1

Capitolo G31
triangoli e circonferenze

Contenuti delle sezioni

a. triangoli [1] p. 2
b. circonferenze [1] p. 9
c. congruenze e similitudini di triangoli e circonferenze p. 11
d. centri e circonferenze dei triangoli p. 14
e. varianti del teorema di Pitagora p. 18
f. generalizzazioni del teorema di Pitagora p. 20
g. teorema di Ceva e dintorni p. 21
h. Eulero, Fermat, Napoleone e Morley sui triangoli p. 24
i. formule per l'area dei triangoli p. 27
j. altre proprietà metriche dei triangoli p. 29

30 pagine

G31 0.01 Questo capitolo è dedicato a numerose proprietà, in gran parte classiche, delle figure piane più semplici, le circonferenze e i triangoli.

Sono presentate le definizioni e le proprietà considerate più importanti seguendo in parte il criterio della consequenzialità degli enunciati e delle dimostrazioni e in parte l'opportunità di render disponibile un testo di facile consultazione.

Molti risultati non sono dimostrati, in particolare quelli che sono stati incontrati nelle presentazioni della geometria elementare.
Alcuni risultati che compaiono in queste pagine sono stati trovati anche in altri capitoli, ma vengono ripresentati qui per completezza del presente discorso.

Alberto Marini

G31 a. triangoli [1]

G31 a.01 Il termine **triangolo** viene usato per figure geometriche che possono essere introdotte formalmente come strutture che presentano caratteristiche differenti ma che possono essere collegate piuttosto saldamente secondo le relazioni di equivalenza e di ridotto arricchimento.
Del termine triangolo si possono quindi incontrare accezioni un poco diverse.

È quindi opportuno che la trattazione dei triangoli sia svolta con una certa elasticità di termini e di notazioni.
In taluni momenti è opportuno rilevare le differenze tra le diverse accezioni e va curata la precisione.
In molti altri si tende ad evitare pesantezze e ripetizioni e conviene esprimersi in modo semplificato identificando/ confondendo accezioni diverse e quindi indulgendo ad abusi di linguaggio, confidando che il contesto consenta al lettore di sciogliere tutte le ambiguità.

Osserviamo che situazioni espositive di questo genere si riscontrano in molti capitoli della matematica e in particolare nella trattazione di tante altre figure geometriche.

G31 a.02 La definizione dalla quale riteniamo opportuno iniziare è quella di **triangolo orientato**, figura piana determinata da una terna ciclica $\langle_{cy} A, B, C\rangle$ di punti del piano sui reali, cioè dal trio delle permutazioni cicliche di una terna di punti-RR, nella fattispecie $\{\langle A, B, C\rangle, \langle B, C, A\rangle, \langle C, A, B\rangle\}$.
I punti della terna sono detti **vertici del triangolo orientato**.
La terna ciclica $\langle_{cy} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\rangle$ dei segmenti orientati delimitati dai tre duetti di vertici successivi sono detti **lati orientati del triangolo orientato**.

Usando termini vettoriali possiamo definire triangolo orientato una terna ciclica di vettori applicati del piano $\langle_{cy} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\rangle$ con i ruoli dei lati orientati e possiamo chiamare **perimetro orientato del triangolo** il cammino chiuso ciclico $\langle_{cy} A, B, C\rangle$.

Per individuare il suddetto triangolo orientato è pratica la notazione $\overrightarrow{\triangle}(A, B, C)$.
Evidentemente $\overrightarrow{\triangle}(A, B, C) = \overrightarrow{\triangle}(B, C, A) = \overrightarrow{\triangle}(C, A, B)$.

Il triangolo $\overrightarrow{\triangle}(A, B, C)$ si dice **triangolo degenere** sse i suoi tre vertici appartengono ad una sola retta. questo accade in particolare se due dei tre vertici coincidono, ovvero se uno dei tre lati si riduce a un punto.

G31 a.02 Consideriamo due esempi di triangoli orientati:

In questa figura per le componenti con notazioni (vertici, angoli interni e lati orientati) usiamo nel modo il più possibile sistematico notazioni che chiamiamo notazioni tipiche.
In seguito effettueremo molte altre scelte di notazioni da considerare tipiche per i molti generi di componenti (punti, segmenti, rette, circonferenze, ...) e di parametri (lunghezze, ampiezze angolari, aree, ...) ottenibili con costruzioni specifiche applicabili a tutti o alla massima parte dei triangoli e utili per affrontare i molti problemi geometrici nei quali si devono utilizzare dei triangoli.

La adozione preferenziale delle notazioni tipiche presenta vari vantaggi: facilità di distinguere e memorizzare le entità, possibilità di uso di locuzioni concise di significato implicito, possibilità di avvalersi di contesti consolidati dall'uso prevalente o anche esclusivo e conseguente maggiore possibilità di semplificazioni.

La figura mostra che si hanno due versi di percorrenza della frontiera di un triangolo orientato (non-degenere): il verso positivo, come per la prima figura, ed il verso negativo come per la seconda.
Si osserva che in tutti i casi i punti del triangolo chiuso appartengono ai tre semipiani che si trovano alla sinistra delle tre rette orientate definite dai tre lati orientati del triangolo.

Si dice **triangolo orientato opposto** di un triangolo $\overrightarrow{\triangle}(A,B,C)$ la figura che si ricava dalla terna ciclica riflessa della $\langle_{cy} A,B,C\rangle$, cioè dalla

$$\langle_{cy} A,C,B\rangle = \langle_{cy} C,B,A\rangle = \langle_{cy} B,A,C\rangle \quad \text{ossia da} \quad \overrightarrow{\triangle}(CBA) = \overrightarrow{\triangle}(BAC) = \overrightarrow{\triangle}(ACB).$$

Abbiamo quindi la relazione $\overrightarrow{\triangle}(C,B,A) = \left(\overrightarrow{\triangle}(A,B,C)\right)^{\leftarrow}$.

Ad ogni triangolo orientato $\mathbf{T}$ attribuiamo un segno che genericamente denotiamo con $\mathrm{sign}(\mathbf{T})$ che poniamo uguale a $+1$ sse il verso di percorrenza del suo perimetro orientato è positivo e uguale a -1 nel caso di verso negativo.

Ovviamente passando da un triangolo orientato al suo opposto si scambiano i caratteri positivo e negativo dei versi di percorrenza, ossia si moltiplica per -1 il suo segno.

G31 a.03 Si definisce **triangolo nonorientato** un duetto costituito da un triangolo orientato e dal suo opposto. Per esso scriveremo

$$\triangle(A,B,C) \;:=\; \left\{\overrightarrow{\triangle}(A,B,C), \overrightarrow{\triangle}(C,B,A)\right\} \;.$$

Questa notazione, quando i vertici sono dati da espressioni non elaborate conviene semplificarla nella $\triangle\, ABC$.

Viceversa da un triangolo nonorientato si ricavano due triangoli orientati che corrispondono ai due possibili versi di percorrenza della poligonale chiusa che costituisce la sua frontiera.

G31 a.04 Stante questa stretta corrispondenza 1 a 2 tra triangoli nonorientati ed orientati accade che le proprietà dei primi si sanno ricavare facilmente da quelle dei secondi e viceversa.
Accade inoltre che per la maggior parte degli sviluppi, almeno tra quelli più visualizzabili, interessino maggiormente le proprietà dei triangoli nonorientati. Quindi conviene enunciare separatamente le proprietà dei triangoli orientati solo quando i sensi e i versi di percorrenza hanno effettiva influenza, come peraltro accade per varie espressioni e formule utili ai calcoli.

Per gran parte degli sviluppi basilari, per evitare appesantimenti (e confidando nella capacità del lettore di avvalersi del contesto e di chiarire le distinzioni più sottili) conviene limitarsi a trattare i triangoli nonorientati e di conseguenza prendere in considerazione solo segmenti nonorientati, rette nonorientate, angoli e aree senza segno.

Nello svolgimento di molte considerazioni sui triangoli conviene anche usare il linguaggio semplificato nel quale si confondono entità come i segmenti e le loro lunghezze, gli angoli e loro ampiezze, le figure bidimensionali e le loro aree.
Questi atteggiamenti, come vedremo, sono consigliabili anche per gli altri poligoni, le circonferenze e molte altre figure.

Altre semplificazioni di linguaggio saranno consigliate anche per considerazioni sulle classi di similitudine delle figure geometriche e in generale sulle classi di entità collegate da simmetrie.

G31 a.05 Per semplificare alcune scritture sui triangoli orientati nel seguito introduciamo il simbolo $\mathbf{T} := \overrightarrow{\triangle}(ABC)$.

Il circuito della forma $\langle_{cy} A,B,C\rangle$ viene detto **perimetro orientato del triangolo orientato T**; si dice invece **perimetro del triangolo T** il percorso associato al perimetro orientato; tale percorso si denota con $\mathsf{perim}(\mathbf{T})$.

L'insieme dei punti dei segmenti piani che costituiscono il perimetro di $\mathbf{T}$ si dice invece **frontiera del triangolo** orientato e con una notazione di portata generale si denota con $\mathsf{Frntr}(\mathbf{T})$.

Spesso è utile considerare l'insieme dei punti del piano che sono "delimitati" dal perimetro di un triangolo orientato, cioè dei punti che fanno parte di qualche segmento che ha come estremità due punti che appartengono a due lati diversi del triangolo. Come vedremo in G34a06 questo insieme costituisce la cosiddetta chiusura convessa dei tre vertici del triangolo; si osserva infatti che la frontiera del triangolo fa parte della chiusura convessa di $\mathbf{T}$ e quindi di essa fanno parte tutti i punti delimitati dal perimetro. Questo insieme si può dunque ragionevolmente denotare con $\mathsf{Cnvx}(A, B, C)$.
Talora serve considerare anche l'insieme dei soli punti interni di $\mathbf{T} := \mathsf{Cnvx}(A, B, C)$, cioè l'insieme ottenuto eliminando dal triangolo chiuso $\mathbf{T}$ i punti della sua frontiera $\mathsf{Frntr}(\mathbf{T})$ lo chiameremo **triangolo aperto** o **interiore del triangolo** $\mathbf{T}$ e per esso scriviamo con notazioni di ampia portata

$$\mathsf{Intrn}(\mathbf{T}) \;:=\; \mathsf{Cnvx}(\mathbf{T}) \setminus \mathsf{Frntr}(\mathbf{T}) \;.$$

Queste costruzioni si possono effettuare anche per gli altri poligoni e per tante altre figure piane e gli insiemi introdotti consentono spesso di servirsi vantaggiosamente di considerazioni e formule insiemistiche per trattare triangoli e altre figure geometriche.

G31 a.06 Le definizioni date consentono di avere a che fare anche con triangoli molto impoveriti, dei triangolo degeneri con i tre vertici allineati o addirittura coincidenti.
Per un tale triangolo la chiusura convessa si riduce a un segmento o addirittura a un punto.
In genere questo caso estremo viene escluso; se fosse ammesso dovrebbero essere segnalate varie eccezioni nei risultati e dovrebbero essere usate varie annotazioni specifiche.

Ricordiamo anche il termine trigono sinonimo di triangolo, ma oggi pochissimo usato; va comunque osservato che da esso deriva trigonometria.

G31 a.07 Come si è detto per argomentare sopra triangoli è utile adottare sistematicamente le notazioni tipiche peculiari in grado di facilitare la lettura di varie definizioni e di vari risultati.

Introduciamo le prime notazioni tipiche per il triangolo generico, che tendenzialmente consideriamo nondegenere.
Denotiamo i suoi vertici con A, B e C e usiamo le scritture $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ per denotare, risp., i suoi lati $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ed $\overrightarrow{AB}$; le lunghezze di questi segmenti, quindi, sono individuate, risp., da $a := \mathsf{len}(\overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{a}|$, $b := \mathsf{len}(\overrightarrow{CA}) = |\overrightarrow{b}|$ e $c := \mathsf{len}(\overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{c}|$.
Quando non interessa l'orientazione della figura i lati sono i 3 segmenti BC, CA e AB. Inoltre spesso si può semplificare il linguaggio chiamando lati del triangolo sia i segmenti della frontiera che le rispettive lunghezze a, b e c.

Per denotare gli angoli $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$, cioè gli angoli interni aventi come vertici, risp., A, B e C, usiamo come lettere tipiche, risp., le lettere greche α, β e γ. Questi tre segni spesso vengono usati in modo semplificato anche per denotare le ampiezze dei rispettivi angoli. Queste notazioni sono adottate sia per trattare angoli con segno, che angoli senza segno, a seconda delle esigenze del momento espositivo.

Talvolta accade di confrontare due triangoli per rilevare relazioni tra elementi omologhi (lunghezze di segmenti, ampiezze di angoli, ...); in questi casi se per il primo triangolo si usano le notazioni che consideriamo tipiche, per il secondo conviene usare notazioni come A', B', C', a', b', c', α', β' e γ'; oppure come $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$.

Il termine **perimetro di un triangolo** $\triangle ABC$ viene usato per individuare sia l'insieme dei punti costituenti i suoi lati, cioè $a \cup b \cup c$, sia la loro lunghezza complessiva, cioè $|a| + |b| + |c|$.
Spesso si fa riferimento al cosiddetto **semiperimetro del triangolo**, la metà della lunghezza del suo perimetro, cioè $\dfrac{a+b+c}{2}$; per tale numero positivo useremo s come notazione tipica.

G31 a.08 Rivolgiamoci ancora al triangolo orientato $\mathbf{T} = \overrightarrow{\triangle}(A, B, C)$ per estendere le sue notazioni tipiche.
È evidente che i suoi tre lati orientati $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ sono in corrispondenza biunivoca con le tre rette orientate $\overrightarrow{-BC-}$, $\overrightarrow{-CA-}$ e $\overrightarrow{-AB-}$, nonché con le tre semirette (orientate) $\overrightarrow{BC-}$, $\overrightarrow{CA-}$ e $\overrightarrow{AB-}$.
Ciascuna di queste semirette con la semiretta del lato orientato successivo forma un angolo con segno che si dice **angolo esterno del triangolo orientato**. In dettaglio scriviamo:

$\overline{\alpha} := \angle(\overrightarrow{CA-}\ A\ \overrightarrow{AB})$, angolo esterno in A,
$\overline{\beta} := \angle(\overrightarrow{AB-}\ B\ \overrightarrow{BC})$, angolo esterno in B,
$\overline{\gamma} := \angle(\overrightarrow{BC-}\ C\ \overrightarrow{CA})$, angolo esterno in C.

Si osserva che un triangolo orientato ha verso positivo sse i tre angoli esterni hanno ampiezze positive, mentre presenta verso negativo sse i tre angoli esterni hanno ampiezze negative.

Gli angoli associati a un triangolo nonorientato devono essere considerati senza segno, o se si preferisce di ampiezza positiva.
Inoltre si definisce **angolo esterno di un triangolo nonorientato** ciascuno dei 6 angoli che sono adiacenti e supplementari di un angolo interno.

(1) Prop.: L'ampiezza di ogni angolo esterno di un triangolo nonorientato è data dalla somma delle ampiezze dei due angoli interni che non gli sono adiacenti. Chiaramente i due angoli esterni di ciascun vertice sono angoli opposti al vertice e quindi hanno ampiezze uguali.
Se si adotta il linguaggio semplificato per il triangolo nonorientato $\triangle(A, B, C)$ ciascuna delle scritture $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ e $\overline{\gamma}$ viene usata per entrambi gli angoli esterni corrispondenti.
Semplificando ulteriormente queste tre scritture vengono usate anche per le rispettive ampiezze.

Ogni triangolo $\triangle ABC$ nondegenere si trova in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle tre rette $\{\overline{-AB-}, \overline{-BC-}, \overline{-AC-}\}$, Questo insieme di rette viene chiamato **triangolo proiettivo** e costituisce un fondamentale soggetto della `geometria proiettiva (wi)` [G17].

In accordo con le definizioni delle aree con segno delle figure-ZZ in B24a e B24b, ad ogni triangolo orientato con perimetro antiorario va attribuita un'area positiva e a ogni triangolo orientato con perimetro orario un'area negativa.
Inoltre al primo tipo di triangolo si possono attribuire angoli interni con ampiezze positiva, al secondo tipo ampiezze negative.

G31 a.09 (1) Prop.: Per ogni vertice di un triangolo nondegenere, l'angolo al vertice è complementare di ciascuno dei due angoli esterni.

Dim.: Consideriamo il triangolo $\triangle(A, B, C)$, il suo vertice vertice B, il relativo angolo interno β, lettera che usiamo anche per esprimere la sua ampiezza, e il corrispondente angolo esterno $\overline{AB}\ \widehat{B}\ \overline{BC}$.

Tracciamo la parallela alla $\overline{-AB-}$ passante per C e la parallela alla $\overline{-AC-}$ passante per B; chiamiamo D il punto in cui esse si intersecano. L'ampiezza dell'angolo $\overline{\beta}$ è la somma delle ampiezze degli angoli $\overline{AB}\,\widehat{B}\,\overline{BD}$ e $\widehat{DBC}$. Il primo di questi e $\widehat{CAB}$ sono trasformati l'uno nell'altro per traslazione e quindi hanno la stessa ampiezza, che denotiamo semplicemente con α. Il secondo $\widehat{DBC}$ e $\widehat{BCA}$ sono alterni interni e quindi hanno la stessa ampiezza, che denotiamo semplicemente con γ. Dunque gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBD}$ e $\overline{AB}\,\widehat{B}\,\overline{BD}$ accostati costituiscono un angolo piatto. Vale quindi la relazione tra ampiezze angolari

$$\alpha + \beta + \gamma \;=\; \pi \;\blacksquare$$

(2) Prop.: La somma degli angoli esterni di un triangolo costituisce un angolo giro, ossia

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} \;=\; 2\,\pi \;.$$

Dim.: Si ricava direttamente dalle uguaglianze tra ampiezze

$$\overline{\beta} = \alpha + \gamma \;\;,\;\; \overline{\gamma} = \alpha + \beta \;\;,\;\; \overline{\alpha} = \beta + \gamma \;\;,\;\; \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 2\,(\alpha + \beta + \gamma) = 2\,\pi \;\blacksquare$$

(3) Prop.:

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 3\,\overline{\gamma} \iff \gamma = \frac{\pi}{2} = \overline{\gamma} \;.$$

G31 a.10 Esaminiamo il generico triangolo $\mathbf{T} := \triangle ABC$ per il quale usiamo notazioni tipiche.

(1) Prop.: Per le lunghezze dei lati di $\mathbf{T}$ valgono le seguenti relazioni note come **disuguaglianze triangolari**:

$$|b-c| < a < b+c \;\;,\;\; |c-a|b < c+a \;\;,\;\; |a-b| < c < a+b \;.$$

(2) Prop.: Per le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli interni di $\mathbf{T}$ valgono le seguenti relazioni:

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \iff a \leq b \leq c \;.$$

G31 a.11 Una prima classificazione dei triangoli nonorientati riguarda le ampiezze dei loro angoli.

Si dice **triangolo acutangolo** un triangolo con i tre angoli interni tutti acuti, ovvero un triangolo nel quale l'angolo di maggiore ampiezza è acuto.

Si dice **triangolo rettangolo** un triangolo con un angolo retto (i due angoli rimanenti essendo necessariamente acuti); denoteremo con **TrngRect** l'insieme dei triangoli rettangoli.

Segnaliamo anche che si usa il termine **triangolo obliquo** per qualificare un triangolo nonrettangolo, cioè privo di un angolo interno di 90°.

Si dice **triangolo ottusangolo** un triangolo che possiede un angolo ottuso; i due angoli rimanenti sono necessariamente acuti).

Una seconda classificazione dei triangoli nonorientati riguarda le lunghezze dei loro lati.
Si dice **triangolo scaleno** un triangolo con i tre lati aventi lunghezze diverse. In altre parole un triangolo si dice scaleno sse sono definiti un suo lato minore e un suo lato maggiore.
In forza di a09(2) un triangolo è scaleno sse i suoi angoli hanno ampiezze diverse.
Esistono triangoli scaleni acutangoli, rettangoli e ottusangoli.

Dopo che avremo dimostrato a11(2) potremo affermare che un triangolo è scaleno sse è privo di assi di simmetria.

G31 a.12 Definiamo **triangolo isoscele** un triangolo con due angoli di uguale ampiezza, cioè un triangolo nonscaleno.
Si osserva che esistono triangoli isosceli acutangoli, rettangoli ed ottusangoli.

Vedremo che i triangoli isosceli sono utilizzati in molte costruzioni e dimostrazioni della geometria piana euclidea: introduciamo quindi la notazione **TrngIso** per l'insieme dei triangoli isosceli e la notazione **TrnglRectIso** per l'insieme dei triangoli rettangoli e isosceli.

(1) Prop.: (**pons asinorum**) Un triangolo $\triangle ABC$ ha due lati uguali sse sono uguali i due angoli diversi da quello compreso tra i due lati, ad esempio $CA = BC \iff \widehat{CAB} = \widehat{ABC}$.
Dim.: . . . . . .
(2) Prop.: Un triangolo è isoscele sse è dotato di un asse di simmetria.

G31 a.13 Ogni triangolo isoscele non equilatero è caratterizzato dall'ampiezza del suo angolo diverso dai due rimanenti; denotiamolo con $\widehat{C}$.
Esistono triangoli isosceli acutangoli (quelli con $\widehat{C} < 90°$), rettangoli (con $\widehat{C} = 90°$) e ottusangoli (con $\widehat{C} > 90°$).

G31 a.14 Particolari triangoli isosceli acutangoli sono i triangoli con tre lati uguali, cioè i poligoni chiamati **triangoli equilateri**.

(1) Prop.: Consideriamo il triangolo equilatero $\triangle ABC$ per il quale adottiamo le notazioni tipiche..
Esso ha i tre lati uguali sse ha i tre angoli uguali sse presenta tre assi di simmetria.

Dim.: Dato che presenta due lati uguali, $AB = BC$ per a11(1) presenta due angoli uguali, $\alpha = \beta$; essendo inoltre $AC = AB$ deve essere anche $\beta = \gamma$; di conseguenza presenta tre assi di simmetria.
Se presenta tre assi di simmetria devono valere le uguaglianze $AB = BC = CA$ e $\alpha = \beta = \gamma$ ∎

I triangoli equilateri vengono chiamati anche **triangoli equiangoli**; e **triangoli regolari**.

I triangoli regolari sono particolari triangoli isosceli, più precisamente sono i triangoli isosceli con gli angoli interni di ampiezza pari a $60° = \dfrac{\pi}{3}$.

In effetti tutti i triangoli regolari sono simili. La classe di similitudine dei triangoli equilateri è ripartibile nelle classi di congruenza indicizzabili con la lunghezza dei lati oppure con la sua altezza.

Vedremo inoltre che un triangolo regolare di lato ℓ presenta a
le tre altezze tutte aventi lunghezza $h = \sqrt{\ell^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$,
circumraggio pari a $R = \dfrac{2}{3}\,h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\ell \approx 0.57735\,\ell$,
inraggio $r = \dfrac{1}{3}\,h = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,\ell \approx 0.28867\,\ell$,
area data da $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\,\ell\,h = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 = \dfrac{h^2}{\sqrt{3}} \approx 0.43301\,\ell^2$.

G31 a.15 Consideriamo il triangolo rettangolo $\mathbf{T} = \triangle ABC$ con $\beta = \angle ABC$ angolo retto. Il lato AC viene chiamato **ipotenusa** e i lati AB di lunghezza c e BC di lunghezza A sono detti **cateti**. L'area di $\mathbf{T}$ è data da $\dfrac{b\,c}{2}$

Semiperimetro di $\mathbf{T}$ è $p = \dfrac{a+b+c}{2} = a+b-r = c+r$.

Con i termini che definiremo in si dimostrano facilmente le proprietà che seguono.

L'ortocentro del triangolo rettangolo $\mathbf{T}$ è il vertice C relativo al suo angolo retto.

Il circumcentro di $\mathbf{T}$ è il punto medio di AB e questo segmento è diametro della sua circonferenza circoscritta, esprimibile come $\mathit{Circf}\left(\langle \dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2} \rangle, \dfrac{c}{2}\right)$.

La circonferenza inscritta in $\mathbf{T}$ ha raggio r tale che $a-r+b-r=c$, cioè $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

IV

G31 b. circonferenze [1]

G31 b.01 Il modo più diretto per individuare una circonferenza nel piano-RR, cioè il luogo del piano costituito dai punti che presentano una unica distanza da un punto dato detto centro della circonferenza, consiste nel fornire tale centro e il suo raggio e di avvalersi del teorema di Pitagora [G27c, G27e].
Scriviamo quindi $\mathit{Circf}(Z,r)$ per denotare la circonferenza del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avente centro $Z=\langle x_Z, y_Z\rangle$ e raggio r.

Il cerchio della circonferenza, cioè la chiusura convessa di $\mathit{Circf}(Z,r)$, sarà invece denotata con $\boldsymbol{\mathit{Circl}}(Z,r)$. Queste notazioni si riconducono subito a quelle riguardanti l'equazione della circonferenza e la disequazione del cerchio:

$$\mathit{Circf}(Z,r)=\textsf{Soln}((x-x_Z)^2+(y-y_Z)^2=r^2) \quad , \quad \boldsymbol{\mathit{Circl}}(Z,r)=\textsf{Soln}((x-x_Z)^2+(y-y_Z)^2\le r^2)\ .$$

Si osservi che $\boldsymbol{\mathit{Circl}}(Z,r)$ è un insieme chiuso; esso comprende anche la sua frontiera che non è altro che $\boldsymbol{\mathit{Circl}}(Z,r)$.
Il corrispondente insieme piano aperto è $\boldsymbol{\mathit{Circl}}(Z,r)\setminus\mathit{Circf}(Z,r)$, figura che può chiamarsi **cerchio aperto** di centro Z e raggio r.

L'equazione che caratterizza $\mathit{Circf}(Z,r)$ può riscriversi nella forma

$$x^2+y^2-2xx_Z-2yy_Z+{x_Z}^2+{y_Z}^2-r^2=0,$$

Quindi un'equazione polinomiale di secondo grado della forma

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

caratterizza una circonferenza con il centro nel punto $\langle x_Z, y_Z\rangle=\left\langle -\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right\rangle$ sse si può individuare il suo raggio $r\in\mathbb{R}_{0+}$. Questo avviene sse si può scrivere $c=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-r^2$, cioè sse $a^2+b^2-4c\ge 0$.

G31 b.02 Ogni circonferenza $\mathit{Circf}(Z,r)$ ripartisce il piano cartesiano in tre sottoinsiemi: la circonferenza stessa, l'insieme dei **punti interni alla circonferenza** $\textsf{Soln}\Big((x-x_Z)^2+(y-y_Z)^2<r^2\Big)$ e l'insieme dei **punti esterni alla circinferenza** $\textsf{Soln}\Big((x-x_Z)^2+(y-y_Z)^2>r^2\Big)$.

Due punti A e B su una circonferenza definiscono due archi: quello tracciato da un punto che si muove in verso positivo o antiorario da A a B che denotiamo con $A^\frown B$ e quello tracciato da un punto che si muove in verso positivo o antiorario da B ad A che denotiamo con $B^\frown A$.

Si possono considerare anche archi con segno: ai suddetti si assegna il segno positivo, mentre si assegna il segno negativo agli archi che pensiamo tracciati da un punto che si muove in verso negativo, ossia antiorario: i due archi negativi delimitati da A e B li denotiamo, risp., con $-A^\frown B$ e $-B^\frown A$.

Due punti A e B diversi di una circonferenza $\mathbf{C}$ definiscono anche il segmento AB che viene chiamato **corda della circonferenza** $\mathbf{C}$. La retta che contiene tale corda, cioè $\overline{-AB-}$, è detta **secante della circonferenza**.
Il segmento che ha come estremi il centro Z ed M, il punto medio della corda, si dice **apotema della corda** AB; con tale termine talora si designa la lunghezza del suddetto segmento.
Il segmento appartenente al raggio della circonferenza passante per M che collega M stesso alla circonferenza si dice **sagitta delle corda**.

Se si avvicina indefinitamente B ad A la lunghezza della corda tende a 0 e la secante tende a una retta chiamata **tangente alla circonferenza**.

G31 b.03 Consideriamo una circonferenza $\mathbf{C} = \mathit{Circf}(Z, r)$ e un suo arco $A^\frown B$. Si dice **angolo alla circonferenza** sull'arco $A^\frown B$ della $\mathbf{C}$ ogni angolo $\widehat{APB}$ con P punto di $\mathbf{C} \setminus A^\frown B$. Tutti gli angoli alla circonferenza su un dato arco hanno la stessa ampiezza.
Si dice **angolo al centro** sull'arco $A^\frown B$ della $\mathbf{C}$ l'angolo $\widehat{AZB}$. L'ampiezza di un angolo al centro è la metà dell'ampiezza degli angoli alla circonferenza.

Relativamente alla circonferenza $\mathbf{C}$ consideriamo una corda $\overline{AB}$, un triangolo $\triangle ABP$ inscritto e la tangente $\mathbf{t}$ nel punto A. L'angolo $\mathbf{t}\widehat{AB}$ ha la stessa ampiezza di $\widehat{APB}$.

G31 b.04 Si dice **settore circolare** corrispondente all'arco $A^\frown B$ la chiusura convessa di $A^\frown B \cup \{Z\}$.
Se ϕ denota l'ampiezza dell'angolo al centro $\widehat{AZB}$, la lunghezza dell'arco è $s = \phi\, r$ e l'area del settore circolare è $\dfrac{s\, r}{2} = \dfrac{\phi\, r^2}{2}$. Si possono considerare anche settori circolari con segno associati ad archi con segno ai quali si attribuiscono aree con segno seguendo la solita regola del circuito che delimita l'area positiva sse tracciato in verso positivo.
La lunghezza della circonferenza $\mathit{Circf}(Z, r)$ è $2\,\pi\, r$; questa affermazione corrisponde alla stessa definizione del numero π [B42d02].

L'area della circonferenza $\mathit{Circ}(Z, r)$ è πr^2, grandezza evidentemente indipendente dal centro, ovvero invariante per traslazione.

G31 b.05 Relativamente alla circonferenza $\mathbf{C}$, consideriamo due corde non parallele $\overline{PQ}$ ed $\overline{RS}$ e le rette $\overline{-PQ-}$ ed $\overline{-RS-}$ che le contengono; denotiamo con I il punto nel quale le due rette si intersecano. In questo scenario ammettiamo anche la possibilità che ciascuna delle corde si riduca a un punto e di conseguenza la retta che la contiene si riduca a una tangente della circonferenza: se $P = Q$ si la tangente alla circonferenza in P e se $R = S$ la tangente in R. Chiaramente I è un punto interno a $\mathbf{C}$ sse i due estremi di una corda si alternano ai due estremi dell'altra, è esterno sse accade il contrario.
Consideriamo i due segmenti PI e QI su $\overline{-PQ-}$ e i due segmenti RI ed SI su $\overline{-RS-}$.

(1) Prop.: $PI \cdot QI = RI \cdot SI$.

G31 b.06 Consideriamo una circonferenza e una sua corda P_1P_2. L'asse di questo segmento si costruisce facilmente con riga e compasso ed è il luogo dei punti del piano equidistanti dai due estremi P_1 ed P_2.

(1) Prop.: Dati tre punti del piano non allineati P_1, P_2 e P_3, esiste esattamente una circonferenza che passa per tali punti.

Dim.: Consideriamo gli assi dei tre segmenti P_1P_2, P_2P_3 e P_1P_3; il punto in cui si intersecano i primi due assi è equidistante da P_1 e P_2 e da P_2 e P_3, cioè da tutti i tre punti; quindi deve appartenere all'asse di P_1P_3 ∎

La suddetta circonferenza si denota con $\mathit{Circf}_{PPP}(P_1, P_2, P_3)$ e viene detta **circonferenza circoscritta al triangolo** $\triangle P_1P_2P_3$ o **circumcirconferenza del triangolo**. $\triangle P_1P_2P_3$; la riprenderemo più avanti.

Inoltre denotiamo con $\boldsymbol{\mathit{Circl}}_{PPP}(P_1, P_2, P_3)$ il cerchio ottenuto come chiusura convessa di $\mathit{Circf}_{PPP}(P_1, P_2, P_3)$, cioè il cerchio chiuso delimitato da questa circonferenza.

G31 c. congruenze e similitudini di triangoli e circonferenze

G31 c.01 Ricordiamo che le isometrie, cioè le trasformazioni che lasciano invariate le distanze tra i punti, sono state introdotte per il piano-ZZ [B22c] e per il piano-QQ [B31g].
Tra le isometrie di un piano si distinguono le traslazioni, le rotazioni e le riflessioni.

Due figure del piano-RR si dicono **figure congruenti** sse sono ottenibili l'una dall'altra applicando una isometria. La nozione di congruenza ha portata anche più generale, come emerge in particolare da B46; qui ci limitiamo a considerarla per le figure basilari, cioè per le circonferenze e i triangoli.

Si osserva che la relazione di congruenza tra le figure di un certo genere (circonferenze, triangoli o altro) è una equivalenza. Questo fatto è strettamente collegato con il fatto che l'insieme delle isometrie del piano-RR costituisce un gruppo di trasformazioni [B31g e B41g].
Chiaramente l'individuazione di proprietà di un certo genere di figure che sono invarianti per isometria consente notevoli economie di pensiero: molte proprietà trovate per una figura Φ si trasformano agevolmente in proprietà possedute dalla figura Φ' ottenuta applicando una data isometria T; in particolare le proprietà invarianti sono applicabili direttamente alla Φ'.

Dunque queste proprietà possono essere applicate a tutte le figure di una classe di congruenza.
Quindi può essere opportuno formulare queste proprietà per le intere classi di congruenza.
Risulta comodo, sia sul piano della presentazione discorsiva che su quella che si serve di espressioni e formule, attribuire le proprietà di una classe di congruenza a una unica figura rappresentativa.
Si presentano quindi spesso enunciazioni semplificate nelle quali si parla di una generica circonferenza e/o di un generico triangolo, mentre le enunciazioni potrebbero riguardare classi di congruenza di tali figure. I vantaggi espositivi in effetti risultano evidenti.

L'orientazione di un triangolo è invariante in seguito all'azione di traslazioni, rotazioni e omotetie, mentre si scambia con l'orientazione opposta in seguito all'azione di una qualsiasi riflessione.

G31 c.02 Enunciamo alcune frequentemente invocate condizioni necessarie e sufficienti per la congruenza di due triangoli. che denotiamo, risp., con $\mathbf{T} = \triangle ABC$ e $\mathbf{T}' = \triangle A'B'C'$ e per le cui componenti usiamo notazioni tipiche.

(1) Prop.: Due triangoli $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ sono congruenti,

(a) sse hanno i corrispondenti lati uguali; cioè sse vale una condizione della forma $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$; a questa condizione si dà il nome di **condizione SSS** (da *side, side, side*);

(b) sse presentano un angolo della stessa ampiezza ($\alpha = \alpha'$) e i due lati che comprendono tale angolo uguali, ossia sse vale la condizione $AB = A'B'$ e $AC - A'C'$, chiamata **condizione SAS**, acronimo di *side, angle, side*;

(c) sse hanno uguali un lato, per esempio e i due angoli che hanno in comune tale lato; potremmo stabilire che $a = a'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$, oppure che $b = b'$, $\gamma = \gamma'$ e $\alpha = \alpha'$, o anche $c = c'$, $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$; in questo caso si parla di **condizione ASA**, acronimo di *angle, side, angle.*

G31 c.03 Un'altra relazione tra triangoli di ampio utilizzo è la similitudine. Due figure si dicono simili sse sono trasformabili l'una nell'altra applicando una isometria seguita da una omotetia o, e4quivalentemente, applicando una omotetia seguita da una isometria.
Si osserva che anche la relazione di similitudine tra le figure di un certo genere (circonferenze, triangoli o altro) è una equivalenza. Questo fatto è strettamente collegato con il fatto che l'insieme delle similitudini del piano-RR costituisce un gruppo di trasformazioni [B31g e B41g].

Si osserva anche che due figure congruenti sono simili, in quanto sono ottenibili l'una dall'altra applicando una isometria e la particolare omotetia data dall'identità; viceversa vi sono coppie di figure simili che non sono congruenti per esempio un triangolo ed il triangolo ottenuto dal precedente applicando l'omotetia che raddoppia le lunghezze dei lati.
Quindi la similitudine è una relazione di equivalenza strettamente meno fine della congruenza; in effetti una classe di similitudine è costituita da più classi di congruenza.

Per affermare che le figure dello stesso genere $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{F}'$ sono simili usiamo la notazione $\mathbf{F} \sim_{siml} \mathbf{F}'$.
Per affermare invece che queste due figure sono congruenti usiamo la notazione $\mathbf{F} \sim_{cngr} \mathbf{F}'$.

Dato che il gruppo delle isometrie è sottogruppo proprio del gruppo euclideo a causa delle esisitenza di omotetie diverse dall'identità, possiamo affermare

$$\mathbf{F} \sim_{cngr} \mathbf{F}' \Longrightarrow \mathbf{F} \sim_{siml} \mathbf{F}' \quad , \quad \text{mentre} \quad \mathbf{F} \sim_{siml} \mathbf{F}' \not\Longrightarrow \mathbf{F} \sim_{cngr} \mathbf{F}' \ .$$

Dato che $\sim_{siml}$ e $\sim_{cngr}$ sono insiemi di coppie di figure della stessa specie, abbiamo l'enunciato equivalente al precedente

$$\sim_{cngr} \subset \sim_{siml} \ .$$

G31 c.04 Si osserva che tutte le circonferenze sono simili, mentre sono congruenti tutte le circonferenze di dato raggio.

Quindi le classi di congruenza delle circonferenze nel piano-RR costituiscono una famiglia di insiemi etichettata dal raggio delle circonferenze.

Anche tutti i triangoli equilateri sono simili, mentre sono congruenti tutti i triangoli equilateri aventi i lati della stessa lunghezza. Quindi le classi di congruenza dei triangoli equilateri costituiscono una famiglia di insiemi etichettata dalla lunghezza dei lati.

Tutti i triangoli isosceli rettangoli sono simili. Più in generale sono simili tutti i triangoli isosceli aventi un determinato angolo diverso $\widehat{C}$.
Si individuano interessanti rappresentativi delle classi di similitudine di triangoli isosceli come triangoli inscritti in una circonferenza $\mathbf{C}$ il cui raggio denotiamo con r, con un vertice in un punto fisso C e con il lato opposto c ottenuto dalle secanti parallele alla tangente a $\mathbf{C}$ in C. Consideriamo l'altezza h_c del triangolo avente un estremo in C; si hanno i rappresentativi dei triangoli isosceli ottusangoli sse $0 < h_c < r$; si ha il rappresentativo dei triangoli isosceli rettangoli se $h_c = r$; si hanno i rappresentativi dei triangoli isosceli acutangoli sse $r < h_c < 2r$; tra questi ultimi quello con $h_c = \dfrac{3}{2}\, r$ rappresenta i triangoli regolari.

Conclusione del tutto simile per i triangoli rettangoli isosceli; le relative classi di congruenza si possono organizzare in una famiglia di insiemi indicizzata dalla lunghezza dei cateti oppure indicizzata dalla lunghezza dell'ipotenusa.

G31 c.05 L'insieme dei triangoli isosceli si può organizzare in una famiglia di classi di similitudine indicizzata dal valore dell'angolo diverso dagli altri due. Si osserva che l'insieme dei triangoli equilateri si può considerare una particolare classe di similitudine di triangoli isosceli.
Le classi di congruenza dei triangoli isosceli si possono organizzare in una famiglia di insiemi indicizzata da due parametri, l'angolo diverso e la lunghezza del lato opposto a esso.

Considerazioni con conclusioni simili per l'insieme dei triangoli rettangoli: il loro insieme si può organizzare in una famiglia di classi di congruenza indicizzata da due indici che potrebbero essere l'ampiezza dell'angolo minore e la lunghezza del cateto minore, oppure il seno dell'angolo minore e la lunghezza dell'ipotenusa, ma anche altre coppie di parametri.

(1) Prop.: Due triangoli rettangoli $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ sono simili
(i) sse un angolo interno nonretto di $\mathbf{T}$ ha ampiezza uguale a quella dell'angolo corrispondente di $\mathbf{T}'$.
(ii) sse hanno uguale il rapporto tra le lunghezze di due lati corrispondenti ∎

Consideriamo il punto P_c proiezione ortogonale su $a = BC$ del vertice retto B, l'altezza $h_b := BP_b$, la proiezione di b su c $^{\searrow}$ $d := AP_c$ e la proiezione di a su c $^{\searrow}$ $e := P_cB$.
Si hanno le relazioni di similitudine $\triangle ABC \sim_{siml} \triangle BCP_c \sim_{sml} ACP_c$ e quindi le relazioni di proporzionalità

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h_c} = \frac{a}{e} \qquad , \qquad \frac{c}{b} = \frac{a}{h_c} = \frac{b}{d} \ .$$

Le classi di similitudine possono essere caratterizzate dal sopra accennato angolo minore.

L'insieme dei triangoli scaleni può essere organizzato in una famiglia di classi di congruenza ciascuna caratterizzata dalle tre lunghezze dei lati, in virtù della argomentazione SSS, oppure dalla lunghezza di due lati e dall'ampiezza dell'angolo compreso, in virtù della argomentazione SAS, oppure da una lunghezza di lato e da due ampiezze angolari in virtù dell'argomentazione ASA.

G31 c.06 (1) Prop.: Due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ sono simili,

(a) sse si ha la proporzionalità per i lati corrispondenti, cioè (assunto che i triangoli non siano degeneri) sse $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$;

(b) sse hanno un angolo uguale (per esempio $\alpha = \alpha'$) e si ha lo stesso rapporto tra le lunghezze dei due lati che delimitano tale angolo, cioè sse vale una relazione della forma $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$;

(c)) sse hanno uguali due angoli corrispondenti (per esempio $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$).

Dim.: (a) Denotato con ρ il rapporto fornito dalla relazione dell'enunciato, si applichi l'omotetia $Hmtt_\rho$ a $\triangle ABC$ ottenendo un triangolo che denotiamo con $\triangle A''B''C''$. Per esso valgono le relazioni $a'' = a'$, $b'' = b'$ e $c'' = c'$; in forza della condizione SSS questo triangolo è congruente con $\triangle A'B'C'$.

(b) Denotato con ρ il rapporto fornito dalla relazione dell'enunciato, ancora si applichi l'omotetia $Hmtt_\rho$ a $\triangle ABC$ ottenendo un triangolo che denotiamo con $\triangle A''B''C''$. Per esso valgono le relazioni che, in forza della condizione SAS, lo rendono congruente $\triangle A'B'C'$.

(c) La dimostrazione si conduce come le precedenti con un triangolo intermedio ottenuto con l'omotetia il cui rapporto è preso uguale al rapporto tra le lunghezze dei lati compresi tra i due angoli per i quali si afferma o si dimostra l'uguaglianza. Per questo triangolo intermedio i ha la congruenza annunciata grazie alla condizione ASA ∎

G31 c.07 (1) Prop.: Se due triangoli sono simili il rapporto tra le loro due aree è il quadrato del rapporto tra due lati omologhi dei due triangoli.

Dim.: Da tutte le formule che forniscono l'area segue che il confronto tra due triangoli collegabili mediante una omotetia di rapporto ρ discende che tra le due aree si ha il fattore ρ^2.

Anche le aree dei cerchi sono proporzionali ai quadrati dei corrispondenti raggi; in effetti questo è coerente con l'appartenenza delle circonferenze a una unica classe di similitudine.

In effetti la proprietà precedente vale per tutte le figure piane alle quali si può attribuire un'area e che sono sottoponibili ad omotetie.

G31 d. centri e circonferenze dei triangoli

G31 d.01 Si conosce una varietà incredibilmente estesa di interessanti costruzioni con riga e compasso sui triangoli.

G31 d.02 Per il triangolo $\triangle ABC$ useremo come notazioni tipiche M_a, M_b ed M_c per i punti medi, risp., dei lati a, b e c. Si definiscono come **mediane del triangolo** i tre segmenti aventi come estremità uno dei vertici e il punto medio del lato opposto. Per tali segmenti usiamo come notazioni tipiche $m_a := AM_a$, $m_b := BM_b$ e $m_c := AM_c$. Con linguaggio semplificato si dicono mediane anche le rispettive lunghezze dei tre segmenti e per esse si usano le le notazioni m_a, m_b ed m_c.
Evidentemente le tre mediane di un triangolo sono interamente appartenenti al corrispondente triangolo chiuso.

(1) Prop.: Ogni mediana divide il triangolo in due triangoli di aree uguali.

Dim.: I due triangoli separati dalla mediana condividono l'altezza ed hanno basi della stessa lunghezza ∎

(2) Prop.: Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un unico punto e questo divide ciascuna mediana in due segmenti uno avente lunghezza doppia dell'altro.

Dim.: Consideriamo il punto $W := \overline{AM_a} \cap \overline{BM_b}$ interno al triangolo; consideriamo anche il segmento $\overline{WM_c}$ (che dobbiamo dimostrare essere allineato con CW), i 6 triangoli in cui viene suddiviso $TRABC$ e le rispettive aree: $A_c := \textbf{\textit{Area}}(AM_cW)$, $B_c := \textbf{\textit{Area}}(M_cBW)$, $B_a := \textbf{\textit{Area}}(BM_aW)$, $C_a := \textbf{\textit{Area}}(CWM_a)$, $C_b := \textbf{\textit{Area}}(CM_bW)$ e $A_b : \textbf{\textit{Area}}(AWM_b$.
Tra queste aree, in conseguenza della (1) si hanno le seguenti uguaglianze:

$$A_c = B_c \ , \ B_a = C_a \ , \ C_b = A_b \ , \ A_c + B_c + B_a = A_b + C_b + C_a \ , \ A_b + A_c + B_c = C_b + C_a + B_a \ .$$

Dalle prime quattro si deducono le uguaglianze $A_b = C_b = A_c = B_c$, da queste e dalla $A_b + A_c + B_c = C_b + C_a + B_a$ si deduce $A_c = Bc = B_a = C + a$ e di conseguenza si ottiene $A_b = B_a = A_c = C_a = B_c = C_b = \dfrac{1}{6}\,\textbf{\textit{Area}}(ABC)$.
Il segmento CM_c deve passare per W: infatti in caso contrario non sarebbe possibile l'uguaglianza $\textbf{\textit{Area}}(AM_CC) = \dfrac{1}{2}\textbf{\textit{Area}}(ABC) = A_b + A_c + C_a$.
Risulta quindi dimostrato che le tre mediane si intersecano in un solo punto.
Infine l'uguaglianza $A_c = \dfrac{1}{3}\textbf{\textit{Area}}(AM_cC)$ implica che CW ha lunghezza doppia di WM_c e similmente $AW = 2\,WM_a$ e $BW = 2\,WM_b$ ∎

Il punto di intersezione delle mediane viene detto **centroide del triangolo**. Spesso esso viene chiamato "baricentro del triangolo", ma preferiamo usare tale nome per una nozione geometrico-meccanica più generale.

Per le lunghezze delle mediane si trova

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad , \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \quad , \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \ .$$

G31 d.03 Elementi importanti di un triangolo sono le bisettrici dei suoi angoli interni.
Ricordiamo che la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti del piano che sono equidistanti dalle semirette che delimitano l'angolo stesso. Osserviamo inoltre che ogni bisettrice di angolo interno interseca il lato opposto al proprio vertice e quindi contiene un segmento interno al triangolo.

Ampliamo le notazioni tipiche per il triangolo $\mathbf{T} = \triangle ABC$ stabilendo che per le rette bisettrici degli angoli interni $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ useremo, risp., le scritture $\mathbf{b}_A$, $\mathbf{b}_B$ e $\mathbf{b}_C$. Introduciamo inoltre i punti $B_a := \mathbf{b}_A \cap a$, $B_b := \mathbf{b}_B \cap b$ e $B_c := \mathbf{b}_C \cap c$ e scriviamo, per i relativi segmenti, $\beta_a := AB_a$, $\beta_b := BB_b$ e $\beta_c := CB_c$. Infine conveniamo che, nell'ambito del linguaggio semplificato, le notazioni β_a, β_b e β_c consentiranno di individuare anche le lunghezze dei rispettivi segmenti.

(1) Prop.: Le tre bisettrici degli angoli interni di un triangolo $\mathbf{T} = \triangle ABC$ si incontrano in un unico punto equidistante dai tre lati.

Dim.: Si osserva subito che il punto comune a due bisettrici di angoli interni è punto interno del triangolo ed è equidistante da tutti i lati del triangolo; ne segue che questa intersezione deve appartenere anche alla terza bisettrice ∎

Il punto di incontro delle tre bisettrici di $\mathbf{T} = \triangle ABC$ viene detto **incentro del triangolo**; la sua proprietà di equidistanza dai lati implica che esso è il centro di una circonferenza tangente di tutti i lati di $\mathbf{T}$; questa viene detta **circonferenza inscritta nel triangolo T**. Il suo raggio viene detto **inraggio del triangolo** e costituisce l'apotema per tutte le corde del circumcentro consistenti nei lati. Useremo r come notazione tipiche per l'inraggio.
Per le lunghezze dei segmenti di bisettrice si trova

$$\beta_a = \sqrt{b\,c\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]} \quad , \quad \beta_b = \sqrt{c\,a\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]} \quad , \quad \beta_c = \sqrt{a\,b\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]} \; .$$

G31 d.04 Consideriamo ora gli assi dei tre lati di un triangolo.

(1) Prop.: I tre assi dei lati di un triangolo $\mathbf{T} = \triangle ABC$ si incontrano in un unico punto equidistante dai tre vertici.

Dim.: Consideriamo due assi e il loro punto di intersezione, (punto che può essere interno al triangolo, appartenere al suo perimetro o essere esterno a esso). Tale punto è equidistante dai tre vertici; quindi deve appartenere anche all'asse del lato non considerato in precedenza ∎

Questo punto viene detto **circumcentro del triangolo** o **circocentro del triangolo**; esso è il centro di una circonferenza passante per tutti i vertici di $\mathbf{T}$ che viene detta **circonferenza circoscritta** a $\mathbf{T}$.

La circonferenza $Circf_{PPP}(P_1, P_2, P_3)$, come vedremo in seguito, è caratterizzata dall'equazione

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Il raggio della circonferenza circoscritta a $\mathbf{T}$ viene detto **circumraggio del triangolo**; la notazione tipica del triangolo generico è R. Esso si può ottenere dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} R &= \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} = \frac{a\,b\,c}{4\,r\,s} \\ &= \frac{r}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1} = \end{aligned}$$

G31 d.05 Si dice **altezza di un triangolo** relativa a un suo lato a cui si attribuisce il ruolo di base il segmento che ha come estremità il vertice opposto al lato di base e il suo piede sulla retta contenente il lato di base.

Come notazioni tipiche del triangolo $\triangle ABC$ denotiamo con P_a, P_b e P_c, risp., il piede dell'altezza relativa al lato a, b e c. scriviamo inoltre per i segmenti altezza $h_a := AP_a$, $h_b := AP_b$ e $h_c := AP_c$. Quando si adotta il linguaggio semplificato con il termine altezza e con le notazioni h_a, h_b e h_c si denotano anche le lunghezze dei relativi segmenti, confidando che il contesto elimini l'ambiguità.

(1) Prop.: Le tre altezze di un triangolo si incontrano in un unico punto.
Questo punto viene detto **ortocentro del triangolo**.

(2) Prop.: Un triangolo è ottusangolo sse il suo ortocentro è esterno al triangolo stesso; è rettangolo sse il suo ortocentro appartiene al suo perimetro; è acutangolo sse il suo ortocentro è un punto interno al triangolo.

G31 d.06 Molti calcoli sui triangoli si servono dei valori delle funzioni trigonometriche corrispondenti agli angoli interni o a semplici combinazioni di questi.

(1) Prop.: (**legge dei seni**)

$$\frac{a}{\sin\,\alpha} = \frac{b}{\sin\,\beta} = \frac{c}{\sin\,\gamma} = 2\,R\ ,$$

dove R denota il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

(2) Prop.: (**legge dei coseni**)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\,\alpha \quad , \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\,\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\,\gamma \qquad \text{ovvero}$$

$$\cos\,\alpha \;=\; \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c} \quad , \quad \cos\,\beta \;=\; \frac{c^2+a^2-b^2}{2\,c\,a} \quad , \quad \cos\,\gamma \;=\; \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b}\ .$$

Questo risultato è dovuto al matematico e astronomo persiano al-Kashi .

(3) Prop.: (**legge delle tangenti**)

$$\frac{a-b}{a+b} \;=\; \frac{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})} \qquad , \qquad \frac{b-c}{b+c} \;=\; \frac{\tan(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\tan(\frac{\beta+\gamma}{2})} \qquad , \qquad \frac{c-a}{c+a} \;=\; \frac{\tan(\frac{\gamma-\alpha}{2})}{\tan(\frac{\gamma+\alpha}{2})}$$

G31 d.07 L'area $\mathbb{A} = \textit{Area}(\mathbf{T})$ di un generico triangolo $\mathbf{T} = \triangle ABC$ si può esprimere in svariati modi. Innanzi tutto vi sono le espressioni che si servono di un lato e della relativa altezza:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\,a\,h_a = \frac{1}{2}\,b\,h_b = \frac{1}{2}\,c\,h_c\ .$$

Ciascuna delle altezze si può esprimere con un lato e con il seno di un angolo interno:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\,\gamma = \frac{1}{2}\,a\,c\,\sin\,\beta = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\,\alpha\ .$$

Dato che $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ si hanno le espressioni equivalenti:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\,a\,c\,\sin(\gamma+\alpha) = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin(\beta+\gamma)\ .$$

Dato che la classe di congruenza di un triangolo $\mathbf{T}$ è determinata dalle lunghezze dei suoi lati a, b e c, ci si aspetta che anche la sua area possa essere espressa servendosi solo di tali numeri. In effetti per l'area si ricava quanto segue.

G31 d.08 Denotiamo le rette bisettrici degli angoli interni di $\mathbf{T}$, risp., con $\mathbf{b}_A$, $\mathbf{b}_B$ e $\mathbf{b}_C$; inoltre denotiamo le tre **bisettrici esterne degli angoli esterni** nei tre vertici, risp., con $\mathbf{e}_A$, $\mathbf{e}_B$ ed $\mathbf{e}_C$.

Il punto $J_A := \mathbf{e}_B \cap \mathbf{e}_C$ si trova nella regione illimitata $Q_{A,-}$ ed è equidistante dalle tre rette $\mathcal{R}_x$; esso quindi appartiene anche alla bisettrice $\mathbf{b}_A$; questo punto è il centro della circonferenza tangente alle tre

rette e viene detto **excentro del triangolo** opposto ad A; la circonferenza viene detta **circonferenza exscritta al triangolo T** tangente al lato a (oppure opposta ad A) e il suo raggio **exraggio del triangolo T** opposto ad A. Simmetricamente si definiscono le terne (excentro, circonferenza exscritta, exraggio) opposte ai vertici B e C.
Un triangolo possiede quindi tre circonferenze exscritte, tre excerchi e tre exraggi.
Chiaramente due exraggi coincidono sse il triangolo è isoscele, sse la bisettrice interna che non interseca estranea le relative circonferenze exscritte è asse di simmetria del triangolo. In particolare tre exraggi coincidono sse il triangolo è equilatero, sse le tre bisettrici interne del triangolo sono suoi assi di simmetria.

Come l'inraggio, anche gli exraggi sono collegati all'area del triangolo $S = \boldsymbol{Area}(\mathbf{T})$. Si trova infatti che i tre exraggi opposti ad A, B e C sono forniti, risp., da

$$\frac{2\,S}{c+b-a} \quad , \quad \frac{2\,S}{c+a-b} \quad , \quad \frac{2\,S}{a+b-c} \; .$$

Da queste formule segue che una circonferenza exscritta è tanto più estesa quanto più lungo è il lato della quale è tangente.

G31 e. varianti del teorema di Pitagora

G31 e.01 Ancora facciamo riferimento al triangolo $\triangle ABC$ per il quale usiamo le notazioni tipiche ponendo $a := BC$, $b := CA$, $c := AB$, $\alpha := \angle CAB$, $\beta := \angle ABC$ e $\gamma := \angle BCA$.
In questa sezione presentiamo altre dimostrazioni del teorema di Pitagora supponendo che $\triangle ABC$ sia retto in C, cioè con $\gamma = 90°$.

Teorema (**teorema di Pitagora**)
Per $\triangle ABC$ con γ angolo retto $c^2 = a^2 + b^2$, ossia $AB^2 = BC^2 + CA^2$. In termini colloquiali: l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è data dalla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

G31 e.02 Diamo una prima dimostrazione basata sulla teoria delle proporzioni.

Sia H il piede della altezza da C su AB. Essendo $\triangle ABC$ simile a $\triangle CAH$ si ha la proporzione $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AH}$ e da questa $AC^2 = AB \cdot AH$. Dalla proporzionalità tra $\triangle ABC$ e $\triangle ACH$ segue $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BH}$ e quindi $BC^2 = AB \cdot BH$.

Sommando si ha $AC^2 + BC^2 = AB\,(AH + HB) = AB^2$, ovvero $b^2 + a^2 = c^2$ ∎

G31 e.03 Mostriamo ora alcune dimostrazioni che si servono di considerazioni geometriche e analitiche; esse sono dette "dimostrazioni per sostituzione" ma preferiamo chiamarle **dimostrazioni per riarrangiamento di aree**.

Dim.: Si tracci il quadrato avente lato di lunghezza $a+b$ e su ciascun lato si individuino i due segmenti aventi lunghezza, risp., b e a; tracciamo poi il quadrato interno avente come vertici A, A', B' e B.
Introdotto $c = AB$, risulta $(a+b)^2 = 2\,a\,b + c^2$ e quindi $a^2 + 2\,a\,b + b^2 = 2\,a\,b + c^2$ e in definitiva $a^2 + b^2 = c^2$ ∎

G31 e.04 Mostriamo altre dimostrazioni per riarrangiamento di aree.
La prima delle figure che seguono illustra l'uguaglianza $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$.

La figura alla sua destra è ottenuta ruotando il triangolo 2 di $-90°$ con centro nel suo vertice superiore e ruotando il triangolo 4 di $+90°$ con centro nel suo vertice inferiore.
Essa mostra che $(a+b)^2 = c^2 + 2\,a\,b$ e quindi che $a^2 + b^2 = c^2$ ∎

G31 e.05 Le figure riguardano una trasformazione delle due regioni aventi aree a^2 e b^2, nel caso $a > b$, in regioni che presentano area complessiva pari a c^2.
La prima figura riguarda due quadrati accostati il cui lato misura, risp., a e b; la seconda la regione complessiva ripartita in 4 triangoli rettangoli di area $\dfrac{a\,b}{2}$ e in una zona di area $(a-b)^2$; la terza l'ottenimento, attraverso rotazioni di due triangoli rettangoli, di un quadrato il cui lato misura $a+b$ e che si ripartisce in quattro triangoli e un quadrato di area c^2.
Queste trasformazioni si interpretano con le uguaglianze

$$a^2 + b^2 \;=\; 4\,\frac{a\,b}{2} + (a-b)^2 \;=\; (a+b)^2 - 2\,a\,b \;=\; c^2 \quad \blacksquare$$

G31 e.06 La figura seguente, la più compatta, è stata proposta da J. Garfield, prima di diventare presidente degli Stati Uniti e riguarda un trapezio avente area $\frac{1}{2}\,(a+b)^2 \;=\; a\,b + \frac{1}{2}c^2$. Anche da questa considerazione segue l'uguaglianza enunciata ∎

G31 e.07 Vale anche l'enunciato inverso del teorema di Pitagora.

(1) Prop.: Dati tre numeri reali positivi a, b e c tali che $a^2 + b^2 = c^2$ esiste un triangolo i cui lati hanno come lunghezze a, b e c e con l'angolo $\widehat{ab}$ retto.

G31 f. generalizzazioni del teorema di Pitagora

G31 f.01 Una generalizzazione del teorema di Pitagora è stata ottenuta da Pappo di Alessandria .

(1) Teorema Consideriamo un triangolo arbitrario $\triangle ABC$ (non necessariamente retto in B). Costruiamo i parallelogrammi $ABDE$ e $BCFG$ accostati esternamente al triangolo scegliendo come si vuole $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{BG}$.
Denotiamo con J l'intersezione delle rette $\overline{-ED-}$ e $\overline{-GF-}$, osserviamo che $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BG}$ e costruiamo il parallelogramma $ACHI$ accostato esternamente al triangolo assumendo IA congruente a BJ.
Con queste notazioni si ha l'uguaglianza di aree

$$\boldsymbol{Area}(ABDE) + \boldsymbol{Area}(BCFG) \;=\; \boldsymbol{Area}(ACHI) \quad .$$

Dim.: Valgono le seguenti relazioni tra aree di parallelogrammi chiaramente equiareali:

$$\boldsymbol{Area}(ACHI) \;=\; \boldsymbol{Area}(ACJK) \;=\; \boldsymbol{Area}(AEMN) \;,$$

$$\boldsymbol{Area}(BCFG) \;=\; \boldsymbol{Area}(BCJL) \;=\; \boldsymbol{Area}(MNDB)$$

Di conseguenza

$$\boldsymbol{Area}(AEDB) \;=\; \boldsymbol{Area}(AENM) + \boldsymbol{Area}(MNDB) \quad \blacksquare$$

G31 f.02 Si ottiene la seguente generalizzazione, dovuta ad Edsger Dijkstra :

(3) Prop.: Si consideri un triangolo **T** i cui lati sono a, b e c, con c lato di lunghezza maggiore.
(a) **T** è rettangolo in $\widehat{ab}$ sse $a^2 + b^2 = c^2$;
(b) **T** è ottusangolo in $\widehat{ab}$ sse $a^2 + b^2 < c^2$;
(c) **T** è acutangolo sse $a^2 + b^2 > c^2$.

G31 g. teorema di Ceva e dintorni

G31 g.01 Consideriamo ora un triangolo orientato $\mathbf{T} = \overrightarrow{\triangle} ABC$ con le sue notazioni tipiche.
Si dice **semiretta ceviana di tale triangolo** ogni semiretta che ha l'estremità in un vertice di $\mathbf{T}$ e interseca la retta contenente il lato opposto, retta che possiamo considerare orientata. Si dice **terna di semirette ceviane** di $\mathbf{T}$ ogni terna di semirette ceviane cui si può dare la forma

$$\langle \overrightarrow{A\,A_c^{-}}, \overrightarrow{B\,B_c^{-}}, \overrightarrow{C\,C_c^{-}} \rangle \ ,$$

ove $A_c \in \overrightarrow{-BC^{-}}$, $B_c \in \overrightarrow{-CA^{-}}$ e $C_c \in \overrightarrow{-AB^{-}}$. La precedente terna di semirette è in evidente biiezione con la terna di segmenti orientati

$$\langle \overrightarrow{A\,A_c}, \overrightarrow{B\,B_c}, \overrightarrow{C\,C_c} \rangle$$

che chiameremo semplicemente **ceviani del triangolo $\mathbf{T}$**.

Si dice **terna di ceviani concorrenti del triangolo $\mathbf{T}$** ogni terna di ceviani le cui semirette si incontrano in un unico punto che denotiamo con M e chiamiamo **punto di concorrenza della terna**.

G31 g.02 Precisiamo la corrispondenza tra quaterne $\langle A, B, C, M \rangle$ e terne di ceviani.
Innanzi tutto il triangolo $\mathbf{T}$ non deve essere degenere, ossia i tre vertici non devono essere allineati e tanto meno presentare coincidenze. Quali posizioni può occupare il punto di concorrenza M?.
Se M è punto interno al triangolo la costruzione dei ceviani non presenta difficoltà e ciascuno dei tre punti A_c, B_c e C_c è interno a un lato del triangolo.

La costruzione è possibile e conduce a punti A_c, B_c e C_c al finito anche se M è punto esterno di $\mathbf{T}$ e non giace su nessuna delle tre rette passanti per un vertice e parallele al lato opposto, rette che denotiamo, risp., con $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{P}_b$ e $\mathcal{P}_c$.
Per punti M appartenenti al perimetro di $\mathbf{T}$ o alle tre rette suddette si hanno situazioni che chiamiamo degeneri.
Chiaramente la corrispondenza tra quaterne $\langle A, B, C, M \rangle$ nondegeneri e terne di ceviani concorrenti è biunivoca e facilmente costruibile con la sola riga.

G31 g.03 Le terne di ceviani concorrenti sono caratterizzate da un teorema dimostrato da Giovanni Ceva nel 1678, ma trovato già nell'XI secolo da al-Mutaman ; questo teorema è il duale del teorema di Menelao , dimostrato intorno al 100 d. C. e anch'esso riscoperto da Ceva.

Cominciamo con il presentare il teorema di Giovanni Ceva in una versione nella quale si considerano solo punti di concorrenza interni al triangolo, segmenti nonorientati e aree senza segno.
Per questo avremo da trattare varie aree di triangoli e per queste useremo l'abbreviazione $\mathcal{A}(R,S,T) \ := \ \textbf{\textit{Area}}\big(\triangle(R,S,T)\big)$. Scriveremo inoltre

$$P_M \ := \ P(A_c, B_c, C_c) := \frac{A\,C_c}{C_c\,B} \cdot \frac{A\,C_c}{C_c\,B} \cdot \frac{A\,C_c}{C_c\,B} \ .$$

Teorema (**teorema di Ceva per segmenti senza segno**)
Considerando le notazioni precedenti semplificate per ignorare segni e orientazioni si ha:

$$\text{I segmenti } A_c,\ B_c \text{ e } C_c \text{ sono concorrenti} \iff P(A_c, B_c, C_c) = 1$$

Dim.: "$\Longrightarrow$" Per la proporzionalità tra aree e altezze di due triangoli con la stessa base si trova

$$\frac{A\,C_c}{C_c\,B} = \frac{\mathcal{A}(A,C,C_c)}{\mathcal{A}(C_c,C,B)} \ = \ \frac{\mathcal{A}(A,M,C_c)}{\mathcal{A}(C_c,M,B)} \ = \ \frac{\mathcal{A}(A,C,C_c) - \mathcal{A}(A,M,C_c)}{\mathcal{A}(C_c,C,B) - \mathcal{A}(C_c,M,B)} \ = \ \frac{\mathcal{A}(A,M,C)}{\mathcal{A}(B,M,C)} \ .$$

Permutando ciclicamente i vertici si ottengono anche le uguaglianze

$$\frac{B\,A_c}{A_c\,C} \;=\; \frac{\mathcal{A}(B,M,A)}{\mathcal{A}(C,M,A)} \qquad \text{e} \qquad \frac{C\,B_c}{B_c\,A} \;=\; \frac{\mathcal{A}(C,M,B)}{\mathcal{A}(A,M,B)}$$

Moltiplicando i primi membri e i secondi membri delle tre uguaglianze precedenti si trova

$$P(A_c,B_c,C_c) \;=\; \frac{\mathcal{A}(A,M,C)}{\mathcal{A}(B,M,C)}\cdot\frac{\mathcal{A}(B,M,A)}{\mathcal{A}(C,M,A)}\cdot\frac{\mathcal{A}(C,M,B)}{\mathcal{A}(A,M,B)}\;.$$

"$\Longleftarrow$" Consideriamo i punti $A_c\in BC$, $B_c\in CA$ e $C_c\in AB$ tali che sia $P(A_c,B_c,C_c)=1$. Scriviamo $M:=AA_c\cap BB_c$ e $D \;:=\; \overline{CM-}\cap AB$.
In forza di "$\Longrightarrow$" la concorrenza di AA_c, BB_c e CD deve essere

$$\frac{A\,D}{D\,B}\cdot\frac{B\,A_c}{A_c\,C}\cdot\frac{C\,B_c}{B_c\,A}\;.$$

Da questa e dalla ipotesi segue $\dfrac{AD}{BB} \;=\; \dfrac{AC_c}{C_cB}$ e questa implica che D non può essere diverso da C_c ∎

Diamo anche la versione trigonometrica della condizione $P(A_c,B_c,C_c)=1$

$$\frac{\sin\,\angle B\,A\,A_c}{\sin\,AGC\,A\,A_c}\cdot\frac{\sin\,\angle C\,C\,C_c}{\sin\,AGA\,B\,B_c}\cdot\frac{\sin\,\angle A\,C\,C_c}{\sin\,AGB\,C\,C_c} \;=\; 1\;.$$

G31 g.04 Presentiamo altre notazioni concernenti i triangoli Consideriamo un generico triangolo non-orientato $\mathbf{T}=\triangle ABC$, le tre rette $\mathcal{R}_a:=\overline{-BC-}$, $\mathcal{R}_b:=\overline{-CA-}$ e $\mathcal{R}_c:=\overline{-AB-}$ che contengono, risp., i suoi lati a, b e c ed i relativi 6 semipiani aperti. Per questi usiamo le notazioni seguenti:

$\Sigma_{a,A}$ semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}_a$ che contiene A;
$\Sigma_{a,\neg A}$ semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}_a$ che non contiene A;
$\Sigma_{b,B}$ semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}_b$ che contiene B;
$\Sigma_{b,\neg B}$ semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}_b$ che non contiene B;
$\Sigma_{c,C}$ semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}_c$ che contiene C;
$\Sigma_{c,\neg C}$ semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}_c$ che non contiene C.

Le rette $\mathcal{R}_a$, $\mathcal{R}_b$ e $\mathcal{R}_c$ e i relativi semipiani, quale che sia il triangolo, ripartiscono il piano nei 19 sottoinsiemi: che seguono.

la regione interna del triangolo: $\Sigma_{a,A}\cap\Sigma_{b,B}\cap\Sigma_{c,C}$;

i singoletti costituiti dai suoi vertici: $\{A\}=\mathcal{R}_b\cap\mathcal{R}_c$, $\{B\}=\mathcal{R}_c\cap\mathcal{R}_a$, $\{C\}=\mathcal{R}_b\cap\mathcal{R}_c$;

i lati privati delle rispettive estremità:
$a=\mathcal{R}_a\cap\Sigma_{b,B}\cap\Sigma_{c,C}$, $b=\mathcal{R}_b\cap\Sigma_{c,C}\cap\Sigma_{a,A}$, $c=\mathcal{R}_c\cap\Sigma_{a,A}\cap\Sigma_{b,B}$;

i tre duetti di semirette appartenenti a una retta $\mathcal{R}_x$ ed escludenti i punti del relativo lato:
$\{\,\mathcal{R}_a\cap\Sigma_{b,\neg B}\;,\;\mathcal{R}_a\cap\Sigma_{c,\neg C}\,\}$, $\{\,\mathcal{R}_b\cap\Sigma_{c,\neg C}\;,\;\mathcal{R}_b\cap\Sigma_{a,\neg A}\,\}$, $\{\,\mathcal{R}_c\cap\Sigma_{a,\neg A}\;,\;\mathcal{R}_c\cap\Sigma_{b,\neg B}\,\}$;

le 3 regioni illimitate delimitate da due delle precedenti semirette:
$Q_A:=\Sigma_{b,\neg B}\cap\Sigma_{c,\neg C}$, $Q_B:=\Sigma_{c,\neg C}\cap\Sigma_{a,\neg A}$, $Q_C:=\Sigma_{a,\neg A}\cap\Sigma_{b,\neg B}$,

le 3 regioni illimitate delimitate da un lato di $\mathbf{T}$ e da due delle precedenti semirette:
$Q_a:=\Sigma_{a,\neg A}\cap\Sigma_{b,B}\cap\Sigma_{c,C}$, $Q_b:=\Sigma_{a,A}\cap\Sigma_{b,\neg B}\cap\Sigma_{c,C}$, $Q_c:=\Sigma_{a,A}\cap\Sigma_{b,B}\cap\Sigma_{c,\neg C}$,

G31 g.05 Vediamo come si può ampliare la portata del teorema di Ceva per consentire che il punto di concorrenza non si limiti ad essere un punto interno del triangolo sul quale si costruisce.
Per questo innanzi tutto è necessario considerare come orientati i segmenti che contribuiscono al prodotto $\mathcal{P}_M$.

Per questo si assegnano ai punti che intervengono nella P_M delle coordinate per rette orientate: la $\overline{-AB-}$ la si orienta da A a B e si pone l'origine in A; la $\overline{-BC-}$ la si orienta da B a C e si pone l'origine in B; la $\overline{-CA-}$ la si orienta da C ad A e si pone l'origine in C.

Occorre poi ripartire il piano euclideo mediante le tre rette che contengono i lati del triangolo e mediante le tre rette ciascuna delle quali parallela a una delle rette suddette e passante per il vertice restante del triangolo.
Per questo introduciamo le notazioni $\mathsf{C} := \overline{-AB-}$, $\mathsf{A} := \overline{-BC-}$ e $\mathsf{B} := \overline{-CA-}$); scriviamo inoltre C' per la retta ottenuta applicando alla C la traslazione $\boldsymbol{Trsl}\ \overrightarrow{AC}$, A' per la retta $\boldsymbol{Trsl}\ \overrightarrow{AC}(\mathsf{A})$ e B' per la retta $\boldsymbol{Trsl}\ \overrightarrow{AC}(\mathsf{B})$. Si ottiene quindi la figura

Sopra di essa si individuano le seguenti regioni piane $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}_a$, $\mathbf{2}_b$, $\mathbf{2}_c$, 3A, 3B, 3C , 4AB, 4BA, 4BC, 4CB, 4CA, 4AC , 5a, 5b, 5c. Dopo aver introdotti i punti $E_a := \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$, $E_a := \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$ e $E_a := \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$, risulta agevole individuare anche segmenti, semirette e punti che con le regioni precedenti determinano la partizione del piano sopra la quale va analizzata la dipendenza tra punto di concorrenza M e prodotto P_M.
Per quest'ultimo conviene introdurre i rapporti $\rho_A := \dfrac{AC_c}{C_cB}$, $\rho_B := \dfrac{BA_c}{A_cC}$ e $\rho_C := \dfrac{CB_c}{B_cA}$ e la terna dei loro segni $\mathsf{s} := \langle \operatorname{sign}\rho_A, \operatorname{sign}\rho_B, \operatorname{sign}\rho_C \rangle$; per i valori di questa usiamo notazioni come $+++$, $+-+$, $-+-$ e simili.

G31 g.06 Attraverso valutazioni geometriche specifiche che richiedono solo paziente attenzione si può individuare la seguente assegnazione delle terne **s** alle 16 regioni, che è visualizzata anche nella seconda figura di G11g04:

$\mathbf{1}$ $+++$, $\mathbf{2}_a$ $-+-$, $\mathbf{2}_b$ $--+$, $\mathbf{2}_c$ $+--$,
3_a $-+-$, 3_b $--+$, 3_c $+--$,
4_{AB} $+--$, 4_{BA} $+--$, 4_{BC} $-+-$, 4_{CB} $-+-$, 4_{CA} $--+$, 4_{AC} $--+$,
5_a $-+-$, 5_b $--+$, 5_c $+--$.

Risulta quindi che in tutte queste regioni il prodotto P_M è positivo. Più precisamente esso vale 1, in quanto le valutazioni esposte in g03 restano valide se si considerano i segmenti orientati come si è detto in g04 .

G31 g.07 Esaminiamo le situazioni degeneri del teorema di Ceva utilizzando le notazioni introdotte in precedenza. Per giungere alle conclusioni seguiremo un criterio di continuità. Infatti si osserva che, fisso il triangolo e spostando il punto di concorrenza M all'interno del triangolo aperto i punti A_c, B_c e C_c si spostano con continuità. Vediamo quindi come cambia Q_M quando M si avvicina a un lato, cominciando da M che si avvicina a $C_c \in \overline{AB}$.
Chiaramente quanto più M si avvicina a C_c, tanto più B_c si avvicina ad A ed A_c si avvicina a B

.....

G31 g.08 Un pregio importante del teorema di Ceva sta nel fatto che le proprietà di vari punti centrali del triangolo possono essere considerate come suoi casi particolari.

G31 h. Eulero, Fermat, Napoleone e Morley sui triangoli

G31 h.01 Consideriamo un triangolo $\triangle(A,B,C)$ e denotiamo con H il suo ortocentro, con M_a, M_b ed M_c i punti medi, risp., dei lati BC, CA e AB. Denotiamo poi con $A\,N_a$ l'altezza da A con $B\,N_b$ l'altezza da B e con $C\,N_c$ l'altezza da C; denotiamo inoltre con A' il punto medio di HA, con B' il punto medio di HB e con C' il punto medio di HC.

(1) Teorema Tutti i 9 punti M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c, A', B' e C' giacciono sopra la circonferenza $\mathsf{CircfNP}(A,B,C)$.

Dim.: La retta $\overline{-M_c\,M_b-}$ è parallela alla $\overline{-BC-}$. Simili considerazioni sui punti medi si possono adottare per altri triangoli della configurazione. Osservando $\triangle(HB'C')$ si ricava che le due rette suddette sono parallele a $\overline{-B'\,C'-}$ e che $M_c\,M_b$ è congruente con $B'C'$. Esaminando $\triangle(C,H,A)$ e $\triangle(B,H,A)$ si trova che $\overline{M_c\,B'}$ è congruente con $\overline{M_b\,C'}$. Si osserva anche che il parallelogramma i cui vertici sono B', C', M_b ed M_c è un rettangolo. Quindi il punto di intersezione dei segmenti diagonali $\overline{M_b\,B'}$ e $\overline{M_c\,C'}$, che denotiamo con O_9, è il centro di una circonferenza sulla quale giacciono i vertici del rettangolo. Per simmetria anche $\overline{M_a\,A'}$ è diametro di questa circonferenza che denotiamo con $\mathsf{CircfNP}$. Infine, dato che sono angoli retti $\angle AN_aM_a$, $\angle BN_bM_b$ e $\angle CN_cM_c$, su $\mathsf{CircfNP}$ giacciono anche N_a, N_b ed N_c ∎

G31 h.02 Le circonferenza per 9 punti fu scoperta da Eulero che trovò anche la proprietà seguente. Per trattarla denotiamo con O_9 il centro della $\mathsf{CircfNP}(A,B,C)$.

(1) Prop.: O_9 è il punto medio del segmento tra ortocentro H e circumcentro Q del triangolo, e quindi appartiene alla linea di Eulero del triangolo.

Dim.: Riferiamo il triangolo a un sistema cartesiano avente l'origine in Q e trattiamo i punti della configurazione come vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$, ...
Con tali notazioni $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ e $\vec{C'}=\frac{1}{2}(\vec{H}+\vec{C})=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}+2\,\vec{C})$. Di conseguenza

$$\vec{O_9}=\frac{1}{2}(\vec{M_C}+\vec{C'})=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}+\frac{\vec{A}+\vec{B}+2\,\vec{C}}{2}\right)=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{2}\ .$$

Il raggio di $\mathsf{CircfNP}$ è la lunghezza di $O_9\vec{M}_c$ ossia

$$\left|\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{2}-\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}\right|=\frac{|\vec{C}|}{2}=\frac{R}{2}\ .$$ ∎

G31 h.03 Vediamo ora come semplici considerazioni sopra alcuni triangoli triangolo consentono di risolvere quello che viene chiamato **problema estremale di Fermat**.
Questo problema chiede di individuare, dato un arbitrario triangolo $\triangle(A,B,C)$, un punto F del piano che presenti il minimo valore per la somma delle sue distanze dai tre vertici, cioè il minimo per $FA+FB+FC$.
Alla soluzione si giunge mostrando una configurazione geometrica che fornisce il valore dell'espressione $d(P)=PA+PB+PC$ per un qualsiasi punto P del piano (che conviene visualizzare poco distante dai tre vertici). Basandosi su questo P si individuano, attraverso semplici manovre con un compasso, i due triangoli equilateri $\triangle(A,C,A')$ e $\triangle(A,Q,Q')$. Dato che $QC=Q'A'$ e $QQ'=AQ$, risulta che $d(Q)$ è ottenibile come lunghezza della poligonale $\langle B,Q,Q',A'$. Risulta allora evidente che il punto F

cercato è quello che rende collineari i vertici della poligonale, cioè si deve trovare sul segmento BA'. Ripetendo la costruzione con i triangoli equilateri $\triangle(B,C,B')$ e $TR(C,Q,Q'')$ si trova che F si deve trovare sul segmentoAB' e questo permette di ottenere F come $BA' \cap AB'$.
Questo punto è univocamente determinato e viene chiamato **punto di Fermat** del triangolo $\triangle(A,B,C)$. Il triangolo $\triangle(A,C,A')$ lo chiamiamo **triangolo equilatero accostato** + su AC di $\triangle(A,B,C)$. Per simmetria si definiscono gli equilateri accostati su AB e su BC.

Si nota che il punto di Fermat di $\triangle(A,B,C)$ è il punto nel quale si intersecano le tre rette che passano per uno dei tre vertici e per il terzo vertice del triangolo equilatero esterno sul lato opposto.
Va osservato che i tre angoli $\angle AFB$, $\angle BFC$ e $\angle CFA$ misurano 120° in quanto ottenibili come

$$\angle AFB = 180° - \angle AFF' = 120° \ , \ \angle BFC = 180° - \angle BFF'' = 120° \ \text{ e } \angle AFC = 360° - 120° - 120° \ .$$

G31 h.04 Teorema (**teorema di Napoleone**)
Consideriamo un arbitrario triangolo $\mathbf{T} = \triangle(A,B,C)$ e i tre triangoli equilateri accostati a ciascuno dei lati di $\mathbf{T}$ che denotiamo, risp., con $\triangle(A,B,X)$, $\triangle(B,C,Y)$ e $\triangle(C,A,Z)$.
In queste circostanze:
i segmenti AY, BZ e CX (a) si intersecano nel punto di Fermat F, (b) sono inclinati di 120° e (c) hanno la stessa lunghezza;
(d) le circumcirconferenze dei tre triangoli accostati passano per F ed (e) i loro centri, U, V e W sono i vertici di un triangolo equilatero.

Dim.: (a) e (b) equivalgono alle osservazioni che concludono e05. (c) segue dal fatto che AX, BY e CZ hanno come lunghezza $AF + BF + CF$.
Il fatto che $\angle AFB = 120°$ implica che A, X, B ed F sono conciclici, cioè appartengono al circumcerchio di $\triangle(A,C,X)$; situazioni simili per $\{B,Y,C,F\}$ e per $\{C,Z,A,F\}$ e quindi (d).
I segmenti UV, VW e WU sono assi bisettori, risp., di AF corda comune ai circumcicli di $\triangle(A,X,B)$ e $\triangle(C,Z,A)$, di BF corda comune ai circumcicli di $\triangle(A,X,B)$ e $\triangle(B,Y,C)$, e di CF corda comune ai circumcicli di $\triangle(B,Y,C)$ e $\triangle(C,Z,A)$; queste corde sono inclinate di 120° e i loro assi formano angoli di 60° cioè costituiscono un triangolo, $\triangle(U,V,W)$ equilatero (e) ∎

G31 h.05 Teorema (**teorema di Morley**)
Consideriamo $\triangle(A,B,C)$, trisezioniamo i suoi angoli interni α, β e γ e individuiamo i seguenti suoi tre punti interni:
U tale che $\angle BAU = \frac{1}{3}\alpha$ e $\angle ABU = \frac{1}{3}\beta$;
V tale che $\angle CBV = \frac{1}{3}\beta$ e $\angle BCV = \frac{1}{3}\gamma$;
W tale che $\angle ACW = \frac{1}{3}\gamma$ e $\angle CAW = \frac{1}{3}\alpha$.
Allora il triangolo $\triangle(UVW)$ è equilatero.

Dim.: Cominciamo con un triangolo equilatero $\triangle(UVW)$ il cui lato lasciamo indefinito e con una arbitraria terna di angoli $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ tale che $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ e costruiremo un triangolo $\triangle(A,B,C)$ tale che con $\triangle(UVW)$ riproduca la situazione dell'enunciato.

Definiamo tre angoli, $x := 60° - \alpha/3$, $y := 60° - \beta/3$ e $z := 60° - \gamma/3$; si osserva che $x + y + z = 180° - \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 120°$.
Costruiamo poi tre triangoli isosceli: $\triangle(W,U,X)$ con $\angle UWX = \angle WUX =: x$, $\triangle(U,Y,V)$ con $\angle VUY = \angle UVY =: y$ e $\triangle(V,Z,W)$ con $\angle WVZ = \angle VWZ =: z$.
Prolunghiamo ZW e YU fino a intersecarli in un punto che denotiamo con$A$; prolunghiamo XU e ZV fino a intersecarli in un punto che denotiamo con$B$; Prolunghiamo YV e XW fino a intersecarli in un punto che denotiamo con$C$.
Esaminando il vertice W si ricava $\angle XWA + x + 60° + z = 180°$ e quindi $\angle XWA = y = \angle CWZ$; similmente si ottengono $\angle AUX = z = \angle CUY$ e $\angle CVY = x = \angle AVZ$.
Di conseguenza $\angle WAU = 180° - 2x - y - z = 60° - x$ e $x = \alpha/3$; permutando si ottiene $y = \beta/3$ e $z = \gamma/3$.

Si osserva che il segmento UZ biseca $\angle WZV = 180° - 2z$ e da qui si ricava $\angle AUC = 90° + \angle WZV/2$.
Questo equivale ad affermare che U è l'incentro di $\triangle(A,B,Z)$ e quindi che UB biseca $\angle ABZ$ e che UB biseca $\angle BAZ$.

Da queste considerazioni e da quelle ottenibili permutando circolarmente i vertici A, B e C si ottiene che AW e AU trisecano α, che BU e BV trisecano β e che CV e CW trisecano γ.
Come volevamo abbiamo riprodotta la situazione dell'enunciato.
Basta ora osservare che l'arbitrarietà di $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ e la possibilità di scegliere la lunghezza del lato del triangolo equilatero consentono di ottenere la situazione enunciata per ogni triangolo $\triangle(A,B,C)$.
Questo conclude la dimostrazione ∎

G31 i. formule per l'area dei triangoli

G31 i.01 (1) Prop.: (**formula di Erone**)

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) \;=\; \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{con} \qquad s \;:=\; \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ (semiperimetro)} .$$

Dim.: Come si è già detto $\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \dfrac{1}{2}\,a\,b\,\sin\gamma$; per la legge dei coseni si trova

$$\sin\gamma \;=\; \sqrt{1-\cos^2(\gamma)} \;=\; \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} .$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) =& \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{[2ab-(a^2+b^2-c^2)]\,[2ab+(a^2+b^2-c^2)]}\\ =& \frac{1}{4}\sqrt{[c^2-(a-b)^2]\,[(a+b)^2-c^2]} = \frac{1}{4}\sqrt{[c-(a-b)]\,[c+(a-b)]\,[(a+b)-c]\,[(a+b)+c]}\\ =& \frac{1}{4}\sqrt{2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2s}\end{aligned}$$ ∎

Con opportune manipolazioni algebriche si ottengono altre espressioni equivalenti che spesso si rivelano utili:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{T}) &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1\\ a^2 & 0 & c^2 & 1\\ b^2 & c^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}} .\end{aligned}$$

G31 i.02 Altre formule per l'area si presentano simili alla formula di Erone, ma si servono di grandezze diverse dalle lunghezze dei lati.

Se m_a, m_b ed m_c denotano le lunghezze delle mediane ed s_m la loro semisomma, cioè $s_m := \dfrac{1}{2}\,(m_a+m_b+m_c)$, allora

(1) $$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) \;=\; 4o3\,\sqrt{s_m\,(s_m-m_a)\,(s_m-m_b)\,(s_m-m_c)} .$$

Se h_a, h_b ed h_c denotano le lunghezze delle altezze e si pone $s_h := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$, si ottiene

(2) $$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) \;=\; \frac{1}{4\,\sqrt{s_h\,(s_h-{h_a}^{-1})\,(s_h-{h_b}^{-1})\,(s_h-{h_c}^{-1})}} .$$

Se D denota il diametro della circumcirconferenza, $D \;:=\; 2\,R = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\gamma}$, e se si definisce $\sigma \;:=\; \dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$, allora

(2) $$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) \;=\; D^2\,\sqrt{\sigma\,(\sigma-\sin\alpha)\,(\sigma-\sin\beta)\,(\sigma-\sin\gamma)} .$$

G31 i.03 Numerose formule per l'area dei triangoli elaborano la definizione $\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) := \frac{1}{2}\,c\,h_c$ o le equivalenti cicliche servendosi delle funzioni trigonometriche. abbiamo innanzi tutto

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\gamma = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\,c\,a\,\sin\beta\ . \tag{1}$$

Tenendo conto dell'uguaglianza $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$ e delle modificate cicliche abbiamo

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin(\beta+\gamma) = \frac{1}{2}\,c\,a\,\sin(\gamma+\alpha)\ . \tag{2}$$

Le formule precedenti servono quando sopra il triangolo sono disponibili le informazioni-SAS. Quando invece sono disponibili le informazioni-AAS, si possono usare le formule equivalenti -cy che seguono.

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{b^2\,\sin\alpha\,\sin(\alpha+\beta)}{2\,\sin\beta} = \frac{c^2\,\sin\beta\,\sin(\beta+\gamma)}{2\,\sin\gamma} = \frac{a^2\,\sin\gamma\,\sin(\gamma+\alpha)}{2\,\sin\alpha}\ . \tag{3}$$

Quando invece sono disponibili le informazioni-ASA, si possono usare le formule equivalenti -cy che seguono.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) &= \frac{a^2}{2(\cot\beta+\cot\gamma} = \frac{a^2\,\sin\beta\,\sin\gamma}{2\,\sin(\beta+\gamma)} = \frac{b^2}{2(\cot\gamma+\cot\alpha} = \frac{b^2\,\sin\gamma\,\sin\alpha}{2\,\sin(\gamma+\alpha)}\\ &= \frac{c^2}{2(\cot\alpha+\cot\beta} = \frac{c^2\,\sin\alpha\,\sin\beta}{2\,\sin(\alpha+\beta)}\end{aligned}\ . \tag{4}$$

Se invece sono disponibili informazioni-SSS si possono usare le formule equivalenti -cy che seguono.

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{\tan\alpha\,b^2+c^2-a^2}{4} = \frac{\tan\beta\,c^2+a^2-b^2}{4} = \frac{\tan\gamma\,c^2+a^2-b^2}{4}\ . \tag{5}$$

Va osservato che la prima non va usata quando $\alpha = 90°$, la seconda quando $\beta = 90°$ e la terza quando $\gamma = 90°$; in questi casi peraltro sono disponibili le più semplici formule valide per i triangoli rettangoli.

G31 i.04 Sono note formule che si avvalgono di circumdiametro D (o circumraggio R), di inraggio r e raggi delle excirconferenze r_a, r_b o r_c.
La più semplice si serve di semiperimetro e inraggio

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = s\cdot r\ ; \tag{1}$$

va segnalato che tale formula vale per tutti i cosiddetti poligoni tangenziali, cioè aventi tutti i lati tangenti a una circonferenza interna.

Noto circumdiametro o circumraggio si può utilizzare la

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{a\,b\,c}{2\,D} = \frac{a\,b\,c}{4\,R}\ . \tag{2}$$

In dipendenza da inraggio ed exraggi si ha

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c}\ . \tag{3}$$

G31 i.05 Vi sono numerose formule che si servono delle tre altezze h_a, h_b e h_c.

G31 j. altre proprietà metriche dei triangoli

G31 j.01 Denotiamo con m_a, m_b ed m_c, risp., le mediane dei tre lati a, b e c.
Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{3}{4}\,(a^2+b^2+c^2) \;=\; {m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2\;. \tag{1}$$

$$m_a \;=\; \frac{1}{2}\,\sqrt{2\,b^2+2\,c^2-a^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\,(a^2+b^2+c^2)-\frac{3}{4}\,a^2}\;. \tag{2}$$

$$m_b \;=\; \frac{1}{2}\,\sqrt{2\,c^2+2\,a^2-b^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\,(a^2+b^2+c^2)-\frac{3}{4}\,b^2}\;. \tag{3}$$

$$m_c \;=\; \frac{1}{2}\,\sqrt{2\,a^2+2\,b^2-c^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\,(a^2+b^2+c^2)-\frac{3}{4}\,c^2}\;. \tag{4}$$

G31 j.02 Consideriamo le bisettrici del triangolo $\triangle ABC$ e denotiamo, risp., con w_a, w_b e w_c le lunghezze dei segmenti delle bisettrici compresi tra un vertice del triangolo e il punto di intersezione del lato opposto. Valgono le uguaglianze (nelle quali s denota il semiperimetro)

$$w_a \;=\; \frac{2\sqrt{b\,c\,s\,(s-a)}}{b+c} \;=\; \sqrt{b\,c\,\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}\;, \tag{1}$$

$$w_b \;=\; \frac{2\sqrt{c\,a\,s\,(s-b)}}{c+a} \;=\; \sqrt{c\,a\,\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]}\;, \tag{2}$$

$$w_c \;=\; \frac{2\sqrt{a\,b\,s\,(s-c)}}{a+b} \;=\; \sqrt{a\,b\,\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]}\;. \tag{3}$$

G31 j.03 Presentiamo alcune formule che riguardano il circumraggio R e l'inraggio r di un triangolo $\triangle ABC$.

$$R \;=\; \frac{a\,b\,c}{\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}}\;; \tag{1}$$

$$r \;=\; \frac{1}{2}\,\sqrt{(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}\;; \tag{2}$$

$$\frac{1}{r} \;=\; \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\;; \tag{3}$$

$$\frac{r}{R} \;=\; \frac{4\,\boldsymbol{Area}(\mathbf{T})}{a\,b\,c\,s} \;=\; \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\;; \tag{4}$$

$$2\,r\,R \;=\; \frac{a\,b\,c}{a+b+c}\;; \tag{5}$$

$$a\,b=2\,R\,h_c \quad,\quad b\,c=2\,R\,h_a \quad,\quad c\,a=2\,R\,h_b\;. \tag{6}$$

G31 j.04 Presentiamo un risultato associato al nome di Eulero che lo pubblicò nel 1767 (ma che W. Chapple aveva pubblicato già nel 1746); esso stabilisce un legame tra inraggio, circumraggio e distanza tra incentro e circumcentro di un triangolo qualsiasi.

(1) Teorema del triangolo di Eulero Consideriamo il triangolo $\triangle ABC$, tracciamo il suo incerchio e il suo circumcerchio che denotiamo con Γ; denotiamo con r il suo inraggio, con R il suo circumraggio e con d la distanza tra il suo incentro I e il suo circumcentro O. Allora

$$d^2 \;=\; R\,(R-2\,r)\;.$$

Dim.: Tracciamo incerchio e circumcerchio di $\triangle ABC$; la semiretta $\overline{CI-}$ intersechi Γ nel punto che denotiamo con L, la semiretta $\overline{LO-}$ intersechi Γ nel punto M e la retta $\overline{-IO-}$ lo intersechi nel punto che chiamiamo P dalla parte di I e nel punto Q dalla parte di O. Scriviamo D il piede dell'altezza da I su $\overline{CA}$ e osserviamo che $ID = r$; si osserva anche che ML interseca $\overline{AB}$ nel suo punto medio m_c.

Sono uguali in quanto insistono sullo stesso arco di Γ gli angoli $\angle ACL$ e $\angle AML$; quindi sono simili i triangoli $\triangle CDL$ e $\triangle MAL$ e seguono le relazioni $\dfrac{ID}{AL} = \dfrac{CI}{ML}$, ossia $ID\cdot ML = CI\cdot AL$, cioè $CI\cdot AL = 2\,R\,r$.

Si osserva che i due angoli $\angle AIL$ e $\angle IAL$ hanno la stessa ampiezza $\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$ e quindi $\triangle ALI$ è isoscele e $AL = IL$. Possiamo dunque affermare $PI\cdot IQ = CI\cdot IL = 2\,R\,r$, ossia $(R+d)\,(R-d) = 2\,R\,r$, ossia $R^2 - 2\,R\,r = d^2$ ∎

Dall'enunciato precedente segue la cosiddetta **disuguaglianza di Eulero** $R \geq 2\,r$.
Si osserva anche che si ha l'uguaglianza sse il triangolo coinvolto è equilatero.

G31 j.05 Denotiamo con Q il centroide del triangolo $\triangle ABC$; denotiamo inoltre con q_a, q_b e q_c, risp., le distanze dal centroide dei tre lati a, b e c . Sia inoltre P un qualsiasi punto interno del triangolo. Valgono le seguenti formule:

(1) $$AP^2 + BP^2 + CP^2 \;=\; AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 + 3\,PQ^2\;.$$

(2) $$\frac{q_a}{q_b} = \frac{b}{a}\quad,\quad \frac{q_b}{q_c} \;=\; \frac{c}{b}\quad,\quad \frac{q_c}{q_a} = \frac{a}{c}\qquad;\qquad \frac{1}{2}\,q_a\,a = \frac{1}{2}\,q_b\,b = \frac{1}{2}\,q_c\,c = \frac{1}{3}\,\boldsymbol{Area}(\mathbf{T})\;.$$

G31 j.06 Consideriamo due triangoli aventi in comune un lato e nessun altro punto (triangoli senza sovrapposizioni) e aventi la stessa circumcirconferenza; abbiamo quindi anche un quadrilatero circumciclico. Denotiamo con e il lato comune e con a, b, c e d i quattro lati con estremità sulla circumcirconferenze presi in ordine ciclico positivo, in modo da individuare i due triangoli $\triangle abe$ e $\triangle cde$.
In queste condizioni si trova

(1) $$e^2 \;=\; \frac{(a\,c+b\,d)\,(a\,d+b\,c)}{a\,b+c\,d}\;.$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php