1

Capitolo I37
funzioni olomorfe

Contenuti delle sezioni

a. condizioni di monogeneità e funzioni olomorfe p. 2
b. serie di potenze e loro raggio di convergenza p. 7
c. derivabilità delle serie di potenze p. 11
d. funzioni trascendenti intere, esponenziali e trigonometriche p. 12
f. integrali curvilinei di funzioni complesse p. 13
g. integrali di funzioni olomorfe p. 15
h. formuula integrale di Cauchy e derivate delle funzioni olomorfe p. 17
i. serie di Cauchy-Taylor e serie di Laurent p. 19
j. zeri e principio di identità delle funzioni olomorfe p. 21
k. serie logaritmica e serie inverse delle trigonometriche p. 23

23 pagine

I37 0.01 In questo capitolo si introduce la nozione di funzione olomorfa cioè di una funzione-CtC dotata di una funzione-CtC definibile come la sua unica derivata.

Si trova facilmente che queste funzioni sono illimitatamente derivabili, che sono esprimibili come somme di serie di potenze di una variabile complessa i cui coefficienti si ottengono dalle sue successive derivate; si ottiene inoltre che queste serie convergono uniformemente all'interno di cerchi di convergenza deducibili dai coefficienti suddetti.

In seguito si possono estendere a funzioni-CtC varie funzioni-RtR studiate in precedenza (introdotte anche come funzioni-QtQ e associate a serie numeriche); tra queste troviamo le funzione esponenziali e logaritmiche, le funzioni trigonometriche e le funzioni loro collegate e tutte possono essere vantaggiosamente trattate come funzioni olomorfe.

Successivamente si introducono integrali di queste funzioni previa riduzione dei rispettivi domini a curve nel piano complesso e in particolare a curve chiuse, giungendo a stabilire che queste costruzioni costituiscono strumenti molto incisivi per lo studio dell'intero complesso dell funzioni olomorfe.

Per esse si introducono gli sviluppi in serie di Taylor e di MacLaurin come ulteriori strumenti per la loro analisi.

Infine si introduce l'inversione delle funzioni olomorfe esaminando in particolare le funzioni logaritmiche e le inverse delle funzioni trigonometriche e iperboliche; con tali nozioni si apre la strada ad importanti arricchimenti della teoria delle funzioni e della strumentazione per il calcolo infinitesimale.

I37 a. condizioni di monogeneità e funzioni olomorfe

I37 a.01 In questo capitolo ci occupiamo di un sottoinsieme particolarmente ricco di proprietà dell'insieme delle funzioni univariate sui complessi, cioè di funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,\rceil$, funzioni che chiamiamo anche funzioni-CtC; l'insieme di queste funzioni lo denoteremo con **FunCtC**.

Nel seguito per gli elementi di $\mathbb{C}$ e per le variabili complesse e per le loro compomenti reale e immaginaria useremo notazioni come $z = x + \mathsf{i}y$, con le definizioni $x := \Re(z)$ e $y := \Im(z)$, oppure altre evidentemente simili come $z_j = x_j + \mathsf{i}\, y_j$ con j intero o lettera minuscola.

Per le costanti e per le variabili complesse, oltre alle suddette notazioni cartesiane, useremo anche le notazioni polari come $z = \rho\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}$ con $\rho := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta := \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Per le funzioni-CtC useremo notazioni come $w = f(z) = u(x,y) + \mathsf{i}\, v(x,y)$, accompagnandole con definizioni quali $u(x,y) := \Re(f(z))$ e $v(x,y) := \Im(f(z))$, oppure con loro varianti facilmente interpretabili.

I37 a.02 Consideriamo dunque una funzione $w = f(z) = u(x,y) + \mathsf{i}\, v(x,y) \in \lceil\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,\rceil$ definita in una regione di $\mathbb{C}$, ossia in un insieme aperto e connesso, $A \subseteq \mathbb{C}$, nonché un punto-C $z_0 = x_0 + \mathsf{i}\, y_0 \in A$. Consideriamo un cosiddetto **incremento del numero complesso** z_0, $h = \Delta z = \Delta x + \mathsf{i}\, \Delta y$ diverso da 0 e variabile in un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{C}$ tale da garantire che sia $z + h \in A$.

Diciamo inoltre **rapporto incrementale della funzione** $f(z)$ relativo al punto z_0 e all'incremento h l'espressione $\dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Se il limite per $h \to 0$ di tale rapporto esiste unico e finito viene chiamato **derivata della funzione** $f(z)$ in z_0 e per tale entità si scrive

$$f'(z_0) \;=\; \mathrm{D}_z f(z)|_{z=z_0} \;=\; \left.\frac{\mathrm{d}f\,(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} :=_{\text{if}\exists}\; \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z)}{h} \;.$$

In queste circostanze la $f(z)$ si dice **funzione-CtC derivabile** in z_0.

Sottolineamo che il suddetto limite deve esistere finito e unico per h tendente a 0 in particolare con valori reali e con valori immaginari; in altri termini devono esistere e coincidere

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(z_0+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(z_0+\mathsf{i}\,\Delta y) - f(z)}{\mathsf{i}\,\Delta y} \;.$$

I37 a.03 Nel seguito denotiamo con $\mathbf{FunCtCDrvb}_{z_0}$ l'insieme delle funzioni-CtC derivabili in z_0 e per estensione se O denota un qualsiasi sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ denotiamo con $\mathbf{FunCtCDrvb}_O$ l'insieme delle funzioni-CtC derivabili in tutti i suoi punti.

Esempi di funzioni di $\lceil\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,\rceil$ derivabile per qualunque $z_0 \in \mathbb{C}$ sono forniti dalle espressioni $a\, z^n$ per ogni n intero naturale e ogni a numero complesso.
Infatti per il relativo rapporto incrementale, similmente a quanto accade al monomio $a\, x^n$ per x e a reali, abbiamo

$$\frac{a(z_0+h)^n - a\, {z_0}^n}{h} \;=\; n\, a\, {z_0}^{n-1} + \binom{n}{2} a\, {z_0}^{n-2}\, h + \binom{n}{3} a\, {z_0}^{n-3}\, h^2 + \cdots + \binom{n}{n} a\, h^{n-1} \;.$$

Passando al limite per $h \to 0$ l'espressione precedente tende a $n\, a\, {z_0}^{n-1}$.

Si conclude che la funzione $a\,z^n$ è derivabile per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed ha come derivata

$$\mathrm{D}_z\, a\, z^n \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, a\, z^n \;=\; n\, a\, z^{n-1}\ .$$

I37 a.04 La derivazione nel campo complesso, come la corrispondente reale, è una trasformazione che gode della linearità:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ \wedge\ f, g \in \textbf{FunCtCDrvb} \quad : \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\alpha\, f(z) + \beta\, g(z)\Big) \;=\; \alpha\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, f(z) + \beta\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, g(z)$$

Questo consente di enunciare che tutte le funzioni polinomiali sono derivabili in ogni punto di $\mathbb{C}$ e vale l'espressione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\ a_{i+1}\ z^i\ .$$

I37 a.05 Vediamo le conseguenze dell'esistenza della derivata unica e finita di una funzione-CtC della forma $f(z) = u(x,y) + \mathsf{i}\, v(x,y)$ in $z_0 = x_0 + \mathsf{i}\, y_0$, cioè dall'esistenza e dalla finitezza di

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \;=\; f'(z_0)\ .$$

Da essa si deducono le due seguenti relazioni ottenute considerando, risp., incrementi del punto z_0 solo reali o solo immaginari, cioè considerando, risp., $h = \Delta x$ oppure $h = \mathsf{i}\,\Delta y$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \mathsf{i}\, \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \;=\; f'(z_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\mathsf{i}} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \mathsf{i}\Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \mathsf{i}\Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right] \;=\; f'(z_0)$$

Dalla prima delle precedenti si deduce che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ nel punto $\langle x_0, y_0 \rangle$ ammettono le derivate parziali rispetto ad x e che si ha l'uguaglianza

$$u_x(x_0, y_0) + \mathsf{i}\, v_x(x_0, y_0) \;=\; f'(z_0)\ .$$

Dalla seconda si ricava che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ nel punto $\langle x_0, y_0 \rangle$ ammettono le derivate parziali rispetto ad y e che si ha

$$v_y(x_0, y_0) - \mathsf{i}\, u_x(x_0, y_0) \;=\; f'(z_0)\ .$$

I37 a.06 Dai precedenti enunciati si ottiene la conclusione che segue.

(1) Prop.: Se la funzione-CtC $f(z)$ è derivabile in $z_0 = x_0 + \mathsf{i}\, y_0$, allora valgono le seguenti uguaglianze

$$u_x(x_0, y_0) \;=\; v_y(x_0, y_0) \quad , \quad u_y(x_0, y_0) \;=\; -v_x(x_0, y_0)\ \blacksquare$$

Queste uguaglianze si possono riscrivere come

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{o in forma compatta} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\mathsf{i}}\, \frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Le precedenti uguaglianze sono dette **condizioni di monogeneità** o **equazioni di Cauchy-Riemann**.

Viceversa si mostra facilmente che se le funzioni-RRtR $u(x,y)$ e $v(x,y)$ in un intorno aperto e connesso di $z_0 = x_0 + \mathsf{i}\, y_0$ ammettono derivate parziali finite rispetto alle due variabili x e y, queste sono continue e valgono le uguaglianze (2), allora $f(z) := u(x,y) + \mathsf{i}\, v(x,y)$ è derivabile in z_0 e si ha

$$(3) \qquad f'(z_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\mathsf{i}}\, \frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Una funzione complessa definita e dotata di derivata finita in tutti i punti di un insieme aperto e connesso A viene detta **funzione olomorfa** o (secondo la terminologia adottata da Cauchy) **funzione monogena** nell'insieme aperto e connesso A.

I37 a.07 Per la derivazione delle funzioni di variabile complessa si dimostrano, attraverso passaggi formalmente simili a quelli per le derivate di funzioni reali, le proprietà che seguono.

(1) Prop.: La derivata di una costante è nulla ∎

(2) Prop.: La derivata di una combinazione lineare di funzioni derivabili, come già segnalato, è la combinazione lineare delle derivate:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(\alpha f(z)+\beta g(z)\Big) - \alpha\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) + \beta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z)$$ ∎

(3) Prop.: La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è data da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\Big(f(z)\cdot g(z)\Big) \;=\; f(z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,g(z) + g(z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,f(z)$$ ∎

(4) Prop.: La derivata della potenza intera n di una funzione derivabile è data da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\Big(f(z)\Big)^{n} \;=\; n\,[f(z)]^{n-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,f(z)$$ ∎

In particolare per le potenze negative

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\Big(f(z)\Big)^{-m} \;=\; -m\,\big(f(z)\big)^{-m-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,f(z)\;.$$

(5) Prop.: La derivata del quoziente di due funzioni derivabili è data da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{f(z)}{g(z)} \;=\; \frac{1}{g^2(z)}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,f(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,g(z)\right)$$ ∎

In particolare $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\dfrac{1}{g(z)} \;=\; -\dfrac{1}{g^2(z)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,g(z)\;.$

I37 a.08 La relazione tra differenziabilità reale e complessa viene chiarita dal seguente enunciato, non facile da dimostrare.

Teorema (**teorema di Looman-Menchoff**)
Se $f(z) \;=\; u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ è funzione-CtC continua in un insieme aperto e connesso, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ hanno le derivate parziali prime e queste soddisfano le condizioni di monogeneità a04(2), allora la $f(z)$ è una funzione olomorfa.

Si segnala anche che la richiesta di continuità delle derivate parziali non è necessaria, come ha dimostrato Goursat.

I37 a.09 Come vedremo in c02 si dimostra che per una funzione olomorfa in ogni punto interno al suo dominio aperto e connesso, il fatto che possiede una unica derivata prima finita e continua implica l'esistenza (la finitezza) e la continuità delle sue derivate di tutti gli ordini.

Ammessa provvisoriamente questa proprietà limitatamente alle derivate seconde, derivando la prima delle a05(2) rispetto ad x e la seconda rispetto ad y e sommando e sottraendo i risultati si ottengono le equazioni

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,u + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\,u \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,v + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\,v \;=\; 0\;. \tag{1}$$

Queste equazioni sono chiamate le equazioni di Laplace in due dimensioni e servendoci del cosiddetto **operatore di Laplace bidimensionale** che in modo completo si denota con $\nabla_{(2)}{}^2 := \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}$, ma che qui, come spesso accade, abbreviamo con ∇^2 , si riscrivono

$$\nabla^2 u(x,y) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 v(x,y) \;=\; 0 \;. \tag{2}$$

Le soluzioni dell'equazione di Laplace sono chiamate **funzioni armoniche bidimensionali**; si tratta di una importante collezione di funzioni, sia per le loro proprietà generali che per le loro molteplici applicazioni.

I37 a.10 Sulle funzioni armoniche bidimensionali qui ci limitiamo ad osservare che ad ogni funzione armonica $u(x,y)$ è associata una $v(x,y)$ deteminata a meno di una costante additiva arbitraria che ubbidisce alla relazione

$$\mathrm{d}v \;=\; -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y \;,$$

ricavabile dalle condizioni di monogeneità [a05(2)].

In effetti le funzioni monogene e le funzioni armoniche sono strettamente collegate e sostanzialmente da tutte le proprietà delle funzioni monogene discendono tutte le proprietà delle funzioni armoniche e viceversa.

In particolare si possono ottenere molte coppie coniugate di funzioni armoniche dalle funzioni olomorfe esprimibili come vedremo tra poco mediante serie di potenze di una variabile complessa che per la individuazioni di funzioni specifiche si rivelano strumenti grandemente efficaci.

Un semplice esempio è fornito dalle funzioni olomorfe polinomiali che permettono di individuare le funzioni armoniche chiamate **polinomi armonici**.

I37 a.11 Una semplice successione di queste coppie di polinomi si ottiene dalla successione dei polinomi olomorfi

$$z^n =: \mathsf{hrmR}_n(x,y) + \mathsf{i}\,\mathsf{hrmI}_n(x,y) \text{ per } n \in \mathbb{N} \;.$$

In altri termini: $\mathsf{hrmR}_n(x,y) := \Re\,(z^n)$ e $\mathsf{hrmI}_n(x,y) := \Im\,(z^n)$.

I primi polinomi armonici che si ottengono sono

$$\begin{array}{cc} \mathsf{hrmR}_0 = 1 & \mathsf{hrmI}_0 = 0 \\ \mathsf{hrmR}_1 = x & \mathsf{hrmI}_1 = y \\ \mathsf{hrmR}_2 = x^2 - y^2 & \mathsf{hrmI}_2 = 2\,x\,y \\ \mathsf{hrmR}_3 = x^3 - 3\,x\,y^2 & \mathsf{hrmI}_3 = 3\,x\,y^2 - y^3 \end{array}$$

Queste funzioni armoniche si possono individuare mediante coordinate polari mediante due espressioni generali molto compatte:

$$\mathsf{hrmR}_n \;=\; \mathsf{hrm}\rho^n \cos \mathsf{hrm}\theta \qquad \text{e} \qquad \mathsf{hrmI}_n \;=\; \mathsf{hrm}\rho^n \sin \mathsf{hrm}\theta \;.$$

Quindi $\mathsf{hrm}\rho^n \;=\; \sqrt{\mathsf{hrmR}_n{}^2 + \mathsf{hrmI}_n{}^2}$ e $\mathsf{hrm}\theta \;=\; \arctan\left(\dfrac{\mathsf{hrmI}_n}{\mathsf{hrmR}_n}\right)$

I37 a.12 Conviene anche mettere in rilievo che ogni funzione-CtC, alla quale possiamo dare la forma $w = f(P) = f(x,y) = u(x,y) + \mathsf{i}\,v(x,y)$, definisce univocamente una trasformazione che ad ogni $\langle x,y\rangle$ fa corrispondere un ben determinato punto $Q = \mathsf{T}_f(P) := \langle u,v\rangle$.

Una tale funzione in genere conviene descriverla in termini geometrico-meccanici come trasformazione di un punto P corrispondente alla variabile $z = \langle x,y\rangle$ nel punto $Q = \mathsf{T}_f(P)$ associato alla variabile $w = \langle u,v\rangle$.

Evidentemente alle proprietà della funzione $f(x, y$ corrispondono proprietà della trasformazione T_f e viceversa.

I37 a.13 Nel caso in cui le f sia una funzione olomorfa la T_f viene chiamata **trasformazione conforme** e questo genere di entità geometriche costituisce un altro strumento di notevole efficacia per lo studio delle funzioni olomorfe (nonché delle più elaborate funzioni analitiche che presentiamo in I38).

Per ora ci limitiamo a segnalare che le trasformazioni conformi sono **trasformazioni localmente isogonali**.

Ogni trasformazione T_f tra un intorno A sufficienemente piccolo di un $P = \langle x, y\rangle$ e il corrispondente intorno $\mathsf{T}_f(A)$ del punto trasformato $\mathsf{T}_f(P) = \langle u, v\rangle$ si può considerare una similitudine; occorre tuttavia segnalare che al variare di P nel dominio aperto della f il rapporto di similitudine può cambiare.

A conclusione di queste considerazioni sulle funzioni armoniche e sulle trasformazioni conformi sostanzialmente equivalenti alle funzioni olomorfe, possiamo prevedere che la teoria di queste funzioni sia molto più stringente e più ricca di strumenti di indagine della poco stringente e poco efficace teoria delle funzioni-CtC, a sua volta estensione della non molto stringente, ma basilare, teoria delle funzioni-RtR.

I37 b. serie di potenze e loro raggio di convergenza

I37 b.01 Molti aspetti della teoria delle serie di funzioni di una variabile reale si estendono senza difficoltà alla teoria delle serie di funzioni di una variabile complessa.
In particolare si possono definire in modi prevedibili le nozioni di serie convergente, di serie assolutamente convergente e vari criteri di convergenza [I13].

Soffermiamoci sopra la nozione di convergenza uniforme.
Una serie di funzioni-CtC definite in un dominio D contenuto in $\mathbb{C}$

$$f(z) \;=\; u_0(z) + u_1(z) + u_2(z) + \cdots \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} u_n(z) \;,$$

si dice **serie di funzioni CtC uniformemente convergente** in D sse, dato un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap), si può determinare un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall z \in D \quad : \quad \exists n \in (\overline{n} : +\infty) \quad ST \quad \left| f(z) - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(z) \right| < \epsilon \;.$$

Dalla convergenza uniforme di una serie di funzioni-CtC seguono importanti proprietà come la possibilità di scambiare le operazioni di somma di serie e di passaggio al limite per z tendente a uno $z_0 \in D$, la continuità della somma della serie in intorni aperti di D, la possibilità di scambiare le operazioni di somma di serie e di integrazione.

I37 b.02 Si dice **serie di potenze di una variabile complessa** z in un dominio D una serie di potenze della z alla quale in genere conviene dare una forma quale

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots + a_n(z-c)^n + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n \;, \tag{1}$$

dove $c \in D$ e a_0, a_1, a_2... sono numeri complessi; c viene detto **centro della serie** e $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \; c_n \rangle$ viene chiamata **successione dei coefficienti della serie**.

Nel seguito useremo `spvc` come abbreviazione di **serie di potenze di una variabile complessa**.

Per ogni n intero naturale la **somma parziale n-esima di una serie di potenze**

$$s_n(z) \;:=\; a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots + a_n(z-c)^n$$

è un polinomio di grado n nella variabile z e quindi è una funzione olomorfa avente come dominio l'intero $\mathbb{C}$.

Come le serie di potenze di variabile reale convergenti consentono di definire importanti funzioni-RtR, così rivestono grande importanza le `spvc` convergenti, in quanto quanto consentono di definire importanti funzioni-CtC.

In effetti abbiamo visto che queste funzioni sono monogene come le somme parziali che le approssimano e costituiscono uno scenario entro il quale risulta più opportuno studiare sistematicamente anche le serie di potenze delle variabili reali.

Le `spvc` convergenti costituiscono uno strumento cruciale per lo studio delle cosiddette `funzioni analitiche (wi)` [I38], entità che costituiscono ampliamenti delle funzioni olomorfe che si possono considerare funzioni i cui domini richiedono definizioni elaborate ma che sono dotate di prestazioni computazionali e speculative generali molto rilevanti.

In questo capitolo ci concentriamo sulle spvc convergenti che in linea di massima chiameremo semplicemente "serie di potenze".

I37 b.03 Le spvc con centro nello zero di $\mathbb{C}$ hanno forme riconducibili per equivalenza alla forma canonica

$$a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + \cdots + a_n\, z^n + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \;. \tag{1}$$

Questa forma, più semplice della b02(1), risulta spesso vantaggiosa e molte considerazioni su spvc specifiche si rivolgono a serie con centro in 0. Spesso infatti risulta conveniente ricondurre lo studio di una serie con il centro in un generico $c \in \mathbb{C}$ ad una serie con centro in 0 attraverso il cambiamento di variabile $\lceil\, z \in \mathbb{C} \mapsto Z + c \,\rceil$, cioè attraverso una semplice traslazione nel campo complesso.

Ogni serie di potenze a.01(1) converge nel suo centro: infatti si riduce alla serie $a_0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$.
Esistono serie che convergono uniformemente per ogni $z \in \mathbb{C}$: questo è il caso della cosiddetta serie esponenziale

$$\exp(z) \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \;.$$

Infatti per la corrispondente serie dei moduli delle potenze si ha la convergenza in valore assoluto per ogni valore di $|z|$, grazie al criterio del rapporto, poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|}{n+1} = 0.$
Le funzioni olomorfe individuate da serie di potenze che convergono per ogni $z \in \mathbb{C}$ si dicono **funzioni trascendenti intere**.

Vi sono serie di potenze che convergono in qualche punto di $\mathbb{C}$ ma non convergono in altri punti di tale piano. Questo è il caso della serie geometrica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ che si trova convergere per ogni z complesso con $|z| < 1$ non convergere per ciascuno degli z complessi con $|z| > 1$ e convergere solo per una parte degli z complessi con $|z| = 1$.

Infine esistono serie di potenze che convergono solo nel rispettivo centro. Un esempio è dato dalla serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n! \cdot z^n$: infatti si consideri un fissato z e la successione dei valori assoluti dei suoi termini $\langle n \in \mathbb{N} :|\; n! \cdot z^n \rangle$; ad essa si applica il criterio del rapporto che riguarda $\dfrac{(n+1)! \cdot |z|^{n+1}}{n! \cdot |z|^n} \;=\; (n+1) \cdot |z|$; questa quantità per $n \geq \dfrac{2}{|z|}$ è maggiore di 2 e questo implica la non convergenza della serie per ogni $z \neq 0$.

I37 b.04 Per ogni serie di potenze si pone il problema di individuare il dominio di convergenza.

Conviene anticipare che questo dominio è sempre un cerchio con centro nel centro della serie chiamato **cerchio di convergenza della serie**.
Il raggio di tale cerchio, chiamato **raggio di convergenza della serie**, assume un valore R che per molte serie è precisamente determinabile, e che può andare da 0 a $+\infty$, come suggerito dagli esempi del paragrafo precedente.
Si trova inoltre che la serie risulta sempre assolutamente convergente per ogni z con $|z-c| < R$, mentre non è convergente per alcun z con $|z| > R$; inoltre la serie converge uniformemente in ogni dominio chiuso strettamente contenuto nel cerchio $|z - c| < R$.

I37 b.05 Per semplicità di notazioni conviene trattare la questione del cerchio di convergenza per le serie di potenze con centro nell'origine.

Teorema (**teorema di Cauchy-Hadamard**) Consideriamo la spvc $a_0 + a_1\,z + a_2\,z + \cdots + a_n\,z^n + \cdots$.
Essa aut converge per ogni $z \in \mathbb{C}$, aut converge solo per $z = 0$, aut esiste un numero reale positivo R tale che la serie converge per ogni z per il quale $|z| < R$ e non converge per $R < |z|$.
Più precisamente il raggio è ottenibile come

$$\frac{1}{R} \;=\; \limsup_{n\to+\infty} \left\{\; |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \cdots, \sqrt[n]{|a_n|}, \cdots \right\} \;.$$

Dim.: Introduciamo le seguenti notazioni

$$\mathsf{a} \;:=\; \left\langle n \in \mathbb{N} :|\; a_n \right\rangle \;,$$
$$\mathsf{q} \;:=\; \left\langle n \in \mathbb{P} :|\; \sqrt[n]{|a_n|} \right\rangle \;=\; \left\langle |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \cdots \right\rangle$$

e denotiamo con L il limite superiore proposto, $\limsup_{n\to+\infty} \mathsf{q}$.

Cominciamo a supporre L nonnullo, denotiamo con z_1 un numero complesso per il quale si abbia $|z_1| < \dfrac{1}{L}$ e introduciamo un real positivo r appartenente all'intervallo $\left(z_1, \dfrac{1}{L}\right)$.
Solo per un numero finito di componenti a_n si può avere $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{r} > L$ e quindi esiste $n_1 \in \mathbb{R}_+$ tale che $n > n_1 \implies \sqrt[n]{|a_n|} \le \dfrac{1}{r}$. Di conseguenza

$$\forall n > n_1 \;:\; |a_n\,z_1|^n = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z_1|\right)^n \le \left(\frac{|z_1|}{r}\right)^n \;,$$

e la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|z_1|}{r}\right)^n$, essendo una serie geometrica di ragione in $(0,1)$ è convergente e lo stesso accade alla serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n\,{z_1}^n|$ sua minorante per $n > n_1$.

Se invece si considera un qualsiasi numero complesso z_2 tale che $|z_2| > \dfrac{1}{L}$, esistono infinite componenti della a che scriviamo a_{ν_0}, a_{ν_1}, a_{ν_2}, ... tali che accada

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} \;>\; \frac{1}{z_2}$$

e di conseguenza sia

$$|a_{\nu_k}\,{z_2}^{\nu_k}| \;>\; \frac{1}{z_2}^{\nu_k}\,|z_2|^{\nu_k} \;=\; 1$$

e quindi non può accadere che $\lim_{n\to+\infty} = 0$ e la nostra serie a è divergente.

Per completare l'analisi consideriamo il caso in cui $L = 0$, cioè il caso della successione delle radici avente come unico valore limite lo 0, ossia il caso in cui $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;=\; 0$.

Allora per un qualsiasi numero z_0 del piano complesso e un ϵ reale positivo minore di $\dfrac{1}{z_0}$ si trova un intero naturale n_0 tale che

$$\forall n > n_0 \quad :\quad \sqrt[n]{|a_n|} \le \epsilon \;\text{ e quindi }\; |a_n\,{z_0}^n| \le (\epsilon\,|z_0|)^n \;.$$

Questo, essendo $\epsilon\,|z_0| < 1$, implica che la serie data sia convergente in z_0 e quindi che essa converga in tutto $\mathbb{C}$ ∎

I37 b.06 Dal teorema di Cauchy-Hadamard si ricava immediatamente un corollario che spesso risulta sufficiente per ottenere raggi di convergenza.

(1) Coroll.: Per la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ se, almeno da un certo intero naturale n in poi si ha $a_n \neq 0$ ed esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \;=:\; \lambda$$

questo reale positivo è il raggio di convergenza della serie.

Dim.: La ipotesi sul limite implica che sia

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;=\; \frac{1}{\lambda} \quad \blacksquare$$

Da questo carollario segue subito che $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$ ha come raggio di convergenza 0, che $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ha 1 come raggio di convergenza e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $+\infty$, ovvero che è una funzione trascendente intera.

(2) Coroll.: La serie ottenuta da una serie di potenza di una variabile complessa $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ derivandola addendo per addendo ha lo stesso raggio di convergenza delle serie primitiva; quindi derivando addendo per addendo una tale serie quante volte si vogliono si ottengono altrettante serie di potenze caratterizzate dallo stesso raggio di convergenza.

I37 b.07 La circonferenza del cerchio di convergenza di una seri edi potenze viene prevedibilmente chiamata **circonferenza di convergenza della serie**.

I punti della circonferenza di convergenza possono appartenere o meno al dominio di convergenza: questo dipende dalle caratteristiche di ogni specifica serie di potenze.

I37 b.08 Esempi

I37 b.09

Dim.: . . . .

I37 b.10 In generale si possono considerare serie di potenze di variabile complessa aventi centro in un qualsiasi punto c del piano complesso, cioè serie della forma

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots + a_n(z-c)^n + \cdots \;.$$

Queste serie si possono considerare ottenute per traslazione da quelle con centro in $\langle 0,0\rangle$ e anche per esse si definiscono centro, cerchio e circonferenza di convergenza.

Si trova quindi che tutti i domini di convergenza sono insiemi che comprendono un cerchio aperto con centro nel centro della serie, cioè della forma $\{z \in \mathbb{C} \;\P\; |z-\overline{z}| < R\}$ e che escludono tutti i punti esterni alla circonferenza di raggio R.

I37 c. derivabilità delle serie di potenze

I37 c.01 Come si è visto in B37b04, la convergenza assoluta di ogni serie di potenze all'interno del suo cerchio di convergenza consente di derivarla addendo per addendo ottenendo una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

Quindi ogni funzione definibile come somma di una serie di potenze è olomorfa almeno all'interno del suo cerchio di convergenza.

I37 c.02 Ogni funzione olomorfa in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ in tale dominio è derivabile tante volte quante si vogliono e tutte le funzioni derivate sono olomorfe nell'intero A.

Anche questa è una proprietà che generalizza una caratteristica dei polinomi in una variabile complessa.

I37 d. funzioni trascendenti intere, esponenziali e trigonometriche

I37 d.01 La serie esponenziale ha raggio di convergenza $+\infty$ e la stessa proprietà vale per le serie di potenze del seno e del coseno.
Quindi la funzione esponenziale, la funzione seno e la funzione coseno sono funzioni trascendenti intere e valgono le proprietà trovate in I35 per ogni $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}^z &= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \\
\sin z &= \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + \cdots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2\,n}}{(2\,n)!} + \cdots
\end{aligned}$$

Da queste si ricava l'espressione

$$\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{i}\,\theta)^n}{n!} = \cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta$$

I37 d.02 Si ottengono quindi le seguenti **formule di Eulero**

$$\cos z = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,z} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,z}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,z} - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,z}}{2\,\mathsf{i}} \quad .$$

Ne segue la **forma esponenziale di un numero complesso**

$$z = \rho\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta} = \rho(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta) \quad .$$

Questa notazione risulta assai efficace in molte espressioni; per esempio abbiamo che la circonferenza goniometrica può considerarsi come l'insieme dei numeri complessi della forma

$$\left\{\theta \in [0, 2\,\pi) : \middle| \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\right\} \ .$$

I37 f. integrali curvilinei di funzioni complesse

I37 f.01 Riprendendo le definizioni sugli integrali curvilinei nel piano, affrontiamo lo studio degli integrali curvilinei nel piano complesso delle funzioni olomorfe.

Consideriamo una curva γ orientata e regolare in $\mathbb{C}$ espressa in forma parametrica dalla funzione $z(t) = x(t) + \mathsf{i}\, y(t)$ con t variabile reale nell'intervallo [a,b].

La regolarità della γ si precisa con la richiesta che le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ abbiano le derivate prime continue e non simultaneamente nulle per ogni $t \in$ [a,b].

Consideriamo inoltre una funzione-CtC $f(z) = u(x,y) + \mathsf{i}\, v(x,y)$ continua nella z variabile sulla curva γ; questo equivale a chiedere che le funzioni composte della t, $u(x(t),y(t))$ e $v(x(t),y(t))$, siano funzioni continue di $t \in$ [a,b].

Questo si verifica, in particolare, se esiste un insieme aperto e connesso $A \subseteq \mathbb{C}$ tale che $\gamma \subset A$ nel quale le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono continue.

I37 f.02

$$\int_a^b \mathrm{d}t\, \Big(u\big(x(t),y(t)\big)\, x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\, y'(t)\Big) + \int_a^b \mathrm{d}t\, \Big(u\big(x(t),y(t)\big) y'(t) + v\big(x(t),y(t)\big) x'(t)\Big)\ .$$

I37 f.03 Il limite delle somme considerate viene chiamato **integrale curvilineo della funzione** $f(z)$ esteso alla curva orientata γ, viene denotato con $\displaystyle\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)$ e si ottiene dalla espressione

$$\begin{aligned}\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ &= \ \int_{\sim\gamma} \Big(u(x,y)\,\mathrm{d}x\ - v(x,y)\,\mathrm{d}y\Big) + \mathsf{i}\int_{\sim\gamma} \Big(u(x,y)\,\mathrm{d}y\ + v(x,y)\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \ \int_{\sim\gamma} \Big(u(x,y) + \mathsf{i}\, v(x,y)\Big)\Big(\mathrm{d}x\ + \mathsf{i}\,\mathrm{d}y\Big)\end{aligned}\ .$$

I37 f.07 Per gli integrali curvilinei di funzioni complesse si ottengono varie proprietà a partire da quelle dimostrate per gli integrali curvilinei delle funzioni di $\lceil\, \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,\rceil$.

Denotiamo con $\ominus\gamma$ la curva orientata ottenuta dalla γ cambiando la sua orientazione nella opposta, cioè la curva determinata dalle funzioni $x(a+b-t)$ e $y(a+b-t)$.

(1) $$\int_{\sim\ominus\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ -\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)\ \blacksquare$$

(2) Prop.: Se la curva orientata γ è decomponibile come giustapposizione delle curve orientate γ_1, γ_2, ... , γ_n, cioè se

$$\gamma \ = \ \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_n\ ,$$

allora

$$\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ \int_{\sim\ \gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\cdots\oplus\gamma_n} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{\sim\gamma_i} \mathrm{d}z\ f(z)\ \blacksquare$$

(3) Prop.: Se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni continue su γ, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha

$$\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ \Big(\alpha\, f(z) + \beta\, g(z)\Big) \ = \ \alpha \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) + \beta \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ g(z)\ \blacksquare$$

I37 f.08 Teorema (**teorema di Darboux**)

Il valore assoluto di un integrale curvilineo $\displaystyle\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)$ non supera il massimo sulla γ del valore assoluto della $f(z)$ per la lunghezza della curva.

$$\left|\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)\right| \ \leq\ M \cdot L\ .$$

Passando alla parametrizzazione della γ mediante la funzione $s(P)$ del punto P variabile su tale curva che esprime la lunghezza della porzione che va da $\big\langle x(a), y(a)\big\rangle$ a P, si ottiene anche

$$\left|\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)\right| \ \leq\ \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}\, s\, |f(z(s))| \ \blacksquare$$

I37 f.09 Per gli integrali curvilinei sussiste un teorema di integrazione per serie.

(1) Teorema Consideriamo la serie di funzioni-CtC

$$f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

i cui termini sono definiti nei punti di una curva in $\mathbb{C}$ regolare γ e sono funzioni continue di z.
Se la serie è uniformemente convergente su γ, allora

$$\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f_n(z) \ \blacksquare.$$

I37 f.10 Vediamo alcuni casi particolari di integrali curvilinei

Sia γ la circonferenza di centro $c \in \mathbb{C}$ e raggio $r \in \mathbb{R}_+$, i cui punti si possono individuare con l'espressione $z = c + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ con $\theta \in [0, 2\,\pi)$.
Da questa espressione finita segue l'espressione differenziale $\mathrm{d}z \ = \ \mathrm{i}\, r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, \mathrm{d}\,\theta$.
Di conseguenza $\displaystyle\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ =\ \mathrm{i}\, r \int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\,\theta\ f\big(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\big)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
Da questa si ottiene la disuguaglianza $\displaystyle\left|\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)\right| \ \leq\ r \int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\theta\ \left|f\big(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\big)\right|$.

Linee orizzontali, verticali e radiali.

I37 g. integrali di funzioni olomorfe

I37 g.01 Teorema teorema integrale di Cauchy

Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un insieme aperto A interno a una curva chiusa nonintrecciata (semplice), allora ogni integrale $\displaystyle\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)$ esteso ad una curva chiusa regolare γ interna ad A è nullo.

Dim.: Scriviamo $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ e ricordiamo che le funzioni u e v hanno derivate continue in A, anche se questa ipotesi non è necessaria e viene qui avanzata per semplificare la dimostrazione. Risulta allora possibile applicare il teorema di Green [I44g]; per questo e per le condizioni di monogeneità, se denotiamo con $\mathcal{R}$ la regione delimitata dalla γ, si ottiene

$$\int_{\sim\gamma} [u(x,y)\ \mathrm{d}x\ - v(x,y)\ \mathrm{d}y\,] \ = \ \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & -v \end{vmatrix} = -\iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \ = \ 0\ ;$$
$$\int_{\gamma} [u(x,y)\ \mathrm{d}y\ + v(x,y)\ \mathrm{d}x\,] \ = \ \iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v & u \end{vmatrix} \ = \ -\iint_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] \ = \ 0\ .$$

Per 'uguaglianza enunciata in a03 si può concludere che

$$\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ 0 \ \blacksquare$$

I37 g.02 Teorema Si consideri, più in generale, una funzione olomorfa in un insieme del piano complesso aperto e connesso A delimitato da un contorno esterno costituito da una curva chiusa regolare γ e da n contorni interni costituiti da curve chiuse regolari κ_1, κ_2,..., κ_n che non si intersecano. Si ottiene

$$\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{\sim\kappa_i} \mathrm{d}z\ f(z)\ ,$$

dove si intende che tutti gli integrali riguardino curve ugualmente orientate, per esempio percorse in verso antiorario.

Dim.: Si possono, in numerosi modi, individuare n archi di curva τ_1, τ_2, ..., τ_n ciascuno dei quali collega una coppia di curve chiuse senza intersecarsi, avendo in comune con le curve solo i due estremi e mantenendo la connessione dell'insieme $A^* := A \setminus (\cup_{i=1}^{n} \tau_i)$.

Ricavando da ogni arco τ_i due archi orientati nelle direzioni opposte a aggiungendo questi ai circuiti γ, κ_1, κ_2,..., κ_n si riesce ad individuare un unico circuito chiuso Γ che racchiude tutti i punti di A^* e nessun altro.

Per tale circuito, grazie a b01, si ha $\displaystyle\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ 0$.

Il circuito Γ si può esprimere come la giustapposizione di $1+3\,n$ archi orientati e per la a07(2) l'integrale $\displaystyle\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}z\ f(z)$ si può esprimere come somma degli $1 + 3\,n$ integrali della $f(z)$ estesi ai suddetti archi.

Di questi si hanno n coppie di integrali che si annullano in quanto estesi ad archi orientati opposti.

In conclusione si ottiene quindi

$$\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \ - \ \sum_{i=1}^{n} \int_{\kappa_i} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ 0\ ,$$

uguaglianza equivalente all'enunciato $\blacksquare$

I37 g.03 Teorema Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nei punti di una regione del piano complesso delimitata da una curva regolare chiusa γ; gli integrali della forma $\displaystyle\int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z\ f(z)$ estesi ad archi orientati γ che hanno in comune l'estremo iniziale e l'estremo finale hanno lo stesso valore, ossia sono indipendenti dal cammino di integrazione.

Dim.: Se γ' e γ'' sono due di questi archi orientati, l'integrale esteso alla giustapposizione $\gamma' \oplus \gamma''$ risulta esteso a un circuito e quindi è nullo.
Questo equivale alla $\displaystyle\int_{\sim\gamma'} \mathrm{d}z\ f(z) \ = \ \int_{\sim\gamma''} \mathrm{d}z\ f(z)$ ∎

Il risultato precedente consente di denotare il valore degli integrali su cammini contenuti in una regione $\mathcal{R}$ delimitata da una curva regolare chiusa ρ che iniziano in a e terminano in z con una scrittura come $\displaystyle\int_a^z \mathrm{d}\,\overline{z}\ f(\overline{z})$, almeno dove sia implicito che si tratta di archi contenuti in $\mathcal{R}$.
Fissato a, si individua quindi una funzione definita per ogni z di $\mathcal{R}$ per la quale scriviamo

$$F_a(z) \ := \ \int_a^z \mathrm{d}\,\zeta\ f(\zeta)$$

Evidentemente per ogni $a \in R$ si ha $F_a(a) = 0$; inoltre per ogni altro $b \in R$ si ha $F_b(z) = F_b(a) + F_a(z)$.

I37 g.04 Teorema Ogni funzione $F_a(z) = \displaystyle\int_a^z \mathrm{d}\,\zeta\ f(\zeta)$ è olomorfa in $\mathcal{R}$ e per la sua derivata si ha $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_a(z) = f(z)$.
Dim.: ∎

Ciascuna delle funzioni $F_a(z)$, viene detta **primitiva** o **antiderivata** della $f(z)$. Come per le funzioni-RR integrabili si è individuato un insieme di primitive per ciascuna delle funzioni olomorfe $f(z)$ le quali differiscono per una costante additiva (che ora è un arbitrario numero complesso).

Vedremo che questo insieme di funzioni esaurisce l'insieme delle funzioni che hanno come derivata la $f(z)$ e che ogni funzione definita in una regione $\mathcal{R}$ delimitata da una curva chiusa semplice se ammette una primitiva è olomorfa in $\mathcal{R}$.

I37 g.05

$$\forall n = 0, 1, 2, \ldots \ : \ \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ t^{4n+3}\, \mathrm{e}^{-t} \sin\, t \ = \ 0$$

I37 h. formula integrale di Cauchy e derivate delle funzioni olomorfe

I37 h.01 Teorema (**formula integrale di Cauchy**)
Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in una regione $\mathcal{R}$ delimitata da un circuito regolare semplice Γ orientato nel verso positivo e includente il contorno.
Per ogni punto z interno ad $\mathcal{R}$ sussiste la formula integrale di Cauchy

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;.$$

Dim.: Sia γ una circonferenza di centro z orientata secondo il verso positivo e raggio r interna ad $\mathcal{R}$; la funzione $\dfrac{1}{2\,\pi}\,\dfrac{1}{\overline{z}-z}$ è (continua e) olomorfa nella regione $\mathcal{R}'$ delimitata da Γ e da $\ominus\,\gamma$.
Per la b02(1) abbiamo

$$\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z} \;=\; \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;.$$

Per il secondo integrale abbiamo $\overline{z}-z = r\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}$ e $\mathrm{d}\overline{z} = \mathsf{i}\,r\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
Dato che $f(z) \;=\; \dfrac{1}{2\,\pi}\,\displaystyle\int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\,\theta\;f(z)$, si ottiene

$$f(z) - \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\,\theta\;\;\left[f(z) - f\left(z + r\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\right)\right]$$

e quindi la disuguaglianza

$$\left|f(z) - \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\right| \;\leq\; \frac{1}{2\,\pi}\,\int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\,\theta\;\;\left|f(z) - f\left(z + r\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\right)\right|\;.$$

Scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), per la finitezza della derivata della f, si può determinare un $\overline{r} \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni $r \in (0, \overline{r})$ si abbia $\left|f(z) - f\left(z + r, \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\right)\right| \;<\; \epsilon$; da questa si ottiene

$$\left|f(z) - \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\right| \;<\; \epsilon$$

e per l'arbitrarietà di ϵ segue l'enunciato ∎

I37 h.02 Poniamoci su un piano di maggiore generalità.

Prop. Se la regione $\mathcal{R}$ è delimitata da un circuito regolare esterno Γ e da $n \geq 0$ circuiti regolari interni $\ominus\gamma_1$, $\ominus\gamma_2$, ..., $\ominus\gamma_n$, allora si ha

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z} \;-\; \sum_{i=1}^{n}\,\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\gamma_i} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;.$$

Dim.: Si conduce in modo simile alla precedente, ma a partire dalla uguaglianza dell'enunciato di a08 ∎

Con opportune convenzioni sul significato del cammino sul quale si effettua l'integrazione, l'espressione precedente si può ricondurre alla forma di c01. Ad essa ci rifaremo anche per gli integrali curvilinei che incontreremo in seguito.

I37 h.03 La derivata della $f(z)$ si può calcolare derivando rispetto a z l'integrando a secondo membro della c01: questa possibilità si giustifica come per il caso reale.

Si ottiene quindi l'espressione integrale per la derivata prima

$$\frac{f'(z)}{1!} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{(\overline{z}-z)^2}\;. \tag{1}$$

Reiterando questa operazione di derivazione sotto il segno di integrale circuitale si ottiene l'**espressione integrale delle derivate**

$$\forall n = 1, 2, 3, \ldots \quad : \quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim\Gamma} \mathrm{d}\,\overline{z}\;\frac{f(\overline{z})}{(\overline{z}-z)^{n+1}}\;. \tag{2}$$

Ritroviamo ancora il fatto che una funzione olomorfa $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ in una regione aperta e connessa A, in tale insieme ammette le derivate di qualsiasi ordine e queste sono funzioni olomorfe.

Si può anche enunciare che le funzioni-RRtR $u(x,y)$ e $v(x,y)$ posseggono derivate parziali di tutti gli ordini.

I37 h.04 Teorema (**teorema di Morera**)

Se la funzione $f(z)$ definita nei punti di una regione $\mathcal{R}$ interna a un circuito chiuso semplice regolare Γ presenta nullo ogni integrale esteso a una qualsiasi curva chiusa γ, allora la $f(z)$ è olomorfa in tutti i punti interni a tale $\mathcal{R}$.

I37 i. serie di Cauchy-Taylor e serie di Laurent

I37 i.01 Si consideri una funzione complessa $f(z)$ olomorfa in una regione $\mathcal{R}$, un punto $z \in \mathcal{R}$ e un secondo punto $c \in \mathcal{R}$ tale che la circonferenza C di centro c e raggio $r := |z-c|$ sia interna ad $\mathcal{R}$. Denotato con C il cerchio aperto $\{\overline{z} \in \mathbb{C} \,\big[\!\big]\, |\overline{z}-c| < r\}$, accade che $\left|\dfrac{\overline{z}-c}{z-c}\right| < 1$ e si ha il seguente sviluppo che si serve di una serie geometrica convergente

$$(1) \qquad \frac{1}{z-\overline{z}} \;=\; \frac{1}{(z-c)-(\overline{z}-c)} \;=\; \frac{1}{z-c}\,\frac{1}{1-\frac{\overline{z}-c}{z-c}} \;=\; \frac{1}{z-c}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\overline{z}-c}{z-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\overline{z}-c)^n}{(z-c)^{n+1}}\ .$$

Si ha quindi l'espressione

$$(2) \qquad \frac{f(z)}{z-\overline{z}} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}(\overline{z}-c)^n\,\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\ .$$

La serie a secondo membro è totalmente (e uniformemente) convergente: infatti se introduciamo il reale $M := \max\limits_{\overline{z}\in C}|f(\overline{z})|$, la serie dei moduli è minorante della $\dfrac{M}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{z-\overline{z}}{r}\right|^n$, serie di addendi costanti positivi convergente.
Si può quindi effettuare la integrazione termine a termine rispetto alla z

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_C \mathrm{d}z\ \frac{f(z)}{z-\overline{z}} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}(\overline{z}-c)\,\frac{1}{2\,\pi}\int_C \mathrm{d}z\ \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\ .$$

Per la formula integrale di Cauchy c01(1) per la espressione integrale delle derivate c03(2) si ottiene

$$(3) \qquad f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(z-c)^n\ .$$

Questa espressione viene detta **sviluppo in serie di Taylor-Cauchy**; essa si può considerare la estensione dal campo dei reali al campo dei complessi dello sviluppo in serie di Taylor.

Come nel caso reale si può dimostrare l'unicità di questo sviluppo.

I37 i.02 Lo sviluppo in serie avente come centro l'origine della funzione $\dfrac{1}{1+z^2}$ si ottiene dalla serie geometrica

$$\frac{1}{1+z^2} \;=\; 1-z^2+z^4-z^6+\cdots$$

ed ha raggio di convergenza 1.
Questa funzione sull'asse reale ha valori reali ed è illimitatamente derivabile, ma il suo sviluppo in serie di potenze non vale per $|x| \geq 1$. In effetti considerando la funzione per valori complessi della variabile indipendente, essa non è olomorfa per $z = 1$ e $z = -i$: quindi è garantito il suo sviluppo in serie solo per z interni al cerchio caratterizzato da $|z| < 1$.

I37 i.03 Consideriamo due circonferenze C_1 e C_2 aventi come centro comune c, la prima contenuta nel cerchio delimitato dalla seconda e da considerare orientate in verso antiorario; consideriamo anche la corona circolare aperta K delimitata do , la sua chiusura $\overline{K}$ e una funzione $f(z)$ continua in $\overline{K}$ e olomorfa in K.
Per ogni $z \in K$ in forza della formula integrale c02 si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{\sim C_2}\mathrm{d}\,\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z} \;-\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{\sim C_1}\mathrm{d}\,\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\ .$$

In conseguenza della e01(3) si ha

$$\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim C_2}\mathrm{d}\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;=\;\sum_{n=0}^{+\infty}s_n\,(z-c)^n\quad\text{ove}\quad s_n\;:=\;\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim C_2}\mathrm{d}\,\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{(\overline{z}-c)^{n+1}}\;.$$

Per $\overline{z}\in C_1$ si ha $\left|\dfrac{\overline{z}-c}{z-c}\right|<1$ e quindi

$$-\frac{1}{\overline{z}-z}\;=\;\frac{1}{(z-c)-(\overline{z}-c)}\;=\;\frac{1}{\overline{z}-z}\,\frac{1}{1-\frac{\overline{z}-c}{z-c}}\;=\;\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\overline{z}-c)^{n-1}}{(z-c)^n}\quad,$$

$$-\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;=\;\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-c)n}\,f(\overline{z})\,(\overline{z}-c)^{n-1}\;.$$

L'ultima serie presentata è uniformemente convergente per $\overline{z}\in C_1$ e quindi è lecita la sua integrazione termine a termine che conduce a

$$-\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim C_1}\mathrm{d}\,\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;=\;\frac{1}{2\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-c)^n}\,\int_{\sim C_1}\mathrm{d}\,\overline{z}\,f(\overline{z})\,(\overline{z}-c)^{n-1}\;.$$

Di conseguenza

$$\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim C_1}\mathrm{d}\,\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{\overline{z}-z}\;=\;\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s_{-n}}{(z-c)^n}\quad\text{dove}\quad s_{-n}\;:=\;\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim C_1}\mathrm{d}\,\overline{z}\,f(\overline{z})\,(\overline{z}-c)^{n-1}\;.$$

In conclusione si ottiene il cosiddetto **sviluppo in serie di Laurent**

$$f(z)\;=\;\sum_{n=0}^{+\infty}s_n\,(z-c)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s_{-n}}{(z-c)^n}\;,\tag{1}$$

nella quale si può usare l'espressione

$$\forall n=...,-2,-1,0,1,2,...\quad:\quad s_n\;=\;\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{\sim C}\mathrm{d}\,\overline{z}\,\frac{f(\overline{z})}{(\overline{z}-c)^{n+1}}\;,\tag{2}$$

dove C denota un qualunque circuito contenuto in $\mathcal{R}$ e che racchiude la circonferenza interna C_1.

I37 i.04 Se la funzione $f(z)$ è olomorfa in tutti i punti interni alla circonferenza esterna C_2, tutti i coefficienti s_{-n}, circuitazioni di una funzione olonoma, sono nulli e la serie di Laurent si riduce alla serie di Taylor-Cauchy.

Se invece la $f(z)$ non è olomorfa in tutti i punti interni a C_2 sono effettivamente presenti termini relativi a qualche potenza negativa $\dfrac{1}{(z-c)^n}$; questi possono essere in numero finito oppure infinito.

I37 j. zeri e principio di identità delle funzioni olomorfe

I37 j.01 Consideriamo una funzione $f(z)$ olomorfa in un insieme aperto e connesso $\mathcal{D}$ contenente un punto a nel quale $f(a)=0$, punto chiamato zero o infinitesimo della funzione.
La $f(z)$ è sviluppabile in serie di $z-a$ in un intorno circolare aperto A di a e scriviamo

$$f(z) \;=\; c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \qquad \text{con} \qquad c_0 = 0 \;.$$

Sia n il primo intero positivo per il quale $c_n \neq 0$; in tal caso si ha lo sviluppo

$$f(z) \;=\; c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots \;=\; (z-a)^n\,[c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots] \qquad \text{con} \qquad c_n \neq 0$$

e si dice che a è uno **zero di ordine n della funzione**, o un **infinitesimo di ordine n della funzione** $f(z)$.

Alternativamente può accadere che tutti i coefficienti c_n dello sviluppo in serie siano nulli e questo equivale ad avere la funzione $f(z)$ nulla nell'intero A. In tal caso accade che la funzione sia nulla nel suo intero dominio $\mathcal{D}$ in conseguenza del teorema che segue.
Inoltre, come vedremo, il dominio della $f(z)$ può estendersi all'intero $\mathbb{C}$.

I37 j.02 **Teorema** Se una funzione $f(z)$ olomorfa in un insieme aperto e connesso $\mathcal{D}$ si annulla in infiniti punti distinti di tale insieme aventi almeno un punto di accumulazione $a \in \mathbb{C}$, allora essa è nulla nell'intero $\mathcal{D}$.

Dim.:

I37 j.03 Dal teorema precedente seguono direttamente utili proprietà.

(1) Coroll.: (**principio di identità delle funzioni olomorfe**) Se due funzioni-CtC $f(z)$ e $g(z)$ che sono olomorfe in un insieme aperto e connesso A assumono gli stessi valori in un insieme di infiniti punti avente almeno un punto di accumulazione in $\mathbb{C}$, allora esse coincidono nell'intero A.

Dim.: Basta considerare la funzione $f(z)-g(z)$ che si annulla come richiesto in e02 e concludere che deve essere $f(z)-g(z)=0$ nell'intero A ∎

(2) Coroll.: Se una funzione-CtC $f(z)$ olomorfa in un insieme aperto e connesso A assume uno stesso valore $\overline{g}$ in un insieme di infiniti punti avente almeno un punto di accumulazione in $\mathbb{C}$, allora si ha $f(z)=\overline{g}$ nell'intero A.

Dim.: Segue applicando l'enunciato precedente nel caso sia $g(z)=\overline{g}$ costante complessa ∎

I37 j.04 Consideriamo la funzione $f(z)$ olomorfa in una regione semplicemente connessa $\mathcal{R}$ delimitata da un circuito, un punto $a \in \mathcal{R}$, un qualsiasi $c \in \mathbb{C}$ e la funzione $F_{a,c}(z) := c + \displaystyle\int_{\sim\gamma_z} \mathrm{d}\overline{z}\; f(\overline{z})$, dove γ_z denota un cammino regolare contenuto in $\mathcal{R}$ da a a z contenuto in $\mathcal{R}$.

Questa funzione, come visto in ..., è una primitiva della $f(z)$ e ogni primitiva della $f(z)$ si ottiene specificando a e c, (o meglio $f(a)-c$).
Infatti se $F_1(z)$ è un'altra primitiva della $f(z)$, cioè se $\mathrm{D}_z\big(F_1(z)\big) = f(z)$, le due funzioni in a $F(z)-F(a)$ e $F_1(z)-F_1(a)$ si annullano e ammettono derivate di tutti gli ordini che coincidono; quindi esiste un intorno circolare di a nel quale hanno lo stesso sviluppo di Taylor-Cauchy; esse quindi coincidono in tutto $\mathcal{R}$, e in tale insieme $F(z)-F(a) = F_1(z)-F_1(a)$, ossia

$$F_1(z) \;=\; F(z) + [F_1(a)-F(a)] \;=\; F(z) + [F_1(a)-c] \;=\; F_1(a) + \int_{\sim\gamma_z} \mathrm{d}\,\overline{z}\; f(\overline{z}) \;.$$

prgj.05

$$f(z) - f(a) + \int_{\sim\gamma_z} \mathrm{d}\,\overline{z}\; f(\overline{z}) \ .$$

I37 k. serie logaritmica e serie inverse delle trigonometriche

I37 k.01 La serie logaritmica ha raggio di convergenza uguale ad 1. Essa converge anche per $x = 1$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php