1

Capitolo D48
matroidi

Contenuti delle sezioni

a. matroidi [1] p. 2
b. matroidi degli indipendenti p. 4
c. matroidi delle basi e matroidi dei circuiti p. 9
d. matroidi del rango p. 11
e. matroidi della chiusura e matroidi dei flats p. 13
f. dualità e matroidi degli iperpiani p. 15
g. matroidi semplici e reticoli geometrici p. 18
h. algoritmi greedy e matroidi p. 20
i. trasversali e matroidi p. 22

23 pagine

D48 0.01 Le matroidi sono strutture finite (ma si studiano anche le numerabili) che si collocano a un elevato livello di generalità e di astrazione che vengono definite con richieste che riguardano solo insiemi finiti, ma che hanno la rilevante caratteristica di potersi applicare a una grande varietà di strutture discrete definite con costruzioni specifiche e piuttosto tangibili.

Questo consente di individuare situazioni interessanti a livello astratto alle quali corrispondono ventagli di proprietà utili nei vari ambiti più applicativi che senza la visione astratta sarebbero difficilmente collegabili e parzialmente unificabili.

Questo scenario sui due livelli si riscontra sia per le loro applicazioni "puramente matematiche", sia per alcune caratterizzazioni algoritmiche; le prime fanno delle matroidi degli validdi strumenti unificanti per la organizzazione generale di un'ampia gamma di strutture discrete, le seconde conferiscono alle matroidi un ruolo di rilievo sul piano computazionale.

Accade quindi che le matroidi, complessivamente, si possono accostare da una notevole varietà di punti di vista equivalenti e con diverse prospettive di utilizzo.

D48 0.02 Le pagine che seguono sono dedicate, innanzi tutto, ai molti sistemi di assiomi che consentono di individuare queste strutture e alle dimostrazioni delle loro equivalenze.

Viene inoltre presentata un buona varietà di matroidi specifiche e di loro famiglie caratterizzate da proprietà e procedimenti costruttivi parzialmente specifici.

La conoscenza delle proprietà delle matroidi e delle relazioni che le collegano tra di loro e con tante altre strutture discrete fornisce un contributo molto rilevante al chiarimento e alla estensione della complessa rete delle connessioni che sussistono tra le configurazioni di interesse combinatorio.

Alberto Marini

D48 a. matroidi [1]

D48 a.01 Le **matroidi** sono strutture discrete che ubbidiscono a sistemi di assiomi medio-deboli tra i quali si rivelano collegamenti molto articolati e questo le rende in grado di schematizzare una notevole varietà di scenari formali e applicativi.
Le più studiate sono le matroidi su terreni finiti, ma sono giudicate di grande interesse anche varie matroidi su terreni numerabili.

Esse sono state introdotte da Hassler Whitney nel 1935 per portare ad un livello di elevata generalità la relazione di indipendenza lineare che può intercorrere tra gli elementi di una collezione finita di vettori, ovvero tra le righe (o tra le colonne) di una matrice.

Lo studio delle matroidi si è sviluppato vistosamente a partire dagli anni 1960 ed è riuscito a fare di esse le strutture di riferimento per numerosi problemi della combinatorica, nonché per tanti argomenti di altre aree della matematica (dall'algebra alla geometria, dalle funzioni speciali alla teoria delle rappresentazioni) e per vari problemi computazionali.

D48 a.02 In effetti attraverso le matroidi possono essere inquadrate molte questioni riguardanti strutture rette da assiomi deboli, come vari capitoli della teoria dei grafi (studio dei trasversali, delle reti elettriche, ...) la teoria dei disegni a blocchi e la teoria combinatoria dei reticoli.

Le matroidi inoltre forniscono il collegamento più importante tra la combinatorica da una parte e l'algebra lineare e la geometria degli oggetti lineari dall'altra.

Il terzo importante ruolo svolto dalle matroidi consiste nel costituire il quadro per trattare a livello di elevata generalità un interessante gruppo di problemi computazionali; questi riguardano soprattutto l'ottimizzazione e quindi le matroidi consentono delle unificazioni in un settore nel quale risulta particolarmente vantaggioso realizzare economie di pensiero che possono concretizzarsi nella realizzazione di prodotto software di larga applicazione e di elevata versatilità.

D48 a.03 La caratteristica formale più rilevante delle matroidi consiste nella possibilità di introdurle in moltissimi modi diversi. Questi riguardano una decina di specie di strutture che si trovano essere criptomorfe; inoltre ciascuna di queste specie può essere definita con diversi sistemi equivalenti di assiomi.

A questa varietà di possibili approcci per queste strutture discrete, naturalmente, corrispondono la capacità di unificare la molteplicità delle esemplificazioni e di rendere più leggibile la ricchezza delle proprietà che vengono fatte emergere.

Nella prima parte di questo capitolo si espongono con una certa completezza le varie assiomatizzazioni delle matroidi ed i corrispondenti mutui collegamenti.
Questo aiuta ad affrontare le molte sfaccettature della teoria e a individuare nei modi migliori gli esempi più importanti di matroidi.

D48 a.04 A partire dalla presentazione delle assiomatizzazioni si rende opportuno servirsi di un formalismo che si riconduce alle sole proprietà degli insiemi finiti, ma che si serve di notazioni specificamente motivate dalla varietà dei sistemi di assiomi e dei loro collegamenti.

In particolare adottiamo sistematicamente abbreviazioni che invece di un singoletto come $\{x\}$ si limitano a usare il simbolo x in espressioni come $A \cup y$ e $B \setminus z$. Inoltre useremo lo stesso termine "matroide" presupponendo che possa essere inteso con una elastica adattività al contesto.

D48 a.05 Nella seconda parte vengono presentate alcune applicazioni delle matroidi a problemi computazionali; in particolare vengono trattati alcuni algoritmi di ottimizzazione combinatoria.
L'algoritmo esaminato per primo e più a fondo è il cosiddetto "algoritmo greedy" (algoritmo ingordo) il quale costituisce un esempio ormai classico e molto chiaro di come le matroidi permettono di generalizzare algoritmi di notevole interesse pratico che rende possibile focalizzare gli elementi essenziali dei problemi e delle loro soluzioni, con il conseguente vantaggio dell'unificazione delle procedure.

D48 b. matroidi degli indipendenti

D48 b.01 Si dice **matroide degli indipendenti** o **matroide-Ind** una struttura $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I} \rangle$ con X insieme finito ed $\mathbf{I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, per il quale valgono i seguenti assiomi:

[MtdI 1] $\emptyset \in \mathbf{I}$;

[MtdI 2] $J \subset I \in \mathbf{I} \implies J \in \mathbf{I}$ (chiusura per inclusione) ;

[MtdI 3] $I, J \in \mathbf{I} \;\S\; |I| = |J| + 1 \implies I \setminus J \ni x \S J \dot\cup x \in \mathbf{I}$ (ampliamento dell'indipendenza) .

X ed $\mathbf{I}$ si dicono, rispettivamente, terreno e **collezione degli indipendenti della matroide** $\boldsymbol{M}$.

Denotiamo con **MtdI** la classe delle matroidi-Ind e con $\mathbf{MtdI}_X$ la classe delle matroidi-Ind sul terreno X.

Le matroidi-Ind sono dette anche spazi di indipendenza.

D48 b.02 Un sistema di assiomi equivalente a [MtdI 1,2,3] è il seguente

[MtdI 1] $\emptyset \in \mathbf{I}$;

[MtdI 2] $J \subset I \in \mathbf{I} \implies J \in \mathbf{I}$;

[MtdI 3a] $I, J \in \mathbf{I}$ con $|I| > |J| \implies I \setminus J \subseteq K \;\S\; |K| = |I| - |J| \;\wedge\; J \dot\cup K \in \mathbf{I}$.

(1) Prop.: [MtdI 1,2,3] $\iff$ [MtdI 1,2,3a] ∎

D48 b.03 Un terzo sistema di assiomi equivalente ai due precedenti è il seguente

[MtdI 1] $\emptyset \in \mathbf{I}$;

[MtdI 2] $J \subset I \in \mathbf{I} \implies J \in \mathbf{I}$;

[MtdI 3b] $S \subseteq X \;\wedge\; I, J \in (\mathbf{I} \cap \mathfrak{P}(S))^{\mathbf{Mxml}} \implies |I| = |J|$.

(1) Prop.: [MtdI 1,2,3] $\iff$ [MtdI 1,2,3b] ∎

D48 b.04 Per studiare le matroidi, a cominciare dalle matroidi-Ind, può essere utile fare riferimento ai reticoli booleani dei rispettivi terreni. Il complesso dei nodi che rappresentano insiemi indipendenti, innanzi tutto, è tale che ogni nodo al di sotto di un nodo che rappresenta un indipendente individua un altro insieme indipendente.

Siano n ed r due interi naturali con $r \leq n$; si dice **matroide-Ind uniforme** sopra un terreno di cardinale n e di rango r ogni coppia $\boldsymbol{M} := \langle X, \mathfrak{P}_{\leq r}(X) \rangle$ con $|X| = n$.
Si verifica subito che la precedente coppia, che denotiamo con $\boldsymbol{U}_{Mtd}(n, r)$, soddisfa [MtdI 1,2,3] e quindi è una matroide-Ind, quale che sia X.

Due matroidi-Ind $\langle X_i, \mathbf{I}_i \rangle$ per $i = 1, 2$ si dicono **matroidi-Ind isomorfe** sse $|X_1| = |X_2|$ e $\lceil\!\lceil\, X_1 \leftrightarrows X_2 \,\rceil\!\rceil \ni \beta$ tale che l'estensione booleana della β è una biiezione tra $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.
La biiezione β si dice **isomorfismo di matroidi** tra $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$; per enunciare che $\boldsymbol{M}_1$ ed $\boldsymbol{M}_2$ sono matroidi isomorfe si scrive $\boldsymbol{M}_1 \leftrightarrows_{Mtd} \boldsymbol{M}_2$, mentre una espressione della forma $\beta \in \lceil\!\lceil\, \boldsymbol{M}_1 \leftrightarrows_{Mtd} \boldsymbol{M}_2 \,\rceil\!\rceil$ afferma che β è una biiezione che garantisce l'isomorfismo di matroidi tra $\boldsymbol{M}_1$ ed $\boldsymbol{M}_2$.

È evidente che l'isomorfismo tra matroidi-Ind è un'equivalenza e una classe di tale equivalenza si può chiamare **matroide-Ind astratta**.

La classe di isomorfismo delle matroidi-Ind uniformi caratterizzate dal cardinale n e dal rango r la denotiamo con $\boldsymbol{U}_{Mtd}(n, r)$. In molte considerazioni sulle proprietà delle matroidi che non si focalizzano

sulle procedure con le quali le singole matroidi sono costruite può essere comodo considerare una classe di isomorfismo come se fosse una specifica matroide ben definita.

Tra le matroidi uniformi segnaliamo:

$\boldsymbol{U}_{Mtd}(0,0) := \langle \emptyset, \emptyset \rangle$, chiamate matroide vuota;

$\boldsymbol{U}_{Mtd}(n,1) := \langle X, \mathfrak{P}_{0,1}(X) \rangle$, chiamata matroide degli elementi paralleli;

$\boldsymbol{U}_{Mtd}(n,n-1) = \big\langle X, \mathfrak{P}_{\leq n-1}(X) \big\rangle$, chiamata **matroide circuito** su X;

$\boldsymbol{U}_{Mtd}(n,n) := \big\langle X, \mathfrak{P}(X) \big\rangle$, chiamata **matroide libera** su X e denotata anche con $\boldsymbol{M}tdfree(X)$

D48 b.05 In seguito facciamo riferimento a una $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I} \rangle \in$ **MtdI**.
Si dice insieme delle basi di un $S \subseteq X$ la collezione $\mathsf{BAS}_{\boldsymbol{M}}(S) \ := \ (\mathbf{I} \cap \mathfrak{P}(S))^{\mathsf{Mxml}}$.
Inoltre si dice insieme delle basi della $\boldsymbol{M}$ la collezione $\mathsf{BAS}(\boldsymbol{M}) := \mathsf{BAS}_{\boldsymbol{M}}(X)$.

L'insieme delle basi della matroide libera su X si riduce a $\{X\}$.

Consideriamo la matroide uniforme $\langle X, \mathfrak{P}_{\leq r} \rangle$; l'insieme delle sue basi è $\mathfrak{P}_r(X)$; l'insieme delle basi di un $S \subseteq X$ con $|S| \leq r$ si riduce a $\{S\}$; l'insieme delle basi di un $T \subseteq X$ con $|T| > r$ è costituito da tutti i sottoinsiemi di T aventi cardinale r.

(1) Prop.: Le basi di un qualsiasi $S \subseteq X$ hanno lo stesso cardinale ▮

(2) Prop.: Sia $I \subset S \subseteq X$ ed $I \in \mathbf{I}$. $\quad I \notin \mathsf{BAS}_{\boldsymbol{M}}(S)$ sse $S \setminus I \ni x \,\P\, I \,\dot\cup\, x \in \mathbf{I}$ ▮

D48 b.06 Si dice insieme degli **elementi liberi di un sottoterreno di matroide** $S \subseteq X$ relativamente ad $\boldsymbol{M}$

$$\mathsf{FREE}_{\boldsymbol{M}}(S) \ := \ \bigcap \{B \in \mathsf{BAS}_{\boldsymbol{M}}(S) :| \ B\} \ .$$

Evidentemente $\emptyset \subseteq \mathsf{FREE}_{\boldsymbol{M}}(S) \subseteq S$.
L'insieme degli elementi liberi della matroide si denota con

$$\mathsf{FREE}(\boldsymbol{M}) \ := \ \mathsf{FREE}_{\boldsymbol{M}}(X) \ .$$

Per la matroide uniforme $\boldsymbol{U}_{n,r}(X)$, per ogni $S \subseteq X$ con $|S| \leq r$ $\mathsf{FREE}_{\boldsymbol{U}}(S) = S$, mentre per ogni $T \subseteq X$ con $|T| > r$ si ha $\mathsf{FREE}_{\boldsymbol{U}}(T) = \emptyset$.

D48 b.07 Si dice **insieme dipendente di una matroide-Ind** $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I} \rangle$ ogni sottoinsieme di X che non appartiene ad $\mathbf{I}$. Per la loro collezione scriviamo $\mathsf{DEP}(\boldsymbol{M}) \ := \ \mathfrak{P}(X) \setminus \mathbf{I}$.
Essa si può ottenere a partire dalla collezione delle basi $\mathbf{B} \ = \ \mathsf{BAS}(\boldsymbol{M})$ e definire come $\mathsf{DEP}(\boldsymbol{M}) \ = \ \mathfrak{P}(X) \setminus \{I \,\P\, I \subseteq B \in \mathbf{B}\}$.

Come si può intuire la conoscenza degli insiemi indipendenti di una matroide risulta equivalente alla conoscenza delle sue basi e risulta equivalente all'insieme dei suoi indipendenti. In seguito introdurremo altre entità che consentono definizioni alternative ed equivalenti delle matroidi e che chiamiamo **entità portanti delle matroidi**.
Inoltre si possono definire algoritmi che a partire da un genere di entità portante consentono di ottenere uno qualsiasi degli altri generi di entità portanti.

In varie argomentazioni risulta conveniente servirsi di più generi di di queste entità.
In effetti risulta conveniente adottare l'accorgimento (di ridondanza) consistente nel fare riferimento a matroidi caratterizzate da un terreno e da due o più generi di entità portanti.
In particolare risulta comprensibile e utile servirsi di matroidi-IndBas della forma $\big\langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B} \big\rangle$ e di fare riferimenti a insiemi di strutture come **MtdIB**.
Si tratta di strutture informative che presentano componenti ridondanti le quali sono pronte per essere utilizzate quando se ne presenta l'opportunità.

D48 b.08 Si dice **cappio di una matroide** $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B} \rangle \in$ **MtdIB** ogni $x \in X$ tale che $\{x\}$ è un insieme dipendente, cioè tale che $\{x\} \notin \mathbf{I}$.

L'insieme dei cappi della $\boldsymbol{M}$ si può definire con le seguenti espressioni

$$\mathsf{LOOP}(\boldsymbol{M}) \;:=\; X \setminus \{x \in X \mathrel{\rotatebox{-90}{$\mathrel{\Big|}$}} \{x\} \in \mathbf{I}\} \qquad , \qquad \mathsf{LOOP}\langle X, \mathbf{B} \rangle \;:=\; X \setminus \cup\{B \in \mathsf{BAS}(\boldsymbol{M}) :\mid B\} \;.$$

Due elementi del terreno X diversi x e y si dicono **elementi paralleli per la matroide** $\boldsymbol{M}$ sse $\{x\}$ e $\{y\}$ non sono cappi e $\{x, y\}$ è un insieme dipendente.
Per enunciare che x e y sono paralleli per la $\boldsymbol{M}$ usiamo scritture come $x \mathbin{/\!\!/}_{\boldsymbol{M}} y$, $x \mathbin{/\!\!/}_{\mathbf{I}} y$ o $x \mathbin{/\!\!/}_{\mathbf{B}} y$.

D48 b.09 Continuiamo a fare riferimento a una $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B} \rangle \in$ **MtdI**$\mathcal{B}$.

(1) Prop.: $S \subseteq T \subseteq X$, $S \in \mathsf{DEP}(\boldsymbol{M}) \implies T \in \mathsf{DEP}(\boldsymbol{M})$ ▮

(2) Prop.: $x \in \mathsf{LOOP}(\boldsymbol{M})$, $x \in S \subseteq X \implies S \in \mathsf{DEP}(\boldsymbol{M})$ ▮

(3) Prop.: $x \mathbin{/\!\!/}_{\mathbf{I}} y$, $y \mathbin{/\!\!/}_{\mathbf{I}} z \implies x \mathbin{/\!\!/}_{\mathbf{I}} z$ ▮

(4) Prop.: $x \mathbin{/\!\!/}_{\mathbf{I}} y$, $x, y \in S \subseteq X \implies S \in \mathsf{DEP}(\boldsymbol{M})$ ▮

Per molti scopi i cappi e i duetti di elementi paralleli delle matroidi sono poco significativi e può essere opportuno trascurarli. Si dicono **matroidi semplici** quelle che non presentano né cappi, né elementi paralleli.

In talune applicazioni risulta agevole definire matroidi il cui terreno contiene cappi e duetti di elementi paraleli che peraltro non influiscono sule soluzioni dei problemi che si intendono affrontare.
In questi casi in genere risulta opportuno sostituire la matroide introdotta in un primo momento con la corrispondente semplice ottenuta ignorando i cappi e fondendo gli elementi paralleli.

Tuttavia, come vedremo in :f, di questi componenti bisogna tenere conto quando si definisce la trasformazione di dualità, involuzione entro la collezione $\mathbf{Mtd}$ che consente notevoli unificazioni nella organizzazione delle conoscenze complessive del genere di strutture che stiamo esaminando.

D48 b.10 **(1) Prop.**: Siano $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I} \rangle \in$ **MtdI** e $S \subseteq X$. $\forall B_1, B_2 \in \mathbf{I} \cap \mathfrak{P}(S) \;:\; |B_1| = |B_2|$ ▮

I sottoinsiemi indipendenti massimali di S vengono chiamati **basi di matroide** di S per la matroide $\boldsymbol{M}$. Il cardinale di tutte le basi del sottoinsieme S viene chiamato **rango di matroide** S e denotato con $\mathrm{rnk}_{\boldsymbol{M}}(S)$.
Concretamente si riesce a individuare la funzione rango per una matroide $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I}, ... \rangle$ da costruzioni come le seguenti

$$\mathrm{rnk}_{\boldsymbol{M}} \;:=\; \ulcorner\, S \subseteq X \mapsto |B| \;\text{ con }\; B \in \mathbf{I} \cap \mathfrak{P}(S) \,\urcorner \;\in\; \ulcorner\, \mathfrak{P}(X) \longmapsto \mathbb{N} \,\urcorner \;.$$

D48 b.11 Presentiamo ora alcune importanti classi di matroidi.

Consideriamo un campo $\mathbb{F}$ e uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ di dimensione finita su tale campo. Sia V un insieme finito di vettori di $\boldsymbol{V}$ e denotiamo con $\boldsymbol{I}$ la collezione dei sottoinsiemi di V che sono $\mathbb{F}$-linearmente indipendenti.
Chiaramente la coppia $\boldsymbol{M}_{vect}(\mathsf{V}) := \langle \mathsf{V}, \boldsymbol{I} \rangle$ soddisfa [MtdI 1,2,3] e quindi $\langle \mathsf{V}, \boldsymbol{I} \rangle \in$ **MtdI**.
Tale matroide si dice **matroide vettoriale** su V.

Evidentemente la varietà delle matroidi vettoriali è molto ampia. Tuttavia vedremo che esistono matroidi non isomorfe ad alcuna matroide vettoriale; le matroidi vettoriali e quelle isomorfe a una vettoriale sono chiamate **matroidi rappresentabili**.
Denotiamo con $\mathbf{Mtd}\mathit{Repr}$ il genere delle matroidi rappresentabili.

Le matroidi di questo genere sono caratterizzate in modo rilevante dalle dimensioni minime degli spazi nei quale si possono rappresentare.

La collezione delle basi della $\boldsymbol{M}_{vect}(\mathsf{V})$ è costituita dalla collezione degli insiemi $\mathbb{F}$-linearmente indipendenti che sottendono l'intero sottospazio di $\boldsymbol{V}$ ottenuto per chiusura lineare di V.

Ogni vettore di V costituisce un insieme indipendente e quindi per ogni matroide vettoriale $\mathsf{LOOP}(\boldsymbol{M}_{vect}(\mathsf{V})) = \emptyset$.

Siano $x, y \in \mathsf{V}$ con $x \neq y$. allora $x /\!\!/ y \iff y = c\,x$ con $c \in \mathbb{F}$.

Osserviamo inoltre che $\mathsf{FREE}(\boldsymbol{M}_{vect}(\mathsf{V}))$ è costituito dai vettori di $\boldsymbol{V}$ non esprimibili come combinazione lineare dei rimanenti vettori di $\boldsymbol{V}$.

D48 b.12 Le matroidi vettoriali si possono rappresentare con matrici.
Più precisamente, se $\boldsymbol{V}$ è uno spazio su $\mathbb{F}$ di d dimensioni e se ci si riferisce a una base ordinata di tale spazio $\langle \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ e se $n := |\mathsf{V}|$, gli n vettori $\mathsf{x}_1, ..., \mathsf{x}_n$ del terreno di V si possono rappresentare con altrettante sequenze di lunghezza d di elementi di $\mathbb{F}$: il vettore $\mathsf{x}_i = \sum_{j=1}^{d} x_{i,j}\,\mathsf{e}_j$ viene rappresentato da $\langle x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,d} \rangle$.
Quindi la matroide può essere rappresentata da matrici di profilo $n \times d$.

Se invece si può fare riferimento a una base del sottospazio di $\boldsymbol{V}$ chiusura lineare di V le cui dimensioni denotiamo con e, ove $e < d$, sono sufficienti sequenze di e componenti e quindi la matroide si può rappresentare con una matrice $n \times e$.

Fu questa possibilità di presentare le matroidi vettoriali mediante matrici che indusse Whitney a scegliere il nome di matroidi per le strutture che stiamo esaminando.

D48 b.13 Ricordiamo che per multigrafo (nonorientato) intendiamo una struttura relazionale della forma $\mathsf{M} = \langle V, E, \eta \rangle$ per la quale V è un insieme finito detto insieme dei vertici, E un insieme finito detto insieme degli spigoli ed η una funzione del genere $\eta \in \left\lceil E \longmapsto V \cup \mathfrak{P}_2 V \right\rceil$ e tale che l'insieme degli elementi di V forniti da $\mathsf{cod}(\eta)$. esaurisca lo stesso V.

Ricordiamo anche che un multigrafo viene individuato efficacemente dalle sue raffigurazioni piane in ciascuna delle quali ogni elemento di V è dato da un punto del piano, ogni $c \in V$ ottenibile come $\eta(e)$ con $e \in E$ è raffigurato da un cappio di c etichettato da e e ogni $\{a, b\} \in \mathfrak{P}_2(V)$ ottenibile come $\eta(f)$ con $f \in E$ è raffigurato da un arco nonorientato che collega i vertici a e b.
Un multigrafo può dunque presentare cappi, insiemi di spigoli paralleli, cioè colleganti lo stesso duetto di vertici, e diverse componenti connesse.
Un multigrafo si dice semplice se non presenta né cappi, né spigoli paralleli e si può identificare con un grafo trascurando le etichette degli spigoli, ciascuni dei quali è identificabile mediante il duetto dei vertici che costituiscono le sue due estremità.

D48 b.14 Consideriamo un generico multigrafo $\mathsf{M} = \langle V, E, \eta \rangle$ e diciamo indipendente ogni sottoinsieme del suo insieme di spigoli E che costituisce a un suo sottografo aciclico, cioè una sua sottoforesta.
In particolare ogni foresta è un grafo semplice.

Denotiamo con $\boldsymbol{Subfrst}(\mathsf{M})$ la collezione delle sottoforeste di M, includendo in tale insieme anche il grafo vuoto $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$.

(1) Prop.: La coppia $\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M}) := \left\langle E, \boldsymbol{Subfrst}(\mathsf{M}) \right\rangle$ è una matroide-Ind.

Dim.: Chiaramente $\boldsymbol{M}$ soddisfa [MtdI 1] e [MtdI 2]; si tratta di dimostrare che essa soddisfa anche [MtdI b].

Per questo basta osservare che per ogni $S \subseteq E$ la richiesta $B_1, B_2 \in (\mathbf{I} \cap \mathfrak{P}(S))^{\mathsf{Mxml}}$ significa affermare che B_1 e B_2 sono sottoforeste spanning del grafo G ottenuto eliminando da M gli spigoli che non toccano S.
I cardinali delle sottoforeste B_1 e B_2 sono date dal numero dei nodi di G diminuito del numero delle sue componenti connesse; quindi tali cardinali coincidono ∎

Denotiamo con **MtdGr** la classe delle matroidi grafiche.

D48 b.15 Vediamo le costruzioni che caratterizzano $\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M}) := \langle E, \boldsymbol{Subfrst}(\mathsf{M}) \rangle$.

La collezione $(\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M}))^{\mathsf{BAS}}$ è costituita dalle sottoforeste spanning di M.

La collezione $\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M})^{\mathsf{DEP}}$ è formata dagli insiemi di spigoli di M che costituiscono suoi sottomultigrafi che presentano circuiti.

L'insieme di spigoli $\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M})^{\mathsf{LOOP}}$ è l'insieme dei cappi del multigrafo M.

Siano $x, y \in E$ con $x \neq y$. $x /\!\!/_{Subfrst(\mathsf{M})} y \iff x$ e y hanno in comune le due estremità o l'unica estremità, se entrambi sono dei cappi.

L'insieme $\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M})^{\mathsf{FREE}}$ è l'insieme degli spigoli che non fanno parte di alcun circuito di M.

La funzione rango assegna a ogni S sottoinsieme di E il numero dei nodi che costituiscono le estremità di tali spigoli diminuito del numero delle componenti connesse del multigrafo $\mathsf{M} - S$.

$\mathsf{MtdGr}(\mathsf{M})$ è una matroide semplice sse M è un multigrafo semplice, cioè è un multigrafo privo di cappi e di nodi parallell.

D48 b.16 Consideriamo in particolare il multigrafo $\overline{\mathsf{M}}$ presentato nella figura e la corrispondente matroide $\mathsf{MtdGr}(\overline{\mathsf{M}}) = \langle E, \bar{\mathbf{I}} \rangle$. con $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v\}$

$$\overline{\mathsf{M}}^{\mathsf{BAS}} = \{\ B_1 \in \mathbf{B}_1\ ,\ B_2 \in \mathbf{B}_2\ ,\ B_3 \in \mathbf{B}_3 :|\ \{f,g,p\} \cup B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3 \rangle\ \} \quad \text{dove :}$$

$$\mathbf{B}_1 := \dot\cup_{x=a,b} \big\{\{x,c,e,i\},\{x,c,e,l\},\{x,c,i,l\},\{x,e,i,l\},\{c,e,i,l\},\{x,c,h,e\},$$
$$\{x,c,h,i\},\{x,l,h,e\},\{x,l,h,i\},\{c,l,h,e\},\{c,l,h,i\}\big\}\ ,$$

$$\mathbf{B}_2 := \{\{m,n\},\{m,o\},\{n,o\}\}\ ,$$

$$\mathbf{B}_3 := \{\{q,r,s\},\{q,r,t\},\{q,s,t\},\{r,s,t\}\}\ .$$

$$\overline{\mathsf{M}}^{\mathsf{LOOP}} = \{d,j,k,u,v\}\ .$$

$$\overline{\mathsf{M}}^{\mathsf{FREE}} = \{f,g,p\}\ .$$

$$a /\!\!/ b\ ,\ j /\!\!/ k\ ,\ u /\!\!/ v\ .$$

$$\forall D \in \overline{\mathsf{M}}^{\mathsf{DEP}} :\ D \supseteq C \ \text{ ove } \ C \in \{\{d\},\{j\},\{k\},\{u\},\{v\},\{a,b\},\{a,c,h,l\}\}$$
$$\dot\cup\ \{\{b,c,h,e\},\{e,h,i\},\{a,c,e,i,l\},\{b,c,e,i,l\},\{m,n,o\},\{q,r,o,t\}\}\ .$$

D48 c. matroidi delle basi e matroidi dei circuiti

D48 c.01 Facciamo ancora riferimento al reticolo booleano del terrreno delle matroidi.
Abbiamo visto che una matroide-Ind $\langle X, \mathbf{I}\rangle$ è individuabile a partire dalla collezione dei suoi insiemi indipendenti massimali $\mathbf{I}^{\mathsf{Mxml}}$, cioè dalle sue basi. Inoltre si può individuare a partire dalla collezione dei suoi insiemi dipendenti, ottenibile come $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathbf{I}$.
Dato che ogni sovrainsieme di un insieme dipendente è esso stesso dipendente, di conseguenza una matroide si può individuare a partire dai suoi insiemi dipendenti minimali.
Queste considerazioni suggeriscono la possibilità di introdurre assiomaticamente le matroidi anche servendosi delle sue basi e servendosi dei suoi elementi dipendenti minimali; per questi ultimi si usa il termine "circuiti".

D48 c.02 Si dice **matroide delle basi** o **matroide-Bas** una struttura $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{B}\rangle$ con X insieme finito e $\mathbf{B} \subseteq_{ne} \mathfrak{P}(X)$, la quale soddisfa il seguente assioma:

[MtdB] $\quad B_1, B_2 \in_{\neq} \mathbf{B} \ \wedge\ x \in B_1 \setminus B_2 \implies B_2 \setminus B_1 \ni y \ \left[\!\right] \ (B_1 \setminus x) \dot\cup y \in \mathbf{B}$.

X e $\mathbf{B}$ si dicono, riapettivamente, terreno e **collezione delle basi della matroide** $\boldsymbol{M}$.

Denotiamo con **MtdB** la classe delle matroidi-Bas e con MtdB_X la classe delle matroidi-Bas sul terreno X.

D48 c.03 Si dice collezione degli insiemi indipendenti di $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{B}\rangle \in \mathsf{MtdB}$ la sottocollezione di $\mathfrak{P}(X)$

$$\mathsf{IND}(\boldsymbol{M}) \ := \ \bigcup\{B \in \mathbf{B} :|\ \mathfrak{P}(B)\} \ .$$

(1) Prop.: $I \subset B \in \mathbf{B} \implies I \notin \mathbf{B}$ ∎

(2) Prop.: $B_1, B_2 \in \mathbf{B} \implies |B_1| = |B_2|$ ∎

D48 c.04 Consideriamo l'applicazione $\mathrm{IB}_{Mtd} \ := \ \lceil\!\lceil\ \langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdI} \mapsto \langle X, \mathbf{I}^{\mathsf{Mxml}}\rangle \ \rceil\!\rceil$.

(1) Prop.: $\mathrm{IB}_{Mtd} \ \in \ \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdI} \longmapsto \mathsf{MtdB} \ \rceil\!\rceil$ ∎

D48 c.05 Consideriamo l'applicazione $\mathrm{BI}_{Mtd} \ := \ \lceil\!\lceil\ \langle X, \mathbf{B}\rangle \in \mathsf{MtdB} \mapsto \langle X, \bigcup\{B \in \mathbf{I} :|\ \mathfrak{P}(B)\}\rangle \ \rceil\!\rceil$.

(1) Prop.: $\mathrm{BI}_{Mtd} \ \in \ \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdB} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathsf{MtdI} \ \rceil\!\rceil$ ∎

D48 c.06 **MtdI$\mathcal{B}$ (1) Prop.**: $\mathrm{IB}_{Mtd} = {\mathrm{BI}_{Mtd}}^{-1} \in \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdI} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathsf{MtdB} \ \rceil\!\rceil$ ∎

Dunque la specie delle matroidi-Ind e quella delle matroidi-Bas sono criptomorfe e si possono utilizzare intercambiabilmente.

Ricordiamo che talora risulta comodo fare riferimento a sistemi della forma $\langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B}\rangle$ dove $\langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdI}$ e $\langle X, \mathbf{B}\rangle = \mathsf{BAS}(\langle X, \mathbf{I}\rangle)$. Chiameremo un tale sistema **matroide-IndBas** e denoteremo la loro classe con **MtdI$\mathcal{B}$**.

D48 c.07 Si dice **matroide dei circuiti** o **matroide-Crc** una struttura $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{C}\rangle$ con X insieme finito e $\mathbf{C} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, per la quale valgono i seguenti assiomi:

[MtdC 1] $\quad C \in \mathbf{C}\ ,\ D \subset C \implies D \notin \mathbf{C}$ $\quad$ (carattere minimale) ;

[MtdC 2] $\quad C_1, C_2 \in \mathbf{C}\ ,\ x \in C_1 \cap C_2 \implies \mathbf{C} \ni C_3 \left[\!\right] C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus x$.

X e $\mathbf{C}$ si dicono, riapettivamente, terreno e **collezione dei circuiti della matroide** $\boldsymbol{M}$.

Denotiamo con **MtdC** la classe delle matroidi-Crc e con $\mathbf{MtdC}_X$ la classe delle matroidi-Crc sul terreno X.

D48 c.08 Un altro sistema di assiomi equivalente a [MtdC 1,2] è il seguente

[MtdC 1a] $C_1, C_2 \in \mathbf{C}\ ,\ C_1 \neq C_2 \implies C_1 \not\subset C_2$;

[MtdC 2a] $C_1, C_2 \in \mathbf{C}\ ,\ x \in C_1 \cap C_2\ ,\ y \in C_1 \setminus C_2 \implies \mathbf{C} \ni C_3 \not\ni y \in C_3 \subseteq ((C_1 \cup C_2) \setminus x)$
(**assioma forte di eliminazione per i circuiti**) .

(1) Prop.: [MtdC 1,2] $\iff$ [MtdC 1a,2a] ∎

Si può quindi concludere che le matroidi-Ind, le matroidi-Ind e le matroidi-Crc costituiscono specie di strutture criptomorfe.

D48 d. matroidi del rango

D48 d.01 Come si è visto in b14, data una $\langle X, \mathbf{I}\rangle \in$ **MtdI** o una $\langle X, \mathbf{B}\rangle \in$ **MtdB** è univocamente definito il rango di ogni $S \subseteq X$.
Viceversa la conoscenza della funzione rango consente di individuare completamente la corrispondente matroide-Bas e la corrispondente matroide-Ind.
Questo suggerisce la possibilità di introdurre mediante assiomi un'altra specie di strutture che sia criptomorfa alle specie delle matroidi-Ind e delle matroidi-Bas.

D48 d.02 Si dice **matroide del rango** o in breve **matroide-Rnk** ogni coppia $\boldsymbol{M} = \langle X, \rho\rangle$ nella quale X è un insieme finito, $\rho \in \lceil\!\lceil\, \mathfrak{P}(X) \longmapsto \mathbb{N} \,\rceil\!\rceil$ e valgono i seguenti assiomi:

[MtdR 1] $\rho(\emptyset) = 0$;

[MtdR 2] $S \subseteq X \ \wedge x \in X \implies \rho(S) \leq \rho(S \cup x) \leq \rho(S) + 1$ (crescita graduale del rango);

[MtdR 3] Siano $S \subseteq X$ e $x, y \in X$; $\rho(S \cup x) = \rho(S \cup y) = \rho(S) \implies \rho(S \cup x \cup y) = \rho(S)$.

X ed ρ si dicono, riapettivamente, terreno e **funzione rango della matroide** $\boldsymbol{M}$.
Per rango dell'intera matroide si intende il rango del suo terreno: $\mathrm{rnk}(\boldsymbol{M}) := \rho(X)$.
Denotiamo con **MtdR** la classe delle matroidi-Rnk e con $\mathbf{MtdR}_X$ la classe delle matroidi-Rnk sul terreno X.

D48 d.03 Relativamente alla $\langle X, \rho\rangle \in$ **MtdR**, introduciamo la funzione **differenza di rango per estensione** per le coppie di sottoinsiemi del terreno.

(1) $\quad DRE_{\boldsymbol{M}} := \lceil\!\lceil\, \langle S, T\rangle \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \mapsto \rho(S \cup T) - \rho(S) \,\rceil\!\rceil \in \lceil\!\lceil\, \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \longmapsto \mathbb{N} \,\rceil\!\rceil$.

(2) Prop.: $\forall S \subseteq X\ ,\ x, y \in X\ :\ DRE_{\boldsymbol{M}}(S \cup y, x) \leq DRE_{\boldsymbol{M}}(S, x)$ ovvero $\rho(S \cup x \cup y) - \rho(S \cup y) \leq \rho(S \cup x) - \rho(S)$ ∎

(3) Prop.: $\forall S, T \subseteq X\ ,\ x \in X\ :\ DRE_{\boldsymbol{M}}\langle S \cup T, x\rangle \leq DRE_{\boldsymbol{M}}(S, x)$ ∎

(4) Prop.: $\forall S, T \subseteq X\ ,\ x \in X\ :\ DRE_{\boldsymbol{M}}(S \cup x, T) \leq DRE_{\boldsymbol{M}}(S, T)$ ∎

(5) Prop.: $\forall S, T, U \subseteq X\ :\ DRE_{\boldsymbol{M}}(S \cup T, U) \leq DRE_{\boldsymbol{M}}(S, U)$ ∎

D48 d.04 Altri due sistemi di assiomi equivalente a [MtdR 1,2,3] sono i seguenti

[MtdR 1a] $\forall S \subseteq X\ :\ 0 \leq \rho(S) \leq |S|$;

[MtdR 2a] $S \subseteq T \subseteq X \implies \rho(S) \leq \rho(T)$;

[MtdR 3a] $\forall S, T \subseteq X\ :\ \rho(S \cap T) + \rho(S \cup T) \leq \rho(S) + \rho(T)$ (**disuguaglianza submodulare per il rango**) .

[MtdR 1a] $\forall S \subseteq X\ :\ 0 \leq \rho(S) \leq |S|$;

[MtdR 2b] $\forall S, T, U \subseteq X\ :\ \rho(S) + \rho(S \cup T \cup U) \leq \rho(S \cup T) + \rho(S \cup U)$.

D48 d.05 (1) Prop.: [MtdR 1,2,3] $\iff$ [MtdR 1a,2a,3a] ∎

(1) Prop.: [MtdR 1a,2a,3a] $\iff$ [MtdR 1a,2b] ∎

D48 d.06 Consideriamo la trasformazione

$$\mathrm{IR}_{Mtd} := \left\lceil\!\left\lceil\, \langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathbf{MtdI} \mapsto \left\langle X, \left\lceil\!\left\lceil\, S \subseteq X \mapsto \max_{I \in \mathfrak{P}(S) \cap \mathbf{I}} |I| \,\right\rceil\!\right\rceil \right\rangle \,\right\rceil\!\right\rceil .$$

(1) Prop.: $\mathrm{IR}_{Mtd} \in \lceil\!\lceil\, \mathbf{MtdI} \longmapsto \mathbf{MtdR} \,\rceil\!\rceil$.

D48 d.07 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{RI}_{Mtd} \;:=\; \lceil\!\lceil\ \langle X,\rho\rangle \in \mathsf{MtdR} \;\mapsto\; \big\langle X, \{I \subseteq X \;[\!]\; \rho(I) = |I|\}\big\rangle\ \rceil\!\rceil \ .$$

(1) Prop.: $\mathrm{RI}_{Mtd} \;\in\; \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdR} \longmapsto \mathsf{MtdI}\ \rceil\!\rceil$.

D48 d.08 **(1) Prop.**: $\mathrm{IR}_{Mtd} = (\mathrm{RI}_{Mtd})^{-1} \;\in\; \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdI} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathsf{MtdR}\ \rceil\!\rceil$.

Si può quindi concludere che le matroidi-Ind, le matroidi-Bas, le matroidi-Crc e le matroidi-Rnk costituiscono specie di strutture criptomorfe.

Inoltre possono servire scritture come $\langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathcal{R}\rangle \in \mathsf{MtdIBCR}$ per abbreviare il seguente sistema di enunciati

$$\begin{aligned}\langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdI}\ ,\ & \langle X, \mathbf{B}\rangle = \mathrm{IB}_{Mtd}\langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdB}\\ ,\ & \langle X, \mathbf{C}\rangle = \mathrm{IC}_{Mtd}\langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdC}\\ ,\ & \langle X, \rho\rangle = \mathrm{IR}_{Mtd}\langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdR}\ .\end{aligned}$$

D48 d.09 Oltre alle precedenti biiezioni tra matroidi-Ind e matroidi-Rnk, possono risultare utili le seguenti:

$$\mathrm{RB}_{Mtd} \;:=\; \mathrm{RI}_{Mtd} \circ_{lr} \mathrm{IB}_{Mtd} = \lceil\!\lceil\ \langle X,\rho\rangle \in \mathsf{MtdR} \;\mapsto\; \big\langle X, \mathsf{Mxml}\{B \subseteq X \;[\!]\; \rho(B) = B^{\#}\}\big\rangle\ \rceil\!\rceil \ .$$

$$\mathrm{BR}_{Mtd} \;:=\; \mathrm{BI}_{Mtd} \circ_{lr} \mathrm{IR}_{Mtd} = \lceil\!\lceil\ \langle X,\mathbf{B}\rangle \in \mathsf{MtdB} \;\mapsto\; \Big\langle X, \lceil\!\lceil\ S \subseteq X \;\mapsto\; \max\{I \subseteq B \in \mathbf{B} \;:|\; I^{\#}\}\ \rceil\!\rceil\Big\rangle\ \rceil\!\rceil \ .$$

Un'ultima proprietà

(1) Prop.: $x \in \mathsf{LOOP}(\mathbf{Mtd}) \iff \rho(x) = 0$ ∎

D48 d.10 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{RC}_{Mtd} \;:=\; \lceil\!\lceil\ \langle X,\rho\rangle \in \mathsf{MtdR} \;\mapsto\; \big\langle X, \mathsf{Mnml}(\mathsf{DEP}\langle X,\rho\rangle)\big\rangle\ \rceil\!\rceil \ .$$

(1) Prop.: $\mathrm{RC}_{Mtd} \;\in\; \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdR} \longmapsto \mathsf{MtdC}\ \rceil\!\rceil$.

D48 d.11 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{CR}_{Mtd} \;:=\; \lceil\!\lceil\ \langle X,\mathbf{C}\rangle \in \mathsf{MtdC} \;\mapsto\; \langle X,\rho\rangle\ \rceil\!\rceil \ .$$

(1) Prop.: $\mathrm{CR}_{Mtd} \;\in\; \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdC} \longmapsto \mathsf{MtdR}\ \rceil\!\rceil$.

D48 d.12 **(1) Prop.**: $\mathrm{RC}_{Mtd} = (\mathrm{CR}_{Mtd})^{-1} \;\in\; \lceil\!\lceil\ \mathsf{MtdR} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathsf{MtdC}\ \rceil\!\rceil$.

Si può quindi concludere che le matroidi-Ind, le matroidi-Bas , le matroidi-Rnk e le matroidi-Ccl costituiscono specie di strutture criptomorfe.

D48 e. matroidi della chiusura e matroidi dei flats

D48 e.01 Si è visto che per ogni $\langle X, \rho\rangle \in \mathbf{Mtd}\mathcal{R}$ è determinata la funzione di chiusura che a ogni $S \subseteq X$ aggiunge tutti gli elementi di X che dipendono da S. Inoltre ogni insieme indipendente è caratterizzato dal fatto che la sua chiusura è strettamente più estesa della chiusura di ciascuno dei suoi sottoinsiemi propri.
Questo suggerisce la possibilità di introdurre assiomaticamente le matroidi anche attraverso una loro funzione di chiusura.

D48 e.02 Si dice **matroide della chiusura** o **matroide-Kl** un sistema $\boldsymbol{M} = \langle X, \chi\rangle$ con X insieme finito e $\chi \in \lceil\!\lceil\, \mathfrak{P}(X) \longmapsto \mathfrak{P}(X) \,\rceil\!\rceil$, per il quale valgono i seguenti assiomi:

[MtdK 1] $\chi \in \mathsf{Clsr}_X$, cioè $\quad \forall S \subseteq X \,:\, S \subseteq S^\chi \quad$ (χ è ampliante) ;

$\forall S, T \subseteq X \;:\; S \subseteq T \Longrightarrow S^\chi \subseteq T^\chi \quad$ (χ è isotona) ;

$\forall S \subseteq X : (S^\chi)^\chi = S^\chi \quad$ (χ è idempotente) ;

[MtdK 2] $\forall S \subseteq X\ ,\ x, y \in X \;:\; x \in (S \cup y)^\chi \setminus S^\chi \Longrightarrow y \in (s \cup x)^\chi$
(**proprietà di scambio di Steinitz-MacLane**) .

X e χ si dicono, risp., terreno e **funzione di chiusura della matroide** $\boldsymbol{M}$.

Denotiamo con MtdK la classe delle matroidi-Kl e con MtdK_X la classe delle matroidi-Kl sul terreno X.

D48 e.03 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{IK}_{Mtd} \;:=\; \lceil\!\lceil\, \langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathsf{MtdI} \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; \langle X, \chi_{\mathbf{I}}\rangle \,\rceil\!\rceil \ ,$$

$$\text{dove} \quad \chi_{\mathbf{I}} \;:=\; \lceil\!\lceil\, S \subseteq X \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; \{x \in X \,[\!]\, x \lessdot S\} \,\rceil\!\rceil \;=\; \lceil\!\lceil\, S \subseteq X \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; \{x \in X \,[\!]\, (S \cup x)^\rho = S^\rho\} \,\rceil\!\rceil \ .$$

(1) Prop.: $\mathrm{IK}_{Mtd} \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{MtdI} \longmapsto \mathsf{MtdK} \,\rceil\!\rceil$.

D48 e.04 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{KI}_{Mtd} \;:=\; \lceil\!\lceil\, \langle X, \chi\rangle \in \mathsf{MtdK} \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; \{I \subseteq X \,[\!]\, \forall x \in I \,:\, x \notin (I \setminus x)^\chi\} \,\rceil\!\rceil \ .$$

(1) Prop.: $\mathrm{KI}_{Mtd} \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{MtdK} \longmapsto \mathsf{MtdI} \,\rceil\!\rceil$.

D48 e.05 (1) Prop.: $\mathrm{KI}_{Mtd} = (\mathcal{K}_{Mtd})^{-\mathbf{1}} \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{MtdK} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \mathsf{MtdI} \,\rceil\!\rceil$.

Si può quindi concludere che le matroidi-Ind, le matroidi-Bas , le matroidi-Rnk, le matroidi-Crc e le matroidi-Kl costituiscono specie di strutture criptomorfe.

D48 e.06 Per completezza vanno prese in considerazioni altre due trasformazioni.

$$\mathrm{CK}_{Mtd} \;:=\; \Big\lceil\, \langle X, \mathbf{C}\rangle \in MtdC \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; \big\langle X, \lceil\!\lceil\, S \subseteq X \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; S \dot\cup \{x \in X \setminus S \,[\!]\, \mathbf{C} \ni C \,[\!]\, C \subseteq S \dot\cup x\} \,\rceil\!\rceil \big\rangle \,\Big\rceil \quad \text{e}$$

$$\mathrm{KC}_{Mtd} \;:=\; \lceil\!\lceil\, \langle X, \chi\rangle \in \mathsf{MtdK} \;\mapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\; \langle X, \mathsf{Mnml}\{C \subseteq X \,[\!]\, \forall x \in C \,:\, (C \setminus x)^\chi = C^\chi\}\rangle \,\rceil\!\rceil \ .$$

(1) Prop.: $\mathrm{CK}_{Mtd} \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{MtdC} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \mathsf{MtdK} \,\rceil\!\rceil$.

(2) Prop.: $\mathrm{KC}_{Mtd} = (\mathrm{CK}_{Mtd})^{-\mathbf{1}} \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{MtdK} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \mathsf{MtdC} \,\rceil\!\rceil$.

D48 e.07 Consideriamo una generica matroide-IBRCKFH $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathcal{R}, \mathbf{C}, \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{H}\rangle$

Un $S \subseteq X$ si dice **insieme spanning della matroide $\boldsymbol{M}$** sse $S^{\chi} = X$. La **collezione degli insiemi spanning della matroide $\boldsymbol{M}$** si denota con $\mathsf{SPNG}(\boldsymbol{M})$.

Un $F \subseteq X$ si dice **flat della matroide $\boldsymbol{M}$** sse $F^{\chi} = F$. La collezione dei flats di $\boldsymbol{M}$, cioè $\{F \subseteq X \,[\!]\, F^{\chi} = F\}$, si denota con $\mathsf{FLAT}(\boldsymbol{M})$.
Talora come termini equivalenti di flat si usano le espressioni insieme chiuso e sottospazio.

D48 e.08 **(1) Prop.**: $\left(\boldsymbol{M}^{\mathsf{SPNG}}\right)^{\mathsf{Mnml}} = \boldsymbol{M}^{\mathsf{BAS}}$ ∎

(2) Prop.: $\forall F_1, F_2 \in \boldsymbol{M}^{\mathsf{FLAT}} \;:\; F_1 \cap F_2 \in \boldsymbol{M}^{\mathsf{FLAT}}$ ∎

(3) Prop.: $X \in \boldsymbol{M}^{\mathsf{FLAT}}$ ∎

(4) Prop.: $\forall S \subseteq X \;:\; S^{\chi} = \bigcap\{F \in \boldsymbol{M}^{\mathsf{FLAT}} \,[\!]\, F \supseteq S :|\, F\}$ ∎

D48 e.09 La possibilità per una matroide di derivare la funzione χ dalla collezione di insiemi $\boldsymbol{M}^{\mathsf{FLAT}}$ e viceversa suggerisce di individuare una sesta assiomatizzazione delle matroidi basata sui loro flats.

Si dice **matroide dei flats** o **matroide-Flt** un sistema $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{F}\rangle$ con X insieme finito e $\mathbf{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ per il quale valgono i seguenti assiomi:

[MtdF 1] $\mathbf{F} \in \mathsf{Clsy}_X$, cioè per la collezione di insiemi $\mathbf{F}$ si ha $\forall F_1, F_2 \in \mathbf{F} \;:\; F_1 \cap F_2 \in \mathbf{F}$.

[MtdF 2] $\forall S \subseteq X \;,\; x, y \in X \;:\; x \in \bigcap\{F \in \mathbf{F} \,[\!]\, S \cup y \subseteq F\} \setminus \bigcap\{f \in \mathbf{F} \,[\!]\, S \subseteq F\} \implies y \in \bigcap\{F \in \mathbf{F} \,[\!]\, S \cup x \subseteq F\}$.

X e $\mathbf{F}$ si dicono, riapettivamente, terreno e **collezione dei flats della matroide $\boldsymbol{M}$**.

Denotiamo con **MtdF** la totalità delle matroidi-Flt e con MtdF_X la totalità delle matroidi-Flt sul terreno X.

D48 e.10 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{KF}_{Mtd} := \left\lceil\, \langle X, \chi\rangle \in \mathsf{MtdK} \mapsto \langle X, \mathbf{F}\rangle \,\right\rceil .$$

(1) Prop.: $\mathrm{KF}_{Mtd} \in \left\lceil\, \mathsf{MtdK} \longmapsto \mathsf{MtdF} \,\right\rceil$.

D48 e.11 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{FK}_{Mtd} := \left\lceil\, \langle X, \mathbf{F}\rangle \in \mathsf{MtdF} \mapsto \left\langle X, \left\lceil\, S \subseteq X \mapsto \bigcap\{F \in \mathbf{F} \,[\!]\, F \supseteq S\} \,\right\rceil \right\rangle \,\right\rceil .$$

(1) Prop.: $\mathrm{FK}_{Mtd} \in \left\lceil\, \mathsf{MtdF} \longmapsto \mathsf{MtdK} \,\right\rceil$.

D48 e.12 **(1) Prop.**: $\mathrm{KF}_{Mtd} = (\mathrm{FK}_{Mtd})^{-1} \in \left\lceil\, \mathsf{MtdK} \lhd\!\!\longmapsto\!\!\rhd \mathsf{MtdF} \,\right\rceil$.

Si può quindi concludere che le matroidi-Ind, le matroidi-Bas , le matroidi-Rnk, le matroidi-Crc, le matroidi-Kl e le matroidi-Flt costituiscono specie di strutture criptomorfe.

D48 f. dualità e matroidi degli iperpiani

D48 f.01 Sulla classe delle matroidi si individua facilmente una involuzione molto significativa che chiamiamo **dualità tra matroidi**. Essa consente di stabilire un principio di dualità che riguarda il collegamento tra ogni matroide e la sua duale e conseguentemente la biiezione tra nozioni duali concernenti le matroidi.
Questi collegamenti sono in grado di organizzare in modo unitario un notevole ventaglio di proprietà delle matroidi.

Questa accennata involuzione entro **Mtd** non sempre mantiene la semplicità delle matroidi: vi sono matroidi semplici le cui duali non sono semplici. I vantaggi derivanti dal principio di dualità rendono opportuno prestare attenzione anche alle matroidi non semplici, anche se queste presentano configurazioni (i cappi ed gli insiemi di elementi paralleli) che sono trascurabili in vari problemi riguardanti una matroide: in particolare la loro rimozione non modifica la funzione rango ed elimina la presenza di circuiti di uno o due elementi i quali possono presentare esclusivamente un interesse "locale".

D48 f.02 Consideriamo una $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{B}\rangle \in \mathsf{MtdB}$; si dice **matroide duale** della $\boldsymbol{M}$ la matroide sullo stesso terreno avente come basi gli insiemi complementari dei sottoinsiemi costituenti $\mathbf{B}$. Per essa scriviamo

$$\boldsymbol{M}^* := \left\langle X, \{B \in \mathbf{B} :| X \setminus B\}\right\rangle .$$

(1) Prop.: $\boldsymbol{M}^* \in \mathsf{MtdB}$

(2) Prop.: $(\boldsymbol{M}^*)^* = \boldsymbol{M}$, ovvero la trasformazione di una matroide nella duale è una involuzione ∎

D48 f.03 Per lo studio delle relazioni tra una matroide e la sua duale si usano termini ottenuti da quelli introdotti in precedenza facendoli precedere dal prefisso "co".
Più precisamente, si trattino una $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{I}, \mathbf{B}, \rho, \mathbf{C}, \chi, \mathbf{F}\rangle \in \mathsf{MtdIBRCKF}$ e la sua duale che denotiamo con $\langle X, \mathbf{I}^*, \mathbf{B}^*, \rho^*, \mathbf{C}^*, \chi^*, \mathbf{F}^*\rangle$; gli insiemi della collezione $\mathbf{I}^*$ sono detti **insiemi coindipendenti della matroide** $\boldsymbol{M}$, gli insiemi in $\mathbf{B}^*$ sono detti **cobasi della matroide** $\boldsymbol{M}$, la funzione ρ^* è chiamata **corango della matroide** $\boldsymbol{M}$, χ^* **insieme dei cocircuiti della matroide** $\boldsymbol{M}$, χ^* **cochiusura della matroide** $\boldsymbol{M}$, $\mathbf{F}^*$ **insieme dei coflats della matroide** $\boldsymbol{M}$.

D48 f.04 Esplicitiamo i più semplici collegamenti tra i costrutti di due matroidi mutuamente duali.

(1) Prop.: $S \in \mathbf{I}^* \iff X \setminus S \in \boldsymbol{M}^{\mathsf{SPNG}}$ ∎

(2) Prop.: $\boldsymbol{M}^{\mathsf{LOOP}} = \boldsymbol{M}^{*\mathsf{FREE}}$ e $\boldsymbol{M}^{\mathsf{FREE}} = \boldsymbol{M}^{*\mathsf{LOOP}}$ ∎

(3) Prop.: $\rho^*(\boldsymbol{M}^*) = |X| - \rho(\boldsymbol{M})$ ∎

(4) Prop.: $\rho^*(X \setminus S) = |X| - \rho(X) - (|S| - \rho(S)$ ∎

D48 f.05 Ogni proprietà valida per una generica matroide può tradursi in una proprietà valida per la sua duale, e quindi in una proprietà valida per una generica matroide; una proprietà individuata in questo modo si può chiamare **proprietà ottenuta per dualità di matroidi**.

Queste considerazioni valgono per ogni relazione di dualità e nei casi in cui le loro conseguenze sono ampie e influenti fanno parlare di "principio di dualità".

In genere tra le proprietà che vengono individuate per una relazione di dualità accade che alcune risultano nuove, mentre altre erano sostanzialmente già conosciute.

Il principio di dualità per le matroidi si rivela notevolmente fecondo e contribuisce in misura rilevante alla organicità delle esposizioni delle proprietà di queste specie di strutture.

D48 f.06 Un primo gruppo di applicazioni del principio di dualità riguarda la possibilità di introdurre altre assiomatizzazioni per le matroidi basate sulle proprietà delle componenti caratterizzanti delle matroidi duali (coindipendenti, cobasi, corango, cocircuiti, ...). Infatti, essendo una matroide completamente individuata dalla sua duale, può esserlo anche da una componente caratterizzante di questa.
La assiomatizzazione più interessante che si ottiene con questo modo di procedere è una rielaborazione della definizione delle matroidi che si serve dei cocircuiti [v.a. d02] che si serve degli insiemi complementari degli stessi cocircuiti, insiemi che sono chiamati iperpiani.

D48 f.07 Si dice **matroide degli iperpiani** o **matroide-Hpl** un sistema $\boldsymbol{M} = \langle X, \mathbf{H} \rangle$ con X insieme finito e $\mathbf{H} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, per il quale valgono i seguenti assiomi:

[MtdH 1] $H \in \mathbf{H}\ ,\ K \subset H \implies K \notin \mathbf{H}$;

[MtdH 2] $H_1, H_2 \in \mathbf{H}\ ,\ x \notin H_1 \cap H_2 \implies \mathbf{H} \ni H_3 \between H_3 \supseteq (H_1 \cap H_2) \dot\cup x$.

X e $\mathbf{H}$ si dicono, riapettivamente, terreno e collezione degli iperpiani della matroide $\boldsymbol{M}$.
Denotiamo con **MtdH** la classe delle matroidi-Hpl e con $\mathbf{MtdH}_X$ la classe delle matroidi-Hpl sul terreno X.

D48 f.08 Un altro sistema di assiomi equivalente a [MtdH 1,2] è il seguente

[MtdH 1a] $H_1, H_2 \in \mathbf{H}\ ,\ H_1 \neq H_2 \implies H_1 \not\subset H_2$;

[MtdH 2a] $H_1, H_2 \in \mathbf{H}\ ,\ x \notin H_1 \cup H_2\ ,\ y \notin H_2 \setminus H_1 \implies \mathbf{H} \ni H_3 \between (H_1 \cap H_2) \dot\cup x \subseteq H_3 \subseteq X \setminus y$

(1) Prop.: [MtdH 1,2] $\iff$ [MtdH 1a,2a] ∎

D48 f.09 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{FH}_{Mtd} := \left\lceil\ \langle X, \mathbf{F} \rangle \in \mathbf{MtdF} \mapsto \left\langle X, (\mathbf{F} \setminus \{X\})^{\mathbf{Mxml}} \right\rangle \right\rceil .$$

(1) Prop.: $\mathrm{FH}_{Mtd} \in \lceil\ \mathbf{MtdF} \longmapsto \mathbf{MtdH}\ \rceil$.

D48 f.10 Consideriamo l'applicazione

$$\mathrm{HF}_{Mtd} := \left\lceil\ \langle X, \mathbf{H} \rangle \in \mathbf{MtdH} \mapsto \left\langle X, \{\mathbf{H}' \subseteq \mathbf{H} :|\ \cap \{H \in \mathbf{H}' :|\ H\}\right\rangle \right\rceil .$$

(1) Prop.: $\mathrm{HF}_{Mtd} \in \lceil\ \mathbf{MtdH} \longmapsto \mathbf{MtdF}\ \rceil$.

D48 f.11 **(1) Prop.**: $\mathrm{HF}_{Mtd} = (\mathrm{FH}_{Mtd})^{-1} \in \lceil\ \mathbf{MtdH} \lhd\!\!\rightarrow\!\!\rhd \mathbf{MtdF}\ \rceil$.

Si può quindi concludere che le matroidi-Bas, le matroidi-Ind , le matroidi-Rnk, le matroidi-Crc, le matroidi-Kls, le matroidi-Flt e le matroidi-Hpl costituiscono specie di strutture criptomorfe.

D48 f.12 L'assiomatizzazione che si serve degli iperpiani rende più semplice l'introduzione di una interessante insieme di matroidi, le matroidi pavimentali.

Preliminarmente ricordiamo che si dice **copertura di un insieme** X ogni collezione di sottoinsiemi di X $\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ tale che $\cup\{A \in \mathbf{A} :|\ A\} = X$. Denotiamo con X^{Cvr} l'insieme delle coperture di un insieme X.

Sia $d \in \mathbb{P}$ e chiamiamo **partizione almeno** d di un insieme X ogni $\mathbf{A} \in X^{Cvr}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

[$\mathrm{Prt}_{\geq d}$ 1] $|\mathbf{A}| \geq 2$;

[$\mathrm{Prt}_{\geq d}$ 2] $\forall A \in \mathbf{A} : |A| \geq d$;

$[\mathrm{Prt}_{\geq d}\ 3]\ \forall S \in \mathfrak{P}_{\leq d}(X)\ :\ \mathbf{A} \ni_1 A \between S \subseteq A$.

Denotiamo con $Part_{\geq d}(X)$ l'insieme delle partizioni almeno d di X.

Chiaramente se $d = 1$ si ritrovano tutte le partizioni di X.

D48 f.13 (1) Prop.: $\mathbf{A} \in \mathsf{Part}_{\geq d}(X) \implies \langle X, \mathbf{A}\rangle \in \mathsf{MtdH}$

Le matroidi ottenibili come sopra dalle partizioni almeno un $d \in \mathbb{P}$ si dicono **matroidi pavimentali**.

D48 g. matroidi semplici e reticoli geometrici

D48 g.01 Si è già notato che i cappi e gli elementi paralleli di una matroide sono oggetti poco essenziali.

In effetti una qualsiasi matroide può essere estesa senza problemi aggiungendole arbitrariamente cappi ed elementi paralleli. Una matroide così ottenuta è accettabile, ma non presenta aspetti combinatorici più interessanti della semplice iniziale.

Viceversa, data una matroide non semplice $\boldsymbol{M} = \langle A, \mathbf{I}, \mathbf{B}, \rho, ... \rangle$, la si può ridurre a una semplice equivalente con manovre di eliminazione da X di $\boldsymbol{M}^{\mathsf{LOOP}}$ (individuabile, per esempio, come $\{x \in X \between x^\rho = 0\}$) e attraverso manovre di sostituzione con un solo elemento degli elementi di ciascuna delle classi di equivalenza per parallelismo.

Quando è lecito limitarsi alle più essenziali matroidi semplici, in mancanza di preoccupazioni per la perdita dei vantaggi della dualità, si possono estendere i sistemi di assiomi visti nelle sezioni precedenti con assiomi che evitano la presenza di cappi e di elementi paralleli.
Vediamoli in dettaglio.

D48 g.02 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Ind vanno aggiunti

[MtdI nl] $\quad \forall x \in X \ : \ \{x\} \in \mathbf{I}$ (evita i cappi) ;

[MtdI nP] $\quad \forall x, y \in X \between x \neq y \ : \ \{x, y\} \in \mathbf{I}$ (evita il parallelismo) .

D48 g.03 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Bas vanno aggiunti

[MtdB nl] $\quad \cup\{B \in \mathbf{B} :| \ B\} = X$ (evita i cappi) ;

[MtdB nP] $\quad \forall x, y \in X \between x \neq y \ : \ \mathbf{B} \not\subset \mathfrak{P}_1(X) \implies \mathbf{B} \ni B \between \{x, y\} \subseteq B$ (evita il parallelismo) .

D48 g.04 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Rnk vanno aggiunti

[MtdR nl] $\quad \forall x \in X \ : \ x^\rho = 1$ (evita i cappi) ;

[MtdR nP] $\quad \forall x, y \in X \between x \neq y \ : \ \{x, y\}^\rho = 2$ (evita il parallelismo) .

D48 g.05 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Crc vanno aggiunti

[MtdC nl] $\quad C \in \mathbf{C} \implies |C| \neq 1$ (evita i cappi) ;

[MtdC nP] $\quad C \in \mathbf{C} \implies |C| \neq 2$ (evita il parallelismo) .

D48 g.06 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Kl vanno aggiunti

[MtdK nL] $\quad \emptyset^\chi = \emptyset$ (evita i cappi) ;

[MtdK nP] $\quad \forall x \in X \ : \ x^\chi = x$ (evita il parallelismo) .

D48 g.07 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Flt vanno aggiunti

[MtdF nL] $\quad \emptyset \in \mathbf{F}$ (evita i cappi) ;

[MtdF nP] $\quad \mathfrak{P}_1(X) \subseteq \mathbf{F}$ (evita il parallelismo) .

D48 g.08 A ciascuno dei vari sistemi di assiomi per le matroidi-Hpl vanno aggiunti

[MtdH nL] $\quad \cap\{H \in \mathbf{H} :| \ H\} = \emptyset$ (evita i cappi) ;

[MtdH nP] $\quad \forall x, y \in X \between x \neq y \ : \ \mathbf{H} \ni H \between x \in H \wedge y \notin H$ (evita il parallelismo) .

D48 g.09 (1) Prop.: [MtdI nl] $\iff$ [MtdB nl] $\iff$ [MtdR nl] $\iff$ [MtdC nl] $\iff$ [MtdK nL]

$\iff$ [MtdF nl] $\iff$ [MtdH nl] ∎

(2) Prop.: [MtdI nP] $\iff$ [MtdB nP] $\iff$ [MtdR nP] $\iff$ [MtdC nP] $\iff$ [MtdK nP] $\iff$ [MtdF nP] $\iff$ [MtdH nP] ∎

D48 g.10 Limitandosi alle matroidi semplici si può ricondurre lo studio di queste strutture allo studio di particolari reticoli chiamati **reticoli geometrici**, **reticoli di Birkhoff**, o **geometrie combinatorie**.
Questo studio può essere sviluppato su un piano di notevole essenzialità e utilizzare varie nozioni che costituiscono i corrispettivi combinatori di altrettante nozioni di geometria algebrica.

Per questa strada si giunge a una ulteriore assiomatizzazione delle matroidi secondo la quale la collezione dei flats munita dell'ordinamento per inclusione costituisce il terreno di un reticolo geometrico.

Consideriamo un reticolo finito $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ caratterizzato dalla relazione d'ordine $\preceq$.

Ricordiamo che esso si dice **reticolo puntuale** sse ogni suo elemento diverso dal minimo si può esprimere come giunzione di atomi, cioè di elementi immediatamente superiori al minimo.

Si dice invece **reticolo semimodulare** un reticolo tale che $\forall x, y \in L \ : \ x, y \succ_I x \wedge y \succ_I a, y$, dove scriviamo $a \succ_I b$ per enunciare che $a \succ b$ e $a \succeq c \succeq b \Longrightarrow c \in \{a, b\}$ [v.a. B55a14].

Si definisce inoltre **reticolo geometrico** un reticolo puntuale e semimodulare.

D48 h. algoritmi greedy e matroidi

D48 h.01 La più nota applicazione computazionale delle matroidi riguarda l'inquadramento generale degli algoritmi greedy.
Questi sono algoritmi di ottimizzazione i quali prevedono una sequenza di fasi costruttive e in ciascuna fase consentono di conseguire un incremento massimale per la funzione obiettivo e non richiedono mai di modificare le scelte effettuate in precedenza. In questi casi si dice che l'algoritmo non richiede alcuna manovra di back tracking).

In effetti si dimostra che un algoritmo con determinate caratteristiche risulta "greedy" sse opera sopra una situazione schematizzabile con una matroide.
Questo risultato dovuto a Richard Rado generalizza un precedente risultato di Kruskal che concerneva soltanto situazioni schematizzabili con grafi.

D48 h.02 Sia X un insieme finito, $\mathbf{I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ tale che

$$I \in \mathbf{I}\ ,\ J \subset I \implies J \in \mathbf{I}$$

e sia $\omega \in \lceil X \longmapsto \mathbb{R}_+ \rceil$ una funzione peso nonnegativa che si può identificare con la propria estensione booleana additiva, cioè sia tale che

$$\forall S \subseteq X \ :\ S^\omega = \sum_{x \in S} x^\omega\ .$$

Diciamo **problema di ottimizzazione additivo** relativo ad $\mathbf{I}$, ed ω, e denotiamo con $\mathbf{AOP}_{\mathbf{I},\omega}$, la ricerca del sottoinsieme $\overline{S} \subseteq X$ tale che

$$\overline{S} \subseteq X \quad \text{tale che} \quad \text{(i)}\ \ \overline{S} \in \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \text{(ii)}\ \ \overline{S}^\omega = \{S \in \mathbf{I} :|\ S^\omega\}^{\max}\ .$$

Diciamo **algoritmo greedy** un procedimento che a partire da $\mathbf{I}$ e ω opera come segue.

1. Scegli $x_1 \in X$ tale che $\{x_1\} \in \mathbf{I}$ e ${x_1}^\omega = \{\{x\} \in \mathbf{I} :|\ x^\omega\}^{\max}$;
2. Se tale x_1 non si trova, allora stop.
3. Poni $j := 2$
4. Scegli $x_j \in X$ tale che $\{x_1, ..., x_{j-1}\} \in \mathbf{I}$ e ${x_j}^\omega = \{\{x1, ..., x_{j-1}, x\} \in \mathbf{I} :|\ x^\omega\}^{\max}$.
5. Se tale x_j non si trova, allora stop.
6. Poni $j := j + 1$ e vai a 4.

Denotiamo con GrAlgr l'insieme degli algoritmi greedy.
Si osserva che ogni $A \in$ GrAlgr in ogni caso giunge a conclusione con la individuazione di un $B \in \mathbf{I}$.
Si dice che $A \in$ GrAlgr risolve $\mathbf{AOP}_{\mathbf{I},\omega}$ sse $B^\omega = \{S \in \mathbf{I} :|\ S^\omega\}^{\max}$.

D48 h.03 Teorema $\langle X, \mathbf{I}\rangle \in$ **MtdI** $\implies$ l'algoritmo greedy risolve $\mathbf{AOP}_{\mathbf{I},\omega}$.

D48 h.04 Teorema Consideriamo $\mathbf{I}$ tale che $\emptyset \neq \mathbf{I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ e tale che $I \in \mathbf{I} \ \wedge\ J \subset I \implies J \in \mathbf{I}$.
GrAlgr risolve $\mathbf{AOP}_{\mathbf{I},\omega}$ per ogni $\omega \in \lceil X \longmapsto \mathbb{R}_+ \rceil \implies \langle X, \mathbf{I}\rangle \in$ **MtdI** .

D48 h.05 Dagli enunciati precedenti segue una caratterizzazione delle matroidi-Ind che può costituire una ulteriore assiomatizzazione di queste strutture discrete.

(1) Coroll.: Sia X un insieme finito e $\mathbf{I} \subseteq_{ne} \mathfrak{P}(X)$. $\langle X, \mathbf{I}\rangle \in$ **MtdI** sse
[MtdI 1c] = [MtdI 2] : $J \subset I \in \mathbf{I} \implies J \in \mathbf{I}$.

[MtdI 2c] : $\forall \omega \in \lceil x \longmapsto \mathbb{R}_+ \rceil$: $\mathsf{GrAlgr}_{\mathbf{I},\omega}$ individua un $\overline{B} \in \mathbf{I}$ tale che $\sum_{\overline{b} \in \overline{B}} \overline{b}^{\omega} = \left\{ B \in \mathbf{I} : \left| \sum_{b \in B} b^{\omega} \right\rangle^{\max} \right\}$.

D48 i. trasversali e matroidi

D48 i.01 Ricordiamo che con **FamSF** denotiamo la classe delle famiglie di insiemi finiti non vuoti, cioè le terne della forma $\langle X, I, \phi\rangle$ ove $X, I \in \mathbf{SetF}$ e $\phi \in \lceil\!\lceil\, I \longmapsto \mathfrak{P}(X) \,\rceil\!\rceil$.

Consideriamo dunque una $\mathbf{A} = \langle X, I, \phi\rangle \in \mathbf{FamSF}$.

Un $T \subseteq X$ si dice **trasversale della famiglia** $\mathbf{A}$ sse $\lceil\!\lceil\, T \lhd\!\longrightarrow\!\rhd I \,\rceil\!\rceil \ni \beta \ \ \forall t \in T \ :\ t \in (t,\beta),\phi$.

Denotiamo con la notazione $\mathbf{A}^{\mathsf{Trsv}}$ o con la equivalente $\mathbf{Trsv}(\mathbf{A})$ l'insieme dei trasversali degli insiemi della famiglia i $\mathbf{A}$.

D48 i.02 Una famiglia $\langle \mathbf{B}, J, \psi\rangle \in \mathbf{FamSF}$ si dice **sottofamiglia** della $\mathbf{A}$ sse $J \subseteq I$ e $\phi|_J = \psi$, e conseguentemente $Y \subseteq X$. In tal caso scriviamo $\mathbf{B} \subseteq_{FamSet} \mathbf{A}$.

Un insieme $T \subseteq X$ si dice **trasversale parziale della famiglia** $\mathbf{A}$ sse $T \in \mathbf{B}^{\mathsf{Trsv}}$ per qualche $\mathbf{B} \subseteq_{FamSet} \mathbf{A}$, cioè sse

$$\lceil\!\lceil\, T \lhd\!\longrightarrow\!\rhd I \,\rceil\!\rceil \ni \beta \ \ \forall t \in T : t \in (t,\beta),\phi \ .$$

Denotiamo con $\mathbf{A}^{\mathsf{TrsvP}}$ l'insieme dei trasversali parziali della famiglia $\mathbf{A}$.
La situazione precedente quindi si enuncia scrivendo $T \in \mathbf{A}^{\mathsf{TrsvP}}$.

Si definisce **difetto di un trasversale parziale** $T \in \langle X, I, \phi\rangle^{\mathsf{TrsvP}}$ l'intero $T^{dft} := I^{\#} - T^{\#}$.
Per ogni $\langle Y, J, \psi\rangle \subseteq_{FamSet} \langle X, I, \phi\rangle$ tale che $T \in \langle Y, J, \psi\rangle^{\mathsf{TrsvP}}$ si ha: $T^{dft} = I^{\#} - J^{\#}$.

D48 i.03 siemi $\langle X, I, \phi\rangle$ identificheremo la funzione ϕ con la propria estensione booleana e quindi per ogni insieme di indici $J \subseteq I$ scriveremo $J,\phi = \bigcup_{j\in J} j,\phi$.
Possiamo quindi asserire che $\mathsf{cod}(\phi) \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

Ad ogni $\mathbf{A} = \langle X, I, \phi\rangle \in \mathbf{FamSF}$ si associa un digrafo bipartito definito come

$$\mathbf{A}^{TrsvDgrf} := \big\langle I, \mathsf{cod}(\phi), \{i \in I :| \langle i, i^{\phi}\rangle\}\big\rangle \ .$$

Viceversa a ogni digrafo bipartito $\mathsf{D} = \big\langle I, X, U\big\rangle \in DgrfB$ si associa la famiglia di insiemi

$$\mathsf{D}^{FamSet} := \big\langle X, I, \lceil\!\lceil\, i \in I \mapsto iU \,\rceil\!\rceil \big\rangle \ .$$

Si mostra facilmente che famiglie di insiemi finiti e digrafi bipartiti sono specie di strutture criptomorfe. Talora può essere comodo identificare due di queste strutture criptomorfe.

D48 i.04 Il problema di base della teoria dei trasversali riguarda le condizioni che una famiglia di insiemi finiti deve soddisfare per possedere almeno un trasversale.

Una prima risposta è stata data nel 1935 da un teorema di Philip Hall . Questo risultato è stato generalizzato nel quadro della teoria delle matroidi da Richard Rado nel 1942.
Solo sensibilmente più tardi Edmonds e Fulkerson nel 1965 e Mirsky e Perfect nel 1967 hanno dimostrato che gli insiemi di trasversali parziali costituiscono una matroide-I.
Questo risultato ha aperto la possibilità di utilizzare la teoria delle matroidi a varie questioni che riguardano i trasversali.

D48 i.05 Facciamo riferimento alla generica $\mathbf{A} = \langle X, I, \phi\rangle \in FamSet$.

(1) Teorema (**teorema di Philip Hall**) $\mathbf{A}^{\mathsf{Trsv}} \neq \emptyset \iff \forall J \subseteq I : |J\phi| \geq |J|$.

(2) Teorema (**teorema di Rado**) Sia $\langle X, \mathbf{I}\rangle \in \mathbf{MtdI}$. $\mathbf{A}^{Trsv} \cap \mathbf{I} \neq \emptyset \iff \forall J \subseteq I : |J\phi| \geq |J|$.

Chiaramente il teorema di Philip Hall si ricava da quello di Rado considerando la particolare matroide-IR $\left\langle X, \mathfrak{P}(X),\ulcorner\, S \subseteq X \mapsto S^{\#} \,\urcorner \right\rangle = MtdImatroidi\ free$ e quindi il fatto che $\forall S \subseteq X : S^{\rho} = |S|$.

D48 i.06 Chiamiamo **matroide di trasversali** un sistema della forma $\left\langle X, \langle X, I, \phi\rangle^{\mathsf{TrsvP}} \right\rangle$, ove $X \in \mathbf{SetF}$ e $\langle X, I, \phi\rangle \in \mathbf{FamSF}$.
Denotiamo con MtdTrsv la loro classe.

Il collegamento tra teoria dei trasversali e teoria delle matroidi è chiarito dal seguente risultato.

(1) Teorema (**teorema di Edmonds-Fulkerson**) $\left\langle X, \langle X, I, \phi\rangle^{\mathsf{TrsvP}} \right\rangle \in \mathbf{MtdI}$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php