1

Capitolo G25
impostazione assiomatica della geometria euclidea

Contenuti delle sezioni

a. sistema degli assiomi di Hilbert p. 2
c. variante di Pogorelov degli assiomi della geometria euclidea p. 5
d. consistenza, completezza e indipendenza degli assiomi p. 8
e. cenno storico ai fondamenti della geometria p. 9
f. altri sistemi di assiomi e altre geometrie p. 14

15 pagine

G25 0.01 In questo capitolo viene presentato il sistema degli assiomi che verso la fine del XIX secolo, soprattutto per merito di $_e$David Hilbert, sono stati individuati come fondamento logicamente rigoroso della geometria del piano e dello spazio tridimensionale formulata intorno al 300 avanti Cristo negli Elementi di Euclide.

Il sistema di assiomi di Hilbert ha costituito un punto di arrivo per le ricerche sopra i fondamenti della geometria sviluppatesi nel corso di 22 secoli. Esso ha poi costituito il sistema assiomatico al quale hanno maggiormente fatto riferimento le successive ricerche sulle basi delle varie articolazioni della geometria.
Il sistema di Hilbert inoltre ha costituito un efficace contributo al chiarimento dell'impostazione metodologica delle ricerche sopra i fondamenti dell'intera matematica, ricerche che intorno al 1900 erano in piena fioritura, nonché un forte impulso agli ulteriori sviluppi della logica matematica e della matematica formalizzata ed astratta.

Dopo la presentazione degli assiomi vengono sviluppate le sue prime conseguenze e viene introdotta una prima gamma piuttosto ampia di nozioni geometriche. Questo costituisce una prima parte del più diffuso sviluppo ipotetico-deduttivo della geometria.
A questo capitolo faranno riferimento capitoli successivi, a partire da G30, con i quali si sviluppa la geometria euclidea nell'ambito del suo modello cartesiano, teoria che ha come oggetti gli spazi costituiti dalle coppie e dalle terne di numeri reali.

G25 a. il sistema degli assiomi di Hilbert

G25 a.01 Questo sistema di assiomi, che in breve denotiamo con $HilbG$, costituisce il completamento e la precisazione del complesso degli assiomi posti alla base della geometria negli *Elementi di Euclide*.

Il sistema di Hilbert riguarda tre generi di entità primitive: i punti, le rette e i piani. Per queste entità i Interessano inoltre alcune relazioni (incidenza, congruenza, ordinamento, ...) che possono sussistere o meno tra le singole entità primitive. Viceversa nulla si afferma sopra una possibile "intrinseca natura" delle entità primitive e si lascia ben distinto il problema dei loro collegamenti con entità reali, cioè il problema dell'applicazione della geometria euclidea al mondo fisico.

Il sistema $HilbG$ si articola in 5 gruppi di assiomi tra i quali c'è una certa progressione: assiomi di incidenza, assiomi d'ordine, assiomi di congruenza, assioma delle parallele e assiomi di continuità.

G25 a.02 assiomi di incidenza: riguardano una relazione basilare che può sussistere tra due entità.

- HI1 Dati due punti distinti, esiste una retta che passa per entrambi (cioè che è incidente per entrambi).
- HI2 Dati due punti distinti, non esistono due rette che passano per entrambi.
- HI3 Ogni retta contiene almeno due punti (cioè per ogni retta esistono almeno due punti incidenti); esistono almeno tre punti che non appartengono alla stessa retta, cioè che non sono allineati ossia, con altro aggettivo, che non sono collineari.
- HI4 Dati tre punti non allineati (cioè non incidenti per una stessa retta), esiste un piano che li contiene, ossia un piano incidente per tutti i tre punti; questi tre punti si dicono **punti complanari**.
- HI5 Qualsiasi terna di punti non allineati individua univocamente un piano.
- HI6 Se due punti di una retta giacciono su un piano, allora tutti i punti della retta giacciono su quel piano.
- HI7 Se due piani hanno un punto in comune, allora hanno almeno un secondo punto in comune.
- HI8 Ogni retta contiene almeno due punti, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati ed esistono almeno quattro punti non complanari, cioè che non giacciono sullo stesso piano.

G25 a.03 assiomi di ordinamento: per coerenza con G15 si dovrebbero chiamare anche assiomi di interposizione; in inglese si parla di *betweenness*.

- HO1 Se un punto B si colloca tra (o, equivalentemente, se giace tra) i punti A e C, allora B anche si colloca tra C e A e i tre punti sono allineati.
- HO2 Dati due punti distinti B e C, esistono un terzo e un quarto punto A e D sulla retta passante per B e C tali che B giace tra A e C e C sta tra B e D.
- HO3 Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è esattamente uno che giace tra gli altri due.
- HO5 (assioma di Pasch) Siano dati tre punti A, B e C non allineati contenuti in un piano Π, e una retta $\mathbf{d}$ contenuta in Π non contenente alcuno dei tre punti A, B e C: se $\mathbf{d}$ contiene un punto del segmento AB, allora contiene anche un punto che appartiene al segmento AC oppure al segmento BC.

G25 a.04 Gli **assiomi di congruenza**:

- HE1 Se A e B sono punti distinti di una retta $\mathbf{a}$ ed A' è un punto di una retta $\mathbf{a}'$ coincidente con o distinta da $\mathbf{a}$, allora su ciascuna delle due semirette delimitate da A' sulla $\mathbf{a}'$ esiste un punto B' tale che il segmento AB sia nella relazione di congruenza con il segmento $A'B'$; in simboli, tale che $AB \sim_{cngr} A'B'$.

HE2 La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva; in simboli $A'B' \sim_{cngr} AB$, $A''B'' \sim_{cngr} AB \Longrightarrow A'B' \sim_{cngr} A''B''$.

HE3 Siano AB e BC segmenti su una retta **r** privi di punti interni comuni, e siano $A'B'$ e $B'C'$ segmenti su una retta $rSdprm$ privi di punti interni comuni. Se $AB \sim_{cngr} A'B'$ e $BC \sim_{cngr} B'C'$, allora $AC \sim_{cngr} A'C'$.

HE4 Dati un angolo $\angle ABC$ e una semi-retta $\overrightarrow{B'C'-}$, esistono e sono uniche due semirette $\overrightarrow{B'D}$ e $\overrightarrow{B'E}$, tali che sia l'angolo $\angle DB'C'$ che l'angolo $\angle EB'C'$ siano congruenti all'angolo $\angle ABC$.

HE5 La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se $\angle A'B'C' \sim_{cgr} \angle ABC$ e $\angle A''B''C'' \sim_{cgr} \angle ABC$, allora $\angle A'B'C' \sim_{cgr} \angle A''B''C'''$.

HE6 Dati per due triangoli $\triangle(A, B, C)$ e $\triangle(A'B'C')$, se valgono le relazioni $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\angle BAC = \angle B'A'C'$, allora $\triangle(A, B, C) \sim_{cgr} \triangle(A', B', C')$.

L'ipotesi dell'assioma HE1 non esclude che sia $A = A'$ e quindi si ha come corollario che ogni segmento è congruente a se stesso, ovvero che la congruenza tra segmenti è relazione riflessiva. Dato che si considerano segmenti nonorientati, la congruenza tra segmenti va considerata una relazione simmetrica; tenuto conto di HE2 si può asserire che la congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza.

L'ipotesi dell'assioma HE4 non esclude che sia $B' = B$ e quindi si ha come corollario che ogni angolo è congruente a se stesso, ovvero che la congruenza tra angoli è relazione riflessiva. Dato che si considerano angoli senza segno la congruenza tra angoli va considerata una relazione simmetrica; tenuto conto di HE5 si può asserire che la congruenza tra angoli è una relazione di equivalenza.

G25 a.05 L'**assioma delle parallele**:

HP1 (postulato di Proclo-Playfair): Dati una retta **r** un punto A non giacente su **r** e un piano Π contenente entrambi, esiste al più una retta giacente in Π contenente A e non contenente alcun punto di **r**.

G25 a.06 Gli **assiomi di continuità**:

HC1 (assioma di Archimede) Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, allora esiste sulla retta contenente AB una sequenza di punti A_1, A_2, ...,A_n tali che i segmenti AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ sono congruenti a CD e tali che B giace tra A e A_n.

HC2 (Assioma di completezza) Ad un sistema di punti, rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi geometrici in modo che il sistema così generalizzato formi una nuova geometria che ubbidisce a tutti i venti assiomi precedenti. In altre parole gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, ammesso che si considerino validi i venti assiomi precedenti del presente sistema assiomatico.

G25 a.07 Procediamo ora a una serie di prime osservazioni sopra il sistema $HilbG$.

Innanzi tutto si osserva che limitandosi agli assiomi HI1-3, HO1-5 si ha un'assiomatizzazione per la geometria piana.

Gli assiomi di incidenza HI1-3 riguardano la definizione di una specie di strutture chiamata **geometria di incidenza**.
Queste strutture ora sono studiate ampiamente e presentano un ricco complesso di collegamenti con altre strutture discrete. Esse saranno trattate in modo autonomo in seguito, in particolare nel capitolo D64 dedicato ai disegni a blocchi.
Sul versante della geometria esse, comunque, forniscono semplici esempi di compatibilità e incompatibilità tra enunciati generali.

G25 a.08 Ricordiamo che Hilbert aveva introdotto anche un assioma di ordinamento che potrebbe contrassegnarsi con **O4**, ma che nel 1902 Eliakim Hastings Moore ed Robert Lee Moore, indipendentemente, hanno dimostrato essere deducibile dagli altri e che ora costituisce un enunciato che viene detto **teorema di Pasch**. Esso afferma quanto segue.

Dati quattro punti A, B, C e D appartenenti a una retta, se B si colloca tra A e C e C si colloca tra B e D, allora B si colloca tra A e D.

Si tratta di un enunciato del tutto intuitivo in quanto immediatamente visualizzabile; esso tuttavia riveste grande importanza in quanto Moritz Pasch nel 1882 aveva scoperto non essere deducibile dai soli assiomi di Euclide .

G25 c. variante di Pogorelov degli assiomi della geometria euclidea

G25 c.01 La deduzione dagli assiomi di Hilbert delle proprietà più importanti, della geometria euclidea, cioè delle proprietà più utili allo sviluppo della matematica e dei suoi modelli per le altre discipline quantitative, se condotta con rigore risulta piuttosto complicata. Delle pesantezze si incontrano non appena si introducono misure per segmenti e angoli.
Nelle esposizioni didattiche, quindi, si fa riferimento, in modo esplicito o sottaciuto, a qualche sistema di assiomi più deboli, deducibili da quelli di Hilbert, nei quali si incontrano nozioni giustificabili con gli assiomi precedenti che possono essere utilizzate con maggiore efficienza per gli sviluppi successivi.
In questa sezione presenteremo un sistema presentato da A. V. Pogorelov nel suo testo del 1984 dal titolo *Geometry* (Mir Publisher). Questo sistema sarà individuato dall'abbreviazione $PogG$.

La presentazione espone prima gli assiomi riguardanti il piano, il cui sistema denotiamo con $PogG2D$ e successivamente quelli riguardanti lo spazio tridimensionale il cui insieme denotiamo con $PogG3D$.
I primi saranno ripresi per collegarli al piano cartesiano nel capitolo G30, i successivi nel capitolo G36 quando si comincerà a parlare della geometria solida, ossia della geometria dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$.

G25 c.02 Anche il primo gruppo di assiomi di $PogG2D$ riguarda le proprietà dell'incidenza. Questa relazione può sussistere tra un punto e una retta e a una affermazione come ⌜ il punto P e la retta **r** sono incidenti ⌝ vanno considerate equivalenti le frasi
⌜ la retta **r** passa per P ⌝ , ⌜ P giace sulla retta **r** ⌝ , ⌜ P appartiene ad **r** ⌝ .
Inoltre il fatto che un punto P appartiene a due rette **r** ed **s** si esprime anche dicendo che **r** e **s** si intersecano in P.
Questi modi di dire ricavati dalla geometria e dall'insiemistica elementari rinunciano all'astrattezza, ma si avvantaggiano della visualizzabilità dei termini.

I1 Per ogni due punti distinti esiste una e una sola retta che passa per entrambi.

I2 Su ogni retta si trovano almeno due punti; inoltre esistono tre punti che non appartengono alla stessa retta.

G25 c.03 **I1** implica che due rette distinte aut non si intersecano, aut si intersecano in un solo punto. Esso inoltre implica che una retta risulta univocamente determinata dalla conoscenza di due suoi punti; se sono specificati due suoi punti P e Q è lecito individuare la retta con la notazione $\overline{PQ}$.
Da **I2** segue che per ogni retta esiste un punto che non le appartiene. Si può anche affermare che esistono tre punti che denotiamo con A, B e C, tali che C non appartiene alla $\overline{AB}$.
Va osservato che nella geometria elementare ai precedenti enunciati si dà poco peso: ci si basa sulla visione intuitiva dei punti e delle rette e in particolare si dà per scontato che a una retta appartengano infiniti punti. La formalizzazione che stiamo esponendo evita di ricorrere alla visione intuitiva, deve impegnarsi in deduzioni sottili ma, con la sua astrazione, ha il vantaggio di avviare costruzioni teoriche che possono essere utilizzate per geometrie che si allontanano anche in modo rilevante dalla geometria euclidea. In particolare vedremo che varianti del sistema $PogG$ portano alle geometrie non euclidee e alle geometrie finite [v.o.], discipline che avvalendosi di strutture dimostrative geometriche costituiscono importanti strumenti per applicazioni come le teorie relativistiche e cosmologiche, [`Relatività generale (wi)`, `Physical cosmology (we)`], l'ottimizzazione (`Optimization (mathematics) (we)`] e la `ricerca operativa (wi)`.

G25 c.04 Anche il secondo gruppo di assiomi di *PogG* riguarda l'ordinamento, ovvero la mutua collocazione dei punti sulle rette; anche in *PogG* la relazione ternaria che riguarda i punti sulla retta viene letta come "collocarsi tra".

O1 Dati tre punti distinti appartenenti a una retta, uno solo dei tre si colloca tra gli altri due.

O2 Ogni retta (in un piano) bipartisce l'insieme dei punti del piano che non le appartengono in due sottoinsiemi chiamati **semipiani aperti** tali che i segmenti aventi come estremi due punti di un semipiano non intersecano la retta, mentre i segment che collegani due punti dei due semipiani la intersecano.

Della espressione "su **r** B si colloca tra A e C" si considerano equivalenti espressioni come "B separa su **r** i punti A e C" , " A e C si collocano dalle parti opposte di **r** rispetto a B" e "B e C giacciono su **r** dalla stessa parte rispetto ad A.
L'assioma d'ordine **O1** consente di definire La nozione di segmento (di retta) avente come estremi i punti A e B come l'insieme dei punti appartenenti alla retta $\overline{AB}$ che si collocano tra A e B.
Le due parti di una retta $\overline{AB}$ costituite dai punti che si collocano da una determinata parte rispetto ad A vengono chiamate **semirette** o **raggi** di tale retta aventi A come estremità, ovvero come **origine**. La semiretta cui appartiene B si può denotare con $\overline{AB}$.

Se si considera una retta **s** passante per A diversa dalla $\overline{AB}$ la semiretta $\overline{AB}$ privata di A consiste in tutti e soli i punti della $\overline{AB}$ che appartengono al semipiano determinato dalla **s** contenente B.
Si prova anche che ogni punto A di una retta **a** la ripartisce in $\{A\}$ e in due semirette che hanno A come estremo; esse sono tali che i punti di ciascuna di esse stanno dalla stessa parte di A e due punti delle diverse semirette sono separati da A. Le due suddette semirette sono chiamate **semirette complementari**.

G25 c.05 A questo punto si può introdurre la nozione di triangolo, figura determinata da tre punti non allineati, scriviamoli A, B e C, la quale presenta i tre segmenti i cui estremi costituiscono i tre duetti $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ e $\{C, A\}$. I tre punti sono detti **vertici del triangolo** ed i segmenti sono detti **lati del triangolo**.

Dall'assioma **O2** segue che una retta che non passa per alcuno dei vertici del triangolo e interseca uno dei suoi lati deve intersecare uno e solo uno dei due lati rimanenti.

G25 c.06 Due assiomi del sistema *PogG*2*D* sono dedicati alla lunghezza dei segmenti e all'ampiezza degli angoli. Iniziamo dall'assioma sulla lunghezza.

M1 Ad ogni segmento delimitato da due punti diversi A e B è associato un numero reale positivo chiamato **lunghezza del segmento** che denotiamo con $|AB|$ e tale funzione bivariata è tale che se C si colloca tra A e B si ha $|AB| = |AC| + |CB|$.

Va osservato che nelle presentazioni della geometria elementare la lunghezza dei segmenti viene introdotta facendo riferimento, più o meno esplicitamente, a un processo di misurazione che, servendosi per esempio di una riga da disegno graduata, associa ad un segmento un numero reale che esprime la sua misura rapportata ad una qualche convenzionale unità di misura. Si tratta quindi di una costruzione geometrico-fisica che riguarda un modello geometrico di oggetti fisici che osserviamo intorno a noi [v.a. B20 e B26] e che si avvantaggia della intuitività del suddetto processo.
Il presente assioma, viceversa, richiede solo l'esistenza di una funzione che a due punti diversi associa un reale positivo, senza fare riferimento ad alcuna operazione fisica. Naturalmente un processo di misurazione e gli oggetti fisici ai quali si può adattare la nozione formale di lunghezza sono effettivamente utilizzati dalle operazioni mentali di chi affronta questo sviluppo teorico per aiutare, soprattutto al livello della intuizione visiva, la comprensione e la memorizzazione degli sviluppi formali.

G25 c.07

M2 Ad ogni angolo con lati diversi è associata una ampiezza esprimibile un certo numero reale positivo e una unità di misura; scegliamo la misura in gradi sessagesimali, tale che un angolo piatto misuri 180°.

Date le semirette a e b aventi in comune l'estremtà che scriviamo V, denotiamo l'angolo stesso con $\angle ab$ o con $\angle a\,V\,b$.
Se il contesto consente di evitare ambiguità useremo le stesse notazioni per denotare l'ampiezza dell'angolo.

Dall'assioma si ricava il seguente teorema.

(1) Teorema Tracciamo una prima semiretta a con estremità nel punto V ed altre due semirette con la stessa estremità b e c ma diverse ed appartenenti allo stesso semipiano determinato da a. Allora la c aut si trova nell'angolo $\angle ab$ aut b si trova nell'angolo $\angle ab$; in entrambi i casi si ha $(bc) = |(ac) - (ab)|$.

Dim.: Sulla semiretta a, la cui estremità denotiamo con V, scegliamo un punto A; sulla semiretta opposta $\ominus a$scegliamo A' con $V\,A' =_{cngr} V\,A$; sulla semiretta c scegliamo un punto C e osserviamo il triangolo $\triangle(A\,C\,A')$; la retta b^* contenente b interseca il lato $A\,A'$ di questo triangolo.
Di conseguenza, per il teorema di Pasch, b^* interseca aut AC [1], aut A_1C [2]; tale punto intersezione appartiene alla semiretta b, in quanto la sua opposta $\ominus b$ appartiene al semipiano $Hfpl_{a^*,\neg C}$.

Nel caso [1] b appartiene all'angolo $\angle AVC$ e si ha $(ac) = (ab) + (bc)$, cioè $(bc) = (ac) - (ab)$.
Nel caso [2] scriviamo $D := b \cap A'C$ e applichiamo il teorema di Pasch a $\triangle(A, D, A')$ e alla retta c^*: esso implica che anche c interseca AD e quindi appartiene all'angolo $\angle ab$. Di conseguenza $(ab) = (ac) + bc)$ e in conclusione $(bc) = |(ac) - (ab)|$ ∎

G25 d. consistenza, completezza e indipendenza degli assiomi

G25 d.01 Per il sistema degli assiomi della geometria euclidea $PogG$, come per ogni altro sistema di assiomi, ossia per ogni teoria formalizzata, si pongono tre problemi basilari.

Problema della consistenza o della coerenza: non è possibile derivare dal sistema due proposizioni contradditorie?

Problema della completezza: non è possibile aggiungere al sistema nuovi assiomi coerenti con i precedenti e non deducibili da essi?

Problema dell'indipendenza: nessuno degli assiomi del sistema è derivabile dagli altri?

Per affrontare e risolvere questi problemi ci occuperemo della definizione di modelli del sistema di assiomi.
Un modello per il sistema degli assiomi della geometria euclidea richiede che si precisino oggetti matematici dotati di una sufficiente concretezza (cioè sulle quali si possano effettuare le manipolazioni che si riveleranno opportune) in grado di rappresentare le entità formali chiamate "punti", "rette" e "piani" e le relazioni che riguardano tali entità espresse con i termini "incidente", "collocarsi tra" e "misura".

Il modello che si impone e che svilupperemo in modo piuttosto compiuto è il cosiddetto **modello cartesiano**: esso si serve degli spazi vettoriali sui numeri reali per formalizzare lo schema della geometria originaria di origine empirica basata sulla descrizione tendenzialmente visiva degli oggetti fisici intorno a noi, descrizione proveniente dalle nostre osservazioni più immediate.
Si potrebbero tuttavia proporre modelli che si servono di entità e di corrispondenti relazioni del tutto arbitrarie, anche molto lontane da quelle del modello sopra accennato.

G25 e. cenno storico ai fondamenti della geometria

G25 e.01 La geometria è nata nell'antichità come disciplina empirica costituita da regole che consentivano di risolvere problemi pratici come la valutazione di lunghezze, aree e volumi che si ponevano in tante attività: gestione dei terreni, architettura, costruzione di macchine, astronomia, ... Queste regole erano essenzialmente basate sull'esperienza e solo in parte collegate da argomentazioni dimostrative. Presso le civiltà mesopotamiche e ancor più presso gli egizi furono accumulate notevoli conoscenze geometriche.
Una base logica della geometria fu sviluppata nel mondo greco-ellenistico e gli *Elementi di Euclide*, comparsi intorno al 300 a. C., costituirono una presentazione sistematica dei fatti basilari della geometria organizzati con un impianto logico-deduttivo di notevole rigore per l'epoca.

Va detto che che questo libro è una delle opere scientifiche che ha avuto maggiore influenza sugli sviluppi della scienza e della cultura, nonostante la scarsa attenzione verso le costruzioni conoscitiva scientifiche che in molti periodi storici manifestano in gran parte gli intellettuali che/quando non si servono professionalmente di strumenti quantitativi e algoritmici in genere.

G25 e.02 La trattazione di Euclide inizia con 23 definizioni, le prime delle quali :

Un punto è quello che non ha parti.
Una retta è lunghezza senza spessore.
Le estremità delle rette sono punti.
Una retta giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

Esse si presentano come tentativi di dare significato ai termini punto e retta; comunque esse non sono utilizzate in nessuna successiva argomentazione e le perplessità che possono suscitare non invalidano gli sviluppi successivi.

Successivamente sono presentati 5 postulati geometrici e 5 assiomi riguardanti nozioni comuni (nozioni matematiche generali): da questi enunciati saranno dedotti tutti i teoremi della geometria classica. Questi i postulati.

(1) È possibile disegnare una retta da ogni punto a ogni altro.
(2) Da un segmento finito è possibile ottenere con continuità una retta.
(3) È possibile descrivere una circonferenza con ogni centro e ogni distanza (raggio).
(4) Tutti gli angoli retti sono tutti uguali tra loro.
(5) (**postulato delle parallele**) Se una retta interseca altre due rette, determina due angoli interni che stanno dalla stessa parte aventi ampiezza inferiore a due angoli retti; se queste due rette sono prolungate indefinitamente, si intersecano dalla parte dei due angoli di ampiezza inferiore a due angoli retti

Queste le 5 nozioni comuni.

(1) Cose uguali alla stessa cosa sono uguali.
(2) Se due cose uguali sono sommate a due uguali, i risultati sono uguali.
(3) Se due cose uguali sono sottratte da due uguali, i risultati sono uguali.
(4) Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali.
(5) L'intero è più grande della parte.

G25 e.03 Il postulato delle parallele si differenzia dagli altri ed Euclide si preoccupa di dedurre 28 proposizioni senza utilizzarlo: Euclide quindi si preoccupa di dimostrare numerose proposizioni indipendenti da questo postulato. Si può pensare che Euclide, e con lui i maggiori matematici del suo

tempo, fossero coscienti dell'indipendenza del postulato delle parallele dagli altri. In effetti nel periodo della grande matematica greco-ellenistica (400 a. C. - 150 a. C.) si sono sviluppate anche nozioni di geometrie non euclidee (geometrie sopra superfici).

Dopo il 150 a. C. si riscontra una decadenza del pensiero scientifico, ed iniziano tentativi di dedurre il quinto postulato dai primi quattro, considerati evidentemente veri. Per più di 2000 anni sono state proposte dimostrazioni che venivano considerate corrette fino a che si trovava che si erano servite di enunciati apparentemente ovvi e accettabili, ma che si rivelavano equivalenti allo stesso quinto postulato da dimostrare.
Tra i primi tentativi di questo genere ricordiamo quelli di Claudio Tolomeo nel II secolo e di Proclo nel V secolo. Proclo trovò quello che avrebbe ritrovato John Playfair nel 1795, cioè l'equivalenza del V postulato con il seguente che chiamiamo **assioma di Proclo-Playfair**

> ⌈ Dati un punto P e una retta **r** che non lo contiene, è possibile tracciare una parallela alla **r** passante per P ⌉ .

Intorno al 1100 lo scienziato (e poeta) persiano Omar Khayyam scrisse un commentario ai postulati di Euclide e in questa opera ottenne vari risultati che oggi vengono collegati alle geometrie noneuclidee.

John Wallis nel 1663 pubblicò una pretesa dimostrazione della deducibilità del V postulato, ma riuscì soltanto a dimostrare l'equivalenza del quinto postulato con l'enunciato

> ⌈ Di ogni triangolo esiste un triangolo simile di estensione arbitraria ⌉ .

G25 e.04 Nel XVIII secolo gli studi sul V postulato di Euclide si configurarono come tentativi di trovare contraddizioni nelle conseguenze del sistema costituito dai primi quattro assiomi e da una proposizione che negasse il quinto postulato o una proposizione equivalente.

Il primo ad assumere questo approccio e a portarlo avanti in modo determinato fu Girolamo Saccheri il quale sviluppò varie conseguenze del sistema di assiomi di Euclide a esclusione del V postulato giungendo a dimostrare varie proprietà di quello che abbiamo chiamato piano neutrale di Hilbert e delle geometrie noneuclidee.
Ad un certo stadio delle sue deduzioni credette, commettendo un sottile errore computazionale, di aver trovata una contraddizione e concluse sostenendo la deducibilità del V postulato dai precedenti. Purtroppo la sua opera sull'argomento, dal titolo *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, ebbe scarsa diffusione e modesta influenza.

L'approccio di Saccheri venne assunto successivamente da Lambert e da Legendre .
Lambert procedette nello studio delle geometrie che rifiutano il V postulato lontane dalla intuizione geometrica ordinaria ma logicamente ineccepibili; nella sua opera *Theorie der Parallelinien* del 1795 pubblicò rilevanti proprietà dei triangoli iperbolici. Inoltre egli seppe delineare per primo i principali concetti della metodologia della geometria deduttiva.

Nel 1794 Legendre pubblicò gli *Èlément de géométrie*, testo scritto per fornire una presentazione più facilmente leggibile della geometria euclidea e che effettivamente, grazie alle sue semplificazioni fu il testo standard su questo argomento per un centinaio di anni. Egli, come Saccheri, non riuscì a dimostrare la deducibilità del V postulato, ma ottenne interessanti risultati, come il fatto che la somma degli angoli di un qualsiasi triangolo non può superare π.

G25 e.05 Il chiarimento dell'indipendenza del quinto postulato fu ottenuto all'inizio del XIX secolo per opera di Gauss , Janos Bolyai e Nikolai Lobachewskii .

Anche Lobachewskii aveva ricercata una contraddizione tra la negazione del V postulato e gli altri assiomi euclidei. Più precisamente egli sviluppò una teoria nella quale il V postulato veniva sostituito dall'enunciato

> ⌈ Data una retta r e un punto P che non le appartiene,
> esistono almeno due rette passanti per P che non intersecano la r. ⌉

Con questa ipotesi e i restanti assiomi di Euclide egli riuscì ad ottenere una vasta gamma di risultati coerenti; egli si convinse della non cotradditorietà del precedente postulato con i restanti e concluse che entrambe le geometrie, la euclidea e la sua hanno diritto di essere proposte come sistemi logici. Questa conclusione non può essere considerata sufficientemente fondata, ma le conoscenze del tempo non consentivano vere dimostrazioni di noncontradditorietà per queste teorie geometriche. In effetti successivamente si è dimostrato che la coerenza logica di una di queste geometrie equivale alla consistenza dell'altra.
Quale sia la migliore per rappresentare il mondo fisico può stabilirsi solo attraverso osservazioni. Egli stesso si dedicò alla misurazione della somma degli angoli interni di un triangolo definito mediante oggetti astronomici.

G25 e.06 Indipendentemente da Lobachewskii il giovane matematico ungherese Janos Bolyai, figlio di un altro matematico, Farkas Bolyai amico di Gauss, si era dedicato dal 1820, allora diciottenne, allo studio di quella che ora chiamiamo geometria iperbolica giungendo a conclusioni simili a quelle di Lobachewskii, anche se con una trattazione meno completa.
Nel 1831 il padre comunicò a Gauss le scoperte di Janos, ma questi rispose con una certa freddezza che egli aveva da tempo scoperto questa situazione e che aveva scelto di non pubblicare nulla per non essere trascinato in polemiche con i sostenitori della geometria tradizionale. A questo proposito va segnalato che nella comunità dei filosofi del tempo era preminente la figura di Kant il quale sosteneva l'assoluta validità della geometria euclidea come quadro per lo spazio dei fenomeni fisici.
La riservatezza di Gauss sui problemi delle geometrie non euclidee ed il fatto che Lobachewskii e Bolyai operassero in sedi lontane dalle sedi delle più seguite discussioni sulla matematica fecero sì che negli anni di poco successivi le problematiche sopra gli *Elementi di Euclide* fossero scarsamente recepite; anzi molti matematici affermati le consideravano delle idee bizzarre prive di interesse.

G25 e.07 A questo punto vanno ricordate anche le idee concernenti la concezione della geometria che Bernhard Riemann sviluppò, stimolato da Gauss, a partire dalla sua conferenza per diventare Privatdozent pronunciata nel 1854. Portando avanti le idee di Gauss sulla geometria differenziale e in una certa misura allontanandosi dalla tematica dell'impostazione assiomatica delle teorie geometriche, egli proponeva di porre al centro dello studio della geometria lo studio delle proprietà locali di quelle che ora si chiamano **varietà riemanniane**. Riemann sviluppò anche, come studio delle varietà a curvatura positiva, la **geometria ellittica**, un'altra geometria non euclidea nella quale non esiste nessuna retta parallela a una data e passante per un punto dato e nella quale la somma degli angoli interni di ogni triangolo supera i 180°. Anche le idee di Riemann pubblicate dopo la sua morte rimasero inizialmente ininfluenti.

G25 e.08 La situazione cambiò radicalmente dopo il 1868 a opera dei geometri della generazione successiva. Dopo un breve periodo di polemiche con matematici tradizionalisti che giunsero a definire le non euclidee come "geometrie da manicomio", le discussioni sui fondamenti della geometria divennero invece una delle tematiche più stimolanti per gli studi finalizzati alla rifondazione dell'intera matematica su basi più rigorose e necessariamente più formali e astratte.

La consapevolezza dell'indipendenza del quinto postulato di Euclide e della disponibilità di geometrie che lo sostituiscono con un postulato incompatibile e che si mostrano coerenti iniziò a crescere con la scoperta di modelli in grado di rappresentarle in modo specifico.
Un primo modello fu dovuto ad Eugenio Beltrami che nel 1868 propose di considerare come piano della geometria iperbolica la superficie di curvatura negativa costante chiamata pseudosfera, figura studiata da Christiaan Huygens nel 1639. In tale modello il ruolo delle rette è svolto dalle linee geodetiche della superficie e la tangibilità di questo ambiente venne proposto come dimostrazione della noncontradditorietà della geometria iperbolica.

G25 e.09 Punto debole del modello di Beltrami, rilevato da Hilbert, sta nel fatto che non esiste alcuna superficie di curvatura negativa costante che sia priva di singolarità e quindi solo una parte del piano di Lobachewskii si può interpretare su questo genere di superficie.
Questa limitazione venne eliminati da un modello proposto da Felix Klein . Questi interpretò come piano iperbolico l'interno di una cerchio del piano euclideo con il ruolo delle rette assegnato alle corde. Con questo modello, oltre alla consistenza degli assiomi della geometria iperbiolica, risultò dimostrata l'indipendenza del V postulato dagli altri postulati di Euclide: se il V fosse derivabile dai rimanenti postulati nella geometria del piano iperbolico si avrebbe la presenza di due proprietà contradditorie riguardanti le parallele a una retta passanti per un punto.

Vanno anche ricordate le idee espresse sulle geometrie non euclidee da Henri Poincarè .

G25 e.10 Nella seconda parte del XIX secolo divenne sempre più marcata la tendenza a rendere la matematica e la sua metodologia il più possibile rigorose. Su questo hanno influito i risultati sopra la definizione dei numeri reali, i progressi nell'algebra, gli studi sopra i procedimenti dell'analisi infinitesimale e la nascita della teoria degli insiemi.

Entro questo clima si sviluppò una attenta critica al complesso dell'impostazione assiomatica della geometria di Euclide. Nel corso di questi studi sono emersi alcuni difetti, imprecisioni e soprattutto mancanze, del sistema assiomatico di Euclide.
In Euclide vengono trattate le grandezze e viene utilizzata la teoria delle proporzioni senza farne oggetto di precise definizioni. Si trattano i numeri dando solo alcune definizioni, ma trascurando di dare postulati e nozioni comuni: per esempio non si rileva la commutatività e la associatività dell'addizione.
Si dà dell'unità solo la definizione che segue.

Una unità è quello grazie al quale ciascuna delle cose esistenti è detta uno .

Inoltre negli Elementi non si parla di ordinamenti sulle rette; su questo intervenne Moritz Pasch in modo decisivo: con la sua opera dal titolo *Vorlesungen uber neuere Geometrie* pubblicata nel 1882 egli fornì gli assiomi che si rendono necessari per disporre della relazione "collocarsi tra".
L'opera di Pasch ebbe anche l'effetto di dare forte impulso all'imporsi di una consapevole adozione di metodi rigorosi basati sulla formalizzazione e sull'astrazione anche in settori matematici diversi dalla geometria. In particolare essa influenzò lo stesso Hilbert e Giuseppe Peano che il suddetto testo tradusse nel linguaggio formalizzato da lui propugnato per la presentazione dei fatti matematici.
Al dibattito su queste idee parteciparono anche vari matematici italiani vicini a Giuseppe Peano, come Alessandro Padoa, Mario Pieri e lo stesso Federigo Enriques.

G25 e.11 Il significativo coronamento di questa fase di studi si ebbe con la pubblicazione nel 1899 del testo di David Hilbert dal titolo *Grundlagen der Geometrie* che proponeva un sistema completo di assiomi per la geometria euclidea del piano e dello spazio.

Egli inoltre sottopose l'intero sistema a un esame sistematico della sua consistenza logica. In particolare egli ha dimostrato che la noncontradditorietà del sistema $HilbG$ equivale alla noncontradditorietà dell'aritmetica ed ha dimostrato per vari assiomi, oltre che per il V postulato, la loro indipendenza dagli assiomi rimanenti costruendo dei modelli di geometrie con il sistema di assiomi opportunamente ridotto. Diede in particolare esempi di geometrie nonarchimedee, cioè di geometrie che non soddisfano HC1.
Hilbert ha dimostrata anche la compatibilità del suo sistema con la teoria dei numeri reali definendo un modello di $HilbG$ basato sui numeri reali.
Con il metodo dei modelli Hilbert ha anche mostrato che certi teoremi di geometria dipendono solo da una parte degli assiomi. In particolare egli costruì un complesso modello per dimostrare l'indipendenza del `teorema di Desargues (wi)` da certi assiomi e cercando di semplificare tale modello Ray Moulton nel 1902 giunse alla identificazione dei piani affini non desarguesiani ora noti come piani di Moulton.

G25 e.12 Il testo di Hilbert fu in effetti ampiamente letto e apprezzato e fu anche lo spunto per ulteriori approfondimento delle caratteristiche delle ormai diversificate geometrie, dei metodi di approccio alla geometria nel suo complesso segnando la nascita del moderno studio astratto della geometria. Esso fu anche il riferimento per la discussione sui modi per introdurre la geometria e dei procedimenti da seguire per insegnarla nei diversi livelli scolastici e per i diversi destinatari. Va segnalato anche che di esso sono uscite dieci edizioni in tedesco nelle quali Hilbert continuò ad apportare dei miglioramenti.

In particolare ci si rese conto ampiamente che l'approccio di Euclide ed Hilbert è del tutto indipendente da considerazioni numeriche e si sentì la necessità di collegarlo all'approccio costruttivo di derivazione cartesiana, anche in relazione alla introduzione dei numeri reali e per la necessità di collegarla all'analisi matematica e alle sue nomerose e ineludibili applicazioni.

G25 e.13 La discussione sui fondamenti della geometria condussero anche ad approcci diversi da quello della assiomatizzazione di Euclide e Hilbert.
Mario Pieri esaminò un sistema nel quale ci sono solo due nozioni primitive, il punto e il moto; con quest'ultimo egli riuscì a soddisfare le esigenze per le quali era stato introdotta la relazione di betweenness. Egli nel 1905 diede la prima trattazione assiomatica della geometria proiettiva complessa senza far ricorso alla geometria proiettiva reale.

G25 e.14 Una questione spesso dibattuta riguarda l'opportunità o meno di impostare l'insegnamento della geometria nelle scuole sopra l'approccio assiomatico, allontanandosi dalle presentazioni più intuitive e da quelle di impostazione analitica-cartesiana. Ricordiamo un primo testo per le scuole secondarie con approccio assiomatico pubblicato nel 1904 e la scelta di questo approccio nella cosiddetta **New Math**, proposta intorno al 1960 volta ad irrobustire l'insegnamento della matematica negli USA come reazione al successo sovietico del lancio del satellite Sputnik. La New Math fu seguita anche in altri paesi, ma i suoi effetti destarono molti dubbi, come altre proposte didattiche che privilegiavano l'astrazione.

G25 f. altri sistemi di assiomi e altre geometrie

G25 f.01 Oltre al sistema di Hilbert sono stati proposti vari altri sistemi di assiomi per la geometria euclidea o per una sua parte rilevante.

Nel 1909 Issai Schur propose un sistema di assiomi che si basa anch'esso sulle entità punto, retta e piano e che sostituisce la relazione di congruenza con la nozione di movimento rigido. Tale nozione consente di sviluppare un approccio orientato alla teoria dei gruppi di trasformazioni e di formulare in termini algebrici i procedimenti per le costruzioni geometriche. Un simile sistema di assiomi è dovuto ad Hermann Weyl .

G25 f.02 Si poneva anche l'esigenza di generalizzare i sistemi di assiomi per poter sviluppare geometrie di maggiore portata e procedimenti dimostrativi e costruttivi più efficaci. Per questo risultava necessario sviluppare un nuovo linguaggio più versatile per diverse finalità: introduzione di nuovi concetti, algebrizzazione delle dimostrazioni, classificazione delle configurazioni e delle forme geometriche, ... Uno schema per i fondamenti della geometria che andava nelle suddette direzioni è stato proposto da Hermann Weyl nel 1916. Una trascrizione di questo schema è presentata nella voce *Foundation of geometry* della `https://it.wikipedia.org/wiki/Encyclopaedia of Mathematics`.

Lo schema di Weyl consente di introdurre assiomi che consentono di trattare la gometria in molte dimensioni e di effettuare modifiche circoscritte per controllare gli spazi iperbolici, gli ellittici e altro.

Un successivo sistema introdotto da F. Bachmann assume come concetto di base le trasformazioni di simmetria.

G25 f.03 Nel 1932 George David Birkhoff propose un suo sistema costituito da 4 assiomi.

B1 (assioma della misura per le rette) Si può considerare una corrispondenza biunivoca tra un insieme di punti $\{A, B, ...\}$ sopra una retta e un insieme di numeri reali della forma $\left\lceil A, B, ... \nmapsto p(A), p(B), ... \right\rceil$ tale che si abbia la distanza $dist(A, B) = |p(A) - p(B)|$.

B2 (assioma dell'incidenza punto-retta) Esiste una e una sola retta che passa per due punti dati distinti.

B3 (assioma della misura degli angoli) Un qualsiasi insieme di semirette r, s, t, ... aventi in comune l'estremità Q si può porre in una corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'insieme delle classi di resti modulo 2π dei numeri reali della forma $\left\lceil \mathsf{r}, \mathsf{s}, \mathsf{t}, ... \nmapsto \phi(\mathsf{r}), \phi(\mathsf{s}), \phi(\mathsf{t}), ... \right\rceil$ tale che, detti R ed S due punti appartenenti, risp., ad r e ad s, la differenza $\phi(\mathsf{r}) - \phi(\mathsf{s})$ modulo 2π esprima l'ampiezza angolare $\angle AQB$.

B4 (assioma di similarità) Consideriamo due triangoli $\triangle(A, B, C)$ e $\triangle(Aprm, B', C)$ e una costante reale positiva k. Se $\mathrm{dist}(A', B') = k\, dist(A, B)$, $\mathrm{dist}(A', C) = k\, dist(A, C)$ e $\angle B'A'C = \pm\angle BAC$, allora $\mathrm{dist}(B', C) = k\, dist(B, C)$, $\angle C'B'A = \pm\angle CBA$ e $\angle A'C'B = \pm\angle ACB$.

G25 f.04 Tra le geometrie dotate di assiomi poveri va ricordata la cosiddetta **geometria ordinata**. Essa, in buona sostanza, costituisce un ridotto arricchimento della geometria di incidenza: agli assiomi risalenti a Pasch e migliorati da Peano, Hilbert e Veblen si aggiungono assiomi che forniscono un ordinamento per i punti di una retta [`Ordered geometry (we)`]. La geometria ordinata si può assumere come base fondativa sia della geometria neutrale, che della geometria affine, due teorie con molti elementi di incompatibilità.

G25 f.05 Un interessante sistemi di assiomi è dovuto al logico Alfred Tarski il quale fu ispirato dal sistema di Mario Pieri da lui apprezzato per la trasparenza della struttura logica dall'intrecciarsi degli assiomi.
Il sistema di Tarski si propone di inquadrare una parte significativa della geometria piana euclidea (che può quindi dirsi elementare) e si presenta come notevolmente più semplice del sistema di Hilbert e di quelli della stessa portata. Esso si può formulare considerando come sola nozione primitiva quella di punto e senza richiedere alcuna nozione derivata; altri oggetti primitivi introdotti sono le relazioni di betweenness e di congruenza.
Il sistema di Tarski si configura come logica del primo ordine e non fa ricorso alla teoria degli insiemi. In effetti il sistema fu introdotto intorno al 1920 come sistema per il quale fosse facilitata la derivazione delle sue proprietà metamatematiche con gli strumenti della logica matematica; esso non risulta invece conveniente come base per la geometria euclidea.
Il sistema si avvale della relazione di uguaglianza consentito dalla logica del primo ordine e della sua negazione. Dopo aver introdotta la relazione ternaria betweenness tra punti, per la quale scriveremo $\mathsf{B}pqr$, si introduce la relazione quaternaria di congruenza per la quale $pq \equiv rs$ si può leggere "pq e rs hanno la stessa lunghezza".

Sono dati tre assiomi di congruenza.

riflessività: $pq \equiv qp$;
identità: $pq \equiv rr \implies p = q$;
transitività: $(pq \equiv rs \ \wedge \ rs \equiv tu \implies pq \equiv tu$.

Si chiede un solo assioma per la betweenness.

$\mathsf{B}pqp \implies q = p$.

Assioma di Pasch.

$(\mathsf{B}xuz \wedge \mathsf{B}yvz) \implies \exists i \between (\mathsf{B}uay \wedge \mathsf{B}vax)$.

Esso esprime la intersezione delle diagonali di un quadrilatero

Schema di assioma di continuità

Se $\phi(x)$ e $\psi(y)$ sono formule del primo ordine prive di istanze libere delle variabili di punto a e b e non vi sono istanze libere di y in $\phi(x)$ e di x in $\psi(y)$, allora sono assiomi tutte le istanze del seguente schema di assioma

$\exists a \ \forall x \ \forall y \ [(\phi(x) \wedge \psi(y)) \implies \mathsf{B}axy] \implies \exists b \ \forall x \ \forall y \ [(\phi(x) \wedge \psi(y)) \implies \mathsf{B}xby]$.

$\exists a \ \exists b \ \exists c \ \between \ \neg\mathsf{B}abc \wedge \neg\mathsf{B}bca \wedge \neg\mathsf{B}cab$.

Esso esprime l'esistenza di terne di punti noncollineari.

Assioma delle parallele di Euclide

Di esso vengono date tre formulazioni equivalenti, ciascuna delle quali presenta vantaggi parziali.

Costruzione di un segmento

$\exists z \ \between \ (\mathsf{B}xyz \wedge yz \equiv ab)$.

Si può leggere come la richiesta che per ogni segmento ab, per ogni punto y e per punto x si può tracciare una linea congruente ad ab passante per y e con la direzione determinata da x .

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php