1

Capitolo D68
quadrati magici e varianti

Contenuti delle sezioni

a. quadrati magici p. 2
b. quadrati magici e quadrati latini p. 5
c. proprietà di affiancamento p. 9
d. quadrati fortemente magici p. 10
e. equivalenza di quadrati fortemente magici p. 13
f. quadrati antimagici di ordine 3 p. 14
g. cubi magici e varianti p. 19

19 pagine

D68 0.01 Il capitolo è dedicato all'introduzione e alle prime proprietà dei quadrati magici, matrici quadrate le cui entrte sono numeri interi con caratteristiche che rendono impegnativa la loro individuazione.
Queste strutture discrete fino dall'altichità in alcune culture hanno destato grande interesse sia in ambito numerologico, in quanto considerate portatrici di proprietà occulte, magiche e taumaturgiche, sia per le loro proprietà matematiche.

D68 a. quadrati magici [0]

D68 a.01 Sia n un intero maggiore o uguale a 2. Diciamo **quadrato magico di ordine** n una matrice quadrata $n \times n$ avente come entrate interi non tutti uguali e tali che, sommando i numeri su ciascuna delle sue righe, su ciascuna delle sue colonne e su ciascuna delle sue diagonali si ottiene un unico valore.

Chiameremo tale valore il **totale del quadrato magico**; talora invece di totale si usa il termine "somma"; qui il totale di un quadrato-m Q lo denoteremo con $\mathrm{tot}(Q)$.
Nel seguito abbrevieremo il termine quadrato magico con **quadrato-m**.

Esempi di quadrati-m di interesse storico sono

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 28 & 4 & 3 & 31 & 35 & 10 \\ 36 & 18 & 21 & 24 & 11 & 1 \\ 7 & 23 & 12 & 17 & 22 & 30 \\ 8 & 13 & 26 & 19 & 16 & 29 \\ 5 & 20 & 15 & 14 & 25 & 32 \\ 27 & 33 & 34 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

aventi come totale, risp., 15, 34 e 111.

Quadrati-m ovvi sono le matrici con tutte le entrate uguali; si tratta tuttavia di oggetti privi di interesse sui quali non ci soffermentemo.

Si osserva subito che sommando a ogni entrata di un quadrato magico di ordine n un qualsiasi intero a si ottiene ancora un quadrato magico: il suo totale è ottenuto aggiungendo $n \cdot a$ a quello di partenza. Quindi ci si può limitare a studiare quadrati magici con entrata minima 0 oppure 1.

Per ordini piccoli i quadrati magici con piccoli codomini si possono costruire abbastanza facilmente.

Vediamo due esempi di quadrati-m:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

Il primo di questi quadrati-m è ottenuto aumentando di 1 tutte le entrate della rappresentazione matriciale binaria della permutazione (4 1 3 2); il secondo si può ottenere dal precedente sommandolo a quello ottenuto riflettendo le sue colonne.

D68 a.02 Nel seguito denoteremo con **SqM** l'insieme di tutti i quadrati-m, e con $\mathbf{SqM}^{(n)}$ l'insieme dei quadrati-m di ordine n, cioè forniti da matrici di profilo $n \times n$,

Conviene segnalare subito che non si conoscono procedimenti o espressioni semplici che consentono di tenere sotto controllo tutti i quadrati magici.
Accade tuttavia che si individuano vari tipi di quadrati-m con caratteristiche comuni e molti tipi di collegamenti tra quadratimM dello stesso ordine o di ordini diversi che aiutano a controllare queste strutture discrete.

Un quadrato-m di ordine n si può vedere come funzione-NNtZ, cioè come funzione di due variabili intere naturali o positive il cui codominio è l'insieme degli interi costituenti le sue componenti.

Si constata che le rappresentazioni matriciali binarie di tutte le permutazioni di n oggetti diversi, in particolare degli interi di un qualsiasi intervallo di n elementi di $\mathbb{Z}$ sono quadrati-m aventi come totale n.

Si constata anche che sono quadrati magici tutti i quadrati latini con le diagonali principale e secondaria costituenti permutazioni.
Se le loro entrate costituiscono **[**n **)** il loro totale è $\frac{n(n-1)}{2}$; se le loro entrate costituiscono **(**n **]** hanno totale uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.
Queste matrici sono chiamate **quadrati latini magici**.

D68 a.03 Si constata che sommando componente per componente due quadrati-m si ottiene un altro quadrato-m la cui somma è la somma dei due quadrati addendi.
In particolare sommando a ogni componente di un quadrato magico Q di ordine n un qualsiasi intero a si ottiene ancora un quadrato magico il cui codominio si ottiene traslando $\mathsf{dom}(Q)$ di $+a$ ed il cui totale è $\mathrm{tot}(Q) + n\,a$.

Quindi le proprietà di tutti i quadrati-m si possono ricavare facilmente dalle proprietà dei quadrati-m con una fissata entrata minima.

In genere si considerano quadrati-m aventi come entrata minima 1, talora quadrati-m con entrata minima 0.
Quando si esaminano caratteristiche collegabili agli anelli $\mathbb{Z}_n$ e ai quadrati latini che abbiamo chiamato canonici [D63a03] risulta un poco più vantaggioso trattare quadrati-m con entrata minima 0.

Per varie costruzioni invece occorre essere elastici e propensi a servirsi di quadrati-m con entrate minime diverse, sfruttando il fatto che le loro proprietà sono facilmente adattabili.

Nel seguito denotiamo con $\mathbf{SqM}^{(n)}_{m\ldots}$ l'insieme dei quadrati-m di ordine n e con entrata minima m.

Evidentemente ogni quadrato-m con codominio costituito da $h > 1$ interi, trasformando uno dei valori delle sue entrate in un altro di tali valori diventa un quadrato magico con un codominio di $h-1$ valori.

È anche evidente che sostituendo in un quadrato latino magico di ordine n Q tutte le entrate aventi uno stesso valore v con un altro valore w si ottiene una altro quadrato latino magico M avente come totale $\mathrm{tot}(Q) + n\,9\,w - v)$.

Questo fatto implica che un quadrato-m con il codominio costituente un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ diverso da un intervallo, attraverso modifiche dalle entrate facilmente individuabili porta a un quadrato-m avente come codominio un intervallo di interi.
In particolare si può ottenere un quadrato-m avente come codominio **[**n **)** oppure **(**n **]**.
Questo fatto e la facilità sopra esemplificata di individuare quadrati-m con codomini ridotti portano a giudicare più pregevoli e più meritevoli di studio i quadrati-m con codomini estesi, con un numero ridotto, eventualmente nullo, di valori ripetuti.

D68 a.04 In particolare sono considerati interessanti i quadrati-m con le entrate tutte diverse; il loro insieme lo denotiamo con **SqMD**.

Sono considerati particolarmente interessanti i quadrati-m con il codominio della forma **[**k**)**; qui li chiamiamo **qudrati magici canonici** e denotiamo con **SqMC** il loro insieme, mentre se ci limitiamo ai quadrati-m di ordine n denotiamo il loro insieme con $\mathbf{SqMC}^{(n)}$.

Molto simili ad essi e più comunemente usati sono i quadrati-m con il codominio della forma $\lceil\, k$**]**; qui li chiamiamo **qudrati magici normali** e denotiamo con **SqMN** il loro insieme e con $\mathbf{SqMN}^{(n)}$ l'insieme dei quadrati magici di ordine n.

Ovviamente $\mathbf{SqMC}, \mathbf{SqMN} \subset \mathbf{SqMD}$.

Tra i quadrati magici canonici e normali sono più apprezzati quelli con il massimo valore $k-1$ o k elevato, e massimamente quelli con l'insieme delle entrate costituito da $\mathbf{[}n^2\mathbf{)}$. o da $\mathbf{(}n^2\mathbf{]}$.
La somma delle entrate dei canonici è $\dfrac{n^2(n^2-1)}{2}$ e quindi il loro totale è $\dfrac{n(n^2-1)}{2}$; per i normali abbiamo invece come totale $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Due quadrati magici di $\mathsf{SqMN}^{(4)}$ e uno di $\mathsf{SqMN}^{(6)}$ sono i seguenti:

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 35 & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\ 3 & 32 & 7 & 21 & 23 & 25 \\ 31 & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\ 8 & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \\ 30 & 5 & 34 & 12 & 14 & 16 \\ 4 & 36 & 29 & 13 & 18 & 11 \end{bmatrix}$$

D68 a.05 I quadrati magici, e strutture che si discostano poco dalla definizione data all'inizio del capitolo, sono stati conosciuti fin dall'antichità in Cina (2000 a.C. ?) e in India e spesso sono stati considerati entità dotate di poteri occulti, magici e taumaturgici (e lo sono tuttora, non solo nei suddetti paesi).
Essi quindi sono stati utilizzati spesso nella confezione di amuleti, di oggetti con fini rituali o di elementi per il vestiario e per l'arredamento.

Essi sono comparsi nella letteratura occidentale a Costantinopoli intorno al 1300 ed hanno avuto una certa fama nel Rinascimento: il primo dei tre quadrati magici in a03 compare in una celebre litografia di Albrecht Duerer del 1514 intitolata "Melencolia I" (nelle caselle centrali inferiori si legge anche la data dell'opera).

Agrippa von Nettesheim presentò quadrati magici degli ordini da 3 a 9. I quadrati-m sono stati oggetto di studio costruttivo da parte dello stesso Eulero intorno al 1780.

I quadrati magici oggi, oltre a presentare interesse numerico-combinatorio giocano un ruolo importante in applicazioni pratiche come negli esperimenti a scopo statistico o nella costruzione di codici diagnostici e con correzione di errori per la trasmissione di dati tra apparecchiature elettroniche.

D68 a.06 In linea di principio, ossia se fosse possibile non preoccuparsi dell'efficienza, si può utilizzare una procedura relativamente semplice che genera tutti i quadrati magici di un dato ordine n e con un dato codominio e in particolare tutti i quadrati-m di $\mathsf{SqMC}^{(n)}$: si tratta di generare per i vari valori massimi k tutte le matrici di ordine n aventi codominio $\mathbf{[}k\mathbf{)}$ e decidere per ciascuna di esse con semplici verifiche se si tratta di un quadrato magico.

Da queste semplici considerazioni risulta evidente che SqMC è un insieme numerabile.

Non potendosi trascurare le questioni di efficienza, data l'elevatezza del numero delle matrici quadrate di ordine n candidate al ruolo di quadrati-m quando n è alto, per riuscire ad avere un controllo procedurale effettivo di queste configurazioni discrete risulta necessario disporre di maggiori conoscenze dei loro insiemi e delle loro proprietà.

D68 b. quadrati magici e quadrati latini

D68 b.01 I quadrati magici più strettamente collegati con i quadrati-L sono quelli che, nel caso dell'ordine n, presentano solo n entrate distinte, ciascuna occorrente n volte. Evidentemente si tratta di quadrati-L tali che la somma degli elementi sulle due diagonali coincide con la somma degli elementi su ciascuna riga o colonna.

Chiamiamo **quadrato-L magico di ordine** n ogni quadrato-L di ordine n che sia anche quadrato magico; denotiamo con $\mathbf{SqLM}^{(n)}$ il loro insieme.

Chiaramente il totale di ciascuno di tali quadrati è $0+1+...+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

In particolare si dice **quadrato-L diagonale-D1** un quadrato-L canonico con gli elementi della diagonale principale distinti e si dice **quadrato-L diagonale-D2** un quadrato-L canonico con gli elementi della diagonale secondaria distinti. Si definisce poi **quadrato-L bidiagonale** un quadrato-L che sia contemporaneamente diagonale-D1 e diagonale-D2.

D68 b.02 Prop. Per ogni $n=3,4,...$ esiste almeno un quadrato-L p-diagonale di ordine n.

Dim.: È noto che se $n \in [3:+\infty)$ esiste un semigruppo idempotente di ordine n e la tavola di moltiplicazione di un semigruppo idempotente è un quadrato-L diagonale-p ∎

D68 b.03 Coroll.: Se $n \in [3:+\infty)$ esiste almeno un quadrato-L diagonale-s di ordine n.

Dim.: Capovolgendo l'ordine delle colonne del quadrato-L diagonale-p si ottiene un quadrato-L diagonale-s ∎

D68 b.04 Prop. Se n è un generico intero dispari non multiplo di 3, allora esiste almeno un quadrato-L bidiagonale di ordine n ∎

D68 b.05 Prop. Esiste almeno un quadrato-L bidiagonale di ordine 2^k sse $k>1$.

Dim.: È immediato vedere che non è possibile costruire un quadrato-L bidiagonale di ordine 2; quindi supponiamo sia $k \geq 2$. I casi $k=2,3$ sono dati dai seguenti esempi di quadrati-L di ordine 4 e 8.

$$SqLMb_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad SqLMb_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 0 & 2 & 7 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Per $k \geq 3$ procediamo per induzione e prendiamo come ipotesi induttiva che esiste almeno un quadrato-L bidiagonale di ogni ordine $n=2^h$ con $2 \leq h \leq k$.
Dato che $2^k = 4 \cdot 2^{k-2}$, dall'ipotesi induttiva segue che 2^k può essere scritto come il prodotto $n_1 \cdot n_2$ di due interi n_1 e n_2 tali che esistono i quadrati-L bidiagonali sia di ordine n_1 che di ordine n_2.
Supponiamo ora che A e B siano quadrati latini canonici bidiagonali di ordine risp. n_1 e n_2. Costruiamo l'assemblaggio latino guidato da A di ${n_1}^2$ repliche di B: è facile vedere che otterremo un quadrato-L bidiagonale di ordine $n_1 \cdot n_2 = 2^k$. La dimostrazione può essere così completata per induzione su k ∎

D68 b.06 L'assemblaggio latino guidato da $SqLMb_4$ di 16 repliche di $SqLMb_4$ è fatto utilizzando gli interi da 0 a 15 come nel seguente esempio di quadrato-L di ordine 16:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 \\
1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 15 & 14 \\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \\
11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 & 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \\
9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 15 & 14 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\
12 & 13 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
14 & 15 & 12 & 13 & 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
13 & 12 & 15 & 14 & 9 & 8 & 11 & 10 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 12 & 13 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 14 & 15 & 12 & 13 & 10 & 11 & 8 & 9 \\
7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\
5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 13 & 12 & 15 & 14 & 9 & 8 & 11 & 10
\end{bmatrix}$$

D68 b.07 Prop. Se n è un intero positivo multiplo di 4, esiste almeno un quadrato-L bidiagonale di ordine n.

Dim.: La costruzione utilizzata per la dimostrazione di questo teorema è simile a quella del teorema precedente. Costruiamo quadrati-L di ordine $4 \cdot r$ con $r \geq 3$. Se $L \in \mathbf{SqL}^{(n)}$, basta costruire l'assemblaggio latino guidato da L di r^2 repliche di $SqLMb_4$ ∎

D68 b.08 Prop. Non esistono quadrati-L bidiagonali di ordine 3.

Dim.: Supponiamo che la matrice quadrata $[a_{ij} \mid: i, j = 1, 2, 3]$, sia un quadrato-L bidiagonale. Allora, per definizione, gli elementi a_{11}, a_{22}, a_{33} sono tutti distinti e lo stesso vale per gli elementi a_{13}, a_{22}, a_{31}.
Questo implica necessariamente che $a_{11} = a_{13}$ o $a_{11} = a_{31}$. Se una di queste uguaglianze fosse vera, $[a_{ij}]$ non sarebbe un quadrato latino ∎

D68 b.09 Ricordiamo che si definisce **insieme trasversale di un quadrato-L** di ordine n un insieme di n celle, una in ogni riga, una in ogni colonna, tali che due di queste celle non contengono lo stesso valore.

(1) Teorema Per ogni $n \in [3 : +\infty)$ esiste un quadrato-L p-diagonale di ordine n che possiede almeno un trasversale disgiunto dalla diagonale principale ∎

D68 b.10 Teorema Per $n \in [4 : +\infty)$ esiste almeno un quadrato latino bidiagonale di ordine n ∎

D68 b.11 Esempi di quadrati latini bidiagonali degli ordini 4, 5 e 6 sono i seguenti:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 2
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 4 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 \\
2 & 0 & 4 & 1 & 5 & 3 \\
4 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \\
3 & 5 & 1 & 4 & 0 & 2
\end{bmatrix}$$

D68 b.12 Si dimostra anche che si possono costruire quadrati magici con entrate consecutive servendosi di coppie di quadrati-L ortogonali.
Una tale costruzione risale allo stesso Eulero.

Per questa costruzione considereremo coppie di quadrati-L isotope al quadrato che rappresenta la tavola di moltiplicazione del gruppo ciclico C_n con $n = 5$ (il metodo è efficace per n dispari).

D68 b.13 Denotiamo con L^* il quadrato-L che rappresenta la tavola di moltiplicazione di C_5 quando questo è rappresentato come gruppo additivo.
Scambiando gli elementi $n-1$ e $\frac{n(n-1)}{2}$ in ogni riga di L^*, quest'ultimo può essere trasformato in un quadrato-L L per il quale la somma degli elementi su ciascuna riga, su ciascuna colonna e su ciascuna diagonale è uguale a $\frac{n(n-1)}{2}$.
L può essere caratterizzato in questo modo. La diagonale principale forma un trasversale di L (così L è p-diagonale) e ogni diagonale spezzata parallela alla principale forma anche essa un trasversale.
La diagonale secondaria contiene l'elemento $1/2n(n-1)$ n volte e ogni diagonale spezzata parallela alla diagonale secondaria ha tutti i suoi elementi uguali.

Un quadrato-L L_1 ortogonale a L può essere ottenuto da L scambiando le colonne di L a coppie: la r-esima colonna viene scambiata con la $(n-1-r)$-esima per $r = 0, 1, ..., 1/2(n-3)$, mentre la $\frac{n-1}{2}$-esima colonna è fissata (si ricordi che le colonne sono numerate da 0 a $n-1$).
L'ortogonalità segue dal fatto che tutti gli elementi di ogni diagonale spezzata parallela alla principale di L_1 sono uguali, mentre in L essi sono tutti distinti.
Inoltre gli elementi di ogni diagonale spezzata parallela alla secondaria di L_1 formano un trasversale, mentre in L essi sono tutti uguali.

Illustriamo queste situazioni con i seguenti quadrati-L nei ruoli rispettivi di L^*, L e L_1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi enunciare il teorema che segue.

D68 b.14 Teorema Siano $L = [a_{ij}]$ e $L_1 = [b_{ij}]$ due quadrati-L ortogonali di ordine n dispari costruiti come sopra descritto. Una matrice quadrata $M = [c_{ij}]$ sia costruita da L e L_1 ponendo $c_{ij} := n\,a_{ij} + b_{ij}$.
Allora la somma degli elementi di ogni riga, colonna e diagonale della matrice M è uguale a $\frac{n(n^2-1)}{2}$ e gli elementi di M sono gli interi consecutivi $0, 1, ..., n^2 - 1$ ∎

Se consideriamo i quadrati-L rappresentati sopra, possiamo vedere che, in base al teorema 06 : F.9, nL, L_1 e M sono, risp., i seguenti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 20 & 15 & 10 \\ 5 & 20 & 15 & 10 & 0 \\ 20 & 15 & 10 & 0 & 5 \\ 15 & 10 & 0 & 5 & 20 \\ 10 & 0 & 5 & 20 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 8 & 24 & 16 & 10 \\ 5 & 22 & 18 & 14 & 1 \\ 21 & 15 & 12 & 3 & 9 \\ 19 & 11 & 0 & 7 & 23 \\ 13 & 4 & 6 & 20 & 17 \end{bmatrix}$$

D68 b.15 Teorema Esiste una coppia di quadrati-L bidiagonali ortogonali di ogni ordine dispari che non sia multiplo di 3 ∎

D68 b.16 Teorema Coppie di quadrati-L bidiagonali ortogonali di ordine n possono essere costruite ogni volta che n sia dispari o un multiplo di 4, tranne quando n è un multiplo di 3 ma non di 9 ∎

D68 b.17 Teorema Se n è un generico intero per il quale esiste una coppia di quadrati-L bidiagonali ortogonali, allora può essere costruito il quadrato magico di ordine n le cui entrate sono gli interi consecutivi $0, 1, ..., n^2 - 1$ ∎

D68 b.18 È stato inoltre dimostrato da Tarry che se $n = 8\,m$, con m dispari e non multiplo di 3 ($n = 8, 40, 56, 88, 104, ...$), allora è possibile ottenere coppie di quadrati-L bidiagonali ortogonali, L_1 e L_2, tali che il quadrato magico ottenuto con la composizione matriciale $M := (n-1)L_1 + L_2$ ha l'ulteriore proprietà che le somme dei quadrati degli elementi di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale principale sono uguali.
La costruzione di quadrati magici con l'uso di coppie di quadrati-L ortogonali è nota ed usata da più di due secoli, ma non è l'unico metodo disponibile.

D68 b.19 Un quadrato magico è detto **quadrato magico pandiagonale** sse la somma degli elementi in ognuna delle sue diagonali spezzate è la stessa ed è uguale alla somma degli elementi di ogni riga, colonna e diagonale. Un esempio è fornito dal seguente quadrato di ordine 7 il cui totale è 175:

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 49 & 37 & 32 & 27 & 15 \\ 41 & 29 & 24 & 19 & 14 & 2 & 46 \\ 16 & 11 & 6 & 43 & 38 & 33 & 28 \\ 47 & 42 & 30 & 25 & 20 & 8 & 3 \\ 22 & 17 & 12 & 7 & 44 & 39 & 34 \\ 4 & 48 & 36 & 31 & 26 & 21 & 9 \\ 35 & 23 & 18 & 13 & 1 & 45 & 40 \end{bmatrix}$$

Spesso i quadrati magici pandiagonali vengono definiti anche quadrati magici perfetti o quadrati magici diabolici a causa di questa loro proprietà: una riga o una colonna che forma uno dei quattro lati del quadrato può essere trasportata al lato opposto del quadrato senza che questo perda gli attributi "magico" e "pandiagonale".

D68 b.20 Fu inoltre studiato da W. G. Horner un metodo per la costruzione di quadrati magici nei quali non solo la somma, ma anche il prodotto degli elementi di ogni riga, colonna e diagonale fosse la stessa.
Questo tipo di quadrato viene chiamato **quadrato magico somma-prodotto**.
Questo complesso procedimento si basa sui quadrati-L.

D68 c. proprietà di affiancamento

D68 c.01 Consideriamo il seguente quadrato magico 4×4:

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la notazione decimale, affianchiamo le entrate delle prime due colonne per formare un'unica colonna di numeri e calcoliamone la somma. Ripetiamo l'operazione per le ultime due colonne:

Qui & denota l'operazione di affiancamento. Come si può notare la somma ottenuta è la stessa e questa è un'altra proprietà che caratterizza i quadrati magici. Analogamente a quanto fatto sopra, possiamo affiancare le altre coppie di colonne (con l'ulteriore condizione, però, che l'entrata 9 sia vista come 09):

Ripetendo questo procedimento con le altre quattro possibili scelte otteniamo un diverso insieme di somme uguali:

D68 c.02 La stessa operazione può essere fatta con le righe di M trovando, anche in questo caso, delle combinazioni che generano colonne per le quali la somma delle entrate è la stessa:

D68 c.03 Come abbiamo già detto in questa operazione l'entrata 9 è stata sostituita con il numero a due cifre 09 per rendere i numeri a una cifra e a due cifre all'interno del quadrato convenientemente simmetrici. Per evitare questo stratagemma si possono riscrivere le entrate del quadrato in base nove piuttosto che con la usuale notazione decimale: con la notazione in base nove, infatti, i numeri a due cifre sono distribuiti simmetricamente nel quadrato come è evidente riscrivendo M con questa base:

$$M_9 = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 3 & 14 \\ 5 & 12 & 11 & 8 \\ 10 & 7 & 6 & 13 \\ 4 & 15 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

D68 c.04 La proprietà di affiancamento per un quadrato magico M di ordine 4 è una conseguenza della **proprietà del quadrato magico** 2×2, la quale afferma che M può essere ripartito in quattro quadrati 2×2 per ognuno dei quali la somma delle entrate è uguale al totale di M.
Questo fatto ci permette di affermare che la proprietà di affiancamento di un quadrato 4×4 può essere considerata come una delle simmetrie interne che caratterizzano un quadrato magico.

D68 d. quadrati fortemente magici

D68 d.01 Consideriamo il seguente quadrato magico M di ordine 4 avente come totale 34:

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che tra i sottoquadrati 2×2 contenuti in M, solamente i 5 che seguono hanno la proprietà di avere la somma delle entrate uguale al totale di M.

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Si può trovare un altro sottoquadrato con la stessa proprietà formato dai quattro elementi angolari;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Se, invece, consideriamo il seguente quadrato magico 4×4, il cui totale è ancora 34

$$M^* = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 14 \\ 12 & 13 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

notiamo che tutti i suoi sedici sottoquadrati 2×2 hanno la proprietà che la somma delle loro entrate è 34.

D68 d.02 Ci chiediamo, quindi, quali altri quadrati magici hanno questa proprietà. La risposta a questa domanda la troviamo nella seguente definizione: sia M un quadrato magico 4×4

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Diciamo che M è un **quadrato fortemente magico** sse $a_{m,n} + a_{m,n+1} + a_{m+1,n} + a_{m+1,n+1} = T$, dove T denota il totale di M e $1 \leq m, n \leq 3$.

I quadrati fortemente magici sono molto interessanti per le loro proprietà e per le trasformazioni a cui possono essere sottoposti. Analizziamo, quindi, queste proprietà.

D68 d.03 In un quadrato fortemente magico come quello rappresentato sopra vale la relazione

$$a_{11} + a_{12} = a_{23} + a_{24} = a_{31} + a_{32} = a_{43} + a_{44} = A$$

e

$$a_{13} + a_{14} = a_{21} + a_{22} = a_{33} + a_{34} = a_{41} + a_{42} = T - A,$$

Dim.: Questa proprietà segue direttamente dalla definizione di quadrato-L fortemente magico ∎

D68 d.04 Prop. (**proprietà del quadrato-m** 3×3) Consideriamo un quadrato 3×3 costruito all'interno di un quadrato fortemente magico M. La somma dei quattro angoli di questo quadrato è T e la somma di

ciascuna coppia di angoli diagonalmente opposti è $T/2$. Se denotiamo con C_1, C_2, C_3 e C_4 gli elementi angolari del sottoquadrato 3×3 di M allora

$$C_1 + C_4 = C_2 + C_3 \;=\; \frac{T}{2}\ .$$

Dim.: Questa proprietà può essere dimostrata facilmente: ognuno elementi angolari C_1, C_2, C_3 e C_4 di un qualsiasi sottoquadrato 3×3 di M può essere considerato angolo di un sottoquadrato 2×2.
Di questi, 3 sono quadrati di angolo, mentre 1 è il quadrato interno centrale.
Per esempio consideriamo il sottoquadrato 3×3

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = a_{22}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ (quadrato interno centrale)}$$

$$C_2 = a_{24}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \text{ (quadrato angolare)}$$

$$C_3 = a_{42}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \text{ (quadrato angolare)}$$

$$C_4 = a_{44}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ (quadrato angolare)}$$

Gli elementi angolari di un quadrato M possono inoltre essere scritti in questo modo:

$$C_1 = T - S_1\ , \qquad C_2 = T - S_2\ , \qquad C_3 = T - S_3\ , \qquad C_4 = T - S_4$$

dove S_1, S_2, S_3 e S_4 sono le somme degli altri tre elementi del rispettivo quadrato magico 2×2.
Facendo riferimento al quadrato M_3 si ha che

$$S_1 = a_{23} + a_{32} + a_{33}\ , \qquad S_2 = a_{13} + a_{14} + a_{23}\ ,$$
$$S_3 = a_{31} + a_{32} + a_{41}\ , \qquad S_4 = a_{33} + a_{34} + a_{43}\ .$$

La somma degli elementi angolari può essere scritta in questo modo:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \;=\; 4\,T - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

Raggruppando i termini che costituiscono S_1, S_2, S_3 e S_4 nella somma $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, si può vedere che $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ è uguale alla somma di una riga, alla somma di una colonna e alla somma di una diagonale del quadrato 4×4 e ciascuna è uguale a T.

Per esempio, considerando ancora M_3, possiamo scrivere:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$$
$$(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43}) + (a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}) = T + T + T.$$

Di conseguenza

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \;=\; 4\,T - 3\,T \;=\; T\ \blacksquare$$

D68 d.05 Prop. (**proprietà triangolare dei quadrati fortemente magici**)

In un quadrato fortemente magico 4×4 si può costruire un triangolo ogni lato del quale è costituito da tre numeri del quadrato. Due esempi di triangoli sono i seguenti:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & a_{24} \\ & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

In un quadrato fortemente magico, la somma dei sei numeri che costituiscono i lati di un triangolo è la stessa per tutti i triangoli in esso contenuti.

Esistono inoltre molte trasformazioni che, quando sono applicate a un quadrato fortemente magico generano un altro quadrato dello stesso tipo. Queste trasformazioni sono:

(1) Cicli delle righe (*cycR*) o delle colonne (*cycC*).

(2) Scambio delle colonne 1 e 3 ($C_{1\Leftrightarrow 3}$) o delle righe 1 e 3 ($R_{1\Leftrightarrow 3}$).

(3) Scambio delle colonne 2 e 4 ($C_{2\Leftrightarrow 4}$) o delle righe 2 e 4 ($R_{2\Leftrightarrow 4}$).

(4) Riflessione rispetto alla diagonale (DRD se rispetto alla diagonale principale, DRA se rispetto alla secondaria).

(5) Sostituzione di ogni elemento x con l'elemento $T/2 - x$.

(6) "Torsione" delle righe (TWR) o delle colonne (TWC).
I grafici seguenti descrivono la torsione delle righe; la torsione delle colonne è la duale-LR della torsione delle righe, ovvero si ottiene da questa semplicemente scambiando il ruolo di righe e colonne:

dove B ed E segnalano l'inizio e la fine delle righe.
Il quadrato ottenuto dopo la torsione delle righe è il seguente:

Se facciamo riferimento al quadrato M^* considerato all'inizio, otteniamo i seguenti risultati:

$$TWR(M^*) = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 10 & 15 \\ 14 & 11 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 13 & 12 \end{bmatrix} \qquad TWC(M^*) = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 14 & 4 \\ 6 & 12 & 1 & 15 \\ 3 & 13 & 8 & 10 \\ 16 & 2 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Si può notare che $TWC(M^*) = TRW({M^*}^T)$ dove ${M^*}^T$ è la trasposta della matrice M^*.

D68 e. equivalenza di quadrati fortemente magici

D68 e.01 Due quadrati fortemente magici sono detti **quadrati fortemente magici equivalenti** sse uno può essere trasformato nell'altro attraverso una trasformazione-MC o una sequenza di trasformazioni-MC.

(1) Prop.: Ogni quadrato fortemente magico è equivalente ad altri 383 quadrati.

Dim.: Consideriamo il generico quadrato fortemente magico

$$M_1 := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Applicando alcune delle trasformazioni-MC definite nel paragrafo precedente possiamo ottenere da M_1 24 quadrati fortemente magici distinti con a_{11} come primo elemento:

$M_2 = TWR(M_1)$
$M_3 = TWR(M_2)$
$M_4 = DRA(M_1); M_5 = DRA(M_2); M_6 = DRA(M_3)$
$M_7 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_1); M_8 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_2); M_9 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_3)$
$M_10 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_4); M_11 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_5); M_12 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_6)$
$M_{da13a24} = R_{2\Leftrightarrow 4}(M_{da1a12})$

Si nota che a_{11} può essere una qualsiasi delle 16 entrate di M_1, in quanto ciascuno di queste entrate può essere portata nella posizione $(1, 1)$ da un'opportuna sequenza di cicli di righe e di colonne.

Ognuno dei quadrati così ottenuti a sua volta può essere trasformato in 24 quadrati fortemente magici distinti utilizzando le trasformazioni-MC.

Questa considerazione comporta che si possono ottenere $384 = 16 \cdot 24$ quadrati fortemente magici tra loro equivalenti.
È anche chiaro che esistono 24 quadrati fortemente magici diversi per ciascuna delle caselle del quadrato che una entrata può occupare: infatti dalla posizione $(1, 1)$ una entrata può essere portata in un'altra posizione qualsiasi attraverso una successione di cicli di righe e colonne ∎

D68 f. quadrati antimagici di ordine 3

D68 f.01 Una matrice quadrata di ordine 3 è detta **quadrato antimagico** sse i 3 elementi lungo ciascuna riga, ciascuna colonna e ciascuna diagonale hanno somma diversa.
Effettuando una riflessione e una rotazione di un quadrato antimagico, evidentemente, si ottiene un altro quadrato antimagico e l'insieme dei quadrati così ottenuti si dice costituire una classe della **equivalenza-rm tra quadrati antimagici**.
Questi diversi quadrati antimagici si possono rinvenire in molti contesti.

Se consideriamo un quadrato magico di ordine 3, non è difficile modificare la distribuzione delle sue cifre attorno a quella centrale trasformandolo in un quadrato antimagico, basta conservare l'alternanza di cifre pari e dispari lungo il perimetro come nel seguente esempio:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

D68 f.02 Un altro metodo per ottenere una sequenza di quadrati antimagici ancora mantenendo fissa l'entrata centrale è quello di costruirne uno scambiando due entrate del quadrato-m di partenza:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Possiamo inoltre ottenere i **quadrati antimagici complementari a 10** di questi quadrati sottraendo ogni cifra da 10.
In questo modo otteniamo la seguente tabella di quadrati antimagici:

$$\begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Chiaramente se un quadrato è antimagico, anche il suo complementare a 10 lo è. Inoltre si osserva che le 8 somme di un quadrato complementare possono essere ottenute sottraendo da 30 le diverse somme del quadrato origine.

D68 f.03 A questo punto è naturale chiedersi quale sia il minimo numero di entrate che devono cambiare posizione e quale sia il minimo numero di movimenti o scambi necessari per trasformare un quadrato magico in un quadrato antimagico.

Prima di tutto dobbiamo affermare che devono essere verificate le due seguenti condizioni:

(1) Non può rimanere inalterata più di una linea;

(2) Se due o più linee contengono lo stesso valore trasformato, solo una di queste entrate può non essere sottoposta a un ulteriore cambiamento.

D68 f.04 Vediamo, quindi qual è il minimo numero di entrate che devono essere scambiate per ottenere un quadrato antimagico.
Serviamoci di un marcatore x e teniamo presete che ci sono 16 modi diversi per distribuire 3 marcatori nelle 9 caselle di una matrice 3×3:

$$\begin{matrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Se x contrassegna gli elementi da muovere nello scambio, allora solo le prime 5 configurazioni verificano la prima condizione, ma nessuna di queste verifica la seconda.

Questo ci dice che devono essere scambiati almeno 4 entrate: in tal caso ci sono 23 modi diversi per distribuire 4 marcatori (x) nelle 9 celle di una matrice di ordine 3:

$$\begin{matrix} x & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & 0 \\ x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x & x & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

A B C D

$$\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 \end{matrix}$$

E F G

Abbiamo presentato i quadrati nel modo precedente perché, se anche in questo caso x contrassegna gli elementi che devono essere cambiati, allora solo le ultime 7 configurazioni (che abbiamo contrassegnate con le lettere A, B, ..., G) verificano entrambe le condizioni enunciate in f03. Ognuna delle 3 disposizioni simmetriche (A, F e G) e ognuna delle 4 disposizioni asimmetriche (B, C, D ed E) e delle loro 4 immagini speculari possono essere applicate a un quadrato-m in 4 modi diversi; ci sono quindi 44 esempi di cambiamento da considerare.

D68 f.05 Per quanto riguarda la seconda domanda sul minimo numero di trasformazioni o scambi da effettuare, adottiamo il procedimento che segue.

Iniziamo a considerare il caso in cui si verificano 2 scambi.
Sappiamo che 4 elementi possono essere divisi in due duetti in 3 modi distinti: applichiamo questi accoppiamenti (cioè questi scambi) ai 7 schemi A, B, ..., G .
Se entrambi gli elementi di un duetto appartengono alla stessa linea, il loro scambio non modifica la somma degli elementi di quella linea. Ognuno degli schemi A, C, D, E presenta una linea del tipo 000, cioè non affetta da alcuno scambio, mentre in ogni accoppiamento delle loro entrate segnate da x un qualsiasi scambio tra i membri della coppia lascia la somma degli elementi di una delle linee coinvolte inalterata. Questo ci dice che due linee del quadrato conservano le loro somme originali, cioè uguali tra di loro.

D68 f.06 Negli schemi F e G lo scambio tra i membri dei duetti lascia le coppie nelle linee originali oppure scambia le entrate di una riga e di una colonna; queste ultime conservano le loro somme originali e quindi uguali tra loro.

Nello schema asimmetrico B lo scambio

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{array} \qquad \longrightarrow \begin{array}{ccc} c & d & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{array}$$

lascia solamente la somma di una linea inalterata. Comunque quando applicato a un quadrato magico di ordine 3 in ognuno degli 8 modi diversi, fa apparire due volte alcune somme.

Possiamo quindi affermare che nessun quadrato antimagico può essere costruito applicando solamente due scambi agli elementi di un quadrato magico di ordine 3.

D68 f.07 Proviamo allora a considerare 3 scambi: consideriamo 4 entrate che denotiamo, risp., con M, N, P, Q.
Sappiamo che son 24 le permutazioni di 4 oggetti. In 15 di queste almeno uno degli elementi non ha cambiato la sua posizione originale; in altre 3 ci sono stati due scambi; le altre 6 possono essere ottenute da $MNPQ$ attraverso 3 successivi scambi:

$U\ -\ NPQM:\ MN, MP, MQ$
$V\ -\ NQMP:\ MN, MP, PQ$
$W\ -\ PMQN:\ MP, NM, NQ$
$X\ -\ PQNM:\ MP, NQ, MN$
$Y\ -\ QMNP:\ PQ, MQ, NM$
$Z\ -\ QPMN:\ MQ, NP, NM$

Queste 6 permutazioni, identificate dalle lettere U, V, W, X, Y, Z possono essere applicate ai 7 modelli A, B, ..., G nelle loro varie orientazioni sul quadrato magico.
Vediamo, quindi, l'applicazione di queste permutazioni secondo i 7 schemi.

D68 f.08 Iniziamo dal modello B; esso è asimmetrico, quindi, insieme alla sua immagine speculare può essere applicato al quadrato magico in 4 orientazioni diverse procedendo in senso orario. I quadrati magici sui quali è stato applicato il modello B diventano:

$$\begin{array}{ccc} M & N & P \\ 3 & 5 & 7 \\ Q & 9 & 2 \end{array} \quad B_1 \qquad \begin{array}{ccc} Q & 1 & M \\ 3 & 5 & N \\ 4 & 9 & P \end{array} \quad B_2 \qquad \begin{array}{ccc} 8 & 1 & Q \\ 3 & 5 & 7 \\ P & N & M \end{array} \quad B_3 \qquad \begin{array}{ccc} P & 1 & 6 \\ N & 5 & 7 \\ M & 9 & Q \end{array} \quad B_4$$

P	N	M		8	1	P		Q	1	6		M	1	Q
3	5	7		3	5	N		3	5	7		N	5	7
4	9	Q		Q	9	M		M	N	P		P	9	2
	B_5				B_6				B_7				B_8	

In B_1, $M = 8$, $N = 1$, $P = 6$ e $Q = 4$, così per le 6 permutazioni abbiamo:

U	–	N	P	Q	M	X	–	N	Q	M	P	W	–	P	M	Q	N
		1	6	4	8			1	4	8	6			6	8	4	1
X	–	P	Q	M	N	Y	–	Q	M	N	P	Z	–	Q	P	M	N
		6	4	1	8			4	8	1	6			4	6	8	1

Non tutte le permutazioni costruiscono un quadrato antimagico: anche se non rimane alcuna somma uguale all'originale, potrebbero comparire somme ripetute nel procedere. In B_1 non è prodotto alcun quadrato antimagico dalle permutazioni V, W e Y, anzi V non produce alcun quadrato antimagico in nessun B_i.

Quando gli schemi di orientazione sono ruotati di 180° l'uno rispetto all'altro, come in B_1B_3, B_2B_4, B_5B_7 e B_6B_8 ,si producono quadrati antimagici complementari.
Solo uno di ogni duetto complementare è riportato qui sotto nell'identificazione dei 20 quadrati antimagici prodotti dallo schema B.
Per quanto riguarda l'orientazione dello schema applicato sul quadrato magico, essa può essere contrassegnata dalle cifre che nel nuovo quadrato antimagico occupano la stessa posizione che avevano nel quadrato magico originale.

1	6	4		6	4	1		4	6	8		6	1	7		6	1	2
3	5	7		3	5	7		3	5	7		3	5	2		3	5	8
8	9	2		8	9	2		1	9	2		4	9	8		4	9	7
8	1	4		2	8	1		1	2	8		1	6	2		6	8	2
3	5	2		3	5	7		3	5	7		3	5	7		3	5	7
7	9	6		4	9	6		4	9	6		4	9	8		4	9	1

Poiché il modello B lascia inalterata o la riga centrale o la colonna centrale, ognuno di questi quadrati antimagici ha la cifra 5 al centro.

L'ultimo quadrato è particolarmente interessante poiché le sue somme sono 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 22, cioè 7 delle 8 somme costituiscono una sequenza di valori consecutivi.

D68 f.09 Consideriamo adesso lo schema C:

M	N	0
0	P	0
Q	0	0

In esso l'applicazione delle permutazioni X e Z lasciano inalterate le somme della riga e della diagonale, che hanno l'elemento superiore destro in comune e, quindile lasciano uguali.
Anche le permutazioni U, V, W e Y falliscono nella costruzione di un quadrato antimagico.

D68 f.10 Invece con lo schema D

M	N	0
0	P	Q
0	0	0

l'applicazione delle permutazioni X e Z non riesca a produrre un quadrato antimagico in ognuna delle orientazioni.
Come con lo schema B, si producono quadrati antimagici complementari attraverso quegli schemi ruotati di 180° l'uno dall'altro.

Qui di seguiti sono riportati i rappresentanti degli 8 duetti complementari risultanti dallo schema D:

1 5 6	1 7 6	5 8 6	7 8 6
3 7 8	3 8 5	3 7 1	3 1 5
4 9 2	4 9 2	4 9 2	4 9 2
5 8 6	8 7 6	8 5 6	8 5 1
3 2 1	3 1 2	3 7 2	6 3 7
4 9 7	4 9 5	4 9 1	4 9 2

D68 f.11 Passiamo quindi allo schema E: esso fallisce nel produrre un quadrato antimagico sia quando sono applicate le permutazioni X e Z, sia partendo da E_2 ed E_4 e applicando un qualsiasi operatore. Come in B e in D i quadrati antimagici costruiti sono suddivisi in duetti di quadrati complementari dei quali un membro è riportato qui sotto:

1 4 6	1 2 6	4 8 6	2 8 6
3 5 7	3 5 7	3 5 7	3 5 7
2 9 8	8 9 4	2 9 1	1 9 4
8 6 2	2 1 6	7 1 6	4 1 6
3 5 7	3 5 4	3 5 2	3 5 2
1 9 4	8 9 7	8 9 4	7 9 8

Come nei quadrati costruiti a partire da B, tutti questi hanno la cifra 5 al centro.

D68 f.12 Per quanto riguarda lo schema A

M	N	P
0	Q	0
0	0	0

essendo esso simmetrico, può essere applicato a un quadrato magico solo in 4 orientazioni.
Delle permutazioni, solo la X fallisce nella costruzione di un quadrato antimagico. I quadrati formati da orientazioni ruotate di 180° sono complementari e per ogni duetto di quadrati complementari ne riportimo uno qui di seguito:

1 6 5	1 5 8	6 8 5	5 8 1	5 6 8	8 1 5
3 8 7	3 6 7	3 1 7	3 6 7	3 1 7	3 7 2
4 9 2	4 9 2	4 9 2	4 9 2	4 9 2	4 9 6

Le somme del quarto quadrato sono 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 23, un altro caso in cui 7 delle 8 somme costituiscono una sequenza di interi consecutivi.

Negli schemi F e G, gli altri due schemi simmetrici, le permutazioni X e Z scambiano solo una riga e una colonna e lasciano le somme uguali.
Le altre 4 permutazioni non producono alcun quadrato antimagico con nessuna delle 4 orientazioni.

D68 g. cubi magici e varianti

D68 g.01 La nozione di quadrato magico si generalizza in modo prevedibile a 3 e più dimensioni.

Per **cubo magico** di ordine n si intende una funzione del genere $\lceil (\mathrm{n}\,]^{\times 3} \longmapsto \mathbb{Z}\,\rceil$ avente componenti intere non tutte uguali in cui tutte le righe, tutte le colonne, tutti i pilastri e le quattro diagonali spaziali presentano la stessa somma.

Se Q denota un tale cubo, la suddetta somma è chiamata **totale del cubo magico** Q e la si denota con $\mathrm{tot}(Q)$. Questa valutazione qui sarà chiamata anche "totale magico" di Q.

Si dice **cubo magico normale** un cubo magico avente come codominio (o insieme delle entrate) l'insieme degli interi, tutti diversi, $(1 : n^3]$, e di conseguenza avente come totale magico

$$1 + 2 + \cdots + n^3 \;=\; \frac{n(n^3+1)}{2}\;.$$

Si dice invece **cubo magico perfetto**, in breve cmp, un cubo magico normale nel quale, oltre ai $3n^2 + 4$ suddetti sottoinsiemi del dominio, anche tutte le $6\,n$ diagonali dei suoi $3\,n$ strati (bidimensionali) hanno come somma il totale magico.

D68 g.02 Il primo cmp è stato scoperto nel 1866 da Andrew Frost. Si tratta di un cubo di ordine 7 con codominio $(342]$ e totale magico 1204.

Successivamente fu trovato da Frankenstein un cmp di ordine 8 e verso la fine dell'800 furono scoperti cmb degli ordini 7, 8, 9 11, e 12.

Le conoscenze sui cubi magici hanno potuto ampliarsi solo quando si sono rese possibili indagini sperimentali condotte con il computer a partire dagli anni 1970.

Si è trovato che non esistono cubi magici perfetti di ordine 2, 3 e 4 e a lungo ci si è chiesto se esistono cubi magici perfetti di ordine 5 e 6.

Nel settembre 2003 Walter Trump ha scoperto un cubo magico perfetto di ordine 6 e nel novembre lo stesso Trump e il francese Christian Boyer hanno scoperto un cubo magico perfetto di ordine 5.

Tali strutture sono presentate nella pagina

`http://http://mathworld.wolfram.com/news/2003-11-18/magiccube/`

D68 g.03 Si dice **cubo bimagico** un cubo magico per il quale anche il corrispondente cubo delle componenti quadrate è magico.

Si dice **cubo trimagico** un cubo bimagico per il quale anche il corrispondente cubo delle componenti al cubo è magico.

Analogamente si definiscono i **cubi quadrimagici** ed in generale i **cubi multimagici**.

Ovviamente i cubi multimagici non possono essere normali.

Nel settembre 2003 Christian Boyer ha trovato un cubo magico di ordine 8192 che risulta essere bimagico, trimagico e quadrimagico.

D68 g.04 Vengono studiati anche **ipercubi magici**, strutture di più di 3 dimensioni.

Nel 1999 John Hendricks ha scoperto un ipercubo magico perfetto di 4 dimensioni e di ordine 16, avente come totale magico 524 296.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php