1

Capitolo I32
successioni e serie di funzioni, convergenza uniforme

Contenuti delle sezioni

a. successioni e serie di funzioni p. 2
b. una distanza tra funzioni p. 5
c. convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni p. 6
d. doppi passaggi al limite per successioni e serie di funzioni p. 9
e. derivazione per serie p. 10

11 pagine

I32 0.01 In questo capitolo vengono estese le nozioni di successioni e di serie al caso in cui i rispettivi componenti e addendi non sono semplici entità numeriche ma funzioni.

Nelle considerazioni più generali nelle prossime pagine assumiamo che queste funzioni abbiano come dominio e come codominio due spazi che sono potenze cartesiane di un generico campo che potrebbe essere quello dei numeri reali o quello dei numeri complessi.

Alcuni sviluppi specifici invece riguardano solo successioni e serie di funzioni-RtR, cioè funzioni di una variabile reale a valori reali.

Particolare rilievo viene dato alle nozioni di convergenza uniforme per successioni e serie di funzioni. Si tratta di proprietà che garantiscono la possibilità di effettuare costruzioni efficaci sulle successioni e sulle serie, in particolare la derivazione per serie e l'integrazione per serie.

I32 a. successioni e serie di funzioni

I32 a.01 Le argomentazioni generali in questo capitolo riguardano funzioni dei generi esprimibili con notazioni della forma $\left\{\mathbb{K}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times e}\right\}$, dove con $\mathbb{K}$ denotiamo un campo che potrebbe essere sia il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ che quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$, mentre d ed e denotano due interi positivi. Con $\mathbf{0}_d$ e con $\mathbf{0}_e$ denotiamo, risp., il vettore nullo di $\mathbb{K}^{\times d}$ e di $\mathbb{K}^{\times e}$.

Qui e nel seguito useremo varie notazioni specifiche che riteniamo opportuno introdurre o ricordare tutte assieme:

$$\mathsf{FunRtR}_{d,e} := \left\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \right\rceil \quad , \quad \mathsf{FunCtC}_{d,e} := \left\lceil \mathbb{C}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times e} \right\rceil \quad ,$$

$$\mathsf{FunKK}_{d,e} := \mathsf{FunRtR}_{d,e} \dot\cup \mathsf{FunCtC}_{d,e} \quad , \quad \mathsf{FunRtR} := \mathsf{FunRtR}_{1,1} \quad ,$$

$$\mathsf{FunCtC} := \mathsf{FunCtC}_{1,1} \ , \quad \mathsf{FunKK} := \mathsf{FunKK}_{1,1} = \mathsf{FunRtR} \dot\cup \mathsf{FunCtC} \quad .$$

Ci serviremo anche dei termini sincopati che corrispondono ad alcuni dei suddetti insiemi:

funzione-RtR , funzione-CtC , **funzione-RdtRe** , **funzione-CdtCe** .

Inoltre ci serviremo della distanza pitagorica tra coppie di punti di spazi come $\mathbb{K}^{\times d}$ o $\mathbb{K}^{\times e}$, servendoci di notazioni come $\mathrm{d}_2(\mathsf{a},\mathsf{b}) := ||\mathsf{a}-\mathsf{b}||$.

I32 a.02 Consideriamo un sottoinsieme D di $\mathbb{K}^{\times d}$ e una successione di funzioni del genere $\left\lceil \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \right\rceil$

$$\mathbf{F}(\mathsf{x}) = \Big\langle n \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \Big\rangle = \Big\langle \mathsf{f}_0(\mathsf{x}), \mathsf{f}_1(\mathsf{x}), \mathsf{f}_2(\mathsf{x}), ..., \mathsf{f}_n(\mathsf{x}), ... \Big\rangle \ \in \ \left\lceil \mathbb{N} \longmapsto \left\lceil \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \right\rceil \right\rceil \ .$$

Denotiamo con x una variabile d-dimensionale nell'insieme D e conveniamo che quando si assegna a tale variabile un qualsiasi valore $\bar{\mathsf{x}} \in \mathsf{D}$ si ottiene una successione di punti di $\mathbb{K}^{\times d}$ che si denota con $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{x}})$.

A ciascuna di tali successioni si può cercare di associare un limite per l'indice n tendente a $+\infty$, in coerenza con le definizioni di limite viste in B46f e con quelle più generali esposte in T30.

La successione $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{x}})$ si dice che al tendere di n a $+\infty$ è **successione che tende al limite** o **successione che converge al limite** $\mathbf{L} \in \mathbb{K}^{\times e}$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste un intero positivo $\nu = \nu(\epsilon, \bar{\mathsf{x}})$ tale che $\forall n \geq \nu \ : \ \mathrm{d}_2(\mathbf{f}_n(\bar{\mathsf{x}}), \mathbf{L}) < \epsilon$.

In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{f}_n(\bar{\mathsf{x}}) = \mathbf{L} \qquad \text{ovvero} \qquad \mathbf{f}_n(\bar{\mathsf{x}}) \to \mathbf{L} \quad \text{per} \quad n \to +\infty \quad .$$

La successione $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{x}})$ al tendere di n a $+\infty$ si dice **successione che tende all'infinito** o **successione che diverge all'infinito** sse per ogni $M \in \mathbb{R}_+$ (idag) esiste un intero positivo $\nu = \nu(\epsilon, \bar{\mathsf{x}})$ tale che $\forall n \geq \nu \ : \ \mathrm{d}_2(\mathbf{f}_n(\bar{\mathsf{x}}), \mathbf{0}_e) > M$. In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{f}_n(\bar{\mathsf{x}}) = \infty \qquad \text{ovvero} \qquad \mathbf{f}_n(\bar{\mathsf{x}}) \to \infty \quad \text{per} \quad n \to +\infty \quad .$$

I32 a.03 Nel caso particolare relativo alle dimensioni $d = e = 1$ si hanno le successioni di funzioni di una variabile reale o complessa per le quali usiamo notazioni come

$$F(x) \ = \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ f_n(x) \big\rangle \ = \big\langle f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ... \big\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}_2(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \ .$$

Va segnalato che per distinguere il caso delle funzioni di **FunCtC** da quello delle funzioni di **FunRtR** in luogo della variabile x in genere viene usata la variabile z.

Per le funzioni di **FunRtR** tra le successioni divergenti all'infinito può essere interessante distinguere tra le particolari successioni che divergono a $+\infty$ e quelle che divergono a $-\infty$.

Si dice che al tendere di n a $+\infty$ la successione $F(\overline{x})$ è **successione che tende a** $+\infty$ o **successione che diverge a** $+\infty$ sse per ogni $M \in \mathbb{R}_+$ (idag) esiste un intero positivo $\nu = \nu(\epsilon, \overline{x})$ tale che $\forall n \geq \nu \ : \ M < f_n(\overline{x})$.

Si dice che al tendere di n a $+\infty$ la successione $F(\overline{x})$ è **successione che tende a meno infinito** o **successione che diverge a meno infinito** sse per ogni $M \in \mathbb{R}_+$ (idag) esiste un intero positivo $\nu = \nu(\epsilon, \overline{x})$ tale che $\forall n \geq \nu \ : \ f_n(\overline{x}) < -M$.

In questi casi si adottano scritture riassumibili con la:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\overline{x}) \ = \ \pm\infty \qquad \text{ovvero} \qquad f_n(\overline{x}) \to \pm\infty \quad \text{per} \quad n \to +\infty \ .$$

Inoltre talora serve distinguere i limiti finiti ai quali si tende per difetto da quelli ai quali si tende per eccesso con le scritture

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = L- \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = L+ \ .$$

Le successioni di funzioni che non sono convergenti ad alcun elemento finito o infinito del codominio si dicono **successioni irregolari**, oppure si dice che non esiste alcun loro limite per n tendente a $+\infty$.

I32 a.04 Il carattere convergente o divergente di una successione di funzioni può riguardare l'intero insieme dominio delle funzioni oppure un particolare sottoinsieme di tale dominio.

In effetti si trovano successioni di funzioni che sono convergenti in alcuni punti del loro dominio, divergenti in altri e irregolari in altri ancora.
Questo accade per esempio alla serie geometrica già vista in I13a05.

I32 a.05 Come per le successioni e le serie numeriche [I13a01], anche per le successioni e le serie di funzioni si stabilisce una corrispondenza biunivoca.

Alla successione di funzioni

$$\mathsf{F}(\mathsf{x}) = \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \big\rangle$$

definite in un $\lceil \ \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \ \rceil$ per qualche $\mathsf{D} \subseteq_{ne} \mathbb{K}^{\times d}$, si associa la serie di funzioni dello stesso genere

$$\mathbf{F}(\mathsf{x}) \ = \ \Big\langle \mathsf{F}(\mathsf{x}), \mathsf{sps}(\mathsf{F}(\mathsf{x})) \Big\rangle$$

dove $\mathsf{F}(\mathsf{x}) \ = \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \big\rangle$ e $:= \ sps(\mathsf{F}(\mathsf{x})) \ := \big\langle n \in \mathbb{N} :| \ \sum_{i=0}^{n} \mathsf{f}_i(\mathsf{x}) \big\rangle$.

La funzione $\mathsf{sps}(\mathsf{F})_n \ := \ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathsf{f}_i(\mathsf{x})$ viene chiamata **somma parziale dei primi** n **addendi** della successione di funzioni $\mathsf{F}(\mathsf{x})$.

La serie $\mathbf{F}(\mathsf{x})$ si identifica anche con la scrittura, non del tutto esplicita,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{F}_n(\mathsf{x}) \ = \ \mathbf{F}(\mathsf{x}) \ .$$

Interessa anche la trasformazione inversa che a una serie della forma $\mathbf{U}(\mathsf{x}) \ = \ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{u}_n(\mathsf{x})$ fa corrispondere la successione della quale essa è la serie:

$$\mathsf{sps}^{-1}(\mathbf{U}(\mathsf{x})) \ = \ \Big\langle \mathsf{u}_0(\mathsf{x}) \ , \ \mathsf{u}_1(\mathsf{x}) - \mathsf{u}_0(\mathsf{x}) \ , \ \mathsf{u}_2(\mathsf{x}) - \mathsf{u}_1(\mathsf{x}) \ , \ \ldots \ , \ \mathsf{u}_n(\mathsf{x}) - \mathsf{u}_{n-1}(\mathsf{x}) \ , \ \ldots \Big\rangle \ .$$

I32 a.06 Fissato un determinato $\bar{\mathsf{x}} \in \mathsf{D}$, a una serie di funzioni $\mathbf{F}(\mathsf{x})$ aventi come dominio D corrisponde una serie i cui addendi sono elementi di $\mathbb{K}^{\times e}$ e per queste serie si pone il problema della distinzione tra quelle che sono convergenti, divergenti o indeterminate.

I32 b. una distanza tra funzioni

I32 b.01 Per molte questioni risulta utile valutare significativamente se due funzioni differiscono di poco o di tanto.

Più precisamente si possono sviluppare varie considerazioni utili che cercano di definire una o più distanze tra queste funzioni, e quindi cercano di trattare queste funzioni come elementi di qualche spazio metrico.

Cerchiamo di presentare la questione in termini più definiti e, ponendoci a un buon livello di generalità, consideriamo funzioni appartenenti all'insieme $\lceil\, \mathbb{K}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times e} \,\rceil$ che condividono lo stesso dominio $\mathsf{D} \subseteq \mathbb{K}^{\times d}$.

Si trova che tra queste entità si possono definire varie distanze ciascuna delle quali può risultare vantaggiosa per affrontare determinate categorie di problemi.
In generale si pongono però molte questioni delicate che richiedono analisi specifiche piuttosto complesse.
Qui ci serviamo di un solo tipo di distanza che risulta sufficiente per i limitati sviluppi in questo capitolo.

I32 b.02 Consideriamo due diverse funzioni $\mathsf{f}(\mathsf{x}), \mathsf{g}(\mathsf{x}) \in \lceil\, \mathbb{K}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times e} \,\rceil$ aventi lo stesso dominio D e definiamo come distanza tra di esse l'elemento di $\overline{\mathbb{R}_+} := \mathbb{R}_+ \dot\cup \{+\infty\}$

$$\mathrm{d}_\infty(\mathsf{f},\mathsf{g}) := \sup_{\mathsf{x}\in\mathsf{D}} ||\mathsf{f}(\mathsf{x}) - \mathsf{g}(\mathsf{x})||$$

Si verifica facilmente che questa espressione definisce una distanza sull'insieme delle funzioni del genere $\lceil\, \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \,\rceil$.

Si osserva inoltre che se le due funzioni sono limitate $\mathrm{d}_\infty(\mathsf{f},\mathsf{g})$ è un numero reale positivo, mentre se $\mathrm{d}_\infty(\mathsf{f},\mathsf{g}) = +\infty$ almeno una delle due funzioni non è limitata.

Alcuni esempi relativi a funzioni-RtR:

Per $\mathsf{D} = (0,1]$: $\mathrm{d}_\infty(x, \ln x) = +\infty$.

Per $\mathsf{D} = \mathbb{R}$: $\mathrm{d}_\infty(\sin x, \cos x) = \sqrt{2}$.

Per ogni $c \in \mathbb{R}$: $\mathrm{d}_\infty(c\,\mathsf{f}, c\,\mathsf{g}) = |c|\,\mathrm{d}_\infty(\mathsf{f},\mathsf{g})$.

I32 b.03 Si definisce **norma di una funzione** $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ la sua distanza dalla funzione $\lceil\, \mathsf{x} \in \mathsf{D} \mapsto \mathbf{0}_e \,\rceil$, cioè:

$$||\mathsf{f}(\mathsf{x})|| := \sup_{\mathsf{x}\in\mathsf{D}} ||\mathsf{f}(\mathsf{x})|| \ .$$

Per esempio:

$$\left\|\sin(x)\big|_{[0,2\pi]}\right\| = \left\|\cos(x)\big|_{(0,\pi/2)}\right\| = 1 \ ;$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad : \quad \left\|\mathsf{e}^x\big|_{[\mathrm{a},\mathrm{b}\,)}\right\| = \mathsf{e}^{\max(a,b)} \ ;$$

$$\left\|\arctan(x)\right\| = 1 \ .$$

I32 c. convergenza uniforme di successioni e serie di funzioni

I32 c.01 Consideriamo un sottoinsieme D di $\mathbb{K}^{\times d}$ e una successione $\mathsf{F}(\mathsf{x}) = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ di funzioni appartenenti a $\lceil \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \rceil$.

Si dice che si tratta di **successione che converge uniformemente** in D sse essa è convergente in D e, denotata con $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ la funzione limite $\lim_{n\to+\infty} \mathsf{f}(\mathsf{x})$, vale la seguente proprietà:

Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste un $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (non dipendente da x) tale che:

$$\forall \mathsf{x} \in \mathsf{D} \ , \ \forall n \geq N \ : \ ||\mathsf{f}_n(\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x})|| < \epsilon \ .$$

La differenza tra le successioni che sono uniformemente convergenti dalle successioni convergenti, ma nonuniformemente convergenti si esprime con chiarezza mediante una caratteristica della funzione $N = N(\mathsf{x}, \epsilon)$.
Fissato un valore di ϵ per ogni $\mathsf{x} \in D$, il supremo di questa funzione al variare del punto x può essere un numero reale finito o $+\infty$. Vale il seguente enunciato.

(1) Prop.: Una successione $\mathsf{F}(\mathsf{x})$ convergente in D è uniformemente convergente sse $\sup_{\mathsf{x}\in\mathsf{D}} N(\epsilon, \mathsf{x})$ è finito.

Dim.: Discende direttamente dalla definizione ∎

I32 c.02 Per stabilire la convergenza uniforme in D di una successione di funzioni convergente in D $\mathsf{F}(\mathsf{x}) \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto \lceil \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \rceil \rceil$ può essere utile un criterio che estende in modo naturale quello riguardante le successioni numeriche [I12b02].

(1) Teorema (**criterio generale di convergenza di Cauchy**) La successione di funzioni $\mathsf{F}(\mathsf{x}) = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ è uniformemente convergente per n tendente a $+\infty$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) esiste un intero $N = N(\epsilon)$ indipendente da x tale che per ogni duetto $\{m, n\}$ di interi entrambi maggiori o uguali ad N si ha

$$\forall \mathsf{x} \in \mathsf{D} \ : \ ||\mathsf{f}_m(\mathsf{x}) - \mathsf{f}_n(\mathsf{x})|| < \epsilon \ . \tag{1}$$

Dim.: La dimostrazione è un'estensione piuttosto diretta del criterio di convergenza per le serie numeriche di Cauchy [I12b02].

"$\Longrightarrow$" Scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N(\epsilon)$ ed ogni $\mathsf{x} \in \mathsf{D}$ si ha $||\mathsf{f}_n(\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x})|| < \epsilon$.
Ne consegue che per ogni $\{n, m\} \subset \mathbf{[}N : +\infty\mathbf{)}$ si ha:

$$||\mathsf{f}_m(\mathsf{x}) - \mathsf{f}_n(\mathsf{x})|| = ||(\mathsf{f}_m(\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x})) - (\mathsf{f}_n(\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x}))|| \leq ||\mathsf{f}_m(\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x})|| + ||\mathsf{f}_n(\mathsf{x}) - \mathsf{f}(\mathsf{x}))|| < 2\,\epsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ϵ e di $2\,\epsilon$ questa relazione equivale alla implicazione in esame.

"$\Longleftarrow$" Per ciascun $\mathsf{x} \in \mathsf{D}$ la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ soddisfa il criterio di Cauchy per le successioni di elementi di $\mathbb{K}^{\times e}$ e quindi converge a un limite $\mathsf{f}(\mathsf{x})$. Colleghiamo allora la disuguaglianza (1) alla funzione limite $\lceil \mathsf{x} \in \mathsf{D} \mapsto \mathsf{f}(\mathsf{x}) \rceil$: per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che tenendo fisso n e facendo tendere m a $+\infty$ si ottiene $||\mathsf{f}(\mathsf{x}) - \mathsf{f}_n(\mathsf{x})|| \leq \epsilon$ per ogni $n \geq N(\epsilon)$, quale che sia $\mathsf{x} \in \mathsf{D}$; questa disuguaglianza equivale alla convergenza uniforme ∎

I32 c.03 La definizione della convergenza uniforme e il criterio di convergenza di Cauchy si possono formulare in modo significativo mediante la nozione della distanza introdotta in :b.

Si dice che la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ converge uniformemente in D sse essa converge in D e, denotata con $\mathsf{f}(\mathsf{x})$ la funzione limite, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{d}_\infty(\mathsf{f}, \mathsf{f}_n) \ = \ 0 \ .$$

(1) Prop.: La successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ converge uniformemente in D sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste un intero naturale $N = N(\epsilon)$ tale che

$$\forall m, n \geq N \ : \ \mathrm{d}_\infty(\mathsf{f}_m, \mathsf{f}_n) < \epsilon \ .$$

I32 c.04 La convergenza uniforme si può illustrare in modo relativamente semplice nel caso delle successioni di funzioni-RtR.

I32 c.05 La nozione di convergenza uniforme per le successioni di funzioni si trasporta facilmente alle serie di funzioni attraverso la corrispondenza stabilita dalla funzione sps, che associa a ogni successione la successione delle somme parziali.
Sia $\mathsf{D} \subseteq_{ne} \mathbb{K}^{\times d}$ e sia $\mathsf{F} := \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ una successione di funzioni di $\lceil \mathsf{D} \longmapsto \mathbb{K}^{\times e} \rceil$ e denotiamo la sua serie associata con

$$\mathbf{F} \ := \ \mathsf{sps}(\mathsf{F}) \ =: \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{u}_n(\mathsf{x}) \ .$$

Si dice che $\mathbf{F}$ è **funzione che converge uniformemente** in D sse essa converge in D e, denotata con $\mathsf{s}(\mathsf{x})$ la sua somma, accade che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste un intero naturale $N = N(\epsilon)$ (indipendente da x) tale che per ogni $n \geq N$ e per ogni $\mathsf{x} \in \mathsf{D}$ si ha $\left\| \mathsf{s}(\mathsf{x}) - \sum_{i=0}^{n} \mathsf{f}(\mathsf{x}) \right\| < \epsilon$.

I32 c.06 Anche per queste serie di funzioni vale un criterio di Cauchy per la convergenza uniforme.

(1) Prop.: La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{f}_n(\mathsf{x})$ è uniformemente convergente in D sse essa converge in D e per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste un intero naturale $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq N$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$, quale che sia $\mathsf{x} \in D$, si ha

$$\left\| \mathsf{f}_{n+1}(\mathsf{x}) + \mathsf{f}_{n+2}(\mathsf{x}) + \cdots + \mathsf{f}_{n+p}(\mathsf{x}) \right\| < \epsilon \ .$$

Dim.: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scriviamo $\mathsf{s}(\mathsf{x}) \ := \ \sum_{i=0}^{n} \mathsf{f}_i(\mathsf{x})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $p \in \mathbb{P}$, introduciamo la scrittura $\mathsf{R}_{n,p}(\mathsf{x}) := \sum_{j=1}^{p} \mathsf{f}_{n+j}(\mathsf{x})$.
La disuguaglianza del secondo enunciato diventa $\left\| \mathbf{R}_{n,p}(\mathsf{x}) \right\| < \epsilon$.
Se questa relazione è verificata la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{u}_n(\mathsf{x})$ è convergente e possiamo introdurre la sua somma scrivendo $\mathsf{s}(\mathsf{x}) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{f}_n(\mathsf{x})$ e la **serie resto della serie** dopo l'addendo di posto n $\mathbf{R}_n(\mathsf{x}) \ := \ \sum_{p=1}^{+\infty} \mathsf{f}_{n+p}(\mathsf{x})$.
Evidentemente insieme alla serie che ha come somma $\mathsf{s}(\mathsf{x})$ è convergente anche la serie che ha come somma $\mathbf{R}_n(\mathsf{x})$ e si ha $\mathsf{s}(\mathsf{x}) = \mathsf{s}_n(\mathsf{x}) + \mathbf{R}_n(\mathsf{x})$.
Fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), esiste $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $||\mathbf{R}_{n,p}(\mathsf{x})|| < \epsilon$ e passando al limite per $p \to +\infty$, si ottiene $||\mathbf{R}_n(\mathsf{x})|| < \epsilon$.

Si conclude che la serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{f}_n(\mathsf{x})$ converge uniformemente in D sse il suo resto dopo l'addendo di posto n per $n \to +\infty$ converge a 0 uniformemente in D.

I32 c.07 Sono spesso utili alcuni criteri sufficienti di convergenza uniforme.

I32 d. doppi passaggi al limite per successioni e serie di funzioni

I32 d.01 Consideriamo una successione di funzioni $\mathsf{F} = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ aventi in comune il dominio $\mathsf{D} \subseteq_{ne} \mathbb{K}^{\times d}$; sia inoltre $\bar{\mathsf{x}} \in \mathbb{K}^{\times d}$ un punto aderente a D che potrebbe appartenere o meno a tale insieme. Alla F si possono applicare passaggi al limite sia per n tendente a $+\infty$ che per x tendente a $\bar{\mathsf{x}}$.

Se esistono finiti i limiti $\mathsf{L}_n := \lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \mathsf{f}_n(\mathsf{x})$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ o anche soltanto per tutti gli interi $n \geq N$ per un opportuno intero naturale N, può essere utile determinare se esiste e quanto vale il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{L}_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} \Big(\lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \Big) \; . \tag{1}$$

Se esistono finiti i limiti $\mathsf{f}(\mathsf{x}) := \lim_{n\to+\infty} \mathsf{f}_n(\mathsf{x})$ per tutti gli $\mathsf{x} \in \mathsf{D}$ o anche soltanto per tutti gli x che appartengono a D e a un opportuno intorno di $\bar{\mathsf{x}}$, può essere utile determinare se esiste e quanto vale il limite

$$\lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \mathsf{f}(\mathsf{x}) \;=\; \lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \Big(\lim_{n\to+\infty} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \Big) \; . \tag{2}$$

Le due costruzioni (1) e (2) sono chiamate **limiti iterati**; quando esistono entrambi potrebbero coincidere o meno.

I32 d.02 Si pone anche il problema dell'esistenza e del valore di un limite per la successione di funzioni $\mathsf{F} = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ quando si fanno tendere simultaneamente e indipendentemente n a $+\infty$ e x a $\bar{\mathsf{x}}$.
Si dice che la $\mathsf{F} = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ al tendere simultaneo e indipendente di $\langle n, \mathsf{x} \rangle$ a $\langle +\infty, \bar{\mathsf{x}} \rangle$ tende al limite L sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) esistono un intero positivo $N = N(\epsilon)$ e un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tali che per ogni $n \geq N$ e per ogni $\mathsf{x} \in \mathsf{D} \cap \mathsf{ball}(\bar{\mathsf{x}}, \delta) \setminus \{\bar{\mathsf{x}}\}$ si ha $||\mathsf{f}_n(\mathsf{x}) - \mathbf{L}|| < \epsilon$; più formalmente:

$$n \geq N \;,\; \mathsf{x} \in \mathsf{D} \setminus \{\bar{\mathsf{x}}\} \;,\; ||\mathsf{x} - \bar{\mathsf{x}}|| < \delta \implies ||\mathsf{f}_n(\mathsf{x}) - \mathsf{L}|| < \epsilon \; .$$

In questa situazione si dice che per $\langle n, \mathsf{x} \rangle \to \langle +\infty, \bar{\mathsf{x}} \rangle$ la $\mathsf{f}_n(\mathsf{x})$ ammette finito il **limite doppio** L e si usano scritture come

$$\lim_{\langle n,\mathsf{x}\rangle\to\langle+\infty,\bar{\mathsf{x}}\rangle} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) = \mathsf{L} \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty \;,\; \mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) = \mathsf{L} \; .$$

Definizioni analoghe e prevedibili riguardano i doppi limiti non finiti

$$\lim_{\langle n,\mathsf{x}\rangle\to\langle+\infty,\bar{\mathsf{x}}\rangle} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \;=\; \infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty \;,\; x\to\bar{x}} f_n(\mathsf{x}) \;=\; \pm\infty \; .$$

I32 d.03 Intuitivamente si può prevedere che nel caso di successioni di funzioni prive di elementi di irregolarità i tre limiti precedenti coincidono. La situazione è chiarita dall'enunciato che segue.
(1) Prop.: Consideriamo $\mathsf{D} \subseteq_{nz} \mathbb{K}^{\times d}$, la successione $\mathsf{F} = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ di funzioni di $\lceil \mathbb{K}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times e} \rceil$ e il punto $\bar{\mathsf{x}}$ aderente a D. Se sono verificate le ipotesi
(i) $\langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \rangle$ converge uniformemente in D;
(ii) per $n = 0, 1, 2, ...$ esistono finiti i limiti $\lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \mathsf{f}_n(\mathsf{x})$,
allora i due limiti iterati e il limite doppio della successione esistono e coincidono, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \right) \;=\; \lim_{\mathsf{x}\to\bar{\mathsf{x}}} \left(\lim_{n\to+\infty} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \right) \;=\; \lim_{\langle n,\mathsf{x}\rangle\to\langle+\infty,\bar{\mathsf{x}}\rangle} \mathsf{f}_n(\mathsf{x}) \; \blacksquare$$

I32 e. derivazione per serie

I32 e.01 In questa sezione ci poniamo il cosiddetto problema della **derivabilità addendo per addendo della somma di una serie di funzioni-RtR**; si tratta dell'estensione alle serie di funzioni-RtR del fatto che la somma di un numero finito di funzioni-RtR derivabili è una funzione derivabile e la sua derivata è ottenibile come la somma delle derivate delle funzioni addende.

Consideriamo un intervallo limitato non singoletto $I = [\text{a,b }]$ di $\mathbb{R}$ ed una successione di funzioni-RtR $F(x) = \langle n \in \mathbb{N} :| \ f_n(x) \rangle$ aventi come dominio I a valori reali e differenziabili in ogni punto di I.

Ci si chiede quali condizioni garantiscano che si possano considerare le funzioni esprimibili come somme, risp., della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ e della serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'(x)$ e che la seconda fornisca la derivata della prima.

I32 e.02 **Teorema** Siano verificate le seguenti ipotesi

(i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge in almeno un punto $\overline{x} \in [\text{a,b }]$;

(ii) ciascuna delle $f_n(x)$ in ogni punto $x \in [\text{a,b }]$ è dotata di derivata finita $f_n{}'(x)$;

(iii) la serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'(x)$ converge uniformemente per $x \in [\text{a,b }]$.

Queste implicano tre conseguenze:

(**a**) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente per ogni $\overline{x} \in [\text{a,b }]$;

(**b**) introdotta $s(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, questa funzione somma di serie è derivabile in $[\text{a,b }]$;

(**c**) la derivata della funzione somma di serie è ottenibile come somma della serie delle derivate:

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'(x) \ .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{P}$ consideriamo le somme

$$s_{n,p}(x) \ := \ f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x) \ \ ;$$

tali funzioni sono derivabili e si ha

$$s_{n,p}{}'(x) \ := \ f_n{}'(x) + \cdots + f_{n+p}{}'(x) \ \ ;$$

inoltre vale la relazione

$$(*) \qquad s_{n,p}(x) \ = \ s_{n,p}(\overline{x}) + (x - \overline{x}) s_{n,p}{}'(\xi) \quad \text{con} \quad \xi \in (\overline{x}, x) \quad \text{oppure} \quad \xi \in (x, \overline{x}) \ .$$

Conseguenza (**a**). Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), la (i) implica che esiste $N_1 = N_1(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_1$ e qualsiasi $p \in \mathbb{P}$ si ha $|s_{n,p}(\overline{x})| < \epsilon$.

L'ipotesi (iii) implica che esiste $N_2 = N_2(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_2$, per qualsiasi $p \in \mathbb{P}$ e qualsiasi $x \in [\text{a,b }]$ si ha $|s_{n,p}{}'(x)| < \epsilon$.

La relazione $(*)$, le due precedenti disuguaglianze e la $|x - \overline{x}| \leq b - a$ implicano

$$|s_{n,p}(x)| \ \leq \ \epsilon + (b - a)\epsilon \ = \ \epsilon(1 + b - a) \ .$$

Questa per l'arbitrarietà di ϵ e in conseguenza del criterio generale di convergenza uniforme [c02] implica la convergenza uniforme in **[**a,b **]** della $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, cioè (**a**).

Conseguenza (**b**). Fissiamo $x_1 \in$ **[**a,b **]**, consideriamo x variabile in **[**a,b **]** $\setminus \{x_1\}$ e prendiamo in esame la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \ .$$

Essa per ogni $x \neq x_1$ è convergente al rapporto $\dfrac{s(x) - s(x_1)}{x - x_1}$; si tratta di dimostrare che essa è uniformemente convergente.

Introdotte per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $p \in \mathbb{P}$ le funzioni

$$R_{n,p}(x) \ := \ \frac{s_{n,p}(x) - s_{n,p}(x_1)}{x - x_1} \ = \ \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{f_i(x) - f_i(x_1)}{x - x_1} \ ,$$

in conseguenza della $(*)$ si ottiene $R_{n,p}(x) = {s_{n,p}}'(\xi)$ e per l'ipotesi (iii) esiste l'intero naturale $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq N$ e qualsiasi p si ha $|R_{n,p}| = |{s_{n,p}}'(\xi)| < \epsilon$.
Questa disuguaglianza garantisce la convergenza uniforme, cioè (**b**).

Conseguenza (**c**). Alla serie dei rapporti incrementali $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}$ si può applicare il teorema del passaggio al limite per $x \to x_1$, in quanto essa converge uniformemente rispetto ad x ed esistono tutti i limiti $\lim_{x \to x_1} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \ = \ {f_n}'(x)$. Quindi si può affermare che

$$s'(x_1) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'(x_1) \ .$$

L'arbitrarietà dell'ascissa $x_1 \in I$ comporta la derivabilità per serie ∎

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php