1

Capitolo I60
serie di Fourier

Contenuti delle sezioni

a. polinomi trigonometrici p. 2
b. motivazioni e definizioni delle serie di Fourier p. 6
c. un teorema di convergenza per gli sviluppi in serie di Fourier p. 9
d. esempi di sviluppi in serie di Fourier p. 12
e. funzioni alle quali convergono serie trigonometriche p. 15
f. altri sviluppi in serie di Fourier p. 18

19 pagine

I60 0.01 In questo capitolo si introduce la nozione di serie di Fourier, lo strumento che consente di decomporre una funzione periodica in una serie di funzioni periodiche aventi lo stesso periodo fondamentalmente semplici, cioè seni e coseni oppure esponenziali con argomenti immaginari.

Queste rappresentazioni delle funzioni rivestono grande importanza in quanto sono in grado di facilitare la soluzione di molti problemi, in particolare la soluzione di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali e la soluzione di equazioni integrali.

Gli sviluppi in serie di Fourier costituiscono un esempio di sviluppi in serie mediante funzioni ortogonali e il loro studio ha avviato lo sviluppo dell'`analisi armonica (wi)`, un capitolo della matematica di ampia portata, sia sul piano della organizzazione teorica, sia su quello computazionale, sia su quello delle applicazioni.

Per queste ultime qui ci limitiamo a segnalare analisi delle vibrazioni, acustica, ottica, ingegneria elettrica, elaborazione dei segnali, elaborazione delle immagini, e `meccanica quantistica (wi)` [P70].

I60 a. polinomi trigonometrici

I60 a.01 Se $T \in \mathbb{C}$ definiamo funzione sui complessi periodica di periodo T una funzione $f \in \lceil \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \rceil$ tale che $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ f(z+t) = f(T)$; denotiamo l'insieme di queste funzioni con $\mathsf{FunPrdC}_T$.

Tra queste funzioni distinguiamo le **funzioni periodiche basilari** di periodo T, funzioni il cui dominio contiene l'asse reale, che sull'asse reale assumono valori reali e che presentano . un periodo T reale positivo
Nel seguito queste funzioni vengono chiamate concisamente **funzioni-PB** e per il loro insieme adottiamo la notazione $\mathsf{FunPrdB}_T$.

Conviene segnalare fin da ora che sono studiate anche funzioni periodiche di variabili multidimensionali e funzioni periodiche definite in ambienti anche più generali. In particolare queste funzioni sono studiate nell'ambito della fisica quantistica [P70].

Nel presente capitolo concentreremo l'attenzione sulle funzioni periodiche basilari aventi periodo uguale a 2π, funzioni alle quali tutte le rimanenti funzioni-PB si possono ricondurre con semplici traslazioni e omotetie. L'insieme di queste funzioni è quindi $\mathsf{FunPrdB}_{2\pi}$.

Sono funzioni-PB con periodo 2π le funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Evidentemente appartengono a $\mathsf{FunPrdB}_{2\,\pi}$ anche le funzioni $\sin\ nx$ e $\cos\ nx$ per ogni n intero positivo. In effetti queste due sono periodiche di periodo $\dfrac{T}{n}$ e in generale si ha $\forall n = 2,3,... \ : \ \mathsf{FunPrdB}_{\frac{T}{n}} \subset \mathsf{FunPrdB}_T$, in quanto $f\left(x + \dfrac{T}{n}\right) =: f(x) \implies f(x+T) = f(x)$, mentre non vale l'implicazione conversa.
So osserva inoltre che tutte le informazioni sopra le funzioni di $\mathsf{FunPrdB}_{2\,\pi}$ si possono ricavare dal loro comportamento in un qualsiasi intervallo reale di ampiezza $2\,\pi$ e per varie questioni si hanno dei vantaggi formali quando si fa riferimento all'intervallo $\mathbf{[}-\pi,\pi\mathbf{]}$.

Tornando assando al generico periodo T si vede che appartengono a $\mathsf{FunPrdB}_T$ le funzioni $\sin\left(\dfrac{2\,\pi}{T}\,x\right)$ e $\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\,x\right)$ e insieme a queste le funzioni $\sin\left(n\,\dfrac{2\,\pi}{T}\,x\right)$ e $\cos\left(n\,\dfrac{2\,\pi}{T}\,x\right)$.
Per queste funzioni risulta conveniente riferirsi all'intervallo $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$.

I60 a.02 La proprietà $f(x+T) = f(x)$ che caratterizza le funzioni periodiche di periodo T si mantiene per combinazione lineare. Possiamo quindi affermare che tutte le combinazioni lineari di funzioni periodiche di un dato periodo sono anch'esse funzioni periodiche dello stesso periodo.
Equivalentemente affermiamo che **FunPrd** è chiuso per combinazione lineare.

Combinazioni lineari particolarmente interessanti sono date dalle seguenti formule

$$\forall \delta \in \mathbb{C} \ : \quad -\cos(x+\delta) = \cos x\ \cos\delta - \sin x\ \sin\delta \quad , \quad \sin(x+\delta) = \cos x\ \sin\delta + \sin x\ \cos\delta \ ;$$

$$\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x} = \cos x + \mathsf{i}\,\sin x \qquad , \qquad \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x} = \cos x - \mathsf{i}\,\sin x \ .$$

A queste due coppie di espressioni lineari corrispondono due coppie di formule di inversione:

$$\forall \delta \in \mathbb{C} \ : \quad \cos x = \cos(x+\delta)\ \cos\delta + \sin(x+\delta)\ \sin\delta \quad , \quad \sin x = -\cos(x+\delta)\ \sin\delta + \sin(x+\delta)\ \cos\delta \ ;$$

$$\cos x = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x} - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}}{2i} \ .$$

Queste relazioni si possono interpretare come trasformazioni lineari di vettori bidimensionali e quindi esse e loro trasformazioni inverse possono essere espresse mediante matrici:

$$\begin{bmatrix}\cos(x+\delta)\\ \sin(x+\delta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\delta & -\sin\delta\\ \sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\delta & \sin\delta\\ -\sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos(x+\delta)\\ \sin(x+\delta)\end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x}\\ \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \mathsf{i}\\ 1 & -\mathsf{i}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{\mathsf{i}}{2} & \frac{\mathsf{i}}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x}\\ \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}\end{bmatrix} .$$

Evidentemente queste formule valgono anche sostituendo x con un suo multiplo $n\,x$ (e anche con un $\omega\,x$ con $\omega \in \mathbb{C}$, ma questa possibilità qui non ci interessa).
L'invarianza di $\mathbf{FunPrdB}_T$ per combinazione lineare e la precedente considerazione suggeriscono di vedere le funzioni in esame come elementi di spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

I60 a.03 Chiamiamo **polinomio trigonometrico** di periodo $2\,\pi$ ogni combinazione lineare sui complessi della funzione costante 1 e delle funzioni delle forme $\cos n\,x$ e $\sin n\,x$ con $n \in \mathbb{P}$.
Per quanto osservato in a02, ogni polinomio trigonometrico si può anche considerare come combinazione lineare della funzione costante delle funzioni delle forme $\cos(nx+\delta)$ e $\sin(nx+\delta)$ oppure come combinazione lineare delle funzioni aventi la forma $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x}$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Quindi è un polinomio trigonometrico ogni funzione ottenibile da espressioni della forma

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\,\cos\,n\,x + b_n\,\sin\,n\,x] \;=\; \sum_{m=-N}^{N} c_m \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x} \quad \text{con} \quad c_0 \;=\; \frac{a_0}{2}\;,\; c_{\pm m} = \frac{a_m \mp \mathsf{i}\,b_m}{2}\;.$$

Un polinomio esprimibile in tal modo si dice di grado N sse almeno uno dei coefficienti a_N e b_N è diverso da 0, ovvero sse $|a_N| + |b_N| > 0$. Equivalentemente si può chiedere che sia $|c_{-N}| + |c_N| > 0$.

Sia N un intero positivo; denotiamo con $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ l'insieme delle combinazioni lineari sui complessi per le quali possiamo usare una delle espressioni in (1); chiaramente $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ è l'insieme dei polinomi trigonometrici aventi gradi inferiori o uguali ad N.

Evidentemente si ha la successione di inclusioni

$$\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N} \subset \mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N+1} \subset ... \subset \mathbf{FunPrd}_{2\pi}\;.$$

Inoltre gli insiemi $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ di polinomi trigonometrici muniti della combinazione lineare sui complessi per $N = 0, 1, 2, ...$ costituiscono una successione di spazi vettoriali sui complessi che sono sottospazi dello spazio delle funzioni periodiche di periodo 2π.

Risulta chiaro anche che un polinomio trigonometrico dato dalle espressioni (1) è una funzione reale sull'asse reale sse sono reali i coefficienti a_0, a_1, b_1, a_2, ..., a_N e b_N, ossia sse $c_{-m} = {c_m}^*$ per $m = 1, 2, ..., N$.

I60 a.04 Come tutte le funzioni trigonometriche ed esponenziali di cui si considerano le combinazioni lineari, tutti i polinomi trigonometrici sono funzioni continue, illimitatamente derivabili e integrabili sul proprio intervallo di definizione, in generale su $\mathbf{[}-T/2, T/2\mathbf{]}$ e in particolare su $\mathbf{(}-\pi, \pi\mathbf{)}$.
Si possono quindi considerare i wronskiani delle $2N+1$ funzioni che si utilizzano per le combinazioni lineari costituenti $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$.

In particolare il wronskiano per la sequenza $\left\langle n \in \mathbf{[}-N : N\mathbf{]} \mid\!: \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,n\,\pi}\right\rangle$ è un determinante di Cauchy-Vandermonde e quindi è diverso da 0 [I50j05]; questo fatto garantisce l'indipendenza lineare delle funzioni che compongono la sequenza.

Dunque $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ costituisce uno spazio vettoriale $2N+1$-dimensionale sui complessi e la suddetta sequenza è una sua base ordinata.

Un'altra base ordinata di questo spazio, che con veniale abuso di linguaggio identifichiamo con lo stesso simbolo $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$, è $\langle 1, \cos x, \sin x, \cos 2\,x, \sin 2\,x, ..., \cos n\,x, \sin n\,x \rangle$. Questo può vedersi, invece che con il suo wronskiano, considerando che la matrice che trasforma la base ordinata di coseni e seni $\langle \cos Nx, ..., \cos 2\,x, \cos x, 1, \sin x, \sin 2\,x, ..., \sin Nx \rangle$ nella base degli esponenziali di immaginari è

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathsf{i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \mathsf{i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathsf{i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -\mathsf{i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathsf{i} \end{bmatrix} ,$$

matrice il cui determinante vale $-2i^N$, e quindi matrice invertibile.

I60 a.05 Ogni spazio dei polinomi trigonometrici $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ può essere dotato di un prodotto interno hermitiano facile da calcolare per le espressioni del tipo a03(1) e in grado di facilitare l'utilizzo dei suoi polinomi.

La continuità dei suoi vettori rende lecito definire il seguente prodotto interno:

$$\forall\, T(x), U(x) \in \mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N} \;:\; (T,U) \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; U^*(x) \;. \tag{1}$$

Per i calcoli su queste forme sesquilineari conviene avere presenti le seguenti formule di quadratura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; 1 = 2\pi \quad , \quad \text{per} \quad n, m = 1, 2, ... \;:\; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; \cos n\,x = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; \sin n\,x = 0 \quad ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; \cos^2 n\,x = \pi \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; \sin^2 n\,x = \pi \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; \cos mx\; \sin n\,x = \delta_{m,n}\,\pi \;.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x} = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; m = 0 \\ 0 & \text{se} \;\; m = \pm 1, \pm 2, ... \end{cases} .$$

Si trova quindi che la base di esponenziali e la base di coseni e seni sono costituite da vettori mutuamente ortogonali e aventi le seguenti norme al quadrato

$$(1,1) = 2\pi \quad , \quad \text{per } n = 1, 2, ..., N \;:\; (\cos n\,x, \cos n\,x) = (\sin n\,x, \sin n\,x) = \pi \;,$$

$$\text{per } m = -N, ..., -2, -1, 1, 2, ..., N \;:\; \quad , \quad (\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x}, \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x}) = 2\,\pi \;.$$

Spesso quindi per lo spazio vettoriale $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ si usano le due seguenti basi ordinate ortonormali:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2\,x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2\,x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos Nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin Nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \quad \textbf{base di coseni e seni} \;, \tag{2}$$

$$\left\langle \frac{\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,N\,x}}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,2\,x}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,2\,x}}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,N\,x}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \quad \textbf{base di esponenziali} \;. \tag{3}$$

I60 a.06 Ogni funzione $T(x) \in \mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$ si può dunque esprimere in una delle due forme seguenti

$$T(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n\, \cos n\,x + b_n\, \sin n\,x] \tag{1}$$

$$\text{con} \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; T(x) \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; \cos n\pi \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; \sin n\pi \;;$$

$$T(x) \;=\; \sum_{m=-N}^{N} c_m \mathsf{e}^{\mathsf{i}\, m\, x} \qquad \text{con} \quad c_m = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\, m\, x} \;. \tag{2}$$

Le precedenti espressioni si dicono **sviluppi di Fourier [della funzione]** $T(x)$ ed i coefficienti a_n, b_n e c_m si chiamano **coefficienti di Fourier [della funzione]**.

Si osserva che i coefficienti si potrebbero calcolare anche su intervalli reali di ampiezza 2π diversi da $(-\pi, \pi)$:

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+2\,\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; \cos n\pi \qquad , \qquad b_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+2\,\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; \sin n\pi \qquad ,$$

$$c_m \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+2\pi} \mathrm{d}x\; T(x)\; \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\, m\, x} \qquad .$$

Per i calcoli dei coefficienti di Fourier della combinazione lineare (1) possono essere utili le seguenti osservazioni derivanti dal fatto che la funzione coseno è funzione pari e la funzione seno è dispari:

Se $T(x)$ è una funzione pari, $T(-x) = T(x)$, allora per $n = 0, 1, 2, \ldots$ $b_n = 0$ in quanto dato da un integrale su un intervallo pari di funzione dispari.
Se $T(x)$ è una funzione dispari, $T(-x) = -T(x)$, allora per $n = 1, 2, 3, \ldots$ $b_n = 0$ in quanto integrale su un intervallo pari di funzione dispari.

I60 a.07 Per completezza diamo le espressioni che generalizzano quelle trovate per funzioni periodiche aventi un generico periodo T.
Per lo spazio vettoriale $\mathbf{PInTrig}_{T,N}$ si possono utilizzare le due seguenti basi ordinate ortonormali:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,x\right)}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,x\right)}{\sqrt{T/2}}, \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,2\,x\right)}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,2\,x\right)}{\sqrt{T/2}}, \ldots, \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,N\,x\right)}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,N\,x\right)}{\sqrt{T/2}} \right\rangle \quad , \tag{2}$$

base di coseni e seni

$$\left\langle \frac{\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,N\,x}}{\sqrt{T}}, \ldots, \frac{\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,2\,x}}{\sqrt{T}}, \frac{\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,x}}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,x}}{\sqrt{T}}, \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,2\,x}}{\sqrt{T}}, \ldots, \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,N\,x}}{\sqrt{T}} \right\rangle \tag{3}$$

base di esponenziali .

Per una funzione di questo spazio, facendo riferimento al generico intervallo $[\overline{x}, \overline{x}+T]$, si hanno le seguenti combinazioni lineari:

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\; \cos\left(\frac{2\pi}{T}\,n\,x\right) + b_n\; \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,n\,x\right)\right] \quad \text{con } \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+T} \mathrm{d}x\, f(x) \;,$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+T} \mathrm{d}x\, f(x)\; \cos\left(\frac{2\pi}{T}\,n\,x\right) \quad , \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+T} \mathrm{d}x\, f(x)\; \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,n\,x\right) \;,$$

$$f(x) = \sum_{m=-N}^{N} c_m \cdot \mathsf{e}^{\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,m\,x} \quad \text{con } c_m = \frac{1}{T}\int_{\overline{x}}^{\overline{x}+T} \mathrm{d}x\, f(x)\; \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\frac{2\pi}{T}\,m\,x} \;.$$

I60 b. motivazioni e definizioni delle serie di Fourier

I60 b.01 Una funzione-RR definita e continua in un intervallo $I := [\mathrm{a,b}]$ si dice **funzione liscia** in I sse ha la derivata prima continua in I. Questo significa che la sua tangente in un suo punto che supponiamo muoversi sulla curva $y = f(x)$ cambia con continuità.

Una funzione definita in $I := [\mathrm{a,b}]$ si dice invece **funzione liscia a pezzi** in I sse essa e la sua derivata prima sono continue in tale intervallo a esclusione al più di un numero finito di punti nei quali presentano discontinuità con salto.

Diciamo **curva liscia** una curva del piano-RR che costituisce il grafico di una funzione liscia e diciamo **curva liscia a pezzi** una curva piana che costituisce il grafico di una funzione liscia a pezzi.

Si trova facilmente che il grafico di una funzione liscia a pezzi in un determinato intervallo può costituire una curva liscia, oppure una curva continua ma dotata di punti angolosi, cioè di punti nei quali la derivata presenta un salto (ovvero punti nei quali la tangente presenta una discontinuità) oppure costituisce una curva che presenta salti ed eventuali punti angolosi; l'insieme di questi punti di discontinuità della funzione o della sua derivata, se non è vuoto deve essere finito.
Inoltre si dice funzione liscia a pezzi su $\mathbb{R}$ o su un intervallo illimitato una funzione le cui riduzioni su intervalli chiusi finiti sono funzioni lisce a pezzi. In particolare interessa funzioni periodiche lisce a pezzi.

In un punto angoloso una funzione liscia a pezzi non possiede derivata, ma possiede le derivate da sinistra e da destra, ovvero esistono i due limiti da sinistra e da destra della derivata ma sono diversi.

Si osserva che una funzione liscia a pezzi è limitata e che la sua derivata è limitata in tutti i punti nei quali esiste.

I60 b.02 Nel seguito denotiamo con **FunSmth** l'insieme delle funzioni-RR liscie e con **FunSmthP** l'insieme delle funzioni-RR liscie a pezzi.
Si osserva che ogni combinazione lineare finita e ogni prodotto di funzioni di **FunSmth** appartiene ancora a questo insieme; similmente si trova che **FunSmthP** è un insieme di funzioni-RtR chiuso per la combinazione lineare finita e per il prodotto.

Consideriamo una funzione $f(x)$ liscia a pezzi nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.
Per ogni intero positivo N si dice approssimazione di Fourier di grado N della $f(x)$ il seguente polinomio trigonometrico di $\mathbf{PlnTrig}_{2\pi,N}$

$$(\mathrm{S}_N f)(x) \;:=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad , \quad \text{con} \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; f(x) \cos n\,x \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2, ... \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; f(x) \sin n\,x \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

Per quanto visto sopra alla approssimazione di Fourier si può dare anche la seguente forma esponenziale

$$(\mathrm{S}_N f)(x) = \sum_{m=-N}^{+N} c_m\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}\, m\, x} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; f(x)\, \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\, m\, x}\ .$$

I60 b.03 Si dice **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** tra due funzioni lisce a pezzi in $(-\pi, \pi)$ $g(x)$ e $h(x)$ il numero positivo o nullo

$$\boldsymbol{stdev}(g, h) \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; |g(x) - h(x)|^2\ .$$

La notazione ***stdev*** sta per il termine inglese "standard deviation".
In molte espressioni abbreviate in contesti circoscritti per la deviazione standard viene usata la lettera σ e in altre il digramma SD; ad esempio l'espressione precedente potrebbe essere sostituita dalla $\sigma(g,h)$ o dalla $SD(g,h)$.

Si dice **errore-L2** dell'approssimazione di Fourier di grado N della $f(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \ \left|(\mathbb{S}_N f)(x) - f(x)\right|^2 \ ,$$

cioè lo scarto quadratico medio tra $f(x)$ e la sua approssimazione di Fourier di grado N.

Il pregio delle approssimazioni di Fourier di una funzione liscia a pezzi consiste nel fatto che per ogni intero positivo N tra i polinomi trigonometrici di grado N è quello che presenta il minore scarto quadratico medio dalla funzione.

I60 b.04 È fisiologico cercare di estendere le approssimazioni di Fourier polinomiali a sviluppi in serie. In generale possiamo scrivere

$$(1)\ \ f(x) \ =_{ssmc} \ \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2\,x + b_2 \sin 2\,x + \cdots + a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x + \cdots \ .$$

$$(2)\quad f(x) =_{ssmc} c_0 + c_{-1}\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x} + c_1\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x} + c_{-2}\,\mathsf{e}^{-i2\,x} + c_2\,\mathsf{e}^{-i2\,x} + \cdots + c_{-m}\,\mathsf{e}^{-im\,x} + c_m\,\mathsf{e}^{im\,x} + \cdots \ .$$

dove

$$(3)\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\cos n\,x \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\sin n\,x \quad , \quad c_m = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,m\,x} \ .$$

La specificazione "ssmc" sta per sviluppo in serie a meno della convergenza".
Si tratta di stabilire quando le serie nei secondi membri convergono ai primi membri, o meglio si tratta di precisare sotto quali condizioni per le $f(x)$ gli sviluppi in serie sopra introdotti sono convergenti.

I60 b.05 Definiamo ora alcuni operatori di ampliamento periodico, operatori che trasformano una funzione definita in un intervallo reale in una funzione periodica definita sull'intero $\mathbb{R}$.

Sia $f(x)$ una funzione liscia a pezzi mediata ed $I = (a, a+T)$ un intervallo aperto contenuto nel suo dominio; introduciamo inoltre la successione $S := \{z \in \mathbb{Z} :|\ a + zT\}$.

Si dice **ampliamento periodico della funzione** $f(x)$ a partire da I, e si denota con $\mathsf{AmplPrd}(I, f(x))$ la funzione che a ogni $x \in S$ fa corrispondere $\frac{1}{2}\,(f(a+) + f(a+T-))$ e che a ogni $x \in \mathbb{R} \setminus S$, se $k := \left\lfloor \frac{x-a}{T} \right\rfloor$, e quindi se $x \in (a+kT, a+(k+1)T)$, fa corrispondere $f(x-kT)$. La funzione così ottenuta è periodica e liscia a pezzi e mediata sull'intero $\mathbb{R}$.

Sia $a = 0$ e quindi $I = (0, T)$ ed $S = \mathbb{Z}\cdot T$; si dice **ampliamento periodico dispari della funzione** $f(x)$ a partire da I, e si denota con $\mathsf{AmplPrdOdd}(I, f(x))$ la funzione ottenuta con un primo ampliamento a $(-T, T)$ che denotiamo con $\overline{f}(x)$ ponendo $\overline{f}(-x) := -f(x)$, cioè chiedendo che sia funzione-RtR dispari, e definendo $\overline{f}(0) := 0$ e in definitiva ponendo $\mathsf{AmplPrdOdd}(I, f(x)) := \mathsf{AmplPrd}((-T, T), \overline{f}(x))$.

I60 b.07 La trasformazione di una funzione $f(x)$ avente come dominio l'intervallo $(-\pi, \pi)$ ivi sviluppabile in serie di Fourier nella successione dei suoi coefficienti di Fourier si può considerare come il cambiamento della base di riferimento di un'entità vettoriale.

Questa trasformazione si può presentare concisamente mediante le notazioni di Dirac con la scrittura

$$\langle x \,|\, \mathbf{f} \rangle \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x \,|\, k \rangle \, \langle k \,|\, \mathbf{f} \rangle \;. \tag{1}$$

Qui la successione dei kets $\Big\langle k = 0, 1, 2, ... :| \; |k\rangle \Big\rangle$ corrisponde alla succcessione delle funzioni di una base ortonormale come quella in I6a05(2), $\mathbf{f}$ rappresenta la funzione di cui interessa lo sviluppo in serie di Fourier, per ogni particolare $\overline{x} \in \mathbf{(}-\pi, \pi\mathbf{)}$ il prodotto interno $\langle \overline{x} \,|\, \mathbf{f} \rangle$ rappresenta il particolare valore $f(\overline{x})$ assunto dalla funzione in corrispondenza del valore $\overline{x}$ della variabile indipendente (una proiezione sul vettore improprio $\langle x|$) ed il prodotto interno $\langle k \,|\, \mathbf{f} \rangle$ il coefficiente di Fourier della funzione corrispondente al k-esimo versore $\langle k|$.

Questa trasformazione può essere utile rappresentarla anche con la scrittura

$$\mathbf{f}(I) = \mathcal{F} \cdot \mathbf{f}(\langle \mathbb{N}|) \;. \tag{2}$$

Qui I denota l'intervallo $\mathbf{(}-\pi, \pi\mathbf{)}$, $\mathbf{f}(I)$ il complesso dei valori assunti dalla $\mathbf{f}$ nel suo dominio da considerarsi come vettore colonna le cui componenti sono contraddistinte dal parametro reale $x \in I$, $\mathbf{f}(\langle \mathbb{N}|)$ la successione delle componenti del vettore $\mathbf{f}$ nella base dello sviluppo in serie ed $\mathcal{F}$ la matrice avente come componenti $\langle x \,|\, k \rangle$, le cui righe sono etichettate dal parametro $x \in I$ e le cui colonne sono etichettate dall'indice k che distingue i vettori della base dello sviluppo di Fourier.

Questa scrittura "matriciale" ha il pregio di evidenziare il carattere lineare della trasformazione esprimibile con la formula

$$\mathcal{F} \cdot (\alpha \, \mathbf{f} + \beta \, \mathbf{g}) \;=\; \alpha \mathcal{F} \cdot \mathbf{f} + \beta \mathcal{F} \cdot \mathbf{g} \;, \tag{3}$$

dove α e β sono costanti complesse e $\mathbf{g}$, come $\mathbf{f}$, denota una funzione sviluppabile in serie di Fourier.

Inoltre la scrittura precedente suggerisce con evidenza il problema della inversione della trasformazione $\mathcal{F}$, cioè della possibilità di servirsi di una trasformazione esprimibile come

$$\mathbf{f}(\langle \mathbb{N}|) = \mathcal{F}^{-1} \cdot f(I) \;.$$

I60 c. un teorema di convergenza per gli sviluppi in serie di Fourier

I60 c.01 In questo paragrafo presentiamo una condizione sufficiente per la convergenza delle serie di Fourier.

Teorema Consideriamo una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2π e liscia a pezzi e denotiamo con x_j, per $j = 1, 2, ..., d$ (con $d \in \mathbb{Z}$) gli eventuali punti di discontinuità della funzione e della sua derivata appartenenti all'intervallo $\mathbf{(}-\pi, \pi\mathbf{]}$. Per queste ascisse, cioè per $j = 1, 2, ..., d$, sono verificate le due seguenti condizioni

(a) Esistono finiti i limiti $f(x_j-) := \lim_{x\to x_j-} f(x)$ e $f(x_j+) := \lim_{x\to x_j+} f(x)$ e per essi

$$f(x_j) = \frac{f(x_j-) + f(x_j+)}{2} \ .$$

(b) Esistono finite le derivate da sinistra e da destra

$$f'(x_j-) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_j-h) - f(x_j-)}{-h} \quad , \quad f'(x_j+) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_j+h) - f(x_j+)}{h} \ .$$

Sotto tali condizioni la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier in $\mathbf{(}-\pi, \pi\mathbf{)}$ come mostrato nelle b04(1-3)

$$f(x) \ = \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x] \quad \text{con}$$

$$a_n \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x) \cos n\,x \quad , \quad b_n \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x) \sin n\,x \ .$$

I60 c.02 Dim.: Prendiamo in considerazione le somme parziali della serie, ossia le approssimazioni di Fourier della $f(x)$ dei vari gradi $N \in \mathbb{P}$

$$S_N(x) \ := \ \Big(\mathbb{S}_N(f)\Big)(x) \ = \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x] \ = \ \frac{1}{2\,\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t) +$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ (\cos nt \cos n\,x + \sin nt \sin n\,x)\right] \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(t-x)\right] \ .$$

Introdotta come nuova variabile di integrazione $u := t - x$ e in forza della periodicità $f(u+2\pi) = f(u)$,

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \mathrm{d}u\ f(x+u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nu\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}u\ f(x+u) \cdot s_N(u) \ ,$$

con $s_N(u) := \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos nu$.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{u}{2}\ s_N(u) \ &= \ \sin \frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{N} 2 \sin \frac{u}{2} \cos nu \\ &= \ \sin \frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u\right] \ = \ \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u \end{aligned} \ ;$$

quindi quando $\sin \dfrac{u}{2} \neq 0$ si ha

$$s_N(u) \ = \ \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} \ . \tag{3}$$

I60 c.03 Per dimostrare il teorema ci proponiamo di provare che per ogni $x \in (-\pi, \pi)$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) \;=\; \frac{f(x-)+f(x+)}{2}\ . \tag{1}$$

Per quanto visto in c02 si tratta di dimostrare che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}u\, f(u+x)\cdot s_N(u) \;=\; \frac{f(x-)+f(x+)}{2} \quad \text{tenendo conto della c02(3).} \tag{2}$$

Più dettagliatamente dimostreremo che per ogni $x \in (-\pi, \pi)$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}u\ f(u+x)\cdot s_N(u) \;=\; \frac{1}{2}\,f(x-) \quad \text{e} \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}u\, f(u+x)\cdot s_N(u) \;=\; \frac{1}{2}\,f(x+)\ . \tag{3}$$

Si osserva che, dimostrata la seconda di queste relazioni, la prima segue immediatamente in quanto ottenibile applicando la seconda uguaglianza alla funzione $f_r(x) := f(2\,\pi - x)$ riflessa della $f(x)$ rispetto all'asse Oy.

Si osserva anche che $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}u\, s_N(u) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\pi} \mathrm{d}u\ \cos nu \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} 0 = \frac{1}{2}$ e pertanto $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}u\, f(x+)\cdot s_N(u) \;=\; \frac{1}{2} f(x+)$.
Quindi dimostrare la seconda delle (3), cioè il teorema c01, equivale a dimostrare

$$\forall x \in (-\pi, \pi) \;:\; \lim_{N\to+\infty} \mathcal{I}(x) \;=\; 0 \quad \text{ove} \quad \mathcal{I}(x) \;:=\; \int_0^{\pi} \mathrm{d}u\ [f(u+x) - f(x+)] \;=\; 0\ . \tag{4}$$

I60 c.04 Consideriamo ora i valori della u facenti parte di $(0, \pi]$ nei quali si hanno discontinuità della $f(x+u)$ e della $f'(x+u)$ e denotiamoli, secondo l'ordine crescente, con u_1, u_2, ..., u_h; denotiamo inoltre con u_0 un'ascissa in $(0, u_1)$ (che faremo tendere a 0) e scriviamo $u_{-1} := 0$.
Consideriamo poi la decomposizione $\langle u_{-1}, u_0, u_1, u_2, ..., u_h, u_{h+1} := \pi\rangle$ dell'intervallo $[0, \pi]$ e la corrispondente decomposizione di $\mathcal{I}(x, N)$
(1)

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \cdots + \mathcal{I}_{h+1} \quad \text{ove } \mathcal{I}_j(x,N) := \int_{x_{j-1}}^{x_j} \mathrm{d}x\, [f(u) - f(x+)]\cdot s_N(u) \quad \text{per} \quad j = 0, 1, .., h+1\ .$$

Ora ci proponiamo di giustificare la c03(4) dimostrando che, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) abbiamo

(a) la possibilità di scegliere u_0 in modo che sia $|\mathcal{I}_0(N, x)| < \epsilon$;

(b) la possibilità di scegliere $N_0 \in \mathbb{P}$ tale che per ogni $N \geq N_0$, ogni $j = 1, 2, ..., h+1$ e ogni $x \in (-\pi, \pi)$ sia $|\mathcal{I}_j(x, N)| < \epsilon$.

I60 c.05 Per l'enunciato c04(a) denotiamo con $\overline{u}$ un reale in $(0, u_0)$ e osserviamo che

$$\mathcal{I}_0(N,x) = \int_0^{u_0} \mathrm{d}u\, [f(x+u) - f(x+)]\cdot s_N(u) = \left\lfloor\!\!\left\lfloor \text{c02(3)} \right\rfloor\!\!\right\rfloor$$

$$= \lim_{\overline{u}\to 0} \int_{\overline{u}}^{u_0} \mathrm{d}u\, \frac{[f(x+u) - f(x+)]}{u}\, \frac{u/2}{\sin u/2}\, \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) u\ .$$

Per il teorema della media $\dfrac{f(x+u) - f(x+)}{u} = f'(x + \theta\, u)$ per qualche θ tale che $|\theta| < 1$; essendo per ipotesi $|f'(x+)|$ limitata in $(-\pi, \pi)$, posto $D := \displaystyle\sup_{x\in(-\pi,\pi)} |f'(x+)|$, si ottiene $\left|\dfrac{[f(x+u) - f(x+)]}{u}\right| < D$.

Inoltre, dato che $0 < u/2 < \pi/2$, si ha $\dfrac{u/2}{\sin\, u/2} < \dfrac{\pi}{2}$: infatti la funzione $\dfrac{v}{\sin\, v}$ ha come derivata $\dfrac{\cos\, v(\tan v - v)}{\sin^2 v}$ che è evidentemente positiva e il rapporto in esame non supera $\dfrac{\pi/2}{\sin\, \pi/2}$.
Tenuto conto inoltre della $\left|\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)u\right| < 1$, si ottengono le disuguaglianze

$$|I_0\} \;=\; \left|\; \lim_{\overline{u}\to 0}\int_{\overline{u}}^{u_0} \mathrm{d}u\, \frac{f(x+u)-f(x+)}{u}\, \frac{u/2}{\sin\, u/2}\, \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u \;\right| \;<\; \left|\; \lim_{\overline{u}\to 0}(u_0-\overline{u})D\frac{\pi}{2}\;\right|,$$

cioè $|I_0\} \le u_0 D\dfrac{\pi}{2}$; assunto $u_0 < \epsilon$ si conclude $|I_0\} < \epsilon$, come richiesto.

I60 c.06 Per l'enunciato c04(b) esaminiamo gli integrali relativi a $j = 1, 2, ..., h, h+1$

$$\mathcal{I}_j(x,N) \;=\; \int_{u_{j-1}}^{u_j} \mathrm{d}u\, \frac{f(x+u)-f(x+)}{2\, \sin\, \frac{u}{2}}\, \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) \;=\; \left\lfloor \text{integrando per parti} \right\rfloor$$

$$= \left[\frac{f(x+u)-f(x+)}{2\, \sin\, \frac{u}{2}}\; \frac{-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{N+\frac{1}{2}}\right]_{u_{j-1}}^{u_j} +$$

$$\frac{1}{N+\frac{1}{2}}\int_{u_{j-1}}^{u_j} \mathrm{d}u\, \left(\frac{f'(x+u)\, \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{2\, \sin\, \frac{u}{2}} - \frac{[f(x+u)-f(x+)]\, \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)u\, \cos\, \frac{u}{2}}{4\, \sin^2\, \frac{u}{2}}\right) .$$

Se scriviamo $F := \sup_{x\in(-\pi,\pi)} |f(x)|$, si ha $|f(x+u)-f(x+)| \le 2F$; inoltre, essendo $u_0 < u_{j-1} \le \pi$, abbiamo $\sin\, \dfrac{u_0}{2} < \sin\, \dfrac{u}{2}$; ne segue la disuguaglianza

$$|\mathcal{I}_j(x,N)| \;<\; \frac{1}{N+\frac{1}{2}}\left[\frac{F}{\sin\, \frac{u_0}{2}} + (u_j-u_{j-1})\left(\frac{D}{\sin\, \frac{u_0}{2}} + \frac{F}{2\, \sin^2\, \frac{u_0}{2}}\right)\right] .$$

Denotando con K l'espressione tra parenteso quadre, che è indipendente da N, basta assumere $N > \dfrac{K}{\epsilon}$ per assicurarsi che sia $|\mathcal{I}_j(x,N)| < \epsilon$ e completare la dimostrazione del teorema c01 ∎

I60 c.07 Se la funzione è continua con la sua estensione periodica, allora la convergenza dello sviluppo è assoluta e uniforme.

I60 d. esempi di sviluppi in serie di Fourier

I60 d.01 Consideriamo la funzione $f_1(x) = x^2$ per $x \in (-\pi, \pi)$.

Dato che si tratta di una funzione pari per ogni intero positivo n $b_n = 0$. Si trova inoltre

$$a_0 \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\; x^2 \;=\; \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi \;=\; \frac{2\,\pi^2}{3}\;,$$

$$\begin{aligned} a_n \;&=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\;\, x^2\cos n\,x \;=\; -\frac{4}{n\,\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\; x\sin n\,x \\ &=\; \frac{4}{n^2\,\pi}\Big[x\,\cos n\,x\Big]_0^\pi - \frac{4}{n^2\,\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\;\, \cos n\,x \;=\; \frac{4}{n^2}\cos n\,\pi - 0 \;=\; (-1)^n\frac{4}{n^2} \end{aligned}\;.$$

In conclusione

$$\forall x \in (-\pi,\pi) \;:\; x^2 \;=\; \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2\,x}{2^2} + \frac{\cos 3\,x}{3^2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\cos\; n\,x}{n^2} + \cdots\right)\;.$$

I60 d.02 Calcoliamo gli sviluppi in serie di Fourier trigonometrica e in serie di Fourier complessa della funzione $f_2(x) = x$ nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Essendo la $f_2(x)$ una funzione dispari, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n = 0$; per ogni $n \in \mathbb{P}$ si trova invece

$$\begin{aligned} b_n \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \mathrm{d}x\; x\sin n\,x \;=\; \frac{1}{\pi}\left(-\Big[\frac{x\,\cos n\,x}{n}\Big]_{-\pi}^\pi + \int_{-\pi}^\pi \mathrm{d}x\;\, \frac{\sin n\,x}{n}\right) \\ &=\; \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\,\cos n\,\pi}{n} + \frac{-\pi\,\cos n\,\pi}{n} + \left[\frac{\sin n\,x}{n^2}\right]_{-\pi}^\pi\right) \;=\; -\frac{2\pi\,\cos n\,\pi}{n\pi} \;=\; (-1)^{n+1}\,\frac{2}{n} \end{aligned}\;.$$

Abbiamo quindi lo sviluppo in serie convergente assolutamente ed uniformemente in $(-\pi, \pi)$

$$x \;=\; 2\left(\sin x - \frac{\sin 2\,x}{2} + \frac{\sin 3\,x}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin\; n\,x}{n} + \cdots\right)\;.$$

Per la serie complessa, chiaramente $c_0 = \dfrac{1}{2\,\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \mathrm{d}x\;\, x = 0$, mentre per ogni $m \in \mathbb{Z}_{nz}$:

$$\begin{aligned} c_m \;&=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^\pi \mathrm{d}x\;\, x\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,m\,x} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\left(\left[\frac{x\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,m\,x}}{-\mathsf{i}\,m}\right]_{-\pi}^\pi + \frac{1}{\mathsf{i}m}\int_{-\pi}^\pi \mathrm{d}x\;\, \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,m\,x}\right) \\ &=\; \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\pi\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}m\pi}}{-\mathsf{i}m} - \frac{-\pi\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,m\,\pi}}{-\mathsf{i}\,m} + 0\right) = \frac{1}{-2\pi\,\mathsf{i}m}\left(\pi\,\mathsf{e}^{-\mathsf{i}m\pi} + \pi\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\pi}\,\frac{1}{2\,\pi}\right) = \frac{\mathsf{i}\,\cos m\pi}{m} = (-1)^m\,\frac{\mathsf{i}}{m} \end{aligned}\;.$$

Quindi, coerentemente con il risultato precedente,

$$x \;=_{ssmc}\; \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\,\frac{\mathsf{i}}{m}\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x} + \sum_{m=-1}^{-\infty}(-1)^m\,\frac{\mathsf{i}}{m}\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,x}\;.$$

I60 d.03 Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier trigonometrica della funzione $f_3(x) = |x|$ per $x \in [-\pi, \pi]$.

Si tratta di una funzione pari la cui estensione periodica all'intero dominio $\mathbb{R}$ è continua e la cui derivata è continua a pezzi. Abbiamo quindi per ogni $n \in \mathbb{P}$ $b_n = 0$; inoltre

$$a_0 \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\; x \;=\; \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^\pi \;=\; \pi\;;$$

$$a_n \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\; x\cos\, n\,x \;=\; -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;\sin\, n\,x \;=\; \frac{2}{\pi n^2}\,[\cos\, n\,x]_0^{\pi} \;=\; \frac{2}{\pi n^2}\,[(-1)^n-1]\;.$$

Dunque $a_n = 0$ per n pari e $a_n \;=\; -\dfrac{4}{\pi n^2}$ per n dispari.
Abbiamo quindi lo sviluppo in serie convergente assolutamente e uniformemente

$$|x| \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos\, x + \frac{\cos\, 3\,x}{3^2} + \frac{\cos\, 5\,x}{5^2} + \cdots + \frac{\cos(2\,n+1)x}{(2\,n+1)^2} + \cdots\right)\;.$$

I60 d.04 Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier trigonometrica della funzione $f_4(x) = |\sin\, x|$ per $x \in [-\pi, \pi]$.
Si tratta di una funzione pari la cui estensione periodica all'intero dominio $\mathbb{R}$ è continua e la cui derivata è continua a pezzi. Abbiamo quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 0$ e

$$a_0 \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;\sin\, x \;=\; \frac{4}{\pi} \qquad , \qquad a_1 \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;\sin\, x\cos\, x \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;\sin\, 2\,x \;=\; 0\;,$$

$$\forall n = 2,3,\ldots \;:\; a_n \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;\sin\, x\cos\, n\,x \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \;=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \;=\; \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right] = -\frac{2}{\pi(n^2-1)}\,[(-1)^n+1]\;.$$

Dunque $a_n = 0$ per n dispari e $a_n \;=\; -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}$ per n pari.
Abbiamo quindi lo sviluppo in serie che converge assolutamente e uniformemente

$$|\sin\, x| \;=\; \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos\, 2\,x}{3} + \frac{\cos\, 4\,x}{15} + \frac{\cos\, 6\,x}{35} + \cdots + \frac{\cos(2\,n)x}{n^2-1} + \cdots\right)\;.$$

I60 d.05 Calcoliamo lo sviluppo in serie di Fourier trigonometrica della funzione $f_5(x)$ estensione periodica dispari della funzione che vale 1 per $0 < x < \pi$. La $f_5(x)$ presenta discontinuità nelle ascisse $z\pi$ per $z \in \mathbb{Z}$ e in questi punti, per poter applicare il teorema `c01`, le assegnamo il valore $0 \;=\; \dfrac{1}{2}\,[f_5(x+) - f_5(x-)]$.
Dato che

$$a_n = 0 \quad , \quad b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\;\sin\, n\,x \;=\; \frac{2}{\pi n}\Big[-\cos\, n\,x\Big]_0^{\pi} \;=\; \frac{2}{\pi n}\,[1-(-1)^n]\;,$$

abbiamo lo sviluppo in serie che converge assolutamente e uniformemente

$$f_5(x) = \lceil\, x \in (z\pi, (z+1)\pi) \;\mapsto\; (-1)^z \,\rceil \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\sin\, x + \frac{\sin\, 3\,x}{3} + \frac{\sin\, 5\,x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \cdots\right)\;.$$

I60 d.06 **Eserc.** Dimostrare i seguenti sviluppi in serie trigonomrica

(1) $$\textsf{AmplPrdOdd}\,[(0,2\pi), x] \;=\; \pi - 2\left(\sin\, x + \frac{\sin\, 2\,x}{2} + \frac{\sin\, 3\,x}{3} + \cdots\right)\;.$$

(2) $$\textsf{AmplPrd}\,\left[(0,2\pi), x^2\right] \;=\; \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\, n\,x}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\, n\,x}{n}\;.$$

(3) $$\textsf{AmplPrd}\,\left[(-\pi,\pi), Px^2+Qx+R\right] \;=\; \frac{P\pi^2}{3} + R + 4P\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos\, n\,x}{n^2} - 2Q\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin\, n\,x}{n}\;.$$

(4) **AmplPrd** $\left[(0,2\pi), Px^2+Qx+R\right] \;=\; \dfrac{4P\pi^2}{3}+Q\pi+R+4P\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\,n\,x}{n^2}-(4\pi P-2Q)\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin\,n\,x}{n}\;.$

I60 d.07 Consideriamo la funzione $f_1(x) \;=\; \text{sign}(x)$ per $x\in[-\pi,\pi]$. Si tratta di funzione dispari; quindi per ogni $n\in\mathbb{N}$ $a_n=0$. Per i coefficienti delle funzioni seno si ha

$$b_n \;=\; -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}x\;\sin\,n\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\;\sin\,n\,x \;=\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\;\sin\,n\,x \;=\; -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\,n\,x}{n}\right]_0^{\pi}\;;$$

Per $n=2\,k$, intero pari, $b_{2\,k}=0$; per $n=2\,k+1$, intero dispari si ha $b_{2\,k+1} \;=\; \dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{1}{2\,k+1}$; quindi

$$f_1(x) \;=\; \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\,(2\,k+1)x}{(2\,k+1)x}\;.$$

Da questa si ricava la formula

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\,(2\,k+1)x}{(2\,k+1)x}\qquad\text{per}\quad 0<x<\pi\;.$$

In particolare per $x \;=\; \dfrac{\pi}{2}$ si ottiene la serie numerica dovuta a Leibniz

$$\frac{\pi}{4} \;=\; 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{2\,k+1}+\cdots\;,$$

mentre per $x=\dfrac{\pi}{2}$ si ottiene

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+(-1)^k\left(\frac{1}{4\,k+1}+\frac{1}{4\,k+3}\right)+\cdots\right]\;.$$

I60 e. funzioni alle quali convergono serie trigonometriche

I60 e.01 In questa sezione ricaviamo o semplicemente presentiamo senza dimostrazione, le espressioni delle funzioni verso le quali convergono alcune serie trigonometriche.
I risultati che seguono quindi rispondono a una problematica inversa di quella che ha riguardato la valutazione dei coefficienti di sviluppi di Fourier a partire da funzioni $f(x)$ delle quali si conoscono gli andamenti forniti da specifiche espressioni.
Tuttavia in concreto molti dei risultati che seguono sono ottenuti rielaborando alcuni sviluppi in serie di Fourier trigonometriche ottenuti in precedenza a partire dalle espressioni di funzioni $f(x)$.

Si osserva che le espressioni delle funzioni che otteniamo qui di seguito tendenzialmente sono più elaborate di quelle delle $f(x)$ delle quali si sono costruiti gli sviluppi in serie di Fourier.

I60 e.02 I risultati ottenuti in d06 consentono di calcolare le somme di alcune interessanti serie trigonometriche.

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\, n\, x}{n} \;=\; \frac{\pi - x}{2} \quad \text{per} \quad 0 < x < 2\pi \ .$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\, n\, x}{n^2} \;=\; \frac{3\, x^2 - 6\, \pi\, x + 2\pi^2}{12} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 2\pi \ .$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\, n\, x}{n} \;=\; \frac{x}{2} \quad \text{per} \quad -\pi < x < \pi \ .$$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\, n\, x}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2 - 3\, x^2}{12} \quad \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi \ .$$

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \;=\; \frac{\pi}{4} \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi \ .$$

(6) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \;=\; \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi \ .$$

(7) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\, 2nx}{2n} \;=\; \frac{\pi - 2\, x}{4} \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi \ .$$

(8) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\, 2n\, x}{(2n)^2} \;=\; \frac{6\, x^2 - 6\pi x + \pi^2}{24} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi \ .$$

I60 e.03 Dalle espressioni precedenti si ricavano anche varie somme di serie numeriche.

(1) $$\frac{\pi^2}{6} \;=\; 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \ .$$

(2) $$\frac{\pi^2}{12} \;=\; 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \cdots \ .$$

(3) $$\frac{\pi}{4} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots \;.$$

(3) $$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \;=\; 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots + (-1)^k \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \right) + \cdots$$

I60 e.04

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\, n\, x}{n} \;=\; -\ln\left(2\, \sin\, \frac{x}{2}\right) \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 2\pi \;.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\, n\, x}{n^2} \;=\; -\int_0^x \mathrm{d}t\; \ln\left(2\, \sin\, \frac{t}{2}\right) \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 2\pi \;.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\, n\, x}{n^3} \;=\; \int_0^x \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}u\; \ln\left(2\, \sin\, \frac{u}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 2\pi \;.$$

Segnaliamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \;=\; \frac{\pi^3}{25,79436...} \;=\; 1\,.\,20206....$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\, n\, x}{n^3} \;=\; \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le 2\pi \;.$$

I60 e.05

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\, n\, x}{n} \;=\; -\ln\left(2\, \cos\, \frac{x}{2}\right) \;=\; \quad \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi \;.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\, n\, x}{n^2} \;=\; \int_0^x \mathrm{d}t\; \ln\left(2\, \cos\, \frac{t}{2}\right) \quad \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi \;.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\, n\, x}{n^3} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{k^3} - \int_0^x \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}u\; \ln\left(2\, \cos\, \frac{u}{2}\right) \quad \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi \;.$$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\, n\, x}{n^3} \;=\; \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi \;.$$

I60 e.06

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \;=\; -\frac{1}{2} \ln\left(\tan\, \frac{x}{2}\right) \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi \;.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \;=\; -\frac{1}{2} \int_0^x \mathrm{d}t\; \ln\left(\tan\, \frac{t}{2}\right) \quad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi \;.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{1}{2} \int_0^x \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}u\; \ln\left(\tan\, \frac{u}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi \;.$$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \quad \text{per} \quad 0 \le x \le \pi \;.$$

I60 e.07

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \;=\; \frac{\pi}{4} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \;.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \;=\; \frac{1}{2} \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \;.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \;=\; -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2-x} \mathrm{d}t \, \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \;.$$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \;=\; \frac{\pi x}{4} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \;.$$

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{\pi^3 - 4\pi x^2}{32} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \;.$$

(6) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2-x} \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}u \, \ln\left(\tan\frac{u}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \;.$$

I60 f. altri sviluppi in serie di Fourier

I60 f.01 Consideriamo la funzione $f(x) := \begin{cases} -\pi + x & \text{se} \quad -\pi \le x \le -\pi/2 \\ x & \text{se} \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \text{se} \quad \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$.
Si tratta di funzione dispari la cui estensione periodica è evidentemente continua.

$$\textbf{AmplPrd}[f(x), [-\pi, \pi]] \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3\,x}{3^2} + \frac{\sin 5\,x}{5^2} + (-1)^n \frac{\sin(2\,k+1)x}{(2\,k+1)^2} + \cdots\right) .$$

I60 f.02 Consideriamo la funzione $f(x) := \begin{cases} U & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ V & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$, con U e V reali. Si tratta di funzione pari sse $U = V$ e dispari sse $V = -U$ la cui estensione periodica è liscia a pezzi.

$$\textbf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] \;=\; \frac{U+V}{2} + 2\frac{V-U}{2}\left(\sin x + \frac{\sin 3\,x}{3} + \frac{\sin 5\,x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2\,k+1)x}{2\,k+1} + \cdots\right) .$$

I60 f.03 Consideriamo la funzione $f(x) := ....$

$$\textbf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = \frac{4\phi}{\pi} + \left(\cos\phi \,\sin x + \frac{\cos 3\phi \,\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)\phi \,\sin(2k+1)x}{2k+1} + \cdots\right).$$

I60 f.04 Consideriamo la funzione dispari

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} -v(x+\pi)/\phi & \text{sse} \quad -\pi \le x \le -\pi + \phi \\ -v & \text{sse} \quad -\pi + \phi \le x \le -\phi \\ v\,x/\phi & \text{sse} \quad -\phi \le x \le \phi \\ v & \text{sse} \quad \phi \le x \le \pi - \phi \\ v(\pi - x)/\phi & \text{sse} \quad \pi - \phi \le x \le \pi \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\textbf{AmplPrd}[f(x), [-\pi, \pi]] \;=\; \frac{4v}{\pi\phi}\left(\sin\phi \,\sin x + \frac{\sin 3\phi \,\sin 3\,x}{3^2} + \cdots + \frac{\sin(2k-1)\phi \,\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \cdots\right) .$$

Se in particolare $\phi \;=\; \frac{\pi}{3}$, si ha

$$\textbf{AmplPrd}[f(x), [-\pi, \pi]] \;=\; \frac{6v\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{\sin 5\,x}{5^2} + \frac{\sin 7\,x}{7^2} - \cdots + (-1)^{k+1} + \frac{\sin(2\,k-1)x}{(2\,k-1)^2} + \cdots\right) .$$

I60 f.05 Consideriamo la funzione dispari $f(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{se} \quad -\pi < x \le 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \textbf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] \;=\; & 2\pi\left(\sin x - \frac{\sin 2\,x}{2} + \frac{\sin 3\,x}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\,x}{n} + \cdots\right) \\ & -\frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3\,x}{3^3} + \frac{\sin 5\,x}{5^3} + \cdots + \frac{\sin(2\,k+1)x}{(2\,k+1)^3} + \cdots\right) . \end{aligned}$$

I60 f.06 Consideriamo la funzione $f(x) := x(\pi - x)$ per $0 \le x \le \pi$

$$\textbf{AmplPrdOdd}[f(x), [-\pi, \pi]] \;=\; \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2\,x + \frac{\cos 4\,x}{2^2} + \frac{\cos 6\,x}{3^2} + \cdots + \frac{\cos 2nx}{n^2} + \cdots\right)$$

I60 f.07 Consideriamo la funzione $f(x) := x(\pi - x)$ per $0 \le x \le \pi$

$$\textsf{AmplPrdOdd}[f(x), [-\pi, \pi]] = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} + \cdots\right)$$

I60 f.08 Consideriamo la funzione $f(x) := \cos x$ per $0 < x < \pi$.

$$\textsf{AmplPrdOdd}[f(x), (-\pi, \pi)] = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{1\cdot 3} + \frac{4\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{6\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots + + \frac{2n\sin 2nx}{n^2-1} + \cdots\right) .$$

I60 f.09 Consideriamo la funzione $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \pi \le x \le 0 \\ \sin x & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), [-\pi, \pi]] = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 4x}{5\cdot 7} + \cdots + + \frac{\cos 2nx}{n^2-1} + \cdots\right) .$$

I60 f.10 $f(x) := \cos ux$ per $-\pi \le x \le \pi$, con $u \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), [-\pi, \pi]] = \frac{2u\sin u\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2-1} + \frac{\cos 2x}{u^2-4} - \cdots + (-1)^n\frac{\cos nx}{u^2-n^2} + \cdots\right) .$$

I60 f.11 $f(x) := \sin ux$ per $-\pi < x < \pi$, con $u \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = \frac{2\sin u\pi}{\pi}\left(-\frac{\sin x}{u^2-1} + \frac{2\sin 2x}{u^2-4} - \frac{3\sin 3x}{u^2-3^2} + \cdots + (-1)^n\frac{n\sin nx}{u^2-n^2} + \cdots\right) .$$

I60 f.12 Consideriamo la funzione $f(x) := x\cos x$ per $-\pi < x < \pi$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{4\sin 2x}{2^2-1} - \frac{6\sin 3x}{3^2-1} + \frac{8\sin 4x}{4^2-1} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin nx}{n^2-1} + \cdots .$$

I60 f.13 Consideriamo la funzione $f(x) := x\sin x$ per $-\pi < x < \pi$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} - \frac{\cos 3x}{3^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} - \cdots + (-1)^n\frac{2n\sin nx}{n^2-1} + \cdots\right).$$

I60 f.14 Consideriamo la funzione $f(x) := \cosh ux$ per $-\pi < x < \pi$, con $u \in \mathbb{R}_{nz}$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = \frac{2u\sinh u\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2+1} + \frac{\cos 2x}{u^2+2^2} - - \cdots + (-1)^n\frac{\cos nx}{u^2+n^2} + \cdots\right) .$$

I60 f.15 Consideriamo la funzione $f(x) := \sinh ux$ per $-\pi \le x \le \pi$, con $u \in \mathbb{R}_{nz}$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = \frac{2\sinh u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{u^2+1} - \frac{2\sin 2x}{u^2+2^2} + \frac{3\sin 3x}{u^2+3^2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{u^2+n^2} + \cdots\right).$$

I60 f.16 Consideriamo la funzione $f(x) := \mathsf{e}^{dx}$ per $-\pi < x < \pi$, con $d \in \mathbb{R}_{nz}$.

$$\textsf{AmplPrd}[f(x), (-\pi, \pi)] = \frac{2}{\pi}\sinh d\pi \left[\frac{1}{2d} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{d^2+n^2}(d\cos nx - n\sin nx)\right] .$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php