema $\mathfrak{F}$.

Assumendo come polo il punto $\overline{O}(0)$ relativo a $\lambda = 0$ si ha $\mathbf{R} \wedge \mathbf{N}_{\overline{O}(0)} = \mathbf{0}$, ossia $\mathbf{N}_{\overline{O}} = \mathbf{0}$; Questo è il polo per il quale il momento $\mathbf{M}_{\overline{O}}$ si riduce alla componente $\mathbf{L}$ invariante e quindi ha il modulo minimo.

Quindi il sistema di forze con invariante-MR nonnullo si può ridurre al suo risultante applicato a un punto qualunque dell'asse centrale e a una coppia-aof avente momento parallelo allo stesso asse, ovvero una coppia che giace su un piano ortogonale all'asse centrale.

P14 d. peso e baricentro di un corpo rigido

P14 d.01 Vediamo come si può trattare il peso di un corpo rigido che si trova in una zona limitata della superficie terrestre.
Supponiamo che il corpo sia formato da un insieme di n corpi puntiformi $\boldsymbol{P}_i$ che si trovano nelle posizioni P_i e posseggono pesi $\mathbf{w}_i = m_i\,\mathbf{g}$ con $\mathbf{g}$ vettore accelezazione rivolto verso il baso, per $i = 1, 2, ..., n$; le forze peso quindi sono forze parallele.
Scriviamo inoltre $\mathbf{w} := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i$ per il risultante delle forze peso che va considerato il peso dell'intero corpo rigido; esso va applicato nel centro delle forze parallele, punto che scriviamo $\overline{P} = \langle xol, \overline{y}, \overline{z} \rangle$, che viene detto **baricentro** del corpo e che si trova essere indipendente dal polo O.

Per il baricentro abbiamo:

$$\overline{P} - O = \frac{\sum_{i=1}^{n} (P_i - O)\, w_i}{p} \quad ,$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, w_i}{p} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\, w_i}{p} \quad , \quad \overline{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i\, w_i}{p} \quad .$$

Evidentemnte se le parti $\boldsymbol{P}_i$ del corpo hanno tutte lo stesso peso, le coordinate del baricentro sono le medie aritmetiche delle coordinate delle sue parte; se i pesi $\mathbf{p}_i$ sono diversi si parla di medie ponderate delle coordinate.

Se in particolare il corpo rigido è formato da due corpi puntiformi posizionati sull'asse Ox abbiamo

$$\overline{x} = \frac{x_1\, p_1}{p_1 + p_2} \quad , \quad \overline{y} = 0 \overline{z} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{x} - x_1}{x_2 - \overline{x}} = \frac{p_1}{p_2} \quad ,$$

P14 d.02 Passiamo a un corpo rigido continuo; denotiamo con τ il volume che occupa e consideriamolo suddiviso in parti infinitesime, ciascuna collocata nella posizione $P = \langle x, y, z \rangle$ di volume $\mathrm{d}\tau$ contenuta in una sfera di raggio infinitesimo ϵ e dal peso $\rho(P)\,\mathrm{d}\tau$, con $\rho(P)$ grandezza positiva con le dimensioni di una forza per unità di volume.
Il peso del corpo è fornito dall'espressione $\int_\tau \rho(P)\,\mathrm{d}$ e il baricentro si ottiene da

$$\overline{P} - O = \frac{\int_\tau (P - O)\, \rho\, \mathrm{d}\tau}{p} \quad .$$

Se il corpo è omogeneo ρ è una costante $\rho = \dfrac{p}{\tau}$, il peso specifico del corpo; se non è omogeneo ρ è una funzione definita per ogni punto $P \in \tau$ e rappresenta il variare del peso specifico (volumico) del corpo; le coordinate cartesiane del baricentro .
Le coordinate catesiane del baricentro sono date da

$$\overline{x} = \frac{1}{p} \int_\tau \rho\, x\, \mathrm{d}\tau \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{p} \int_\tau \rho\, y\, \mathrm{d}\tau \quad , \quad \overline{z} = \frac{1}{p} \int_\tau \rho\, z\, \mathrm{d}\tau \quad .$$

Se il corpo è omogeneo le formule precedenti si semplificano nelle seguenti:

$$\overline{P} - O = \frac{\int_\tau (P - O)\, \mathrm{d}\tau}{p} \quad .$$

$$\overline{x} = \frac{1}{\tau} \int_\tau \rho\, x\, \mathrm{d}\tau \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{\tau} \int_\tau y\, \mathrm{d}\tau \quad , \quad \overline{z} = \frac{1}{\tau} \int_\tau z\, \mathrm{d}\tau \quad .$$

Le loro dimostrazioni si ottengono considerando suddivisioni del volume del corpo in parti finite contenute in sferette di raggio inferiore ad ϵ, assimilando questa suddivisione a un sistema di corpi puntiformi e infine passando al limite per ϵ tendente zero.

In modo simile si possono trattare corpi rigidi continui che si possono schematizzare con una superficie (come per le membrane e le lastre) o con una linea (fili, verghe) giungendo a formule nelle quali compaioni integrali di superficie e distribuzioni superficiakli di forze, oppure compaiono integrali di linea e distribuzioni lineari di forze.

anche con queste modellizzazioni delle situazioni reali si giunge a concludere che si può tenere conto del peso dei corpi rigidi come forze vettoriali applicate al baricentro.

P14 d.03 Molte applicazioni pongono il problema della determinazione delle posizioni dei baricentri dei corpi rigidi; a questo vengono incontro alcune semplici proprietà consentite soprattutto da simmetrie.

Se un corpo occupa una porzione di un piano o di un segmento rettilineo il sua baricentro appartiene a quel piano o a quella retta: infatti possiamo riferire il piano alle due coordinate cartesiane x e y e quindi deve essere $\overline{z} = 0$; similmente possiamo riferire la retta alla sola coorsinata x e quindi $\overline{y} = \overline{z} = 0$.

Se il corpo presenta un piano di simmetria il suo baricentro appartiene a tale piano. Infatti riferendo il piano di simmetria alle coordinate x e y, dato che la funzione $\rho(x, y, z)$ non cambia cambiando il segno della z abbiamo $\overline{z} \;=\; -\overline{z}$ ossia $\overline{z} = 0$.

Se il corpo presenta due piani di simmatria la loro intersezione è un asse di simmetria e il suo baricentro appartiene a questo asse.
Se il corpo presenta tre piani di simmatria la loro intersezione è il suo centro di simmetria e coincide con il suo baricentro.
Dunque hanno il baricentro nel loro centro i corpi con densità uniforme aventi forma quali: segmento, parallelogramma, ellisse, poligono con due assi di simmetria, poligono regolare, parallelepipedo, elissoide, cilindro circolare, sfera, poliedro platonico, ...

P14 d.04 La determinazione dei baricentri può spesso servirsi della dn proprietà distributiva dei baricentri.
Cominciamo a decomporre un corpo che occupa la regione τ in due parti che occupano le regioni τ_1 e τ_2 tendenzialmente più semplici dell'intero, la prima di peso p_1 e baricentro $\overline{P}_1$, la seconda di peso p_2 e baricentro $\overline{P}_2$. Abbiamo allora

$$\overline{P}_i - O \;=\; \frac{\int_{\tau_i} (P-O)\,\rho\,\mathrm{d}\tau}{p_i} \quad \text{per} \quad i = 1, 2 \;\;;$$

$$\overline{P} - O \;=\; \frac{\int_{\tau_1} (P-O)\,\rho\,\mathrm{d}\tau \;+\; \int_{\tau_2} (P-O)\,\rho\,\mathrm{d}\tau}{p} \;=\; \frac{p_1\,(\overline{P}_1 - O) + p_2\,(\overline{P}_2 - O)}{p} \;\;.$$

Quindi il baricentro dell'intero corpo è il baricentro del sistema di due corpi puntiformi il primo con peso p_1 e baricentro in $\overline{P}_1$, il secondo con peso p_2 e baricentro in $\overline{P}_2$.

Questr proprietà si può evidentemente estendera alla decomposizione del corpo del quale si cerca il baricentro in più parti che siano tanto semplici da consentire il calcolo di tutti i loro baricentri.

P14 d.05 Utili connessioni vengono stabilite dal teorema di Guldino tra il baricentro di un corpo omogeneo formato da una linea piana e la superficie di rotazione ottenute facendo ruotare la linea intorno ad un asse.
Consideriamo la linea regolare l data da $y = f(x)$ con $f(x) > 0$ per $a \le x \le b$ avemnte lunghezza L.
Il baricentro del corrispondente corpo omogeneo ha la ordinata $\overline{y} \;=\; \dfrac{\int_l f(x)\,\mathrm{d}l}{L}$.

La corrispondente superficie di rotazione ha la superficie

$$S \;=\; \int_l 2\pi\, f(x)\,\mathrm{d}l \;=\; 2\pi \int_l f(x)\,\mathrm{d}l \quad .$$

Quindi abbiamo la relazione

$$\overline{y} \;=\; \frac{S}{2\pi\, L} \quad .$$

Similmente si trova che una lamina piana omogenea che occupa la regione piana di area A al di sopra dell'asse Ox delimitata dalla curva regolare $y = f(x)$ ha come ordinata del baricentro

$$\overline{y} \;=\; \frac{V}{2\pi\, A} \quad ,$$

dove V denota il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare la lamina intorno l'asse Ox.

Due esempi. La semicircoferenza omogenea di raggio r ruotando intorno all'asse Ox genera la superficie sferica di area $4\pi\, r^2$ e l'ordinata del baricentro di tale semicirconferenza vale

$$\overline{y} \;=\; \frac{4\pi\, r^2}{2\pi\, r} \;=\; \frac{2}{\pi}\, r \quad .$$

Il semicerchio omogeneo corrisponente della precedente semicirconferenza presenta il baricentro con l'ordinata

$$\overline{y} \;=\; \frac{4/3\,\pi r^3}{\pi^2\, r^2} \;=\; \frac{4}{3\pi}\, r \quad .$$

è utile anche osservare che il baricentro di un corpo si colloca all'interno della regione spaziale ottenuto per chiusura convessa della regione occupata dal corpo.
Questo scende dalla considerazione che riferendo il corpo a un qualsiasi piano Oxy tale che il corpo si viene a trovare nelcorrispondente semipiano con la coordinata z nonnegativa, deve prentare la terza coordinata del baricentro $\overline{z} \geq 0$. Basta poi constatare che la chirura convessa della regione occupata dal corpo si ottiene come intersezione di tutti i possibili semispazi che lo devono contenere.

P14 d.06 Troviamo i baricentri di alcuni semplici corpi omogenei.

Consideriamo una lamina triangolare qualsiasi. La si può pensare decomposta in striscie infinitesime parallele a un suo qualunque lato. Ogni striscia ha il baricentro nel punto centrale, ossia su una mediana del triangolo. quindi il baricentro della lamina si trova sull'intersezione delle tre mediane del triangolo, punto chiamato baricentro della figura triangolare.

P14 e. equilibrio dei corpi rigidi liberi

P14 e.01 Equazioni cardinali dell'equilibrio dei corpi rigidi non vincolati

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M} \;=\; \mathbf{0} \;\; .$$

P14 e.02 Equazioni cardinali in forma scalare

$$R_x \;=\; 0 \quad , \qquad R_y \;=\; 0 \quad , \qquad R_z \;=\; 0 \;\; .$$

$$M_x \;=\; 0 \quad , \qquad M_y \;=\; 0 \quad , \qquad M_z \;=\; 0 \;\; .$$

Caso delle forze attive tutte contenute nel oiano Oxy

$$R_x \;=\; 0 \quad , \qquad R_y \;=\; 0 \quad , \qquad M_z \;=\; 0 \;\; .$$

P14 e.03 Un corpo sotto l'azione di una sola forza nonnulla non può stare in equilibrio.

Un corpo sotto l'azione di due sole forze nonnulle può stera in equilibrio sse le du eforze sono opposte e hanno la stessa retta di applicazione.

Caso in cui su un corpo agiscono solo tre forze nonnulle, $\mathbf{F}_i$ applicata nel punto P_i, per $i = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \;=\; \mathbf{0} \quad , \qquad (P_2 - P_1) \wedge \mathbf{F}_2 + (P_3 - P_1) \wedge \mathbf{F}_3 \;=\; \mathbf{0} \;\; .$$

Le tre forze devono essere complanari.
Se $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ hanno rette di applicazioni ch convergono in un punto O, deve convergere in O anche la retta di applicazione di $\mathbf{F}_3$. Se $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ sono parallele, deve essere loro parallela anche $\mathbf{F}_3$.
In ogni caso le tre forze convergono in un unico punto. al finito o all'infinito.

P14 f. equilibrio dei corpi rigidi vincolati e attrito

P14 f.01

$$\mathsf{R} + \mathsf{R}_c \;=\; \mathsf{0} \qquad , \qquad \mathsf{M} + \mathsf{M}_c \;=\; \mathsf{0} \;\; .$$

P14 f.02 Consideriamo un corpo rigido con un punto O noto vincolato a stare fisso e con la reazione vincolare rappresentata da una forza C sconosciuta e applicata ad O.

$$\mathsf{R} + \mathsf{C} \;=\; \mathsf{0} \qquad , \qquad \mathsf{M}_O \;=\; \mathsf{0} \;\; .$$

Tre equazioni scalari

$$M_{O,x} \;=\; 0 \quad , \quad M_{O,y} \;=\; 0 \quad , \quad M_{O,z} \;=\; 0 \;\; ,$$

tante quanti sono i gradi di libertà del corpo rigido.

P14 f.03 Consideriamo un corpo rigido con due punti O_1 e O_2 vincolati a stare fissi e siano C_1 e C_2 le due rispettive reazioni vincolari; ogni punto O della retta $\overline{O_1\,O_2}$ deve stare fisso.

$$\mathsf{R} + \mathsf{C}_1 + \mathsf{C}_2 \;=\; \mathsf{0} \qquad , \qquad \mathsf{M}_O + (O_1 - O) \wedge \mathsf{C}_1 + (O_2 - O) \wedge \mathsf{C}_2 \;=\; \mathsf{0} \;\; .$$

$$\mathsf{M}_O \wedge \mathsf{a} \;=\; \mathsf{0} \;\; .$$

Un corpo rigido con un asse fisso mantiene l'equilibrio sse il momento delle forze attive rispetto all'asse di equilibrio è nullo.

P14 f.04 Leva, carrucola fissa e argano sono corpi rigidi con un asse fisso.

P14 f.05 Corpo rigido appoggiato a un piano

P14 f.06 Corpo rigido pesante su un piano inclinato

P14 f.07 Corpo rigido appoggiato su superficie liscia

P14 f.08 Corpo rigido appoggiato su superficie scabra

P14 f.09 Attrito volvente

P14 g. statica dei sistemi articolati

P14 g.01 La statica dei sistemi deformabili si basa sul seguente postulato dei vincoli addizionali.
Un corpo soggetto a vincoli che si trova in equilibrio sotto l'azione di determinate forze attive se gli si aggiungono altri vincoli rimane in equilibrio.
In particolare un sistema deformabile libero da vincoli e in equilibrio se viene sottoposto ai vincoli della rigidità lasciando invariate le altre condizioni rimane in equilibrio.
Quindi per un sistema deformabile in equilibrio devono valere le condizioni di equilibrio per il sistema irrigidito, ossia deve avere

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \ .$$

Queste due equazioni sono quindi dette "equazioni cardinali della statica".

In particolare un sistema deformabile con un punto vincolato ad essere fisso deve avere nullo il momento delle forze attive rispetto allo stesso punto fisso, mentre un sistema deformabile con due punti fissi, ossia con un'asse fisso, deve avere nullo il momento delle forze attive rispetto a questo asse.

P14 g.02 Consideriamo un sistema che sia decomponibile in due o più parti che mantengano tutte le caratteristiche meccaniche del sistema stesso.
Questa premenssa dice che intendiamo esaminare il comportamento meccanico di sistemi che presentano un elevato grado di omogeneità, ad esempio sistemi elastici le cui parti siano tutte elastiche, oppure sistemi fluidi o gassosi in tutte le loro parti.

Si adotta il seguente postulato ridotto delle pressioni e delle tensioni interne:
L'intero sistema si trova in equilibrio sse si trova in equilibrio ciascuna delle sue parti sotto le azioni della parte delle forze esterne che la riguardano e delle pressioni o tensioni che su di essa esercitano le altre parti del sistema.

Da questo postulato e dal postulato dei vincoli addizionali consistenti nell'irrigidimnto delle componenti del sistema discende che ogni parte del sistema quando irrigidita mantiene il suo equilibrio.

Applicando ripetutamente il postulato ridotto delle pressioni e delle tensioni interne si giunge a considerare le parti infinitesimali del sistema e per queste si assume che si comportano da sistemi infinitesimi rigidi.

In altri termini si postula che un sistema deformabile sufficientemente omogeneo si trova in equilibrio sse ciascuna delle sue parti infinitesime si trova in equilibrio comportandosi come un corpuscolo rigido ed essendo sottoposto alla parte delle forze esterne che la riguardano e alle pressioni e tensioni che su di essa esercitano tutte le parti infinitesime ad essa contigue.
Questo postulato viene chiamato **postulato delle pressioni e tensioni interne**

Una giustificazioe del fatto che trattando le parti infinitesime si addume la loro rigidità viene dal considerare la sabbia che in quntità facilmente visibile presenta alta deformabilità, mentre a livello microscopico è costituita da granelli rigidi.
Giustificazione analoga si trova per i liquidi che ridotti a gocce presentano tensioni superficiali che tendono a mantenere la compattezza delle stesse.

Considerando due parti infinitesime contigue del sistama si trova che il risultante e il momento delle azioni che una prima parte esercita sulla seconda sono vettori, risp., al risultante e al momento delle reazioni che la seconda esercita sulla prima.

P14 g.03 Sistemi articolati costituiti da un insieme di aste rigide rettilinee che sono intercollegate mediante cerniere sferiche.
Può essere semplicemente connesso o molteplicemente connesso.

P14 g.04 Travature reticolari

P14 h. statica dei fili e delle verghe

P14 h.01 In meccanica per **filo** si intende un sistema materiale rappresentato geometricamente da una curva tendenzialmente regolare finita che risulta completamente flessibile, ossia che nel tempo può mutare la sua forma senza difficoltà (in dinamica si direbbe che si può mutare la sua forma senza dover eseguire un lavoro).

Si trattano innanzi tutto fili inestendibili, cioè fili rappresentati da curve la cui lunghezza rimane costante nel tempo.
Le funi reali con sezioni molto piccole rispetto alla loro lunghezza spesso possono essere schematizzate in modo soddisfacente dai fili.

Un filo avente le estremità nei punti A e B sarà individuato da notazioni aventi una forma come $\Gamma_{A,B}$

P14 h.02 Consideriamo un filo $\Gamma_{A,B}$ che si trova in equilibrio sotto l'azione di determinate forze esterne e viene tagliato in un suo punto P.
Denotiamo con $G_1 := \Gamma_{A,B}|_{A,P}$ la sua parte avente come estremi A e P e con $G_2 := \Gamma_{A,B}|_{P,B}$ il suo tratto rimanente.
Vogliamo mantenere $\Gamma_{A,B}|_{A,P}$ in equilibrio aggiungendo alle forze che lo influenzano la forza che equivale a quella esercitata su P da G_2.

Grazie alla completa flessibilità del filo questa forza riguarda la tensione T applicata in P; questa per la inestendibilità del filo deve equilibrare la tensione $-\mathsf{T}$ che G_1 esercita su G_2;

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php