1

Capitolo D21
convessità-ZZ e poliomini

Contenuti delle sezioni

a. convessità nel piano-ZZ p. 2
b. poliòmini e pavimentazioni p. 4
d. cammini crescenti e coefficienti binomiali p. 5
e. cammini di Dyck e numeri di Catalan p. 7
f. forme di Ferrers e partizioni di interi p. 8
g. successioni di polinomi e di serie formali p. 9

9 pagine

D21 0.01 Questo capitolo è dedicato ad alcuni tipi di configurazioni del piano combinatorio.
All'inizio si introduce la convessità in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ al fine di avviare lo studio di questa proprietà geometrica in grado di garantire la possibilità di sviluppare i procedimenti risolutivi per una vasta gamma di problemi.
Successivamente si riprende la introduzione dei poliòmini preoccupandosi in particolare di presentare problemi di pavimentazione del piano combinatorio.
Nell'ultima parte vengono tratta i permutomini, poliomini definiti a partire da due permutazioni.

D21 a. convessità nel piano-ZZ

D21 a.01 Veniamo ora alle caratterizzazioni di convessità degli insiemi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Un insieme di nodi del piano combinatorio si dice:
insieme orizzontalmente convesso o **insieme convesso-ZZH** sse tra due suoi elementi sulla stessa linea orizzontale non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
insieme verticalmente convesso o **insieme convesso-ZZV** sse tra due suoi elementi sulla stessa linea verticale non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
insieme convesso-ZZR sse è convesso-ZZH e convesso-ZZV;
insieme convesso-ZZD1 sse tra due suoi elementi sulla stessa linea parallela alla diagonale principale [linea-ZZD1] non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
insieme convesso-ZZD2 sse tra due suoi elementi sulla stessa parallela alla diagonale secondaria, [linea-ZZD2] non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
insieme convesso-ZZB sse è convesso-ZZD1 e convesso-ZZD2.
insieme convesso-ZZK sse è convesso-ZZR e convesso-ZZB.

D21 a.02 I rettangoli (e quindi le barre), le scale, i triangoli rettangoli CathR, i triangoli rettangoli CathB, i triangoli rettangoli elongati, i trapezi di Euler sono convessi-ZZK.
I ganci non ridotti a barra sono convessi-ZZR e nonconvessi-ZZB.

Altri insiemi piani convessi-ZZR e convessi-ZZB sono i seguenti

I seguenti insiemi piani sono convessi-ZZR ma nonconvessi-ZZB.

Sono invece convessi-ZZB ma nonconvessi-ZZR i seguenti insiemi piani.

Infine i seguenti insiemi piani non sono né convessi-ZZB né convessi-ZZR.

D21 a.03 Spesso è utile saper comporre e decomporre le figure piane. Attraverso la composizione si possono ottenere figure elaborate a partire da figure semplici. Attraverso la decomposizione si individuano componenti semplici di una figura elaborata.

Consideriamo due figure piane F_1 ed F_2.
Per ottenere un **affiancamento delle figure** F_2 ad F_1 si trasla F_2 fino a far coincidere almeno un suo lato verticale più a sinistra con un lato verticale più a destra di F_1 senza che si abbia intersezione tra le due figure.
Per ottenere una **sovrapposizione delle figure** F_2 ad F_1 si trasla F_2 fino a far coincidere almeno un suo lato orizzontale inferiore con un lato orizzontale superiore di F_1 evitando ogni coincidenza di nodi.

Se F_1 ed F_2 sono connesse-R, ogni loro affiancamento e ogni loro sovrapposizione è connessa-R.

Osserviamo che i rettangoli si possono considerare affiancamenti o sovrapposizioni di barre di uguale lunghezza; i triangoli rettangoli normali ed elongati si possono considerare affiancamenti o sovrapposizioni di barre di lunghezze consecutive; i trapezi di Eulero si ottengono affiancando un quadrato con un triangolo rettangolo normale.

D21 a.04 Una figura è convessa-ZZZH sse si può ottenere come sovrapposizione di barre orizzontali (o di figure h-convesse).
Simmetricamente una figura è convessa-ZZZV sse si può ottenere come affiancamento di barre verticali (o di figure convesse-ZZZV).

D21 a.05 Quando si affiancano barre verticali, in generale diverse tra di loro, si dice che si ottiene l'**allineamento in basso oppure alto** secondo che si tengano sulla stessa linea orizzontale le caselle inferiori oppure le superiori delle barre. Similmente quando si sovrappongono barre orizzontali si dice che si tiene l'**allineamento a sinistra oppure a destra** secondo che si tengano sulla stessa linea verticale le caselle più a sinistra oppure le più a destra delle barre.
Le figure così ottenute si dicono **trapezoidi**. I trapezoidi ottenuti sovrapponendo barre orizzontali con allineamento a sinistra [destra] si dicono **trapezoidi volti a destra [sinistra]**; i trapezoidi ottenuti affiancando barre verticali con allineamento in basso [alto] si dicono **trapezoidi volti in alto [basso]**.
Vi sono trapezoidi volti verso destra e volti verso l'alto: sono quelli ottenibili sovrapponendo barre allineate a sinistra oppure affiancando barre allineate in basso. Similmente vi sono trapezoidi volti verso l'alto e verso sinistra, trapezoidi volti verso sinistra e verso il basso, trapezoidi volti verso il basso e verso destra.
Si tratta quindi di trapezoidi volti verso due direzioni adiacenti relativamente al ciclo di direzioni $\langle$ destra, alto, sinistra, basso $\rangle$.
Ogni trapezoide è contenuto in un unico rettangolo minimale con il quale condivide parte del perimetro: un intero lato e parte di altri due. Il perimetro dei trapezoidi che non si riducono a rettangoli presenta dunque tre cammini rettilinei che sono perimetro del suo rettangolo coprente minimale e un cammino formato da segmenti che seguono tre direzioni. Il perimetro di un trapezoide si può quindi bipartire. Questa bipartizione si può ottenere in due modi per i trapezoidi volti in due direzioni e in quattro modi nel caso dei rettangoli (che si possono considerare trapezoidi volti in quattro direzioni).

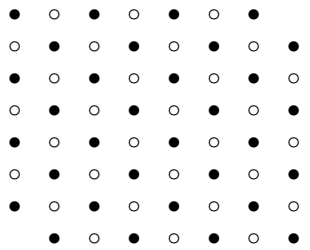
D21 b. poliòmini e pavimentazioni

D21 b.01 I poliòmini con un certo numero n di elementi si dicono n-òmini, quelli con un solo elemento si dicono monòmini (si tratta delle caselle), quelli con due elementi dòmini, quelli con 3 tròmini, con 4 tetròmini, 5 pentòmini, 6 esòmini, 7 eptòmini, 8 octòmini, 8 enneòmini, 10 decòmini, e così via. Gli analoghi termini per gli pseudopoliòmini si ottengono premettendo pseudo ai corrispondenti per i poliòmini: pseudo$n$-òmini, pseudomonòmini, pseudodòmini, ...

Nei problemi di pavimentazione in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si considera una certa figura piana F tendenzialmente regolare (cioè definibile con una certa semplicità) e abbastanza estesa e uno o più tipi di figure di dimensioni inferiori che chiameremo **tessere della pavimentazione**. Una pavimentazione della F mediante le tessere date è un collocamento di un numero opportuno di repliche delle tessere sulla F tale che non si abbia alcuna sovrapposizione e che nessuna casella della F rimanga scoperta. Un primo tipo di problema è di tipo esistenziale: si chiede se esiste una pavimentazione di F mediante le tessere date. In caso affermativo si pone il problema enumerativo di stabilire il numero delle possibili pavimentazioni. Inoltre si possono porre problemi di tipo generativo i quali chiedono di individuare procedimenti che consentano di generare alcune o tutte le pavimentazioni, oppure quelle con determinate caratteristiche.

Molti problemi di pavimentazione mediante poliòmini e configurazioni simili sono presentati in *Golomb 1994*. Un altro problema di pavimentazione si individua nel videogame Tetris: in questo caso si tratta di pavimentare mediante tetròmini un trapezoide il più alto possibile nel minor tempo possibile.

D21 b.02 Presentiamo un classico problema di pavimentazione.
Consideriamo un quadrato di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di lato 8 ed eliminiamo le caselle in due vertici opposti. Dimostrare che è impossibile pavimentarlo completamente con dei dòmini.
La dimostrazione si potrebbe condurre cercando di individuare un procedimento con qualche possibilità di costruire una pavimentazione servendosi di $(8 \cdot 8 - 2)/2 = 31$ dòmini e provando che esso non può avere successo.
Dato che il numero dei tentativi è finito, si potrebbe pensare di procedere sperimentalmente, mediante un computer: in realtà che un tale tentativo sarebbe estremamente costoso.
Alla dimostrazione dell'impossibilità si arriva invece rapidamente dopo aver, apparentemente, complicato la figura da pavimentare.
Se si bicolora il quadrato smussato distinguendo caselle pari e dispari, si ha un insieme di 32 caselle nere (ad es.) e di 30 caselle bianche.



Ma bicolorando con lo stesso criterio i dòmini, si vede che 31 di queste tessere non possono che coprire 31 caselle bianche e 31 nere e quindi non possono fornire una pavimentazione.

La soluzione di questo problema costituisce un classico esempio di situazione nella quale il ricorso al computer risulta completamente dissennato.

D21 d. cammini crescenti e coefficienti binomiali

D21 d.01 Consideriamo ora alcune classi di cammini che rivestono grande importanza in quanto si possono considerare rappresentazioni fedeli di varie strutture discrete e giocano ruoli importanti nelle considerazioni enumerative.

Si dice **cammino-ZZR ascendente** o **cammino-RA** un cammino-ZZR che inizia nel nodo origine ed è costituito solo da passi-ZZEW e passi-ZZSN.

Lo studio dei cammini-RA conduce in modo visivamente semplice e significativo ai coefficienti binomiali. Un cammino-RA evidentemente ha come estremità finale un punto del primo quadrante, cioè un nodo con entrambe le coordinate non negative.

D21 d.02 Supponiamo che n e k siano interi naturali con $0 \leq k \leq n$; definiamo come **coefficiente binomiale** $\binom{n}{k}$, da leggersi n su k o n binomiale k, il numero dei cammini-RA che si concludono nel nodo $\langle k, n-k\rangle$.

Stabiliamo ora una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di un insieme S di n elementi e i cammini-RA di lunghezza n. Individuati gli elementi di S con gli interi da 1 ad n, un generico sottoinsieme di S con k elementi viene codificato fedelmente da una sequenza binaria di lunghezza n contenente k repliche di 1. Queste sequenze si pongono in corrispondenza biunivoca con i cammini-RA facendo corrispondere a ogni bit uguale a 0 un passo WE e a ogni bit 1 un passo SN.
Quindi ogni sottoinsieme di S è raffigurato biunivocamente da un cammino-RA di lunghezza r e ciascuno dei punti $\langle k, n-k\rangle$ per $k = 0, ..., n$ (costituenti una scala SE), individua la collezione dei sottoinsiemi di S aventi k elementi. In particolare il punto $\langle n, 0\rangle$ individua l'insieme vuoto, $\langle 0, n\rangle$ l'intero S, il punto $\langle n-1, 1\rangle$ la collezione dei singoletti di S e il punto $\langle 1, n-1\rangle$ la collezione dei sottoinsiemi ottenuti eliminando un solo elemento da S, complementari dei precedenti.
Si può quindi concludere che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ fornisce il numero dei cammini-RA dall'origine a $\langle k, n-k\rangle$, ovvero il numero delle sequenze binarie di lunghezza n e peso k, ovvero il numero dei sottoinsiemi con cardinale k di un insieme avente n elementi.

D21 d.03 La interpretazione dei coefficienti binomiali come cardinali di collezioni di cammini permette di ricavare nella maniera più semplice le proprietà basilari di questi importanti parametri enumerativi.

È evidente che in ciascuno dei punti $\langle n, 0\rangle$ e in ciascuno dei punti $\langle 0, n\rangle$ si conclude un solo cammino-RA . Ne segue che $\binom{n}{0} = \binom{n}{r} = 1$.

È facile anche vedere che il numero dei cammini-RA che si concludono in $\langle n-1, 1\rangle$ e il numero di quelli che si concludono in $\langle 1, n-1\rangle$ è n. Quindi $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

È anche chiaro che la riflessione rispetto alla diagonale principale trasforma biunivocamente i cammini-RA che si concludono in $\langle k, n-k\rangle$ nei cammini-RA che si concludono in $\langle n-k, k\rangle$. Quindi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = r$. Si osservi che la suddetta riflessione trasforma il cammino che codifica un sottoinsieme di S nel suo complementare.

D21 d.04 Una semplice considerazione sui cammini-RA conduce anche alla relazione di ricorrenza che permette di calcolare ogni $\binom{n}{k}$ per $k = 1, ..., n-1$. Infatti basta osservare che un cammino-RA che termina in $\langle k, n-k\rangle$, o è passato per $\langle k, n-k-1\rangle$ oppure per $\langle k-1, n-k\rangle$. Quindi l'insieme dei cammini-RA che terminano in $\langle k, n-k\rangle$ si bipartisce nell'insieme dei cammini che toccano $\langle k, n-k-1\rangle$ e nell'insieme di quelli che passano per $\langle k-1, n-k\rangle$. Passando ali cardinali di questi insiemi disgiunti di cammini si conclude che

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} .$$

Questa relazione consente di costruire progressivamente tutto il quadro dei coefficienti binomiali.

1										
1	10									
1	9	45								
1	8	36	120							
1	7	28	84	210						
1	6	21	56	126	252					
1	5	15	35	70	126	210				
1	4	10	20	35	56	84	120			
1	3	6	10	15	21	28	36	45		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

D21 d.05 Questo in sostanza è il famoso **triangolo di Pascal** (in Italia chiamato usualmente **triangolo di Tartaglia**, studiato già nel 13-esimo secolo in Cina). Esso è più conosciuto nella versione ottenuta ruotando il quadro precedente di 135° nel verso orario e sistemando i numeri in modo da mostrare la simmetria rispetto alla verticale (corrispondente alla suddetta simmetria rispetto alla diagonale principale).

Presentiamolo in un'altra forma ancora; nella forma precedente costituisce la mappa cartesiana della $\binom{n}{k}$ intesa come funzione delle due variabili $n-k$ e k; ora presentiamo la mappa della $\binom{n}{k}$ intesa come funzione delle due variabili n e k. Questa mappa si ottiene facendo slittare la seconda riga dal basso di una posizione, la terza di due e così via. In tal modo si ottiene il quadro di più facile interpretazione:

										1
									1	10
								1	9	45
							1	8	36	120
						1	7	28	84	210
					1	6	21	56	126	252
				1	5	15	35	70	126	210
			1	4	10	20	35	56	84	120
		1	3	6	10	15	21	28	36	45
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

D21 e. cammini di Dyck e numeri di Catalan

D21 e.01 Si dice **cammino di Dyck** un cammino sui nodi che inizia nel nodo origine, è costituito solo di passi diagonali NE e SE, non passa mai sotto l'asse orizzontale e si conclude su tale asse.

I cammini di Dyck si possono codificare con sequenze di segni `(` e `)` ottenute facendo corrispondere ordinatamente una parentesi aperta a ogni passo-NE e una chiusa a ogni passo-SE; queste sequenze si dicono **codifiche di Dyck**.
Per esempio i due cammini precedenti sono caratterizzati risp. dalle due codifiche `(()())` e `(()()(()()))`.
Queste sequenze di parentesi si possono ottenere a partire da espressioni algebriche considerando solo le parentesi che delimitano le sottoespressioni presenti. Le codifiche di Dyck quindi forniscono una caratterizzazione strutturale essenziale delle espressioni algebriche.

D21 e.02 Si dice **cammino di Motzkin** un cammino sui nodi che inizia nel nodo origine, è costituito solo da passi diagonali-ZZNE, da passi diagonali-ZZSE e da passi orizzontali-ZZWE, non passa mai sotto l'asse orizzontale e si conclude con un punto su tale asse.

D21 e.03 Il numero dei cammini di Dyck di lunghezza $2n$ è dato dal numero di Catalan $C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Dim.: La dimostrazione fa riferimento all'insieme S_n dei cammini costituiti da $n+1$ passi-ZZNE ed n passi-ZZSE e con inizio nell'origine come il seguente:

Chiaramente $|S_n| = \binom{2n+1}{n+1}$. Si osserva che il cammino precedente può considerarsi ottenuto da un cammino di Dyck di lunghezza $2n+2$ eliminando l'ultimo passo; si osserva anche che eliminando il primo passo non si ottiene un cammino trasformabile in uno di Dyck per traslazione $(-1,-1)$; questo può accadere solo se si fosse partiti da un cammino di Dyck di lunghezza $2n+2$ corrispondente ad una stringa di Dyck prima. Se si pone l'ultimo passo nella prima posizione si ottiene ancora un cammino di S_n:

Più precisamente permutando ciclicamente i passi di un cammino si individua una classe di elementi di S_n tutti diversi e tra i quali solo uno è riconducibile a un cammino di $Dyck_{2n}$ per eliminazione del primo passo, quello che presenta l'ultimo minimo nell'origine:

Eliminato il primo passo si ha un cammino equivalente ad un cammino di Dyck di lunghezza $2n$. Quindi si ha biiezione tra $Dyck_{2n}$ e l'insieme delle suddette classi. Ciascuna di queste contiene $2n+1$ elementi e quindi

$$|Dyck_{2n}| = \frac{|S_n|}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n \ . \blacksquare$$

D21 f. forme di Ferrers e partizioni di interi

D21 f.01 Le partizioni-I, cioè le partizioni degli interi positivi, si rappresentano fedelmente con insiemi piani-ZZ che facilitano sensibilmente il loro studio.

Consideriamo una partizione di $n \in \mathbb{P}$, cioè una sequenza noncrescente di positivi $\underline{\lambda} = \langle \lambda_1, ..., \lambda_s \rangle$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$. Per **forma di Ferrers** di tale $\underline{\lambda}$ si intende la figurapiana ottenuta affiancando le successive barre verticali di altezza λ_i. Per esempio le forme di Ferrers delle partizioni-I $\langle 5, 4, 4, 2, 1, 1 \rangle$, $\langle 6, 4, 3, 3, 1 \rangle$ e di $\langle 5, 3, 1 \rangle$ sono risp.

D21 f.02 Le precedenti sono raffigurazioni geografiche di sequenze di interi. Sono possibili altre 7 raffigurazioni ottenibili applicando alla precedente le rotoriflessioni diverse dall'identità.
Più spesso, seguendo la scuola inglese risalente ad Alfred Young, per le partizioni-I si utilizzano le rappresentazioni matriciali, che per i casi precedenti sono risp.:

Un'altra raffigurazione viene preferita dalla scuola francese ed è quella ottenuta per riflessione rispetto a una verticale dalla prima introdotta.

Passare dalla prima raffigurazione a quest'ultima equivale a trasformare una partizione.i nella sequenza riflessa, cioè in una sequenza nondecrescente di interi positivi.

D21 f.03 Le forme di Ferrers si possono confondere con le corrispondenti partizioni-I con un abuso di linguaggio veniale.
Osserviamo che le forme di Ferrers sono trapezoidi volti in due direzioni. Quando si studiano tali configurazioni, fissata una loro raffigurazione non si ammette la possibilità di ruotarli o di rifletterli rispetto alla bisettrice individuata dalla coppia delle sue barre ortogonali massimali; in altri termini si tiene fisso il quadrante determinato dai due lati adiacenti facenti parte di ogni rettangolo coprente minimale.

Talora è necessario individuare le celle delle forme di Ferrers mediante coordinate cartesiane: in questo caso occorre distinguere se si collocano in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o in $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Alle partizioni di interi e alle forme di Ferrers è dedicato il cap. D23.

D21 g. successioni di polinomi e di serie formali

D21 g.01 Nel piano combinatorio si possono ambientare successioni di polinomi e serie formali.
Si dice successione normale di polinomi formali .....

D21 g.02 Dalla raffigurazione mediante cammini-RA si ricava anche la formula di convoluzione di Chu-Vandermonde.

$$\forall n \le r+s \ : \qquad \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} \ .$$

Per dimostrarla consideriamo l'insieme C dei cammini-RA che si concludono in $\langle n, r+s-n\rangle$ e la scala SE $A = \{k = 0, ..., r :| \ \langle k, r-k\rangle\}$. Ogni cammino di C passa da uno ed uno solo degli $r+1$ punti di A. Quindi C si può ripartire in $r+1$ sottoinsiemi C_k corrispondenti al passaggio per i vari punti $P_k = \langle k, r-k\rangle$. La totalità dei cammini di C_k si ottiene giustapponendo un generico cammino-RA che termina in P_k a un generico cammino-RA che inizia in P_k e termina in $\langle n, r+s-n\rangle$. Evidentemente il numero dei primi è $\binom{r}{k}$.

D21 g.03 La traslazione che porta $\langle k, r-k\rangle$ nell'origine pone i secondi in corrispondenza biunivoca con gli cammini-RA che si concludono in $\langle n-k, s-(n-k)\rangle$; quindi i secondi cammini sono in numero di $\binom{s}{n-k}$. Se ne conclude che i cammini in C_k sono $\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$. La formula di convoluzione si ottiene passando dalla relazione di partizione $S = \dot\cup S_k$ ai relativi cardinali ∎

Osserviamo che se $n < r$ o $n < s$ alcuni S_k sono vuoti; questo corrisponde alla presenza di coefficienti $\binom{s}{n-k}$ nulli in quanto $n-k < 0$ o $s < n-k$. Conviene dunque estendere la definizione dei coefficienti binomiali ponendo

$$\binom{n}{k} \ := \ 0 \qquad \text{se} \quad k < 0 \ \text{ o } \ n < k \ .$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php