1

# Capitolo C32
# algebre di Kleene

## Contenuti delle sezioni

a. algebre di Kleene classiche p. 2
b. algebre di Kleene standard p. 10
c. algebre di Kleene normali e regolari p. 14
d. matrici su algebre di Kleene standard e regolari p. 16
e. composizioni guidate da linguaggi p. 20
f. costruzioni guidate da un linguaggio p. 22

23 pagine

**C32 0.01** Le algebre di Kleene sono alcune specie di strutture algebriche molto vicine tra di loro che costituiscono degli arricchimenti della specie dei semianelli; il loro interesse deriva dal fatto che facilitano la trattazione unitaria di diverse specie di strutture più particolari costituite da entità piuttosto diverse come linguaggi formali, relazioni in genere, relazioni tra linguaggi e matrici su semiamnelli.

Il contenuto delle pagine che seguono costituisce una rielaborazione di alcune parti del piccolo denso libro di John Conway del 1971: *Regular languages and regular machines*.

## C32 a. algebre di Kleene classiche

**C32 a.01** Con il termine **algebra di Kleene classica**, che abbreviamo con CKA, intendiamo ogni struttura $\mathsf{S} = \langle \mathsf{S}, \mathbf{+}, \cdot, ^{\mathbf{+}}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ nel quale $S$ denota un insieme, $\mathbf{+}$ e $\cdot$ denotano operazioni binarie su $S$, $^{\mathbf{+}}$ è un'operazione unaria su $S$, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ sono elementi di $S$, struttura alla quale chiediamo di soddisfare i seguenti assiomi:

$\forall E, E_1, E_2, E_3 \in S \ :$

[CKA 1] $E_1 \mathbf{+} E_2 = E_2 \mathbf{+} E_1$ (commutatività di $\mathbf{+}$)

[CKA 2] $E \mathbf{+} \mathbf{0} = E$ (neutralità di $\mathbf{0}$ rispetto a $\mathbf{+}$)

[CKA 3] $(E_1 \mathbf{+} E_2) \mathbf{+} E_3 = E_1 \mathbf{+} (E_2 \mathbf{+} E_3)$ (associatività di $\mathbf{+}$)

[CKA 4] $(E_1 \cdot E_2) \cdot E_3 = E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3)$ (associatività di $\cdot$)

[CKA 5] $\mathbf{1} \cdot E = E$ (neutralità a sinistra di $\mathbf{1}$ rispetto a $\cdot$)

[CKA 6] $E \cdot \mathbf{1} = E$ (neutralità a destra di $\mathbf{1}$ rispetto a $\cdot$)

[CKA 7] $\mathbf{0} \cdot E = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ è elemento assorbente a sinistra rispetto a $\cdot$)

[CKA 8] $E \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ è elemento assorbente a destra rispetto a $\cdot$)

[CKA 9] $E_1 \cdot (E_2 \mathbf{+} E_3) = (E_1 \cdot E_2) \mathbf{+} (E_1 \cdot E_3)$ (distributività a destra di $\mathbf{+}$ rispetto a $\cdot$)

[CKA 10] $(E_1 \mathbf{+} E_2) \cdot E_3 = (E_1 \cdot E_3) \mathbf{+} (E_2 \cdot E_3)$ (distributività a sinistra di $\mathbf{+}$ rispetto a $\cdot$)

[CKA 11] $(E_1 \mathbf{+} E_2)^{\mathbf{+}} = (E_1^{\mathbf{+}} \cdot E_2)^{\mathbf{+}} \cdot E_1^{\mathbf{+}}$ (azione di $^{\mathbf{+}}$ sopra $\mathbf{+}$)

[CKA 12] $(E_1 \cdot E_2)^{\mathbf{+}} = \mathbf{1} \mathbf{+} E_1 (E_2 \mathbf{+} E_1)^{\mathbf{+}} \cdot E_2$ (azione di $^{\mathbf{+}}$ sopra $\cdot$)

[CKA 13] $(E^{\mathbf{+}})^{\mathbf{+}} = E^{\mathbf{+}}$ (idempotenza dell'operatore $^{\mathbf{+}}$)

[CKA 14] $\forall n \in \mathbb{P} \ : \ E^{\mathbf{+}} = (E^n)^{\mathbf{+}} \cdot E^{[\mathrm{n}\,)}$

È opportuno sottolineare che l'ultima relazione, e solo essa, costituisce uno schema di assioma.

**C32 a.02** Denotiamo con **CKA classe delle algebre di Kleene classiche** e con $CKA^{Ax}$ l'insieme degli assiomi { [CKA 1],...,[CKA 14] } .
Inoltre abbreviamo con CKA il termine **algebra di Kleene classica** e il suo plurale.

Come vedremo nel seguito si conoscono numerose e veriegate CKA: ne esistono di finite e di infinite e risultano utili in molti capitoli della matematica.
In particolare si constata che assumendo $S = \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{1}\}$ si ottiene una CKA che chiamiamo "CKA degenere".

Inoltre vedremo delle varianti delle specie delle algebre di Kleene classiche, cioè delle strutture che conviene chiamare algebre di Kleene standard, algebre di Kleene normali e algebre di Kleene regolari.

Le CKA si possono definire mediante altri vari sistemi di assiomi: oltre al precedente, dovuto a Conway, ne sono stati proposti da Salomaa e da Yanov.

Per questi sistemi di assiomi, oltre ai problemi dell'equivalenza, si sono affrontati vari problemi di consistenza e di completezza. Va rilevato il fatto che in ogni sistema di assiomi per le CKA deve comparire almeno uno schema di assioma oppure una regola di inferenza; in altre parole si è dimostrato che non esiste alcun sistema finito di uguaglianze in grado di costituire un fondamento assiomatico per le CKA.

**C32 a.03** Osserviamo che [CKA 1], [CKA 2 ] e [CKA 3] equivalgono a dire che $\langle \mathsf{S}, \mathbf{+}, \mathbf{0} \rangle$ è un monoide abeliano; che [CKA 4], [CKA 5] e [CKA 6] equivalgono ad affermare che $\langle \mathsf{S}, \cdot, \mathbf{1} \rangle$ è un monoide;

che [CKA 1], ...,[CKA 10] e [CKA 13] equivalgono a dire che $\langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}\ ,\boldsymbol{\cdot},\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$ è un semianello unifero idempotente.

Vedremo in 1.4(h) che, escluso il caso degenere della CKA costituita da un solo elemento, l'operazione $\mathbf{+}$ non possiede inverso, l'operazione $\boldsymbol{\cdot}$ non è commutativa e non possiede inverso e che ogni semianello $\langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}\ ,\boldsymbol{\cdot},\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$ è privo di divisori dell'unità e non è un anello unifero [B41c04].

**C32 a.04** Consideriamo l'alfabeto $A \subset_\varphi \square$.

Si dice **CKA dei linguaggi** sull'alfabeto $A$ la struttura $\mathbf{L}_{CKA;A} := \langle \mathbf{L}_A, +, \cdot, ^*, \emptyset, \mu \rangle$ , ottenuta dalla generica CKA sostituendo $\mathbf{+}$ con l'unione (che qui denoteremo con $+$), $\boldsymbol{\cdot}$ con la giustapposizione (che qui denoteremo con $\cdot$ o anche con un piccolo spazio tra gli operandi) e $^{\boldsymbol{\star}}$ con la chiusura-star dei linguaggi (che scriveremo $^*$).

Inoltre per l'unione numerabile di linguaggi useremo l'usuale segno di sommatoria, mentre per generiche algebre di Kleene useremo scritture come $\mathbf{+}_{i=0}^{+\infty} K_i$ , quando possibile.

**Prop.** $\mathbf{L}_{CKA;A} \in \mathbf{CKA}$ .

**Dim.:** [CKA 1],..., [CKA 10] sono evidentemente soddisfatte da $\mathbf{L}_{CKA;A}$.
Esaminiamo gli assiomi rimanenti concernenti linguaggi $E_1$ ed $E_2$.

[CKA 11] $\quad (E_1 + E_2)^* = (E_1^* \cdot E_2)^* \cdot E_1^*$ :

entrambi i membri dell'uguaglianza esprimono l'unione di tutte le giustapposizione dei linguaggi $E_1$ ed $E_2$; infatti

$$\begin{aligned}(E_1 + E_2)^* &= \mu + E_1 + E_2 + {E_1}^2 + E_1\,E_2 + E_2\,E_1 + {E_2}^2 + {E_1}^3 + {E_1}^2\,E_2 \\ &\quad + E_1\,E_2\,E_1 + E_1\,{E_2}^2 + E_2\,{E_1}^2 + E_2\,E_1\,E_2 + {E_2}^2\,E_1 + {E_2}^3 + \ \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_1^* \cdot E_2)^* \cdot {E_1}^* &= \sum_{m\in\mathbb{N}} ((E_1^* \cdot E_2)^m) \cdot {E_1}^* \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{h_1,\ldots,h_{m+1}\in\mathbb{N}} ({E_1}^{h_1} \cdot E_2) \cdots ({E_1}^{h_m} \cdot E_2){E_1}^{h_{m+1}} \blacksquare\end{aligned}$$

[CKA 12] $\quad (E_1 \cdot E_2)^* = \mu + E_1\,(E_2 + E_1)^* \cdot E_2$ :

$$\begin{aligned}(E_1 \cdot E_2)^* &= \mu + E_1E_2 + E_1\,(E_2E_1)\,E_2 + E_1\,(E_2\,E_1)^2\,E_2 + \cdots + E_1\,(E_2\,E_1)^n\,E_2 + \cdots \\ &= \mu + E_1\,(E_2\,E_1)^*\,E_2 \blacksquare\end{aligned}$$

[CKA 13] $\quad (E^*)^* = E^*$ :

Si osserva che $\forall E \in \mathbf{L}_A \ :\ E + E = E$ e che $\forall n \in \mathbb{N} \ :\ E^n + \cdots + E^n = E^n$ .

Quindi ${E^*}^2 = (\mu + E + E^2 + \cdots) \cdot (\mu + E + E^2 + \cdots) =$
$\mu + (E + E) + (E^2 + E^2 + E^2) + (E^3 + E^3 + E^3 + E^3) + \cdots = \mu + E + E^2 + E^3 + \cdots = E^*$;
${E^*}^3 = {E^*}^2\,E^* = E^*\,E^* = E^*$ e in generale $\forall n \in \mathbb{N} \ :\ {E^*}^n = E^*$ ;
di conseguenza $(E^*)^* = \mu + E^* + {E^*}^2 + \cdots = \mu + E^* + E^* + \cdots = \mu + E^* = E^* \blacksquare$

[CKA 14] $\quad \forall n \in \mathbb{N} \ :\ E^* = (E^n)^* E^{[\mathrm{n}\,)}$ :

Si vede che l'uguaglianza vale per $n = 0$ e preliminarmente si osserva che $E^* = \mu + E + \cdots + E^p + \cdots$ .

Fissato un $n \in \mathbb{P}$, sappiamo che per ogni $p \in \mathbb{N}$ sono determinati $h \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, ..., n-1\}$ tali che $p = n\,h + k$ .
Quindi $(E^n)^*\ E^{[\mathrm{n}\,)} = \left(\sum_{h\in\mathbb{N}} E^{nh}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} E^k\right) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n-1} E^{nh+k} = \sum_{p\in\mathbb{N}} E^p = E^* \blacksquare$

**C32 a.05** Anche per le CKA, come per ogni altra specie di struttura algebrica, risulta utile introdurre sottostrutture, morfismi e prodotto diretti.

Consideriamo due CKA $\mathsf{S} = \langle S', \mathbin{+}', \mathbin{\star}', {}^{+\prime}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ e $\mathsf{S}' = \langle S', \mathbin{+}', \mathbin{\star}', {}^{+\prime}, \mathbf{0}', \mathbf{1}' \rangle$ .

Si dice che $\mathsf{S}'$ è **sottoalgebra di Kleene classica** di $\mathsf{S}$ e si scrive $\mathsf{S}' \leq_{CKA} \mathsf{S}$ sse

$$S' \subseteq S \ , \quad \mathbin{+}' = \mathbin{+}|_{S' \times S'} \ , \quad \mathbin{\star}' = \mathbin{\star}|_{S' \times S'} \ , \quad {}^{+\prime} = {}^{+}|_{S'} \ , \quad \mathbf{0}' = \mathbf{0} \ \text{ ed } \ \mathbf{1}' = \mathbf{1} \ .$$

Si dice che $h \in \lceil S \longrightarrow S' \rceil$ è un morfismo da $\mathsf{S}$ in $\mathsf{S}'$ e si scrive $h \in \lceil \mathsf{S} \longrightarrow_{CKA} \mathsf{S}' \rceil$ sse questa applicazione rispetta le operazioni che caratterizzano **CKA**, ovvero sse

$$\forall a, b \in S \ : \ h(a \mathbin{+} b) = h(a) \mathbin{+}' h(b) \ , \ h(a \mathbin{\star} b) = h(a) \mathbin{\star}' h(b) \ , \ h(a^{+}) = h(a)^{+\prime} \ , \ h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}' \ , \ h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}' \ .$$

Come al solito tra questi morfismi si distinguono gli epimorfismi, i monomorfismi, gli isomorfismi, gli automorfismi e altre simili relazioni. Sono quindi comprensibili notazioni come $\lceil \mathsf{S} \longmapsto_{CKA} \mathsf{S}' \rceil$ e $\lceil \mathsf{S} \lhd\!\!\longmapsto\!\!\rhd_{CKA} \mathsf{S}' \rceil$.

Si dice **prodotto diretto delle CKA** $\mathsf{S}$ e $\mathsf{S}'$ e si scrive $\mathsf{S} \times_{CKA} \mathsf{S}'$, la struttura della forma

$$\langle S \times S', \ \mathbin{+} \times \mathbin{+}', \mathbin{\star} \times \mathbin{\star}', \langle {}^{+}, {}^{+\prime} \rangle, \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}' \rangle, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}' \rangle \rangle \ .$$

**C32 a.06** **(1) Prop.**: Sia $A \subset_{\varphi} \boxplus$. $\langle \ \mathbf{R}_A, \ + \ , \ \cdot, \ ^*, \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rangle <_{CKA} \langle \ \mathbf{L}_A, \ + \ , \ \cdot \ , \ ^*, \ \emptyset, \ \sqcup \ \rangle$.

**Dim.**: Dato che $\mathbf{R}_A \subset \mathbf{L}_A$ e che le operazioni su $\mathbf{R}_A$ sono le restrizioni di quelle su $\mathbf{L}_A$, basta stabilire che $\mathbf{R}_A \in$ **CKA** . Questo equivale a stabilire $\mathbf{R}_A \in \lceil \ \mathbin{+} \ , \ \mathbin{\star}, \ {}^{+} \ \rceil$, fatto garantito da C12d ∎

**(2) Prop.**: Sia $A \subset_{\varphi} \boxplus$ ed $\boldsymbol{L} \subseteq \mathbf{L}_A$ ; $\langle \boldsymbol{L}\lceil \ + \ , \ \cdot \ , \ ^* \ , \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rceil \ , \ + \ , \ \cdot \ , \ ^* \ , \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rangle \in$ **CKA**.

**Dim.**: La collezione di linguaggi $\overline{\boldsymbol{L}} := \boldsymbol{L}\lceil \ + \ , \ \cdot \ , \ ^* \ , \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rceil \subseteq \mathbf{L}_A$ per definizione è chiusa rispetto agli operatori $+$, $\cdot$ e $^*$ e contiene $\emptyset$ e $\sqcup$, quindi vale la relazione di sottostruttura $\overline{\boldsymbol{L}} \leq_{CKA} \mathbf{L}_A$ ∎

**C32 a.07** L'insieme $\mathbf{R}_A$ dei linguaggi razionali su $A$ costituisce un caso particolare di chiusura algebrica della forma $\boldsymbol{L}_{\mathfrak{l}}\lceil \ + \ , \ \cdot \ , \ ^* \ , \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rceil$, quello relativo alla collezione $\boldsymbol{L} := \{a_i \in A :| \ \{a_i\}\}$.
$\mathbf{R}_A$ risulta essere la CKA libera finitamente generata da $\{a_i \in A :| \ \{a_i\}\}$.

Il suo carattere di struttura libera dipende da due fatti: (1) i suoi elementi sono forniti da espressioni razionali su $A$, cioè da espressioni costituite con lettere di $A$ composte con gli operatori $+$, $\cdot$ e $^*$ e opportunamente parentizzate (ossia formule ben formate, `wff`[B19b03]); (2) due espressioni razionali forniscono lo stesso elemento di $\mathbf{R}_A$ sse sono riconducibili l'una all'altra in conseguenza degli assiomi [CKA 1], ... ,[CKA 14].

**C32 a.08** La precedente affermazione traduce la proprietà di completezza del suddetto sistema di assiomi.

Nel caso in cui $\boldsymbol{L}$ denoti un insieme finito di linguaggi, $\overline{\boldsymbol{L}} := \boldsymbol{L}_{\mathfrak{l}}\lceil \ \mathbin{+} \ , \ \mathbin{\star}, \ {}^{+} \ , \ \emptyset, \ \sqcup \ \rceil$ risulta essere una CKA finitamente generata; una tale algebra può essere libera o meno, in quanto due espressioni razionali sui linguaggi di $\boldsymbol{L}$ non equivalenti per il sistema $CKA_{Ax}$ potrebbero fornire lo stesso linguaggio, cioè lo stesso elemento della CKA, in conseguenza di particolari legami intercorrenti tra i linguaggi in $\boldsymbol{L}$.

Se $\boldsymbol{L}$ non è un insieme finito $\boldsymbol{L}\lceil \ + \ , \ \cdot \ , \ ^* \ , \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rceil$ , in genere, non risulta finitamente generabile. Questo accade per esempio nel caso sia $\boldsymbol{L} = \mathbf{L}_A$.

**C32 a.09** Procediamo ora a dedurre dal sistema di assiomi $CKA_{Ax}$ alcune importanti relazioni; queste relazioni, dato che valgono per ogni CKA, in particolare costituiscono proprietà di $\mathbf{L}_A$, di $\mathbf{R}_A$ e delle collezioni della forma $\boldsymbol{L}\lceil \ + \ , \ \cdot \ , \ ^* \ , \ \emptyset \ , \ \sqcup \ \rceil$.

Alcune delle relazioni che seguono, viste come proprietà delle CKA di linguaggi risultano piuttosto evidenti.

Consideriamo dunque $\mathsf{S} = \langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}, \cdot, {}^{\mathbf{+}}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{CKA}$, mentre con $E$, gli $E_i$, $P$ e $Q$ denotiamo generici elementi di $S$.

**(1) Prop.**: $E^{\mathbf{+}} \ = \ \mathbf{1} + E\,E^{\mathbf{+}} \ = \ \mathbf{1} + E^{\mathbf{+}}\ E$ .

**Dim.**: Discenda da [CKA 12] con $E_1 = E$ ed $E_2 = \mathbf{1}$, oppure con $E_1 = \mathbf{1}$ ed $E_2 = E$ ∎

**(2) Prop.**: $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ E^{\mathbf{+}} = E^{[\mathrm{n}\,)} + E^n\,E^{\mathbf{+}}$ .

**Dim.**: Procediamo per induzione. Per $n = 1$ si riduce alla (1); supponiamo vero l'enunciato $E^{\mathbf{+}} = E^{[\mathrm{n}\,)} + E^n\,E^{\mathbf{+}}$ ; da esso e da (1) segue $E^{\mathbf{+}} = E^{[\mathrm{n}\,)} + E^n(\mathbf{1} + E\,E^{\mathbf{+}}) = E^{[\mathrm{n}\,)} + E^n + E^{n+1}\,E^{\mathbf{+}} = E^{[n+1)} + E^{n+1}\,E^{\mathbf{+}}$ e l'asserto risulta provato ∎

**(3) Prop.**: $(E_1\,E_2)^{\mathbf{+}}\ E_1 \ = \ E_1\,(E_2\,E_1)^{\mathbf{+}}$ .

**Dim.**: $(E_1\,E_2)^{\mathbf{+}}\ E_1 = \llbracket [CKA12] \rrbracket = E_1 + E_1\,(E_2\,E_1)^{\mathbf{+}}\ E_2\,E_1 = \llbracket (1) \rrbracket = E_1(E_2\,E_1)^{\mathbf{+}}$ ∎

**(4) Prop.**: $E\,E^{\mathbf{+}} \ = \ E^{\mathbf{+}}\ E$ .

**Dim.**: Da (3) con $E_1 = E$ e $E_2 = \mathbf{1}$ si ottiene $(E{\cdot}\mathbf{1})^{\mathbf{+}}\ E = E(\mathbf{1}{\cdot}E)^{\mathbf{+}}$ ; questa, in forza di [CKA 5] e [CKA 6], implica $E^{\mathbf{+}}\ E = E\,E^{\mathbf{+}}$ ∎

**C32 a.10** **(1) Prop.**: $\mathbf{0}^{\mathbf{+}} \ = \ \mathbf{1}$ .

**Dim.**: $\mathbf{0}^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket \mathsf{a08}(1) \rrbracket$ con $E = \mathbf{0} \rrbracket = \mathbf{1} + \mathbf{0}\,\mathbf{0}^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket [CKA7], [CKA2] \rrbracket = onSd$ ∎

**(2) Prop.**: $\mathbf{1}^{\mathbf{+}} \ = \ \mathbf{1}$ .

$\mathbf{1} = \llbracket (1) \rrbracket = \mathbf{0}^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket [CKA13] con \mathrm{E} = \mathbf{0} \rrbracket = (\mathbf{0}^{\mathbf{+}})^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket (1) \rrbracket = \mathbf{1}^{\mathbf{+}}$ ∎

**(3) Prop.**: $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$ .

**Dim.**: $\mathbf{1} = \llbracket (2) \rrbracket \ = \mathbf{1}^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket [CKA6] con \mathrm{E}{=}\mathbf{1} \rrbracket \ = (\mathbf{1}{\cdot}\mathbf{1})^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket [CKA12] \rrbracket \ = \mathbf{1} + \mathbf{1}{\cdot}\mathbf{1}^{\mathbf{+}}\,{\cdot}\mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1}^{\mathbf{+}} \ = \llbracket (2) \rrbracket = \mathbf{1} + \mathbf{1}$ ∎

**C32 a.11** **(1) Prop.**: $E + \ E = E$ e quindi $\langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}\ \rangle$ è una banda abeliana.

**Dim.**: $E \ = \ \llbracket [CKA5] \rrbracket \ = \mathbf{1}{\cdot}\ E \llbracket \mathsf{a09}(3) \rrbracket \ = (\mathbf{1} + \mathbf{1}){\cdot}\ E \llbracket [CKA10] \rrbracket \ = \mathbf{1}{\cdot}\ E + \mathbf{1}{\cdot}\ E \ = \ \llbracket [CKA5] \rrbracket \ = E + \ E$ ∎

Si osserva che [CKA 1] e [CKA 3] equivalgono ad asserire che $\langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}\ \rangle$ è un semigruppo abeliano, mentre la proprietà di idempotenza rispetto a $\mathbf{+}$ di tutti gli elementi di $S$ garantisce che $\langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}\ \rangle$ sia una banda abeliana.

**(2) Prop.**: $(\mathbf{1} + E)^{\mathbf{+}} = E^{\mathbf{+}}$ .

**Dim.**: $(\mathbf{1} + E)^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket [CKA11] \rrbracket = (\mathbf{1}^{\mathbf{+}}\ E)^{\mathbf{+}}\ \mathbf{1}^{\mathbf{+}} \ = \ \llbracket \mathsf{a09}(2) \rrbracket = E^{\mathbf{+}}$ ∎

**(3) Prop.**: { [CKA 1]—[CKA 12] } e $\mathsf{a09}(2)$ implicano [CKA 13] .

**Dim.**: [CKA 1]—[CKA 12], $\mathsf{a09}(2)$ implicano (2). Utilizzando (2), [CKA 1], [CKA 11], [CKA 5] e ponendo $E_1 = E$ ed $E_2 = \mathbf{1}$ si ottiene che $E^{\mathbf{+}} = (\mathbf{1} + E)^{\mathbf{+}} = (E + \mathbf{1})^{\mathbf{+}} = (E^{\mathbf{+}}{\cdot}\mathbf{1})^{\mathbf{+}}\ E^{\mathbf{+}} = (E^{\mathbf{+}})^{\mathbf{+}}\ E^{\mathbf{+}}$ . Da { [CKA 1]-[CKA 12] } e $\mathsf{a09}(2)$ seguono (a) ed (g); di conseguenza $E^{\mathbf{+}} \ = \ \mathbf{1} + E^{\mathbf{+}}\ E \ = \ \mathbf{1} + \mathbf{1} + E^{\mathbf{+}}\ E = \mathbf{1} + E^{\mathbf{+}} \ = \mathbf{1} + (E^{\mathbf{+}})^{\mathbf{+}}\ E^{\mathbf{+}} = (E^{\mathbf{+}})^{\mathbf{+}}$ ∎

**(4) Prop.**: { [CKA 1]—[CKA 1 3] } $\iff$ { [CKA 1 ]—[CKA 12] } e $\mathsf{a09}(2)$ .

**Dim.**: Basta osservare che nelle precedenti deduzioni non si è fatto ricorso a [CKA 14] e che a09(2) richiede [CKA 13] ∎

**C32 a.12 (1) Prop.**: $E^{\star}\ E^{\star} = E^{\star}$ .

**Dim.**: a10(2), [CKA 11], [CKA 6] e [CKA 13] implicano che $E^{\star} = (\mathbf{1} + E)^{\star} = (E^{\star})^{\star}\ E^{\star} = E^{\star}\ E^{\star}$ ∎

**(2) Prop.**: $(E_1^{\star}\ E_2)^{\star} = \mathbf{1} + (E_1 + E_2)^{\star}\ E_2$ .

**Dim.**: Utilizzando a08(1) e [CKA 11] si ha che $(E_1^{\star}\ E_2)^{\star} = \mathbf{1} + (E_1^{\star}\ E_2)^{\star}\ E_1^{\star}\ E_2 = \mathbf{1} + (E_1 + E_2)^{\star}\ E_2$ ∎

**(3) Prop.**: $(E_1\, E_2^{\star})^{\star} = \mathbf{1} + E_1(E_1 + E_2)^{\star}$ .

**Dim.**: Da a08(1) e [CKA 11] segue che $(E_1\, E_2^{\star})^{\star} = \mathbf{1} + E_1\, E_2^{\star}\ (E_1\, E_2^{\star})^{\star} = \mathbf{1} + E_1(E_1 + E_2)^{\star}$ ∎

**C32 a.13** Nel seguito denotiamo anche con $P$, $Q$, $F$, $G$ e $F_i$ elementi arbitrari del terreno $S$ della nostra CKA.

**(1) Prop.**: $E = P^{\star}\ Q \implies E = P\, E + Q$ .

**Dim.**: Le uguaglianze a08(1), [CKA 1], [CKA 10] e [CKA 4] implicano $E = P^{\star}\ Q = (P\, P^{\star} + 1)Q = P\, P^{\star}\ Q + Q = P\, E + Q$ ∎

**(2) Prop.**: $E = QP^{\star} \implies E = EP + Q$ .

**Dim.**: Da a08(1) , [CKA 1], [CKA 9] e [CKA 4] segue che $E = Q\, P^{\star} = Q(P^{\star}\ P + \mathbf{1}) = Q\, P^{\star}\ P + Q = E\, P + Q$ ∎

**C32 a.14** Consideriamo $\langle \mathsf{S},\ +, \cdot, ^{\star}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{CKA}$ , la relazione $\leq\ :=\ \{\langle E, F\rangle \in S \times S \,[\!]\, E + F = F\} \in \mathbf{Rel}_S$ ed $E$, $F$, $G$, $E_i$, $F_i \in S$.

**(1) Prop.**: $\leq$ è una relazione d'ordine su $S$.

**Dim.**: Essendo $\langle \mathsf{S},\ + \rangle$ una banda abeliana [a10(1)], presi $E, F, G \in S$ abbiamo $E + E = E \implies E \leq E$; $E \leq F$ e $F \leq E \implies E + F = F = F + E = E$ ; $E \leq F$ e $F \leq G \implies E + F = F$, $F + G = G \implies E + G = E + (F + G) = (E + F) + G = F + G = G \implies E \leq G$. Abbiamo quindi trovato che $\leq$ è riflessiva, simmetrica e transitiva ∎

**(2) Prop.**: $E \leq E + F$ .

**Dim.**: Ricordando a10(1), si trova $E + (E + F) = E + F$ ∎

**(3) Prop.**: $\mathbf{0}$ è il minimo per $\leq$.

**Dim.**: Da [CKA 1] e [CKA 2] discende che $\forall E \in S \,:\, \mathbf{0} + E = E$ ∎

**(4) Prop.**: $E_1 \leq F_1 \ \wedge\ E_2 \leq F_2 \implies E_1 + E_2 \leq F_1 + F_2$ .

**Dim.**: Ricordando [CKA 3] e considerando $E_i \leq F_i$ per $i = 1, 2$, si ha che $E_1 + E_2 + F_1 + F_2 = (E_1 + F_1) + (E_2 + F_2) = F_1 + F_2$ ∎

**(5) Coroll.**: $E \leq F \implies E + G \leq F + G$ .

Si noti che queste proprietà valgono per ogni banda abeliana.

**C32 a.15 (1) Prop.**: $E_1 \leq F_1 \ \wedge\ E_2 \leq F_2 \implies E_1\, E_2 \leq F_1\, F_2$ .

**Dim.**: Da [CKA 9], [CKA 10] e a13(1) segue che $E_1 + F_1 = F_1 \ \wedge\ E_2 + F_2 = F_2 \implies F_1\, F_2 = (E_1 + F_1)\,(E_2 + F_2) = E_1\, E_2 + (E_1\, F_2 + F_1\, E_2) + F_1\, F_2 \implies F_1\, F_2 \geq E_1\, E_2 + (E_1\, F_2 + F_1\, E_2) \implies E_1\, E_2 \leq F_1\, F_2$ ∎

**(2) Coroll.**: $E \leq F \implies E\,G \leq F\,G \ \wedge\ G\,E \leq G\,F$ ∎

**(3) Prop.**: Consideriamo $m, n \in \mathbb{N}$; $m \leq n \implies E^{[m)} \leq E^{[n\ )}$ .

**Dim.**: Segue da a13(2) ∎

**(4) Prop.**: $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ E^{[n\ )} \leq E^{\star}$ .

**Dim.**: Discende da a13(2) e da a13(2) ∎

**(5) Coroll.**: $\mathbf{1} \leq E^{\star}$ ∎

**(6) Prop.**: $E \leq F \implies E^{\star} \leq F^{\star}$ .

**Dim.**: Da (4), (1), [CKA 11] e dalla $E \leq F$ segue che $E^{\star} = \mathbf{1} \cdot E^{\star} \leq (E^{\star}\ F)^{\star}\ E^{\star} = (E + F)^{\star} = F^{\star}$ ∎

Si noti che a13(3), (4),(5) e a14(1),(2),(3) discendono dai soli assiomi { [CKA 1]-[CKA 12] }, mentre la riflessività di $\leq$ e quindi a13(1-2) e a14(4-6) richiedono .72:1.4(h), cioè anche [CKA 13].

**C32 a.16** Consideriamo $\langle \mathsf{S},\ +\ ,\cdot,^{\star}\ ,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle \in \mathbf{CKA}$ ed $a_1, ..., a_n \in S$.
Si dice **espressione razionale negli argomenti** $a_1, ..., a_n$ ogni espressione concernente gli operandi $a_1, ..., a_n$, gli operatori binari $+$ e $\cdot$ el'operatore unario $^{\star}$ .

Chiaramente [a03(a)] si tratta della generalizzazione delle espressioni razionali introdotte in a04 attribuibili alla CKA $\mathbf{Lng}_{CKA;A}$. Per queste particolari espressioni razionali valgono tutte le conseguenze derivabili dagli assiomi di $CKA_{Ax}$ e quindi anche le proprietà ricavate in a08-a14.

Si osserva che gli elementi $a_i$ di $S$ possono essere oggetti ben più elaborato delle lettere dell'alfabeto $\mathbb{A}$, ad esempio linguaggi su un altro alfabeto.
Nel caso di linguaggi, evidentemente, la relazione d'ordine $\leq$ introdotta in a13 si riduce alla relazione di inclusione e molte proprietà dimostrate in a08—a14 sono piuttosto evidenti.

**C32 a.17** Una utile forma canonica per le espressioni razionali si ottiene da quanto segue.

**Prop.** Ogni espressione razionale relativa a una CKA può trasformarsi in una equivalente costituita da una somma (finita) di espressioni nei soli operatori binari $\cdot$ e $+$ .

**Dim.**: Si procede per induzione sulla lunghezza delle espressioni razionali. L'asserto è ovvio per ogni espressione di lunghezza non superiore a 5, cioè di una delle forme $a_i$ , $(a_i^{\star})$, $(a_i + a_j)$ ed $(a_i \cdot a_j)$.
Supponiamolo vero per tutte le espressioni di lunghezza non superiore a un $n > 5$ della forma $E = \sum_{i=1}^{h} E_i$ ed $F = \sum_{j=1}^{k} F_j$ con $E_i, F_j \in \{a_1, ..., a_n\}$ $\left[\cdot,^{\star}\right]$ .
L'asserto chiaramente è vero per $(E + F)$ e per $(E \cdot F) = \sum_{i=1,...,h;j=1,...,k} E_i\,F_j$. Rimane da dimostrarlo per le $(E)^{\star} = (\sum_{i=1}^{h} E_i)^{\star}$ e per questo procediamo per induzione su $h$.
L'asserto è ovvio per $h = 1$, mentre e per $h = 2$ discende da [CKA 11]; supposto vero per $h \geq 2$ si ha, in forza dello stesso [CKA 11],

$$\left(\sum_{i=1}^{h+1} E_i\right)^{\star} = \left[E_{h+1}^{\star}\left(\sum_{i=1}^{h} E_i\right)^{\star}\right]^{\star} {E_{h+1}}^{\star} = \left(\sum_{i=1}^{h} {E_{h+1}}^{\star}\, E_i\right)^{\star} E_{h+1}^{\star}$$
$$= \left\lfloor \left(\sum_{i=1}^{h} E_{h+1}^{\star} E_i\right)^{\star} =: \sum_{l=1}^{m} {E_l}'\right\rfloor = \sum_{l=1}^{m} {E_l}'\, {E_{h+1}}^{\star}$$ ∎

**C32 a.18** Come preannunciato esistono anche CKA finite.

È evidente che si ha una CKA con un solo elemento, $\mathbf{0} = \mathbf{1}$, e una CKA con due elementi, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$, le cui tavole di operazioni, per [CKA 1], [CKA 2], a04(g), [CKA 5], [CKA 6], [CKA 7], [CKA 8], [a04(e)], sono :

$$\begin{array}{ccc} + & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} & {}^{+} & \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{array}$$

**C32 a.19 Prop.** Consideriamo $\mathsf{S} = \langle \mathsf{S}, \mathbf{+}, \cdot, {}^{+}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in_F$ **CKA** e l'operazione binaria simmetrica $\wedge := \lceil \langle E, F \rangle \in S \times S \mapsto \sum \{G \mid G \leq E, F\} \rceil$ . abbiamo allora $\langle \mathsf{S}, \mathbf{+}, \wedge \rangle \in$ **Latt** ▮

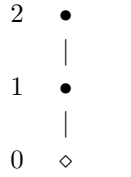
La struttura ternaria precedente si dice **reticolo associato alla CKA** $\mathsf{S}$ e si denota con $\mathsf{S}^{Latt}$.
La tavola di addizione delle CKA finite è determinata dalla struttura del reticolo associato e si ricava abbastanza agevolmente dal corrispondente digrafo.

La tavola per l'operazione ${}^{+}$ , a causa dell'idempotenza di tale operazione [CKA 13], del suo rispetto della relazione $\leq$ [a13(6)] e per la $E \leq E^{+}$ [a13(6)], si ricava dalla indicazione di quali elementi hanno la forma $E^{+}$ e dalla formula $F^{+} = \min\{E^{+} \geq F\}$ .

Le distribuzioni degli $E^{+}$ sono vincolate dalle richieste $\max(S) = E^{+}$ [.11.1.5(i)], $\mathbf{1} = \mathbf{1}^{+}$ [.11.1.4(f)], $\mathbf{0}^{+} \neq \mathbf{0}$ (dovuta alla $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ e alla [.11.1.4(e)]) e dalla relazione $\mathbf{1} \leq E^{+}$ (.11.1.4(i)).

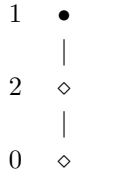
La tavola per la moltiplicazione è vincolata tra l'altro da [CKA 5], [CKA 6], [CKA 7] e [CKA 8] che rendono interessanti solo le operazioni relative ad $E\,F$ con $E, F \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$, da $E^{+}\ E^{+} = E^{+}$ e da $E \leq F \Longrightarrow E\,G \leq F\,G$ , $G\,E \leq GF$ (.11.1.5(g)).

**C32 a.20** Le precedenti considerazioni consentono di individuare le CKA con cardinali 3 e 4.

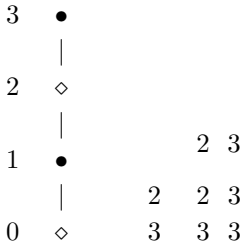


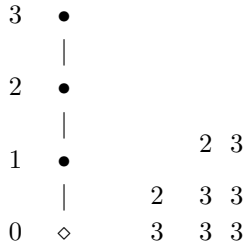
$$\begin{array}{cc} 2 & \bullet \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \qquad 2 \cdot 2 = 2 \qquad\qquad \begin{array}{cc} 1 & \bullet \\ & | \\ 2 & \diamond \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \cdot 2 = 0 \ \text{ e } \ 2 \cdot 2 = 2 \\ \\ (2 \cdot 2 = 1 \ \text{ è in contrasto con } 1 \cdot 2 = 2 \\ \text{e con } 2 < 1 \Longrightarrow 2 \cdot 2 \leq 1 \cdot 2). \end{array}$$

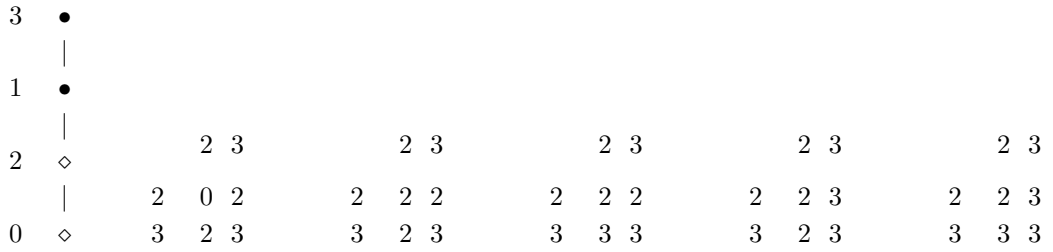
$$\begin{array}{cc} 3 & \bullet \\ & | \\ 2 & \diamond \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} 3 & \bullet \\ & | \\ 2 & \bullet \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

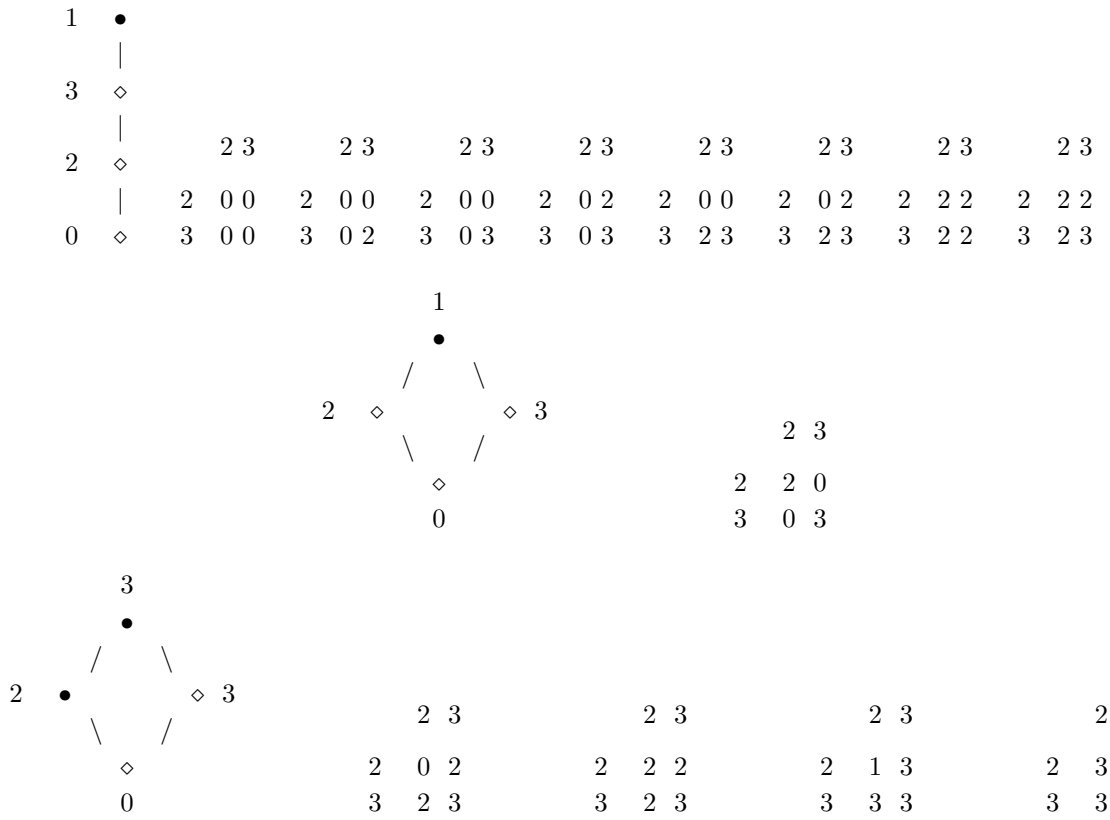


$$\begin{array}{cc} 3 & \bullet \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 2 & \diamond \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$









**C32 a.21** Abbiamo visto che $\mathbf{L}_{\{a_1,...,a_n\}}$ , $\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}} \in$ CKA.
La struttura $\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}}$, essendo ottenibile come $\{a_1, ..., a_n\}\big[\ +\ ,\cdot,^{+}\ \big]$, viene detta **CKA libera finitamente generata** da $a_1, ..., a_n$. I suoi elementi infatti sono forniti dalle espressioni costituite con gli oggetti $a_i$, con gli operatori $+$ , $\cdot$ e $^{+}$ e opportunamente parentizzate (espressioni regolari).

Due espressioni forniscono lo stesso elemento dell' algebra sse si può ricondurre l'una all'altra mediante gli assiomi [CKA 1]—[CKA 14].

**C32 a.22 Prop.** Consideriamo $\{L_1, ..., L_n\} \in \mathbf{L}_A$ . $\{L_1, ..., L_n\}\big[\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^{+}\ \big] \in \mathbf{L}_A$ .
**Dim.:** Chiaramente $\{L_1, ..., L_n\}\big[\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^{+}\ \big] \subseteq \mathbf{L}_A$ ; inoltre, essendo questa collezione chiusa rispetto a $+$ , $\cdot$, e $^{+}$ , deve essere $\{L_1, ..., L_n\}\big[\ +\ ,\ \cdot\ ,\ ^{+}\ \big] \leq_{CKA} \mathbf{L}_A$ ∎
Queste CKA, in generale, non sono libere, nel senso che due espressioni regolari nei linguaggi $L_1$, ..., $L_n$ non riconducibili l'una all'altra applicando i solassiomii, ma a causa di particolari legami tra gli $L_i$, possono individuare lo stesso linguaggio, cioè lo stesso elemento di una CKA.

**C32 a.23** Consideriamo $\mathbf{f} := \langle\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, 2, 3\},\ +\ ,\cdot,^{+}\ ,\mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ , ove:

| $+$ | **0** | **1** | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **1** | 2 | 3 |
| **1** | **1** | **1** | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

,

| $\cdot$ | **0** | **1** | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **1** | 2 | 3 |
| 2 | **0** | 2 | 2 | 3 |
| 3 | **0** | 3 | 3 | 3 |

e

| $^{+}$ | |
|---|---|
| **0** | **1** |
| **1** | **1** |
| 2 | 3 |
| 3 | 3 |

Essa è una CKA finita.

## C32 b. algebre di Kleene standard

**C32 b.01** Si dice **algebra di Kleene standard**, in sigla SKA una struttura $\boldsymbol{S} = \langle S, \sum, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ nella quale $S$ denota un insieme, il terreno della struttura, $\sum \in \lceil S^{\mathfrak{P}} \longmapsto\!\triangleright S \rceil$ , $\cdot \in \lceil S \times S \longmapsto\!\triangleright S \rceil$ e $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in S$, struttura che soddisfa gli assiomi [SKA 1]—[SKA 7] che seguono.

Per formularli assumiamo che i simboli $E_t$, $E_u$, $E_v$, $E_\alpha$ denotino elementi del terreno $S$; inoltre in luogo della scrittura $\{t \in T :| E_t\}, \sum$ o della equivalente $\sum_{,} \{t \in T :| E_t\}$ spesso utilizzero la scrittura $\sum_{t \in T} E_t$ ritenendola più leggibile.

[SKA 1] $\emptyset \sum = \mathbf{0}$ , ossia $\sum_{t \in \emptyset} E_t = \mathbf{0}$ ;

[SKA 2] $\{E_a\} \sum = E_a$ , ossia $\sum_{t \in \{a\}} E_t = E_a$

[SKA 3] $\big\{t \in T :| \{u \in U_t :| E_u\} \sum\big\} \sum \;=\; \big\{E_u | u \in U \{U_t | t \in T\}\big\} \sum$ , ossia

$\sum_{t \in T} (\sum_{u \in U_t} E_u) \;=\; \sum_{u \in (\cup_{t \in T} U_t)} E_u$ (associatività generalizzata di $\sum$)

[SKA 4] $(E_t \cdot E_u) \cdot E_v = E_t \cdot (E_u \cdot E_v)$ (associatività di $\cdot$)

[SKA 5] $\mathbf{1} \cdot E_t = E_t$ ($\mathbf{1}$ neutro a sx rispetto a $\cdot$)

[SKA 6] $E_t \cdot \mathbf{1} = E_t$ ($\mathbf{1}$ neutro a dx rispetto a $\cdot$)

[SKA 7] $(\{E_t | t \in T\} \sum) \cdot (\{E_u | u \in U\} \sum) = \{E_t \cdot E_u | \langle t, u \rangle \in T \times U\} \sum$ cioè

$(\sum_{t \in T} E_t) \cdot (\sum_{u \in U} E_u) = \sum_{\langle t,u \rangle \in T \times U} E_t \cdot E_u$ (distributività generalizzata)

Denotiamo con **SKA** la classe delle SKA e con $SKA_{Ax}$ l'insieme dei precedenti assiomi.

**C32 b.02** Molte formule risultano più leggibili se si sostituiscono le espressioni della forma $\{E_{t_1}, E_{t_2}\} \sum \;=\; \sum_{t \in \{t_1, t_2\}} E_t$ con quelle della forma $E_{t_1} + E_{t_2}$, cioè con le notazioni che si servono della operazione binaria su $S$: $+ \in \lceil S \times S \longmapsto\!\triangleright S \rceil$ utilizzata in posizione infissa.

**(1) Prop.**: $E_t + E_u \;=\; E_u + E_t$ .

**Dim.**: Corrisponde alla uguaglianza $\{t, u\} = \{u, t\}$ ∎

**(2) Prop.**: $E_t + \mathbf{0} = E_t$ .

**Dim.**: Corrisponde alla $\{t\} \cup \emptyset = \{t\}$ ∎

**(3) Prop.**: $(E_t + E_u) + E_v = E_t + (E_u + E_v)$.

**Dim.**: Segue dalla $\{t, u\} \cup \{v\} = \{t\} \cup \{u, v\}$ ∎

In luogo di una espressione della forma $\sum_{t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}} E_t$ spesso risulta più chiaro scrivere $E_{t_1} + E_{t_2} + \ldots + E_{t_n}$ .

Come per altre operazioni binarie chiamate "prodotto" si introducono le potenze naturali degli elementi $E \in S$:

$\forall E \in S \;:\; E^0 := \mathbf{1}$ , $E^1 := E$ , $E^2 := E \cdot E$ , , $\forall n \in \mathbb{N} : E^{n+1} = E^n \cdot E$ .

Inoltre si individuano due operazioni unarie su $S$ ponendo $E^{+} := \sum_{n \in \mathbb{P}} E^n$ e $E^{*} := \sum_{n \in \mathbb{N}} E^n$ .

**C32 b.03** **(1) Prop.**: Consideriamo un insieme $I$, l'ambiente $\mathfrak{P}(I)$ , un sottoinsieme $\mathbf{1}_\odot \in \mathfrak{P}(I)$, un'operazione $\cdot \in \lceil I \times I \longmapsto\!\triangleright \mathfrak{P}(I) \rceil$ e la sua estensione booleana

$$\odot := \lceil \langle I_1, I_2 \rangle \mapsto \bigcup \{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2 :| i_1 \cdot i_2\} \rceil$$

che evidentemente appartiene a $\lceil \mathfrak{P}(I) \times \mathfrak{P}(I) \longmapsto\!\triangleright \mathfrak{P}(I) \rceil$ .

$$\langle \mathfrak{P}(I), \odot, \mathbf{1}_\odot \rangle \in \mathbf{Mnd} \implies \langle \mathfrak{P}(I), \cup, \odot, \emptyset, \mathbf{1}_\odot \rangle \in \mathbf{SKA} \ .$$

**Dim.:** Le componenti del sistema nella tesi soddisfano [SKA 1]—[SKA 3], l'ipotesi implica [SKA 4]—[SKA 6] e per l'operazione $\odot$, essendo estensione booleana, si ha che

$$\forall \{I_t | t \in T\}, \{I_u | u \in U\} \subseteq \mathfrak{P}(I) \quad : \quad (\cup_{t\in T} I_t) \odot (\cup_{u\in U} I_u) = \cup_{t\in T, u\in U} (I_t \odot I_u) \ ,$$

relazione che corrisponde ad [SKA 7] ∎

**(2) Coroll.**: Consideriamo $\langle M, \star, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{Mnd}$ e $\odot := \ ^{\star bool}$. Allora $\langle M^{\mathfrak{P}}, \cup, \odot, \emptyset, \{\mathbf{1}\} \rangle \in \mathbf{SKA}$ .

**Dim.:** La situazione presentata è un caso particolare di quella esposta in (1) ∎

**C32 b.04 Prop.** $\forall A \subset_\varphi \boxplus \ : \ \langle \mathbf{L}_A, \sum, \star, \emptyset, \{ \sqcup \} \rangle \in \mathbf{SKA}$ .

**Dim.:** Infatti $\mathbf{L}_A = \mathfrak{P}(A^\star)$ , $\sum$ denota l'unione di linguaggi e $\star$ l'estensione booleana dell'operazione denotata con lo stesso segno per la quale $\langle A^\star, \star, \sqcup \rangle \in \mathbf{Mnd}$ ∎

Il sistema $\langle \mathbf{L}_A, \sum, \star, \emptyset, \sqcup \rangle$ può essere chiamata **SKA libera finitamente generata dall'alfabeto** $A$; essa più concisamente viene chiamata **SKA dei linguaggi** su $A$.

**C32 b.05 Prop.** $\forall I \in \mathbf{Set} \ : \ \langle \mathfrak{P}(I \times I), \cup, \circ_{lr}, \emptyset, I^{\mathsf{Id}} \rangle \in \mathbf{SKA}$ .

**Dim.:** Basta osservare che

$\circ_{lr\ I\times I} = \left\lceil \langle e,f\rangle\langle f,h\rangle \mapsto \langle e,h\rangle \right\rceil \dot\cup \left\lceil \langle e,f\rangle\langle g,h\rangle \mapsto \emptyset \text{ sse } f \neq g \right\rceil \in \left\lceil (I\times I)\times(I\times I) \longmapsto (I \times I) \cup \{\emptyset\} \right\rceil$ per affermare che $\langle (I\times I)^{\mathfrak{P}}, \circ_{lr}, I^{\mathsf{Id}} \rangle \in \mathbf{Mnd}$ e quindi richiamare b03(2) ∎

La precedente struttura viene chiamata **SKA delle relazioni sull'insieme** $I$.

Consideriamo un qualsiasi $\langle M, \star, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{Mnd}$, introduciamo l'estensione cartesiana dell'operatore $\star$ a $M \times M$ ↘ "$::$"

$$:: \ := \ \left\lceil s,t,u,v \in M \ :| \ \langle \langle s,t\rangle, \langle u,v\rangle \rangle \ \mapsto \ \langle s\star u, t\star v\rangle \right\rceil$$

e denotiamo con $\boxdot$ l'estensione booleana di $::$ , ossia l'operazione per la quale

$$\forall M_1, M_2 \subseteq M \times M \ : \ M_1 \boxdot M_2 \ := \ \{\langle s,t\rangle \in M_1, \langle u,v\rangle \in M_2 \ :| \ \langle s\star u, t\star v\rangle\} \ .$$

**(2) Prop.**: $\langle \mathfrak{P}(M\times M), \cup, \boxdot, \emptyset, \langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle \rangle \in \mathbf{SKA}$ .

**Dim.:** Basta osservare che $\langle M\times M, ::, \langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle \rangle \in \mathbf{Mnd}$ e richiamare b03(2) ∎

La costruzione precedente si generalizza senza difficoltà.

**(3) Prop.**: Consideriamo $\langle M_i, \star_i, \mathbf{1}_i \rangle \in \mathbf{Mnd}$ per $i = 1, ..., n$ ; introduciamo $M = M_1 \times ... \times M_n$ , $\mathbf{1} = \langle \mathbf{1}_1, ..., \mathbf{1}_n \rangle$ , $::$ estensione cartesiana ad $M$ di $\star_1, ..., \star_n$ e $\boxdot := :: \ ^{bool}$ .

Allora $\langle \mathbf{M}, \cup, \boxdot, \emptyset, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{SKA}$ ∎

**C32 b.06 (1) Prop.**: Consideriamo un insieme qualsiasi $I$. $\langle \mathfrak{P}(I), \cup, \cap, \emptyset, I \rangle \in \mathbf{SKA}$ ∎

**(2) Prop.**: Consideriamo un reticolo completo completamente distributivo $L$ e siano $\min(L)$ e $\max(L)$ i suoi estremi.

Allora $\langle L, \vee, \wedge, \min(L), \max(L) \rangle \in \mathbf{SKA}$ ∎

**C32 b.07 Teorema** Consideriamo $\langle S, \sum, \star, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{SKA}$ e le operazioni $+$ (binaria) e $^+$ (unaria) introdotte come in b02. Allora $\langle \mathsf{S}, +, \star, ^+, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{CKA}$ .

**Dim.:** Si tratta di verificare [CKA 1]—[CKA 14] per la SKA data e per questo denotiamo con $E_1, ..., E_i$ arbitrari elementi di $S$.

[CKA 1], [CKA 2] e [CKA 3] si sono visti in b02(1),(2),(3)].

[CKA 4], [CKA 5] e [CKA 6] sono, risp., [SKA 4], [SKA 5] e [SKA 6].

Per [CKA 7]: utilizzando [SKA 1], [SKA 2] e [SKA 7] otteniamo

$$\mathbf{0}\cdot E_i = \sum_{t\in\emptyset} E_t \cdot \sum_{u\in\{i\}} E_u \;=\; \sum_{\langle t,u\rangle\in\emptyset\times\{i\}} E_t \cdot E_u = \sum_{\langle t,u\rangle\in\emptyset} E_t \cdot E_u = \mathbf{0} \;\blacksquare$$

[CKA 8]: Si dimostra come [CKA 7].

[CKA 9]: Utilizzando [SKA 7] si ottiene

$$E_1 \cdot (E_2 + E_3) = \sum_{t\in\{1\}} E_t \cdot \sum_{u\in\{2,3\}} E_u = \sum_{\langle t,u\rangle\in\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}} E_t \cdot E_u = E_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot E_3 \;\blacksquare$$

[CKA 10]: Si dimostra come [CKA 9] $\blacksquare$

[CKA 11]: servendosi di b02, [SKA 7], [CKA 9], [CKA 10] e [SKA 3] si trova che:

$$(E_1 + E_2)^* \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (E_1 + E_2)^n \;=$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0,\dots,n} \sum_{n_0,\dots,n_k\geq 0,\sum_{i=0}^{k} n_i = n-k} E_1^{n_0} E_2 E_1^{n_1} E_2 \cdots E_1^{n_{k-1}} E_2 E_1^{n_k} \;=$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n_0,\dots,n_k\geq 0} (E_1^{n_0} E_2)(E_1^{n_1} E_2)\cdots(E_1^{n_{k-1}} E_2) E_1^{n_k} \;=$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} (E_1^* E_2)(E_1^* E_2)\cdots(E_1^* E_2) E_1^* \;=\; (E_1^* E_2)^* E_1^* \;\blacksquare$$

[CKA 12]: Utilizzando la distributività generalizzata [SKA 7], si ha che:

$$(E_1 \cdot E_2)^* \;=\; \mathbf{1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (E_1 \cdot E_2)^{n+1} \;=\; \mathbf{1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} E_1 \cdot (E_1 \cdot E_2)^n \cdot E_2 \;=$$
$$1 + E_1 \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} (E_2 \cdot E_1)^n \cdot E_2 \;=\; \mathbf{1} + E_1 \cdot (E_2 \cdot E_1)^* \cdot E_2 \;\blacksquare$$

**C32 b.08** Prima di affrontare [CKA 13] e [CKA 14], conviene dimostrare alcune proprietà delle SKA.

**(1) Prop.**: Sia $T$ un qualsiasi insieme nonvuoto: $\sum_{t\in T} E_i = E_i$.

**Dim.**: Posto $U_t = \{i\}$, e utilizzando [SKA3], si ottiene

$$\forall t \in T \;:\; \sum_{t\in T} E_i \;=\; \sum_{t\in T} \sum_{u\in U_t} E_u \;=\; \sum_{u\in(\cup_{t\in T} U_t)} E_u \;=\; \sum_{u\in\{i\}} E_u = E_i \;\blacksquare$$

La proprietà dimostrata si può chiamare idempotenza generalizzata.

In particolare abbiamo $E_i + E_i = E_i$ , $\sum_{i=1,2,\dots,n} E_i = E_i$ , $\sum_{n\in\mathbb{N}} E_i = E_i$ .

**(2) Prop.**: $E_i^* \, E_i^* = E_i^*$ .

**Dim.**: Utilizzando [SKA 7], [SKA 3] ed (1), si trova $E_i^* \cdot E_i^* \;=\; \sum_{\langle m,n\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} {E_i}^{m+n} \;=$

$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{m=0,\dots,k} E_i^{m+(k-n)} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{m=0,\dots,k} E_i^k \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} E_i^k \;=\; E_i^*$ $\blacksquare$

**(3) Prop.**: $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; (E_i^*)^n = E_i^*$ $\blacksquare$

**C32 b.09** Ritorniamo alla verifica degli assiomi delle CKA.

[CKA 13]: Utilizzando b08(3) e b08(1), si ottiene:

$$(E_i^*)^* = \mathbf{1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} {E_i^*}^n = \mathbf{1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} E_i^* = \mathbf{1} + E_i^* = E_i^* \;\blacksquare$$

[CKA 14]: Sia $n \in \mathbb{P}$; poniamo $T := \{0, 1, ..., n-1\}$ e $\forall t \in T \;:\; U_t \;:=\; n \cdot \mathbb{N} + t$ .

Utilizzando anche [SKA 3] ed [SKA 7] otteniamo:

$E_i^* \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} {E_i}^k \;=\; \sum_{k\in(\cup_{t\in T} U_t)} {E_i}^k \;=\; \sum_{t\in T} \sum_{k\in U_t} {E_i}^k \;=\; \sum_{t\in T} \sum_{m\in\mathbb{N}} (E_i^n)^m E_i^t \;=$

$\;\;= \sum_{t\in T} (E_i^n)^* E_i^t \;=\; (E_i^n)^* \sum_{t\in T} E_i^t \;=\; (E_i^n)^* E_i^{[\mathrm{n}\,)}$ $\blacksquare$

**C32 b.10** In termini colloquiali possiamo affermare che ⌈ ogni **SKA** è una **CKA** ⌉ e possiamo enunciare **SKA** $\subseteq$ **CKA** .

Vedremo facilmente che *non vale il viceversa*.

Le SKA sono in effetti strutture assai privilegiate rispetto alle CKA, in quanto sono chiuse rispetto a operazioni del genere somma (in particolare rispetto a unioni) qualsiasi, non solo operazioni binarie

come le CKA. Inoltre tra **SKA** e **CKA** presenteremo un paio di specie di strutture intermedie in termini di possibilità delle composizioni delle quali dispongono.

Ala classe **SKA**, comunque, si possono applicare tutte le considerazioni svolte per **CKA**; tuttavia talune proprietà di **SKA** (per esempio l'idempotenza) si possono trovare più facilmente e in forma più stringente a partire dai propri assiomi.

**C32 b.11** Consideriamo la struttura $\boldsymbol{S} = \langle \mathsf{S}, \sum, \star, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{SKA}$ .
Su $\boldsymbol{S}$, come per ogni CKA, la relazione $\leq \; = \; \{\langle E, F\rangle | E + F = E\}$ è una relazione d'ordine parziale per la quale valgono le proprietà viste in a13 e in a14.

**C32 b.12 (1) Prop.**: $\forall \mathsf{E} \subseteq \mathsf{S} \; : \; \sup(\mathsf{E}) \; = \; \sum_{E \in \mathsf{E}} E \; = \; \sum_{G \in (\cup_{E \in \mathsf{E}} \inf(E))} G$ .

**Dim.**: $E_1 \in \mathsf{E} \Longrightarrow E_1 + \sum_{E \in \mathsf{E}} E \; = \; \sum_{E \in \boldsymbol{E}} E$ e quindi $\sum_{E \in \boldsymbol{E}} E$ è maggiorante di $\mathsf{E}$; se $F$ è un qualsiasi maggiorante di $\mathsf{E}$, $F \geq E$, e utilizzando b02 si ottiene: $F = \sum_{E \in \mathsf{E}} F = \sum_{E \in \boldsymbol{E}} (E + F) = F + \sum_{E \in \mathsf{E}} E \implies F \geq \sum_{E \in \mathsf{E}} E$ e quindi $\sum_{E \in \mathsf{E}} E$ è il minimo maggiorante di $\mathsf{E}$.
Per l'ultima espressione basta considerare che $E = \sum_{G \in \mathsf{Mnrnt}(E)} G$ , in quanto $E \in \mathsf{Mnrnt}(E)$ ∎

**(2) Prop.**: Consideriamo l'insieme dei minoranti di $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{S}$:

$$\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E}) = \{G \in \mathsf{S} \; \big[\!\big] \; \forall E \in \boldsymbol{E} : \; G \leq E\} = \cap_{E \in \boldsymbol{E}} \mathsf{Mnrnt}(E) \; .$$

Allora $\inf(\mathsf{E})) = \sup(\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})) = \sum_{G \in \mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})} G = \sum_{G \in (\cap_{E \in \mathsf{E}} \mathsf{Mnrnt}(E))} (E + G)$ .

**Dim.**: $E \in \mathsf{E}$ e $G \leq E \implies E + \sup(\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})) = \sum_{G \in \mathsf{Mnrnt}(ESs)} {}_{\mathbb{N}} (E + G) = \sum_{G \in \mathsf{Mnrnt}(ESs)} E = E \implies \sup(\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})) \leq E$.
Di conseguenza $\sup(\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})) \in \mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})$ e quindi $\sup(\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E}))$ è il massimo di $\mathsf{Mnrnt}(\mathsf{E})$, ossia è $\inf(\mathsf{E})$ ∎

**C32 b.13 (1) Teorema** $\leq$ è una relazione di ordine associata a un reticolo completo su $\mathsf{S}$.

In tale reticolo il minimo è $\mathbf{0}$, il massimo è $\sum_{E \in \mathsf{S}} E$, la giunzione binaria è fornita da $E \vee F = E + F = \sum_{G \in [\mathsf{Mnrnt}(E) \cup \mathsf{Mnrnt}(F)]} {}_{\mathbb{N}} G$ e l'incontro binario da $E \wedge F = \sum_{G \leq E, F} {}_{\mathbb{N}} G = \sum_{G \in [\mathsf{Mnrnt}(E) \cap \mathsf{Mnrnt}(F)]} {}_{\mathbb{N}} G$ .
**Dim.**: Ogni $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{S}$ possiede supremo (a) e infimo (b); accade inoltre che $\forall E \in \mathsf{S} \; : \; \mathbf{0} \leq E$ ; le altre proprietà sono conseguenza della completezza del reticolo ∎

**(2) Teorema** $\langle \mathsf{S}, \leq \rangle$ è un reticolo booleano, cioè un reticolo complementato e distributivo [B35e]; il complemento di $E \in \mathsf{S}$ è $\overline{E} = \sum \left\{ F \; \big[\!\big] \; \mathsf{Mnrnt}(E) \cap \mathsf{Mnrnt}(F) = \{\mathbf{0}\} \right\}$ .

**C32 b.14 Teorema** Consideriamo $\boldsymbol{S} = \langle \mathsf{S}, ... \rangle \in \mathbf{SKA}$ , $P, Q \in \mathsf{S}$ . l'equazione nella $X$ $X = P\,X + Q$ e l'equazione nella $Y$ $Y = Y\,P + Q$ .
Denotiamo, risp., con $\left[ X = P\,X + Q \right]$ e con $\left[ Y = Y\,P + Q \right]$ i sottoinsiemi di $\mathfrak{P}(\mathsf{S})$ costituiti dalle rispettive soluzioni.

(1) $\min \left[ X = P\,X + Q \right] = P^{\star} \; Q$
(2) $\min \left[ Y = Y\,P + Q \right]) = Q\,P^{\star}$ .

**Dim.**: $P^{\star} \; Q \in \left[ X = P\,X + Q \right]$ , come dimostrato in b14.
$X' \in \left[ X = P\,X + Q \right] \iff X' = PX' + Q \Longrightarrow Q \leq X' \Longrightarrow PQ \leq PX' \leq PX' + Q = X' \Longrightarrow P^2Q \leq PX' \leq PX' + Q = X' \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow P^nQ \leq PX' = PX' + Q = X' \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow P^{\star} \; Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} P^nQ \leq X'$ e quindi (1).

La dimostrazione di (2) è la duale-LR della precedente (2) ∎

**C32 b.15 Prop.** $\min \left[ X = P\,X + \mathbf{1} \right] \; = \; \min \left[ X = X\,P + \mathbf{1} \right] = P^{\star}$ ∎

## C32 c. algebre di Kleene normali e regolari

**C32 c.01** Con riferimento a una $\boldsymbol{S} = \langle \mathsf{S}, \Sigma, \star, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathsf{SKA}$ , diciamo **algebra di Kleene normale** ogni struttura della forma $\boldsymbol{N} = \langle \mathsf{N}, +, \star, ^+, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ , ove $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{S}$ , $+$ è la restrizione a $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ di $\Sigma$ , $^+$ è la chiusura-star di $+$ e $\star$ su $\mathsf{S}$ e accade che $\mathsf{N} \in [\, +, \star^+ \,]$ .

Il termine "algebra di Kleene normale" si abbrevia con NKA.

La classe delle NKA relative alle SKA la denotiamo con **NKA**.

Osserviamo che a ogni $\boldsymbol{S} \in \mathsf{SKA}$ è associata la NKA

$$\langle \mathsf{S}, \textstyle\sum |_{\mathsf{S}\times\mathsf{S}}, \star, \ulcorner E \in \mathsf{S} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} E^{\star n} \urcorner, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \ ,$$

ove si definisce $E^{\star 0} := \mathbf{1}$ .

**C32 c.02** Si dice **algebra di Kleene regolare**, in breve RKA, ogni struttura $\boldsymbol{R} := \langle \mathsf{N}, +, \star, ^+, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ che soddisfa tutte le proprietà valide universalmente in tutte le SKA (e quindi valide in tutte le NKA).

Conviene precisare i ruoli delle componenti di ogni RKA $\boldsymbol{R}$:

$+$ costituisce la somma, cioè una operazione binaria di monoide abeliano;

$\star$ svolge il ruolo di prodotto, ossia di una operazione binaria di monoide;

$^+$ fa da chiusura-star, operazione unaria ampliante e idempotente;

$\mathbf{0}$ è l'elemento neutro rispetto alla somma;

$\mathbf{1}$ fa da elemento neutro bilatero per il prodotto.

La classe delle RKA la denotiamo con **RKA**.

**C32 c.03** **Teorema** $\mathsf{SKA} \subset \mathsf{NKA} \subset \mathsf{RKA} \subset \mathsf{CKA}$ .

**Dim.:** Nell'ambito di una SKA $\boldsymbol{S}$, in genere, si possono individuare delle NKA diverse da quella segnalata in c01 scegliendo opportuni terreni: preso un $\mathsf{T} \subseteq \mathsf{S}$, si individua il corrispondente $\mathsf{N} := \mathsf{T}[\, +, \star, ^+ \,]$. Se risulta NS si riottiene la NKA prevista in c01 che con abuso veniale si può pensare elemento di **SKA**, se invece $\mathsf{N} \subset \mathsf{S}$ si ha una NKA non collocabile in **SKA**. Di conseguenza $\mathsf{SKA} \subseteq \mathsf{NKA}$ .
Che in effetti sia $\mathsf{SKA} \subset \mathsf{NKA}$ discende dal fatto che $\mathbf{R}_{\{a_1,\ldots,a_n\}} = \{a_1, \ldots, a_n\}[\, +, \star, ^+ \,] \in \mathsf{NKA} \setminus \mathsf{SKA}$ , fatto evidente quando si consideri che $\mathbf{R}_{\{a_1,\ldots,a_n\}} \subset \mathbf{L}_{\{a_1,\ldots,a_n\}} \in \mathsf{SKA}$ e che $\mathbf{R}_{\{a_1,\ldots,a_n\}}[\, \textstyle\sum \,] = \mathbf{L}_{\{a_1,\ldots,a_n\}}$ ∎

In ogni NKA valgono tutte le proprietà universalmente valide in tutte le SKA: quindi $\mathsf{NKA} \subseteq \mathsf{RKA}$.
Le considerazioni svolte in b07 possono considerarsi come la verifica della validità per una RKA degli assiomi [CKA 1]—[CKA 14] della specie CKA: quindi possiamo affermare $\mathsf{RKA} \subseteq \mathsf{CKA}$ ∎

Si può mostrare inoltre (*Conway (1971)* p. 102) che per la CKA finita $\mathbf{f}$ introdotta in a23 si ha $f \in \mathsf{RKA} \setminus \mathsf{NKA}$ e che (*Conway (1971)* p. 118) dagli assiomi per **CKA** non si possono ricavare gli assiomi per **RKA**.
Questo consente di affermare $\mathsf{RKA} \subset \mathsf{CKA}$ ∎

**C32 c.04** Per ogni RKA e per ogni NKA, come per ogni SKA, valgono tutte le proprietà ricavate in b07 per le CKA.
Per le RKA e le NKA valgono inoltre le relazioni riguardanti le operazioni $+, \star$ e $^+$ ottenute nell'ambito delle SKA in b02—b10

$\mathbf{R}_{\{a_1,\ldots,a_n\}} \in \mathsf{NKA} \setminus \mathsf{SKA}$, giustifica la denominazione di NKA libera finitamente generata da $a_1, \ldots, a_n$ per la collezione $\mathbf{R}_{\{a_1,\ldots,a_n\}}$. Si noti che

$$\forall L_1, ..., L_m \in \mathbf{L}_A \ : \ \{L_1, ..., L_m\}\left[\ \mathsf{+}\ , \cdot, {}^{\mathsf{+}}\ \right] \in \mathsf{NKA} \ \text{ e che } \ \{L_1, ..., L_m\}\left[\ \mathsf{+}\ , \cdot, {}^{\mathsf{+}}\ \right] \ \leq_{NKA} \in \ \mathbf{L}_A \ .$$

Queste considerazioni, a causa di c03, precisano alcune cose esposte in a08.

## C32 d. matrici su algebre di Kleene standard e regolari

**C32 d.01** Consideriamo $\mathsf{S} = \langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot}, {}^{\boldsymbol{\star}}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{SKA}$ e due insiemi non vuoti $I$ e $J$ e, come per altre specie di strutture, denotiamo con $\mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}$ l'insieme della matrici di profilo $I \times J$, cioè con le righe indicizzate da $I$ e le colonne da $J$, e con le entrate in $\mathsf{S}$:

$$\mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}} \ := \ \lceil\!\lceil\ I \times J \longmapsto \mathsf{S}\ \rceil\!\rceil \ .$$

Una sua sottocollezione particolare raccoglie le matrici di profilo $I \times J$ le cui entrate sono linguaggi su un alfabeto $A$; questa sottocollezione viene denotata con $\mathbf{Mat}_{I,J;\mathbf{L}_A}$.

Definiamo come **matrice nulla** di $\mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}$ $\mathbf{0}_{(I,J)} := [i \in I, j \in J :| \mathbf{0}]$ e come sommatoria su $\mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}$ l'operazione $\sum^{(I,J)} \in \lceil\!\lceil\ \mathfrak{P}(\mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}) \longmapsto \mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}\ \rceil\!\rceil$ .

Consideriamo inoltre l'insieme di indici $T$ e la famiglia di matrici $\{\forall t \in T \ : \ M^{(t)}, \}$, ove per ogni $t \in T$ scriviamo $M^{(t)} =: [i \in I, j \in J :| M^{(t)}{}_{i,j}] \in \mathbf{Mat}_{i,j;\mathsf{S}}$ .

Per essa abbiamo

$$\sum_{t \in T}^{(I,J)} M^{(t)} \ = \ [i \in I, j \in J :| \sum_{t \in T} M^{(t)}{}_{i,j}\ ] \ .$$

**C32 d.02** **(1) Prop.**: $\sum^{(I,J)}{}_{t \in \emptyset}\ M^{(t)} \ = \ {}_{(I,J)}\mathbf{0}$ . **Dim.**: Discende da [SKA 1] ∎

**(2) Prop.**: ${}_{(I,J)}\sum_{t \in \{a\}} M^{(t)} \ = \ M^{(a)}$ . **Dim.**: Discende da [SKA 2] ∎

**(3) Prop.**: Consideriamo la collezione di insiemi $\{t \in T :| U_t\}$.
$\sum^{(I,J)}{}_{t \in T} \left( \sum^{(I,J)}{}_{u \in U_t} M^{(u)} \right) \ = \ \sum^{(I,J)}{}_{u \in (\cup_{t \in T} U_t)} M^{(u)}$ .
**Dim.**: Discende da [SKA 3] ∎

In genere, per migliore leggibilità, a una scrittura della forma $\sum^{(I,J)}{}_{t \in \{t_1, t_2\}}\ M^{(t)}$ preferiremo la scrittura $M^{(t_1)}\ \mathbf{+}_{(I,J)}\ M^{(t_2)}$ .

**(4) Prop.**: $\langle\ \mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}\ ,\ \mathbf{+}_{(I,J)}\ ,\ \mathbf{0}_{(I,J)}\ \rangle \in \mathbf{MndAb}$ ∎

**C32 d.03** Definiamo come **prodotto di due matrici conformabili** appartenenti, risp., a $\mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}$ e a $\mathbf{Mat}_{J,K;\mathsf{S}}$ l'operazione

$$\boldsymbol{\cdot}_{(I,J,K)} \ \in \ \lceil\!\lceil\ \mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}} \times \mathbf{Mat}_{J,K;\mathsf{S}} \longmapsto \mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}\ \rceil\!\rceil$$

la quale applicata ad $M = [\ i \in I, j \in J :|\ M_{i,j}\ ] \in \mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}$ e ad
$N = [\ j \in J, k \in K :|\ N_{j,k}\ ] \in \mathbf{Mat}_{J,K;\mathsf{S}}$ fornisce la matrice di $\mathbf{Mat}_{I,K;\mathsf{S}}$ espressa da

$$M \boldsymbol{\cdot}_{(I,J,K)} N \ := \ [\ i \in I, k \in K :|\ \textstyle\sum_{j \in J} M_{i,j} \boldsymbol{\cdot} N_{j,k}\ ] \ .$$

Definiamo come **matrice unità** di $\mathbf{Mat}_{I,I;\mathsf{S}}$ la matrice quadrata $\mathbf{1}_{(I,I)} := [i \in I, j \in J :| u_{i,j}]$ , ove

$$\forall i \in I, j \in J \ \ : \ \ u_{i,j} \ = \ \begin{cases} \mathbf{0} & \text{sse } i \neq j \\ \mathbf{1} & \text{sse } i = j \end{cases} \ .$$

**(1) Prop.**: $\forall M \in \mathbf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}\ ,\ N \in \mathbf{Mat}_{J,K;\mathsf{S}}\ ,\ P \in \mathbf{Mat}_{K,L;\mathsf{S}}$ :

$$(M \boldsymbol{\cdot}_{(I,J,K)} N) \boldsymbol{\cdot}_{(J,K,L)} P \ = \ M \boldsymbol{\cdot}_{(I,J,K)} (N \boldsymbol{\cdot}_{(J,K,L)} P) \ .$$

**Dim.**: In forza di [SKA 7] e [SKA 4] abbiamo:

$$\forall i \in I, k \in K \ : \ \left[\ \textstyle\sum_{j \in J} M_{i,j} \boldsymbol{\cdot} N_{j,k}\ \right] \boldsymbol{\cdot}_{(J,K,L)} \left[k \in K, l \in L :| P_{k,l}\right] \ =$$
$$= \ \left[ \textstyle\sum_{k \in K} \left( (\sum_{j \in J} M_{ij} \boldsymbol{\cdot} N_{jk}) \boldsymbol{\cdot} P_{kl} \right) | i \in I, l \in L \right] \ =$$

$$= \left[\sum_{\langle j,k\rangle\in J\times K} M_{ij} \cdot (N_{jk} \cdot P_{kl}) | i\in I, l\in L\right] =$$
$$= \left[M_{ij} \mid i\in I, j\in J\right] \cdot_{(IJK)} \left[\sum_{k\in K} N_{jk} \cdot P_{kl} | j\in J, l\in L\right] \blacksquare$$

**C32 d.04 Prop.** $\forall M\in \mathsf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}} : \mathbf{1}_{(I,I)} \cdot_{(I,I,J)} M = M$ e $M \cdot_{(I,J,J)} \mathbf{1}_{(I,I)} = M$.

**Dim.:** Segue subito da [SKA 5], [SKA 6], [CKA 7] e [CKA 8] come visto in [.11.2.4] e [.11.2.2(b)] $\blacksquare$

**C32 d.05 Prop.** $\langle \mathsf{Mat}_{I,I} , \cdot_{(I,I,I)} , \mathbf{1}_{(I,I)}\rangle \in \mathsf{Mnd}$ .

**Dim.:** Segue da d03(1) e d04 $\blacksquare$

**C32 d.06 Prop.** Consideriamo $\forall t\in T : M^{(t)} \subseteq \mathsf{Mat}_{I,J;\mathsf{S}}$ e $\forall u\in U : N^{(u)} \subseteq \mathsf{Mat}_{J,K;\mathsf{S}}$ .
$\left(\sum^{(I,J)}{}_{t\in T} M^{(t)}\right) \cdot_{(I,J,K)} \left(\sum^{(J,K)}_{u\in U} N^{(u)}\right) = \sum^{(I,K)}{}_{\langle t,u\rangle\in T\times U} M^{(t)} \cdot_{(I,J,K)} N^{(u)}$ .

**Dim.:** Utilizzando [SKA 7] e [SKA 3], si ottiene:

$$\left[\sum_{t\in T} M^{(t)}{}_{i,j} \,|:\, i\in I, j\in J\right] \cdot_{(I,J,K)} \left[\sum_{u\in U} \left(j\in J, k\in K :| N^{(u)}{}_{j,k}\right)\right] =$$
$$= \left[\sum_{j\in J} \left(\sum_{t\in T} M^{(t)}{}_{i,j}\right) \cdot \left(\sum_{u\in U} \left(i\in I, k\in K :| N^{(u)}{}_{j,k}\right)\right)\right] =$$
$$= \left[\sum_{j\in J} \left(\sum_{\langle t,u\rangle\in T\times U} M^{(t)}_{i,j} \cdot N^{(u)}{}_{jk}\right) \,\middle|\, i\in I, k\in K\right] =$$
$$= \left[\sum_{\langle t,u\rangle\in T\times U} \left(\sum_{j\in J} M^{(t)}{}_{i,j} \cdot N^{(u)}{}_{j,k}\right) \,\middle|\, i\in I, k\in K\right] =$$
$$= \sum^{(J,K)}{}_{\langle t,u\rangle\in T\times U} \left[\sum_{j\in J} M^{(t)}{}_{i,j} \cdot N^{(u)}{}_{j,k} \,\middle|\, i\in I, k\in K\right] \blacksquare$$

**C32 d.07** $\left\langle \mathsf{Mat}_{(I,I)} , \mathbf{+}_{(I,I)} , \cdot_{(I,I,I)} , \mathbf{0}_{(I,I)} , \mathbf{1}_{(I,I)}\right\rangle \in \mathsf{Srngu}$ .

**Dim.:** Sda [.11.4.1(d)], (c) e (d) $\blacksquare$

**C32 d.08 Teorema** Consideriamo la struttura $\mathsf{S}\in\mathsf{SKA}$ e un insieme di indici $I$.

$$\left\langle \mathsf{Mat}_{I,I;\mathsf{S}} , \sum , \cdot_{(I,I,I)} , \mathbf{0}_{(I,I)} , \mathbf{1}_{(I,I)}\right\rangle \in \mathsf{SKA} .$$

**Dim.:** Gli enunciati [SKA 1]—[SKA 7], si ottegono raggruppando i risultati ottenuti in [.11.4.1(a),(b),(c)] e [.11.4.2(a),(b),(d)] $\blacksquare$

**C32 d.09** In particolare sono terreni di altre SKA

$\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{S}}$, insieme delle matrici $n\times n$ con entrate in $\boldsymbol{S}\in\mathsf{SKA}$ e

$\mathsf{Mat}_{I,I;\mathbf{L}_A}$, insieme delle matrici quadrate qualsiasi (finite o infinite) di linguaggi sull'alfabeto $A$.

A queste matrici si applicano tutte le considerazioni generali sulle SKA. In particolare questi insiemi di matrici costituiscono NKA, RKA e CKA; per esse si possono definire le operazioni $\mathbf{+}$ e $^*$ e la relazione $\leq$; per esse valgono le formule dimostrate in [.11.1] e [.11.2.6(a)] che interessano soprattutto nelle forme che seguono.

**C32 d.10 Prop.** Consideriamo $A\subset_\varphi \boxplus$ , $n\in\mathbb{N}$ , $P,Q\in\mathsf{Mat}_{n,n;\mathbf{L}_A}$.
Le equazioni matriciali $X = PX \mathbf{+} Q$ e $Y = YP \mathbf{+} Q$ ammettono le soluzioni minime $P^* Q$ e $QP^*$ .

**C32 d.11 Prop.** Consideriamo $\boldsymbol{S}\in\mathsf{SKA}$, $n\in\mathbb{N}$, $P\in\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{S}}$, $R\in\mathsf{Mat}_{1,n;\boldsymbol{S}}$, $S\in\mathsf{Mat}_{n,1}$ e le equazioni: $Z = P\,Z \mathbf{+} R$ nella incognita $Z\in\mathsf{Mat}_{n,1;\boldsymbol{S}}$ ,

$W = W\,P + S$ nella incognita $Z \in \mathbf{Mat}_{1,n;\boldsymbol{S}}$ .
Tali equazioni ammettono le soluzioni minime $Z = P^*\,R$ e $W = SP^*$ ∎

**Dim.**: Ci si riconduce al caso visto in (d10 assumendo come $Q$, risp., la matrice aventi $n$ colonne coincidenti con $R$ ed $n$ righe coincidenti con $S$.
Le soluzioni minime $X$ e $Y$ presentano, risp., $n$ colonne uguali a $P^*\,R$ ed $n$ righe uguali a $SP^*$ .
Queste forniscono la $Z$ e la $W$ richieste ∎

**C32 d.12 Prop.** Consideriamo $\boldsymbol{S} \in \mathbf{SKA}$, gli insiemi di indici $I, J$, $K := I \dot\cup J$, $A \in \mathbf{Mat}_{I,I;\boldsymbol{S}}$, $B \in \mathbf{Mat}_{I,J;\boldsymbol{S}}, C \in \mathbf{Mat}_{J,I;\boldsymbol{S}}, D \in \mathbf{Mat}_{J,J;\boldsymbol{S}}$ ed $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *in* $\mathbf{Mat}_{K,K;\boldsymbol{S}}$ .

In queste circostanze $M^* = \begin{bmatrix} (A + B\,D^*\,C)^* & A^*\,B(D + C\,A^*\,B)^* \\ D^*\,C(A + B\,D^*\,C)^* & (D + C\,A^*\,B)^* \end{bmatrix}$ .

**Dim.**: Poniamo $M^* := \mathbf{1}_{(K,K)} + M + M^2 + \cdots =: \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ e in forza di [.11.1.4(a)] si ha:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(I,I)} & \mathbf{0}_{(I,J)} \\ \mathbf{0}_{(J,I)} & \mathbf{1}_{(J,J)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} .$$

e quindi gli enunciati:
(a) := $\ulcorner E = \mathbf{1}_{(II)} + A\,E + B\,G \urcorner$ ;
(b) := $\ulcorner F = A\,F + B\,H \urcorner$ ;
(c) := $\ulcorner G = C\,E + D\,G \urcorner$ ;
(d) := $\ulcorner H = \mathbf{1}_{(JJ)} + C\,F + D\,H \urcorner$ .

(b) $\Longrightarrow$ .11.4.3(c) $\Longrightarrow F \geq A^*\,B\,H \Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow H \geq \mathbf{1} + C\,A^*\,B\,H + D\,H \Longrightarrow$
$H \geq \mathbf{1} + (C\,A^*\,B + D\,H \geq \mathbf{1} + (C\,A^*\,B + D) + (C\,A^*\,B + D)^2 H \geq \cdots \Longrightarrow M \geq (C\,A^*\,B + D)^*$ .
Introduciamo (e) := $\ulcorner M \geq (C\,A^*\,B + D)^* \urcorner$ .
(c) $\Longrightarrow$ .11.4.3(c) $\Longrightarrow G \geq D^*\,C\,E \Longrightarrow$ (a) $\Longrightarrow E \geq \mathbf{1} + A\,E + B\,D^*\,C\,E \Longrightarrow$
$E \geq \mathbf{1} + (A + D^*\,C)\,E \geq \mathbf{1} + (A + B\,D^*\,C) + (A + B\,D^*\,C)^2 E \geq \cdots \Longrightarrow E \geq (A + B\,D^*\,C)^*$ .
Introduciamo (f) := $\ulcorner E \geq (A + B\,D^*\,C)^* \urcorner$ .
(b), (e) $\Longrightarrow$ $\ulcorner F \geq A^*\,B(C\,A^*\,B + D)^* \urcorner$ =: (g) .
(c), (f) $\Longrightarrow$ $\ulcorner G \geq D^*\,C(A + B\,D^*\,C)^* \urcorner$ =: (h) .

Si verifica poi che gli enunciati (a), (b), (c) e (d) sono soddisfatte dai secondi membri ddegli enunciati (f), (g), (h) ed (e), cioè che :
$(A + B\,D^*\,C)^* = \mathbf{1} + A(A + B\,D^*\,C)^* + D^*\,C(A + B\,D^*\,C)^*$ ;
$A^*\,B(C\,A^*\,B + D)^* = A\,A^*\,B(C\,A^*\,B + D)^* + B(C\,A^*\,B + D)^*$ ;
$D^*\,C(A + B\,D^*\,C)^* = C(A + B\,D^*\,C)^* + D\,D^*\,C(A + B\,D^*\,C)^*$ ;
$(C\,A^*\,B + D)^* = \mathbf{1} + C\,A^*\,B(C\,A^*\,B + D)^* + (C\,A^*\,B + D)^*$ .
Queste relazioni portano alla formula data per $M^*$ ∎

**C32 d.13 Coroll.**: Come sopra consideriamo ancora $A \in \mathbf{Mat}_{I,I;\boldsymbol{S}}$ , $B \in \mathbf{Mat}_{I,J;\boldsymbol{S}}$ , $C \in \mathbf{Mat}_{J,I;\boldsymbol{S}}$ e $D \in \mathbf{Mat}_{J,J;\boldsymbol{S}}$ .

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^*\,B\,D^*\,C)^*\,A^* & (A^*\,B\,D^*\,C)^*\,A^*\,B\,D^* \\ (D^*\,C\,A^*\,B)^*\,D^*\,C\,A^* & (D^*\,C\,A^*\,B)^*\,D^* \end{bmatrix} .$$

**Dim.**: L'uguaglianza segue da d12 e da [CKA 11] ed è valida, come ogni altra relazione per le CKA, per ogni espressione regolare c ostituita con matrici conformabili su una SKA ∎

**C32 d.14 Coroll.**: Consideriamo $\boldsymbol{S} \in \mathsf{SKA}$, $n \in \mathbb{N}$ ed $M \in \mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{S}}$ .
Le entrate di $M^{\star}$ sono elementi del terreno di $\boldsymbol{S}$ dati da espressioni regolari nelle entrate di $M$.

**Dim.:** La cosa è ovvia per $n = 1$; la 12 nel caso in cui $I$, $J$ e $K$ sono insiemi finiti che fornisce la formula che consente di passare da $\mathsf{Mat}_{m,m;\boldsymbol{S}}$ e $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{S}}$ ad $\mathsf{Mat}_{m+n,m+n;\boldsymbol{S}}$ ∎

**C32 d.15 Prop.** Consideriamo $\boldsymbol{N} \in \mathsf{NKA}$ ed $n \in \mathbb{N}$ . $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{N}} \in \mathsf{NKA}$.

**Dim.:** Consideriamo $\boldsymbol{S} \in \mathsf{SKA}$ tale che $\boldsymbol{N} \leq_{NKA} \boldsymbol{S}$ e $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{S}}$ . Evidentemente $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{N}} \subseteq \mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{S}} \in \mathsf{CKA}$ ed $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{N}}[+,\star] = \mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{N}} \Longrightarrow$ .11.4.4(c) $\Longrightarrow \mathsf{Mat}^{\star}_{n,n;\boldsymbol{N}}[^{\star}] == \mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{N}}$ e quindi segue l'asserto ∎

**C32 d.16 Prop.** $\forall A \subset_{\varphi} \boxminus$ , $n \in \mathbb{N}$ : $\mathsf{Mat}_{n,n;\mathbf{R}_A} \in \mathsf{NKA}$.

**Dim.:** Consideriamo $\boldsymbol{C} = \langle \mathsf{C}, +, \star, ^{\star}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathsf{CKA}$, $n \in \mathbb{N}$ ed $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{C}}$ . Su $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{C}}$ definiamo la somma e il prodotto nel modo usuale: se $M = [M_{i,j} \mid : i,j = 1,...,n]$ ed $N = [N_{i,j} \mid : i,j = 1,...,n]$ si assume $M + N = [M_{i,j} + N_{i,j} \mid : i,j = 1,...,n]$ ed $M \star N = [\sum_{j=1}^{n} M_{ij} N_{jk} \mid : i,k = 1,...,n]$.
Inoltre definiamo la chiusura $^{\star}$ induttivamente su $n$ servendoci della formula data da [.11.4.4(a)] o equivalentemente da quella data da [.11.4.4(b)] ∎

**C32 d.17 Prop.** Consideriamo $\boldsymbol{R} \in \mathsf{RKA}$ ed $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{R}} \in \mathsf{RKA}$ .

**Dim.:** Interpretando ogni uguaglianza riguardante elementi di $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{R}}$ come $n^2$ uguaglianze tra le loro entrate, si constata che queste uguaglianze sono valide in ogni SKA e che quindi l'uguaglianza di partenza vale per tutte le algebre $\mathsf{Mat}_{n,n;R'}$ con qualsiasi $R' \in \mathsf{RKA}$ ∎

**C32 d.18** Consideriamo $\boldsymbol{C} \in \mathsf{CKA}$ ed $n \in \mathbb{N}$. $\mathsf{Mat}_{n,n;\boldsymbol{C}} \in \mathsf{CKA}$ .

**Dim.:** Sviluppata in [Conway (1971) pp. 110-115] ∎

## C32 e. composizioni guidate da linguaggi

**C32 e.01** Consideriamo $X = \{x_1, ..., x_k\} \subset_\varphi \boxplus$ , $L \in \mathbf{Lng}_X$ e l'algebra $\boldsymbol{S} = \left\langle \mathsf{S},\ \mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \right\rangle \in \mathbf{SKA}$.

Per ogni $k \in \mathbb{P}$ diciamo **funzione guidata dal linguaggio** $\mathsf{L}$ e ridotta a $\mathsf{S}^{\times k}$ la funzione $k$-variata:

$$\mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathsf{S}^{\times k}} := \left\lceil \langle E_1, ..., E_k\rangle \in S^{\times k} \ \mapsto \sum_{x_{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot x_{\alpha_n} \in \mathsf{L}} (E_{\alpha_1} \boldsymbol{\cdot} \cdots \boldsymbol{\cdot} E_{\alpha_n}) \right\rceil \in \left\lceil \mathsf{S}^{\times k} \longmapsto\!\triangleright \mathsf{S} \right\rceil .$$

Diciamo funzione guidata dal linguaggio $\mathsf{L}$ avente come dominio $S^{\otimes} := \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{P}} S^{\times k}$ l'unione funzionale relativa ai $k \in \mathbb{P}$ delle precedenti funzioni ridotte

$$\mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathsf{S}^{\otimes}} := \vec{\bigcup}_{k\in\mathbb{P}} \mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathsf{S}^{\times k}} \in \left\lceil \mathsf{S}^{\otimes} \longmapsto\!\triangleright \mathsf{S} \right\rceil .$$

Diciamo **funzione guidata** da $\mathsf{L}$ agente sulle SKA la collezione delle funzioni precedenti esteso a tutte le possibili SKA

$$\mathsf{L}^{\mathsf{DRV}} := \dot{\bigcup}_{\boldsymbol{S}=\langle \mathsf{S},...\rangle \in \mathbf{SKA}} \mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathsf{S}^{\otimes}} \in \mathring{\bigcup}_{\mathsf{S}=\langle \mathsf{S},...\rangle \in \mathbf{SKA}} \left\lceil \mathsf{S}^{\otimes} \longmapsto\!\triangleright S \right\rceil .$$

**C32 e.02** Si noti che dalle diverse espressioni che possono individuare fornire $L$ si ottiene una sola $L^{\mathsf{DRV}}$: infatti queste espressioni si riconducono una all'altra in conseguenza degli assiomi [SKA 1]—[SKA 7] validi in ogni SKA.

Si noti che su $L^{\mathsf{DRV}}$ non influisce l'alfabeto $X$, ma solo $|X|$; in altre parole, se $L' \in \mathbf{L}_Y$, con $|Y| = |X|$ è il linguaggio ottenuto associando biunivocamente i simboli di $Y$ a quelli di $X$ e sostituendoli in $L$, abbiamo $L^{\mathsf{DRV}} = L'^{\mathsf{DRV}}$ .
In altre parole per la determinazione di $L^{\mathsf{DRV}}$, non conta tanto stabilire che il linguaggio $L$ appartiene ad un $\mathbf{L}_X$, quanto trovare $L \in \mathbf{L}_k$ per un determinato $k \in \mathbb{P}$.

**C32 e.03** Per presentare l'azione di una $L^{\mathsf{DRV}}$ su alcuni particolari generi di SKA conviene usare notazioni più specifiche.
Così con $L^{\mathsf{DRV}.L}$ denotiamo la restrizione di $L^{\mathsf{DRV}}$ alle SKA di linguaggi, cioè poniamo

$$L^{\mathsf{DRV}.L} := L^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathbf{L}^{\otimes}} \in \left\lceil \mathbf{L}^{\otimes} \longmapsto\!\triangleright \mathbf{L} \right\rceil .$$

Useremo invece $L^{\mathsf{DRVc}}$ ed $L^{\mathsf{DRVb}}$ per denotare, risp., la restrizione di $L^{\mathsf{DRV}}$ alle algebre-c e alle algebre-b di operatori unitivi sui linguaggi, cioè definiamo

$$L^{\mathsf{DRVc}} := L^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathbf{L}^{\mathbf{SKAc}^{\otimes}}} \qquad \text{e} \qquad L^{\mathsf{DRVb}} := L^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathbf{L}^{SKAb^{\otimes}}} .$$

**C32 e.04** Talora interessano classi di funzioni guidate dedotte da classi specifiche di linguaggi $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{L}$; per tali entità scriveremo $\mathbf{X}^{\mathsf{DRV}} := \{\mathsf{L} \in \mathbf{X} :|\ \mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}\}$ , $\mathbf{X}^{\mathsf{DRV}.Lng} := \{\mathsf{L} \in \mathbf{X} :|\ \mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathbf{Lng}}\}$ , $\mathbf{X}^{\mathsf{DRVc}} := \{\mathsf{L} \in \mathbf{X} :|\ \mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathbf{L}^{\mathbf{SKAc}}}\}$ e $\mathbf{X}^{\mathsf{DRVb}} := \{\mathsf{L} \in \mathbf{X} :|\ \mathsf{L}^{\mathsf{DRV}}{\restriction}_{\mathbf{L}^{\mathbf{SKAb}}}\}$ .
Per esempio potrebbero interessare $\mathbf{L}_x{}^{\mathsf{DRV}} := \mathbf{L}_{\{x\}}{}^{\mathsf{DRV}}$ , $\mathbf{P}_x{}^{\mathsf{DRV}.Lng}$ , $\mathbf{R}_{\{x,y\}}{}^{\mathsf{DRVc}}$ , $\mathbf{F}_{\{a,b,c\}}{}^{\mathsf{DRVb}}$ ,
$\mathbf{L}_3{}^{\mathsf{DRV}}$ (più generico) , $\mathbf{P}_k{}^{\mathsf{DRV}.Lng}$ , $\mathbf{R}_k{}^{\mathsf{DRVc}}$ ed $\mathbf{F}_k{}^{\mathsf{DRVb}}$ .

Mediante l'applicazione $\mathsf{DRV}$ , a partire da alcune classi di linguaggi se ne possono individuano molte altre.

Se $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k \subseteq \mathbf{L}_A$ e $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{L}_k$ abbiamo
$\langle \mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k \rangle \mathbf{Y}^{fun} = \{ X_1 \in \mathbf{X}_1, ..., X_k \in \mathbf{X}_k \ , \ Y \in \mathbf{Y} :| \ \langle X_1, ..., X_k \rangle Y^{\mathsf{DRV}} \}$ ;
se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{L}$ , allora $\langle \mathbf{X} \rangle \mathbf{Y}^{\mathsf{DRV}} = \bigcup_{h \in \mathbb{P}} \{ X_1 \in \mathbf{X}_1, ..., X_h \in \mathbf{X}_h \ , \ Y \in \mathbf{Y} :| \ \langle X_1, ..., X_h \rangle Y^{\mathsf{DRV}} \}$ .

**C32 e.05** Delle funzioni guidate da linguaggi $\mathbf{L}^{\mathsf{DRV}}$, sono effettivamente utilizzabili solo quelle in cui il linguaggio guida $L$ è fornito da una espressione maneggevole. Per esempio si possono effettivamente utilizzare $\mathbf{P}^{\mathsf{DRV}}$ , $\mathbf{R}^{\mathsf{DRV}}$ e varie sottoclassi di $\mathbf{F}^{\mathsf{DRV}}$, come ad esempio $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \, y^n\right)^{\mathsf{DRV}}$ e altre funzioni fornite da espressioni come $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \, y^n \, z^n\right)^{\mathsf{DRV}}$ .

Vediamo alcuni esempi.

(1) $\langle ab^2, b + ba, \sqcup + ab \rangle ( \sqcup + x^2 y + z^2 x)^{\mathsf{DRV}} = \sqcup + ab^2 + abab^2 + ababab^2 + ab^2 ab^3 + ab^2 ab^3 a$ .

(2) $\langle \sqcup + a + b^2, b^2 + b^* \, ab^* \rangle \left( (x + y)^* \, ( \sqcup + x^2) \right)^{\mathsf{DRV}} = (b^2 + b^* \, ab^* \, )^* = (a + b)^* + b(b^2)^*$ .

(3) $\langle a^2, b^3 \rangle \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \, y^n \right)^{\mathsf{DRV}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^{2n} \, b^{3n}$ .

(4) $\left\langle \sum_{a \in A} a, \sum_{a \in A} a, \sum_{a \in A} a \right\rangle \left( \sum x^n \, y^n \, z^n \right)^{\mathsf{DRV}} \in (A^3)^*$ .

**C32 e.06 Prop.** Consideriamo $L, M \in \mathbf{L}_k$, $E_1, F_1, ..., E_k, F_k \in \mathsf{S}$ . Se valgono le relazioni di inclusione $L \leq M$, $E_1 \leq F_1, ..., E_k \leq F_k$, allora $\langle E_1, ..., E_k \rangle L^{\mathsf{DRV}} \leq \langle F_1, ..., F_k \rangle M^{\mathsf{DRV}}$ .

**Dim.:** Discende direttamente dalle implicazioni

$$E_i \leq F_i \implies E_1 \cdot E_2 \leq F_1 \cdot F_2 \quad \text{e} \quad \forall j \in J \ : \ G_j \leq H_j \implies \sum_{j \in J} G_j \leq \sum_{j \in J} H_j \ ,$$

valide in ogni SKA ∎

In effetti l'enunciato precedente costituisce una generalizzazione piuttosto naturale delle implicazioni utilizzate nella dimostrazione.

**C32 e.07 Prop.** Consideriamo una SKA $\boldsymbol{S} = \langle \mathsf{S}, ... \rangle \in \mathbf{SKA}$ , per $i = 1, ..., h$ gli elementi $E_i \in \mathsf{S}$ , un $l \in \mathbb{P}$ , per $j = 1, ..., l$ i linguaggi $L_j \in \mathbf{L}_k$ e un ulteriore linguaggio $M \in \mathbf{L}_l$.

$$\langle E_1, ..., E_k \rangle \left( \langle L_1, ..., L_l \rangle M^{\mathsf{DRV}} \right)^{\mathsf{DRV}} = \left\langle \langle E_1, ..., E_k \rangle L_1{}^{\mathsf{DRV}}, ..., \langle E_1, ..., E_k \rangle L_l{}^{\mathsf{DRV}} \right\rangle M^{\mathsf{DRV}} .$$

**Dim.:** $\langle E_1, ..., E_k \rangle \left( \sum_{y_{\beta_1}, ..., y_{\beta_s} \in M} L_{\beta_1} \cdot ... \cdot L_{\beta_s} \right)^{\mathsf{DRV}} =$

$$= \sum_{y_{\beta_1} \cdot \ ... \ \cdot y_{\beta_s} \in M} \left( \sum_{x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_r} \ \in \ L_{\beta_1} \cdot ... \cdot L_{\beta_s}} (E_{\alpha_1} \cdot ... \cdot E_{\alpha_r}) \right) =$$

$$= \sum_{y_{\beta_1} \cdot \ ... \ \cdot y_{\beta_s} \in M} \left( \sum_{x_{\alpha_{11}}, ..., x_{\alpha_{rt_1}} \in L_{\beta_1}} \left( E_{\alpha_{11}} \cdot ... \cdot E_{\alpha_{1t_1}} \right) \ \cdots \ \left( \sum_{x_{\alpha_{r1}}, ..., x_{\alpha_{rt_r}} \in L_{\beta_r}} E_{\alpha_{11}} \cdot ... \cdot E_{\alpha_{rt_r}} \right) \right)$$ ∎

**C32 e.08 Prop.** Sia $L \in \mathbf{L}_{\{a_1, ..., a_n\}}$ . Allora è lecito scrivere $\mathbf{L} = \langle a_1, ..., a_n \rangle \mathbf{L}^{\mathsf{DRV}}$ ∎

## C32 f. costruzioni guidate da un linguaggio

**C32 f.01** Vediamo ora come da un linguaggio sopra un alfabeto si possono ricavare per ogni SKA indicazioni di costruzioni da effettuarsi sopra elementi associati univocamente ai caratteri dell'alfabeto.

In generale si considerano un alfabeto $A$ di $k$ caratteri, il linguaggio $L \in \mathbf{L}_A$ che chiamiamo linguaggio guida e l'algebra $\boldsymbol{S} = \langle \mathsf{S}, ... \rangle \in \mathbf{SKA}$; si intende definire una funzione $L^{\mathsf{DRV}_S} \in \lceil\, \mathsf{S}^k \longmapsto\!\triangleright\, \mathsf{S} \,\rceil$.

**C32 f.02** Cominciamo con le costruzioni guidate da un linguaggio polinomiale, cioè da un linguaggio ottenuto a partire da lettere mediante le sole unioni e giustapposizioni. In particolare consideriamo il polinomio su tre lettere molto semplice, $P := \sqcup + a\,b + a\,b^2 c$.

Nel caso $\mathsf{S} = \mathbf{Lng}$ si definisce $P^{\mathsf{DRV}_{Lng}}$ come la funzione che agli elementi $\sqcup$, $a$ e $b$ associa

$$\langle \sqcup, a, b \rangle P^{\mathsf{DRV}} = \sqcup + a\,b + a\,b^2\,c\ .$$

Più in generale ai linguaggi $L_a, L_b, L_c$ viene associato il linguaggio

$$\langle L_a, L_b, L_c \rangle P^{\mathsf{DRV},Lng} = \sqcup + L_a\,L_b + L_a\,{L_b}^2\,L_c\ .$$

Per una generica $\boldsymbol{S} \in \mathbf{SKA}$ e per tre suoi elementi $S_a, S_b, S_c \in \mathsf{S}$ si chiede la costruzione dell'elemento di $\mathsf{S}$: $\langle S_a, S_b, S_c \rangle P^{\mathsf{DRV}\boldsymbol{S}} = \mathbf{1} + S_a\,S_b + S_a\,{S_b}^2\,S_c$.

**C32 f.03** Questo procedimento interessa particolarmente per le algebre di operatori sui linguaggi: si tratta di comporli secondo le prescrizioni del linguaggio.

Dato che per le SKA di operatori si possono utilizzare due diversi prodotti, p-prodotto e b-prodotto, occorre distinguere quale di queste operazioni si usa. Di conseguenza si distinguono le due funzioni che attribuiamo al tipo $^{\mathsf{DRV}}\boldsymbol{S}$ e che denotiamo, risp., con $^{\mathsf{DRVc}}$ e con $^{\mathsf{DRVb}}$.

Nel caso del linguaggio guida $P$ si hanno i due esempi:

$$\langle\langle w, z\rangle, \langle E, F\rangle, \langle u, v\rangle + \langle L, M\rangle^{+\,+}\rangle P^{\mathsf{DRVc}} =$$
$$\mathbf{1} + \langle w, z\rangle^{\star}\langle E, F\rangle + \langle w, z\rangle^{\star}\langle E, F\rangle (E \cap F)^{zup_{\star}}(\langle u, v\rangle + \langle L, M\rangle).$$
$$\left\langle\langle w, z\rangle, \langle E, F\rangle, \langle u, v\rangle + \langle L, M\rangle^{+\,+}\right\rangle P^{\mathsf{DRVb}} = \mathbf{1} + \langle w, z\rangle : \langle E, F\rangle + \langle E^2, F^2\rangle : \left(\langle u, v\rangle + \langle L, M\rangle^{+\,+}\right).$$

**C32 f.04** Le funzioni $^{\mathsf{DRV}}\boldsymbol{S}$ più trattabili sono quelle in cui il linguaggio guida è razionale: una espressione razionale che lo genera dà molto chiaramente la modalità di composizione degli elementi di S e in particolare degli operatori.

**C32 f.05** Dato $L \in \mathbf{L}_{\{a_1,...a_k\}}$ scriviamo $L = \sum_{x_{\alpha_1} \shortmid ... \shortmid x_{\alpha_h} \in L} x_{\alpha_1} \shortmid ... \shortmid x_{\alpha_h}$ .

Data inoltre $\boldsymbol{S} = \langle \mathsf{S}, \sum, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \in \mathbf{SKA}$, definiamo come funzione associata ad $L$

$$\langle S_1, ..., S_n \rangle L^{\mathsf{DRV}} := \sum_{\alpha_1 \,...\, \alpha_h \in L} S_{\alpha_1} \odot ... \odot S_{\alpha_h}\ .$$

Chiaramente per questa funzione si ha $L^{\mathsf{DRV}} \in \lceil\, \mathsf{S}^k \longmapsto\!\triangleright\, \mathsf{S} \,\rceil$ .

**C32 f.06** Dato $M = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\,y^n \in \mathbf{Lng}_{x,y}$, data $\mathsf{S} \in \mathbf{SKA}$ e dati gli elementi di $\mathsf{S}$ $\alpha$ e $\beta$, abbiamo

$$\langle \alpha, \beta \rangle E^{\mathsf{DRV}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n \odot \beta^n\ .$$

Consideriamo la algebra-b degli operatori e due suoi elementi $\langle a, b^2\rangle, \langle ab^2 + a, a\rangle$; è chiaramente definito l'operatore:

$$\langle a, b^2\rangle, \langle ab^2 + a, a\rangle\rangle M^{\mathsf{DRVb}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\langle a, b^2\rangle : \langle a\,b^2 + a\ ,\ a\rangle^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle a^n\,(ab^2 + a)^n\ ,\ b^{2n}a^n\rangle\ .$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php