1

Capitolo B61
calcolo dei predicati

Contenuti delle sezioni

a. predicati p. 2
b. linguaggio del calcolo dei predicati p. 3
c. significato delle sentenze predicative p. 7
d. regole semantiche per i predicati p. 10
e. validità delle sentenze predicative p. 13
f. soddisfacibilità, contradditorietà e coerenza p. 14
g. chiusura universale e chiusura esistenziale p. 15

15 pagine

B61 0.01 In questo capitolo viene introdotto il calcolo dei predicati, o calcolo del primo ordine, classico strumento di base della logica matematica.

Dopo una introduzione complessiva dell'argomento, viene introdotto il linguaggio del calcolo dei predicati.
Si passa poi al significato delle sentenze predicative e alle regole semantiche che servono a qualificare i predicati.
Un altro tema di larga importanza riguarda la validità delle sentenze predicative.
Altre proprietà dalle conseguenze rilevanti sono la soddisfacibilità, la contradditorietà e la coerenza dei predicati.
Si conclude il capitolo trattando le operazioni sui predicati chiamate chiusura universale e chiusura esistenziale.

B61 a. predicati

B61 a.01 Il calcolo delle proposizioni è uno strumento basilare per lo studio delle argomentazioni e dei ragionamenti, ma presenta dei limiti ben definiti.

Molte argomentazioni riguardano oggetti che non possono considerarsi come gli oggetti individuali trattabili con il calcolo proposizionale, ma si configurano come oggetti individuati solo genericamente attraverso loro particolari caratteristiche: questi oggetti si possono pensare variabili entro certi insiemi di oggetti individuali.

Le affermazioni che riguardano questi oggetti variabili possono quindi essere considerate vere per alcuni dei possibili oggetti individuali richiamati e false per altri.

Vediamo un primo esempio di queste affermazioni.

I numeri primi sono numeri interi dispari.

L'essere numero intero dispari è un attributo che qui prendiamo in esame per i numeri primi. In linea di principio un'affermazione come la precedente può essere vera per taluni numeri primi e falsa per altri: in effetti essa si dimostra vera per tutti i numeri primi con la sola eccezione del numero 2.

B61 a.02 Vediamo due altre affermazioni più articolate, una tratta dalla matematica, l'altra concernente considerazioni solitamente formulate con il linguaggio naturale.

(a) Il gruppo ciclico di 5 elementi ha ordine primo.
(b) Tutti i gruppi di ordine primo sono gruppi semplici.
(c) Quindi il gruppo ciclico di 5 elementi è gruppo semplice.

(a') Socrate è un uomo.
(b') Tutti gli uomini sono mortali.
(c') Quindi Socrate è mortale.

Il calcolo proposizionale presenta due ordini di carenze: al livello sintattico non è in grado di formulare enunciati nei quali si fanno affermazioni su insiemi di oggetti (tutti i gruppi, tutti gli uomini, alcuni numeri primi, ...); al livello semantico manca di meccanismi deduttivi che consentano ottenere certe conclusioni, per esempio che permettano di derivare da (a) e (b) la conclusione (c) e che consentano di derivare da (a') e (b') la conclusione (c').

B61 a.03 Le affermazioni che coinvolgono oggetti variabilin non univocamente individuati, vengono chiamate **predicati**.
Ciascun predicato può considerarsi una funzione di uno o più oggetti variabili che a ciascuna delle possibili scelte di corrispondenti oggetti individuali associ una sentenza la quale può assumere il valore vero o il falso.

Il calcolo dei predicati costituisce dunque un'estensione del calcolo proposizionale che, innanzi tutto, si pone in grado di trattare le affermazioni su oggetti variabili.

Si tratta di un sistema logico di notevole portata il quale in particolare consente la formalizzazione e la manipolazione delle affermazioni costituenti gran parte della matematica.

Esso inoltre risulta utile anche per la programmazione: in effetti ogni programma che non abbia portata limitatissima si vuole che possa essere eseguito per una certa gamma di dati da fornire inizialmente e quindi deve poter trattare dati iniziali, dati intermedi e risultati variabili.

B61 b. linguaggio del calcolo dei predicati

B61 b.01 Introduciamo ora il linguaggio del calcolo dei predicati che denoteremo con LCPrd.

Cominceremo con il definire il suo alfabeto, che denoteremo con ALCPrd; proseguiremo con le regole sintattiche definendo i termini, le proposizioni e le sentenze; solo successivamente daremo le regole semantiche che consentono di attribuire un significato alle formule del calcolo dei predicati.

Va notato che il calcolo dei predicati è decisamente più articolato del calcolo delle proposizioni: il suo alfabeto estende sensibilmente ALCPrp, la sua sintassi si sviluppa servendosi di varie categorie di suoi oggetti e di parecchie regole di produzione; inoltre la sua semantica, oltre a richiedere svariate regole, ha carattere aperto, in quanto può essere applicata a tutti i campi per i quali si possono definire modelli interpretativi adeguati.

B61 b.02 Le sentenze del calcolo dei predicati si servono di simboli raggruppabili secondo generi ben differenziati:

Simboli dei valori booleani: true e false.

Parentesi per la delimitazione di nidi che possono avere il ruolo delle sottoespressioni o il ruolo delle liste di argomenti; per questi compiti ci serviremo solo di "(" e ")", due simboli da considerare mutuamente coniugati.

Connettivi del calcolo proposizionale *not*, *and*, *or*, $if\ then$, iff, $if\ then\ else$.

Quantificatori `for all` e `for some`.

Simboli di costanti a, b, c, a', b', c', a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ... a_n, b_n, c_n, ...

Simboli di variabili u, v, w, x, y, z, u', v', w', x', y', z', u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2, ... u_n, v_n, w_n, x_n, y_n, z_n, ...

Simboli di attributi $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $h^{(1)}$, $f_1^{(1)}$, $g_1^{(1)}$, $h_1^{(1)}$, ... , $f_n^{(1)}$, $g_n^{(1)}$, $h_n^{(1)}$, ...
$f^{(2)}$, $g^{(2)}$, $h^{(2)}$, $f_1^{(2)}$, $g_1^{(2)}$, $h_1^{(2)}$, ... , $f_n^{(2)}$, $g_n^{(2)}$, $h_n^{(2)}$, ...
. . . . . .
$f^{(m)}$, $g^{(m)}$, $h^{(m)}$, $f_1^{(m)}$, $g_1^{(m)}$, $h_1^{(m)}$, $f_n^{(m)}$, $g_n^{(m)}$, $h_n^{(m)}$, ...
. . . . . .

Simboli di predicati $p^{(1)}$, $q^{(1)}$, $r^{(1)}$, $p_1^{(1)}$, $q_1^{(1)}$, $r_1^{(1)}$, ... , $p_n^{(1)}$, $q_n^{(1)}$, $r_n^{(1)}$, ...
$p^{(2)}$, $q^{(2)}$, $r^{(2)}$, $p_1^{(2)}$, $q_1^{(2)}$, $r_1^{(2)}$, ... , $p_n^{(2)}$, $q_n^{(2)}$, $r_n^{(2)}$, ...
. . . . . .
$p^{(m)}$, $q^{(m)}$, $r^{(m)}$, $p_1^{(m)}$, $q_1^{(m)}$, $r_1^{(m)}$, $p_n^{(m)}$, $q_n^{(m)}$, $r_n^{(m)}$, ...
. . . . . .

Spesso le locuzioni come "simbolo di variabile", "simbolo di attributo", "simbolo di predicato" si possono abbreviare, risp., con "variabile", "attributo" e "predicato".

L'intero positivo che compare a esponente di ogni simbolo di attributo e di ogni simbolo di predicato si dice, risp., **arietà dell'attributo** e **arietà del predicato**.

I simboli degli attributi aventi arietà 1, 2, 3, ... , m, ... si dicono anche, risp., **attributi unari**, **attributi binari**, **attributi ternari**, ... , **attributi m-ari**, ...

Similmente i simboli dei predicati di arietà 1, 2, ... , m, ... si dicono anche, risp., **predicati unari**, **predicati binari**, **predicati ternari**, ... , **predicati m-ari**, ...

Talora invece di attributi e di predicati di arietà m si parla, risp., di attributi e di predicati ad m posti.

Intuitivamente i simboli delle costanti denotano oggetti individuali che si suppongono univocamente definiti, mentre i simboli delle variabili denotano oggetti che si suppongono solo individuabili univocamente, ovvero definiti solo genericamente.

Si osserva che l'alfabeto su cui si costruisce il linguaggio del calcolo dei predicati dal punto di vista pragmatista va considerato finito e ampliabile secondo le esigenze. Esso viene anche considerato, più sbrigativamente infinito numerabile.

B61 b.03 Si dicono **termini del calcolo dei predicati** o qui in breve **termini**, le espressioni ottenibili mediante le regole di produzione che seguono.

(a) I simboli di costanti sono termini.
(b) I simboli di variabili sono termini.
(c) Se $m \in \mathbb{P}$, se t_1, t_2, ... , t_m rappresentano termini e se $f^{(m)}$ è un simbolo di attributo m-ario, allora è un termine anche il costrutto $f^{(m)}(t_1, t_2, ..., t_m)$.
(d) Se F rappresenta una sentenza e t e u rappresentano termini, allora è un termine anche $if\ F\ then\ t\ else\ u$.

Si osserva che l'ultima regola di produzione si serve della nozione di sentenza per il calcolo dei predicati, nozione che verrà ridefinita in b05 . Come chiariremo, non stiamo introducendo un circolo vizioso: in effetti stiamo definendo con un procedimento ricorsivo un sistema di tre cosiddetti **linguaggi compagni** sull'alfabeto ALCPrd, il linguaggio dei termini, il linguaggio delle proposizioni e il linguaggio delle sentenze e le definizioni che stiamo esponendo consentono di formulare un procedimento in grado di decidere per una qualsiasi stringa su ALCPrd se fa parte di uno di questi linguaggi o meno.

Le definizioni date finora comunque ci permettono di affermare che sono esempi di termini:

$$f^{(2)}(a, y) \quad , \quad g^{(3)}\big(x, f^{(2)}(a, y), b\big) \quad \text{e} \quad h^{(4)}\Big(f^{(2)}(x, c_1), f^{(2)}(x, c_2), a, g^{(3)}\big(b, f^{(2)}(y, a), b\big)\Big) \ .$$

I termini sono stringhe di LCPrd in parte costruite mediante altre stringhe del linguaggio, le quali svolgono un ruolo come componenti di proposizioni e sentenze.

B61 b.04 Si dicono **proposizioni del calcolo dei predicati** o qui in breve **proposizioni**, le espressioni ottenibili mediante le seguenti regole di produzione:

(a) I simboli dei valori booleani true e false sono proposizioni.
(b) Se $m \geq 1$, t_1, t_2, ... , t_m rappresentano termini e $p^{(m)}$ rappresenta un simbolo di predicato m-ario, allora è una proposizione anche il costrutto $p^{(m)}(t_1, t_2, ..., t_m)$.

Esempi di proposizioni sono

$$p^{(2)}(a, a) \quad , \quad q^{(3)}\big(x, f^{(2)}(b', y), c_2\big) \quad \text{e} \quad r^{(4)}\big(a_1, f^{(2)}(b_1, c_1), a_2, f^{(2)}(b_2, c_2)\big)$$

Intuitivamente le proposizioni rappresentano relazioni che possono sussistere tra gli oggetti del calcolo dei predicati.

B61 b.05 Si dicono **sentenze del calcolo dei predicati**, o qui in breve **sentenze**, le espressioni costruibili mediante le regole di produzione che seguono.

(a) Ogni proposizione è una sentenza.
(b) Se F è una sentenza, allora è una sentenza anche la sua negazione ($not\ F$).
(c) Se F e G sono sentenze, allora è una sentenza anche la loro congiunzione ($F\ and\ G$).
(d) Se F e G sono sentenze, allora è una sentenza anche la loro disgiunzione ($F\ or\ G$).
(e) Se F e G sono sentenze, allora è una sentenza anche la corrispondente implicazione ($if\ F\ then\ G$).
(f) Se F e G sono sentenze, allora è una sentenza anche la loro equivalenza ($F\ iff\ G$).

(g) Se F, G e H sono sentenze, allora è una sentenza anche la loro selezione condizionale $(if\ F\ then\ G\ else\ H)$.
(h) Se x è una variabile ed F una sentenza, allora è una sentenza anche $(for\ all\ x\ :\ F)$.
(i) Se x è una variabile ed F una sentenza, allora è una sentenza anche $(for\ some\ x\ :\ F)$.

Si osserva che le regole di produzione delle sentenze dal calcolo dei predicati sostanzialmente costituiscono un ampliamento delle regole di produzione delle sentenze dal calcolo proposizionale.
Esse sono costruite sopra le proposizioni che si possono considerare un arricchimento dei termini i quali a loro volta contengono i simboli di costanti, assimilabili ai simboli proposizionali del calcolo delle proposizioni.

Tra le regole di produzione per le sentenze ve ne sono due sostanzialmente innovative, quelle basate sui prefissi $for\ all$, per ogni, e $for\ some$, per qualche: questi sono detti, risp., **quantificatore universale** e **quantificatore esistenziale**.

Come si può già intuire, i quantificatori consentono di formalizzare affermazioni riguardanti oggetti che possono variare in determinati insiemi, cioè individuati genericamente da particolari caratteristiche loro richieste.

La sentenza che segue immediatamente un quantificatore si dice appartenere al cosiddetto **nido** o **scope** del quantificatore stesso; talora si usano anche i termini "portata" e "ambito" del quantificatore.

B61 b.06 Conviene osservare esplicitamente che le regole di produzione comportano che in ogni sentenza non ridotta a proposizione a ogni occorrenza di connettivo o di quantificatore corrisponde una sottostringa delimitata da una coppia di parentesi: tale sottostringa viene detta **nido** del connettivo o quantificatore.

Mostriamo alcuni esempi di sentenze facendo ancora riferimento ai simboli dei diversi generi che abbiamo assegnato all'alfabeto ALCPrd.

- $p^{(2)}\big(f^{(1)}(a), g^{(1)}(b)\big)$ e $q^{(3)}\big(x, h^{(2)}(a_1, a_2), b\big)$ sono sentenze, in quanto sono proposizioni.
- $\Big(for\ all\ y\ :\ p^{(2)}\big(f^{(1)}(a), g^{(1)}(y)\big)\Big)$ è una sentenza, in quanto compare un quantificatore universale nel cui nido si trova una sentenza.
- $p^{(2)}\big(f^{(1)}(a), g^{(1)}(x)\big)\ and\ \Big(for\ all\ y\ :\ p^{(2)}\big(f^{(1)}(a), g^{(1)}(y)\big)\Big)$ è una sentenza, in quanto congiunzione di due sentenze.
- $\Big(for\ some\ x\ :\ p^{(2)}\big(f^{(1)}(a), g^{(1)}(x)\big)\ and\ \big(for\ all\ y\ :\ p^{(2)}\big(f^{(1)}(a), g^{(1)}(y)\big)\big)\Big)$ è una sentenza, in quanto presenta un quantificatore esistenziale nel cui nido compare una sentenza.

Gli esempi precedenti e le considerazioni sui nidi dovrebbero anche chiarire come, data una qualsiasi stringa su ALCPrd, sia sempre possibile decidere se esprime un termine, una proposizione o una sentenza.

B61 b.07 Il formalismo introdotto prevede che l'arietà di simboli di attributi e di simboli di predicati sia segnalata esplicitamente da esponenti.
Questi appesantiscono le espressioni dei termini, delle proposizioni e delle sentenze: quindi in genere si preferisce usare simboli privi di questi esponenti e in compenso di dichiarare esplicitamente per ogni sviluppo formale l'arietà di ogni simbolo di attributo e di predicato.

Per maggiore leggibilità è consigliabile non usare un unico simbolo per due attributi e/o predicati aventi arietà diverse. In effetti il contesto potrebbe evitare le ambiguità, ma la lettura di molte formule risulterebbe più impegnativa.

Osserviamo che il contesto potrebbe anche rendere superflua la dichiarazione di arietà; tuttavia in genere risulta conveniente chiarire esplicitamente i ruoli di tutti i simboli.

Come per il calcolo proposizionale e per ogni altro formalismo concernente operatori e operandi, nelle espressioni più elaborate conviene usare parentesi coniugate di diverse estensioni e di diverse forme (oltre alle parentesi tonde le parentesi quadre, le parentesi graffe o altre) e conviene disporre con cura sulle due dimensioni della pagina le porzioni delle formule riconducibili a categorie sintattiche definite; nel caso del calcolo dei predicati si hanno le categorie dei termini, delle proposizioni e delle sentenze.

Spesso poi risulta conveniente disporre in tre linee successive le espressioni come la seguente:

$$\begin{array}{l} if\big(for\ all\ x\ :\ p(a,b,x)\big) \\ then\ f(a,x) \\ else\ g(b,y) \end{array}$$

Si osservi che si tratta di un termine della forma if ⟨sentenza⟩ $then$ ⟨termine⟩ $else$ ⟨termine⟩.
Qui le scritture ⟨termine⟩ e ⟨termine⟩ denotano le categorie sintattiche delle sentenze e dei termini, ovvero un arbitrario elemento dell'insieme delle sentenze e un qualsiasi elemento dell'insieme dei termini.

Viceversa talune parentesi possono essere trascurate. Possono essere evitate le parentesi che delimitano costrutti *not* grazie alla precedenza attribuita a questo connettivo; possono essere trascurate le parentesi che riguardano più connettivi *and* adiacenti e più connettivi *or* adiacenti, grazie alla associatività di questi due connettivi.

B61 b.08 Collettivamente diciamo **espressione del calcolo dei predicati** una sentenza o un termine di tale calcolo.

Ogni termine che costituisce una sottostringa di un termine t si dice **sottotermine** di t; come è usuale, per sottotermine proprio di t si intende un sottotermine di t diverso da esso.

Ogni espressione che costituisce una sottostringa di una espressione E si dice **sottoespressione** di E e per sottoespressione propria di E si intende una sua sottoespressione diversa da essa.

B61 b.09 Come i connettivi, anche i quantificatori possono essere espressi in forma più concisa di quella introdotta sopra, che si serve di locuzioni inglesi. La locuzione $for\ all$ si può sostituire con il simbolo "∀", mentre la $for\ some$ con "∃".

Una espressione come

$$for\ all\ x\ :\ \left(for\ some\ y\ :\ \begin{bmatrix} if\ \big(p(x)\ and\ q(a,y)\big) \\ then\ if\ \big(q(y,b)\ or\ q(b,y)\big) \\ \qquad then\ \big(for\ some\ u\ :\ r(b,u,x)\big) \end{bmatrix}\right)$$

si può scrivere nella forma concisa equivalente

$$\forall x : \Big(\exists y : \Big[\big(p(x) \wedge q(a,y)\big) \to \Big(\big(q(y,b) \vee q(b,y)\big) \to \big(\exists u : r(b,u,x)\big)\Big)\Big]\Big)\ .$$

B61 b.10 La sintassi data per i linguaggi del calcolo dei predicati presenta possibilità di ridondanze e di contraddizioni.

Una sentenza come $for\ all\ x\ :\ \big(for\ all\ x\ :\ q(x,y)\big)$ può ridursi alla $for\ all\ x\ :\ q(x,y)$.

Risulta invece inutilizzabile una sentenza della forma $for\ all\ x\ :\ \big(for\ some\ x\ :\ q(x,y)\big)$.

Conviene dunque stabilire che siano escluse dal linguaggio le espressioni nelle quali si succedono quantificatori separati solo da variabili vincolanti [c01] i quali presentano ripetizioni di tali variabili.

B61 c. significato delle sentenze predicative

B61 c.01 Occorre ora assegnare diverse caratterizzazioni alle occorrenze delle variabili che si incontrano in una espressione; questa distinzione viene effettuata solo sul piano sintattico, ma ha conseguenze sul piano semantico.

Cominciamo con un esempio

$$\forall x : \big[q(x,y) \wedge \big(\exists y : [\forall x : r(u,x,y)]\big)\big] .$$

In essa compaiono tre variabili: la x con 4 occorrenze che momentaneamente chiamiamo, risp., $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ e $x^{(4)}$; la y ha 3 occorrenze che chiamiamo $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ e $y^{(3)}$; la u ha una sola occorrenza.

Solo per maggiore chiarezza espositiva riscriviamo la sentenza nella forma

$$\forall x^{(1)} : \Big[q\big(x^{(1)}, y^{(1)}\big) \wedge \Big(\exists y^{(2)} : \big[\forall x^{(3)} : r\big(u, x^{(4)}, y^{(3)}\big)\big]\Big)\Big]$$

Le occorrenze $x^{(1)}$ e $x^{(3)}$ della x compaiono subito dopo un quantificatore e per questo vengono dette **occorrenze vincolanti**; $x^{(2)}$ compare nel nido della prima occorrenza di quantificatore seguita dalla stessa variabile e quindi viene detta **occorrenza vincolata**; $x^{(4)}$ compare entro più nidi di quantificatore, ma occorre considerare solo il quantificatore con il nido più interno e seguito da una variabile vincolante uguale a quella della occorrenza in esame: questo esiste (è la seconda occorrenza di $\forall$) e quindi $x^{(4)}$ è una occorrenza vincolata.

Delle tre occorrenze della variabile y, la $y^{(1)}$ viene detta **variabile libera**, in quanto non appartiene ad alcun nido di quantificatore; la $y^{(2)}$ segue un quantificatore e viene considerata vincolante; $y^{(3)}$ va considerata vincolata a causa della sua posizione rispetto al quantificatore $\exists$.

Infine si ha la variabile u da considerare libera, in quanto appartiene a tre nidi di quantificatore, ma nessuno di essi coinvolge la nostra u.

B61 c.02 Diamo ora definizioni costruttive concernenti una generica espressione E e le occorrenze di una qualsiasi sua variabile x.

Una occorrenza della x nella E si dice:
- vincolante se segue immediatamente un quantificatore;
- libera se non appartiene ad alcun nido di quantificatore avente come variabile vincolante la x stessa;
- vincolata se appartiene a un nido di quantificatore avente come variabile vincolante la x stessa.

Per una occorrenza di variabile vincolata $x^{(h)}$, si dice occorrenza di quantificatore vincolante la prima occorrenza di identificatore che si trova alla sinistra della $x^{(h)}$ dopo aver trovato alla sua destra un'altra occorrenza della x.

Dopo le occorrenze di variabile passiamo a qualificare le variabili in una generica espressione F.

Si dicono variabili libere nella E tutte le variabili che nella F presentano almeno una occorrenza libera; si dicono invece variabili vincolate nell'espressione F tutte le variabili che nella F presentano almeno una occorrenza vincolata.
Quindi una variabile entro una espressione può essere qualificata sia libera che vincolata.

Una sentenza del calcolo dei predicati si dice **sentenza chiusa** sse in essa non compare alcuna variabile libera.

Diciamo infine **simboli liberi** in una espressione E del calcolo dei predicati le variabili libere, i simboli di costanti, i simboli di attributi e i simboli di predicati che compaiono entro di essa.

B61 c.03 Eserc. Consideriamo le seguenti espressioni

(a) $\forall x \ : \ \big(\exists y \ : \ q(x,y)\big)$

(b) $\forall x \ : \ \big(\exists y \ : \ q(x,y)\big) \longrightarrow r\big(a, f(a)\big)$

(c) $\Big[q(x,y) \wedge \Big(\exists y \ : \ r\big(y, g(a,z)\big)\Big)\Big]$

Per ciascuna di esse distinguere occorrenze di variabili e variabili libere e vincolate e a ciascuna variabile vincolata associare il corrispondente quantificatore vincolante; inoltre stabilire se si tratta di sentenza chiusa.

B61 c.04 Una espressione nella quale compare una variabile vincolata viene considerata equivalente all'espressione ottenuta da essa mediante la modifica del simbolo di tale variabile con un simbolo di variabile non presente nella espressione per tutte le occorrenze nel nido del relativo quantificatore.

Può quindi risultare opportuno, per maggiore chiarezza, evitare la presenza di variabili che sono sia libere che vincolate attraverso modifiche del tipo suddetto. Per esempio conviene modificare la

$$\forall x : \big[q(x,y) \wedge \big(\exists y : [\forall x : r(u,x,y)]\big)\big]$$

nella

$$\forall x : \big[q(x,y) \wedge \big(\exists v : [\forall z : r(u,z,v)]\big)\big]$$

B61 c.05 Come per la definizione del significato di una sentenza del calcolo proposizionale, anche nel calcolo dei predicati si tratta di stabilire come va valutato un valore booleano di una sentenza in relazione ad una sua possibile interpretazione.

Una **interpretazione nel calcolo dei predicati** deve riguardare anche dei termini e ciascuna di queste entità deve essere caratterizzata da un dominio, cioè da un insieme di oggetti che consentono di assegnare un significato al termine.

Una interpretazione di una sentenza deve assegnare un significato a tutti i simboli liberi che compaiono in essa.

Deve quindi assegnare elementi di domini alle costanti, domini alle variabili libere, funzioni tra domini opportuni ai simboli di attributi, e relazioni tra domini opportuni ai simboli di predicati.

Nel caso più semplice, al quale in genere qui ci limiteremo, le sentenze riguardano oggetti omogenei che possono collocarsi in un unico dominio.

B61 c.06 Cominciamo con alcuni semplici esempi e procedendo in modo piuttosto intuitivo.

Consideriamo la sentenza data da una semplice proposizione

$p(a, f(a))$

e la interpretazione $\mathcal{I}$ che riguarda il dominio $D = \mathbb{Z}$, insieme dei numeri interi, e che assume che sia

$a_{\mathcal{I}} \ := \ 0$, in numero 0;

$f_{\mathcal{I}} \ := \ \lceil\!\lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto z + 1 \rceil\!\rceil$, la funzione successore;

$p_I \ := \ \{\langle z, w\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \lfloor\!\lfloor \ z > w\}$, la relazione tra interi "maggiore di".

La sentenza data quindi si interpreta come $0 > 0 + 1$: si tratta quindi di una sentenza falsa.

Se si assume invece che $p_{\mathcal{I}}$ sia la relazione "minore di" la sentenza viene valutata come vera; inoltre rimane vera per qualsiasi valore intero di a, cioè è una sentenza da valutare valida.

B61 c.07 Consideriamo ora l'arricchimento della sentenza precedente

$if \ \big[for\ all\ x \ : \ \big(for\ some\ y \ : \ p(x,y)\big)\big] \ then \ p\big(a, f(a)\big)$

ed attribuiamole una prima interpretazione $\mathcal{I}$.

L'antecedente di questa sentenza si interpreta come

Per ogni intero z, per qualche intero w si ha $z > w$;

questa, intuitivamente, è vera e l'intera sentenza si può interpretare come

Se per ogni intero z esiste un intero w per cui $z > w$, allora $0 > 1$.

Questa implicazione ha l'antecedente vero e il conseguente falso, quindi è una sentenza falsa per $\mathcal{I}$.
JQ Se si passa a una seconda interpretazione $\mathcal{J}$ per la quale

$a_{\mathcal{J}} := 0$;
$f_{\mathcal{I}} := \lceil\!\lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto z - 1 \rceil\!\rceil$, la funzione predecessore;
$p_I := \{\langle z, w\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid\!\mid z \neq w\}$, relazione "differenza" tra interi,

la sentenza risulta vera.

B61 c.08 Una sentenza del calcolo dei predicati si dice **sentenza del calcolo dei predicati valida** sse è chiusa e se risulta vera per ogni interpretazione. La precedente sentenza non è valida, in quanto falsa per l'interpretazione $\mathcal{I}$.

Una sentenza valida è invece, come vedremo, la

$$if\ [for\ all\ x\ :\ p(x, f(x))]\ then\ [for\ some\ y\ :\ p(a, y)]$$

B61 c.09 Definiamo ora in modo completo cosa si intende per **interpretazone nel calcolo dei predicati**.

Sia D un arbitrario insieme nonvuoto.

Si definisce interpretazione sul dominio D una funzione $\mathcal{I}$ che:
- a ogni simbolo di costante a associa un $a_{\mathcal{I}} \in D$;
- a ogni simbolo di variabile x associa un $x_{\mathcal{I}} \in D$;
- a ogni simbolo di attributo m-ario f associa una funzione $f_{\mathcal{I}} \in \lceil\!\lceil D^{\times m} \longmapsto D \rceil\!\rceil$;
- a ogni simbolo di predicato m-ario p associa una relazione m-aria $p_{\mathcal{I}}$, cioè una funzione di $\lceil\!\lceil D^{\times m} \longmapsto \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\} \rceil\!\rceil$.

Si dice inoltre interpretazione sul dominio D di una espressione del calcolo dei predicati E una riduzione di una interpretazione nel calcolo dei predicati che si limita ad assegnare valori ai simboli liberi della E stessa.

Come esempio consideriamo la interpretazione $\mathcal{I}$ sul dominio dei numeri reali della seguente espressione

$$E\ :\ if\ p\big(f(x), x\big)\ then\ \big(for\ some\ y\ :\ p(a, y)\big)$$

la quale stabilisce che

$a_{\mathcal{I}} := \sqrt{2}$,
$x_{\mathcal{I}} := \pi$,
$f := \lceil\!\lceil r \in \mathbb{R} \mapsto r/2 \rceil\!\rceil$, funzione dimezzamento ,
$p_{\mathcal{I}} := \lceil\!\lceil \langle z, w\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto z > w \rceil\!\rceil$, relazione "maggiore di".

B61 d. regole semantiche per i predicati

B61 d.01 Diamo ora le regole che consentono di stabilire un valore per ogni espressione del calcolo dei predicati relativamente ad una sua interpretazione $\mathcal{I}$ sopra un dominio D.

Per una proposizione e una sentenza si deve individuare un valore booleano, vero o falso; per un termine si deve trovare un elemento del dominio D.
Questi valori li facciamo assumere da una funzione valore alla quale si dovrebbe dare la forma $\mathsf{vl}_{\mathcal{I},D}$, ma che spesso, e in particolare qui, possiamo abbreviare con vl.

Come per il calcolo delle proposizioni, le regole per la valutazione di un'espressione, cioè le regole semantiche, sono regole applicabili ricorsivamente: in altre parole il valore dell'espressione viene calcolato precisando il valore delle sue componenti, procedendo dalle sue sottoespressioni più ridotte alle più estese.

Anche nella trattazione delle regole semantiche conviene procedere "dal basso verso l'alto", ovvero stabilendo prima le regole per i termini, poi quelle per le sentenze, in gran parte identiche a quelle che reggono le sentenze del calcolo proposizionale.

B61 d.02 Le regole semantiche per i termini sono le seguenti.

$$\mathsf{vl}(a) \;:=\; a_{\mathcal{I}}$$
$$\mathsf{vl}\big(f^{(m)}(t_1,t_2,...,t_m)\big) \;:=\; {f^{(m)}}_{\mathcal{I}}\big(\mathsf{vl}(t_1),\mathsf{vl}(t_2),...,\mathsf{vl}(t_m)\big)$$
$$\mathsf{vl}\big(if\ F\ then\ t\ else\ u\big) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{vl}(t) & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{true} \\ vl(u) & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{false} \end{cases}$$

B61 d.03 Le regole semantiche per le proposizioni sono le seguenti.

$$\mathsf{vl}(\mathsf{true}) \;:=\; \mathsf{true} \qquad \mathsf{vl}(\mathsf{false}) \;:=\; \mathsf{false}$$
$$\mathsf{vl}(p^{(m)}\big(t_1,t_2,...,t_m)\big) \;:=\; {p^{(m)}}_{\mathcal{I}}(\mathsf{vl}(t_1),\mathsf{vl}(t_2),...,\mathsf{vl}(t_m))$$

B61 d.04 Le regole semantiche per le sentenze, escluse per ora quelle concernenti quantificatori, sono le seguenti.

$$\mathsf{vl}(not\ F) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{false} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{true} \\ \mathsf{true} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{false} \end{cases} .$$

$$\mathsf{vl}(F\ and\ G) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{true} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{vl}(G)=\mathsf{true} \\ \mathsf{false} & \text{sse altrimenti} \end{cases} .$$

$$\mathsf{vl}(F\ or\ G) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{false} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{vl}(G)=\mathsf{false} \\ \mathsf{true} & \text{sse altrimenti} \end{cases} .$$

$$\mathsf{vl}(F\ eor\ G) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{false} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{vl}(G)=\mathsf{true} \\ \mathsf{true} & \text{sse altrimenti} \end{cases} .$$

$$\mathsf{vl}(if\ F\ then\ G) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{false} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{true} \ \text{ e } \ \mathsf{vl}(G)=\mathsf{false} \\ \mathsf{true} & \text{sse altrimenti} \end{cases} .$$

$$\mathsf{vl}(F\ iff\ G) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{true} & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{vl}(G) \\ \mathsf{false} & \text{sse altrimenti} \end{cases} .$$

$$\mathsf{vl}(if\ F\ then\ G\ else\ H) \;:=\; \begin{cases} \mathsf{vl}(G) & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{true} \\ :=\ \mathsf{vl}_I(H) & \text{sse } \mathsf{vl}(F)=\mathsf{false} \end{cases} .$$

B61 d.05 Consideriamo come esempio la seguente sentenza E:

$$not\ q(y,f(y))\ or\ q(a,f(f(a)))$$

e ad essa applichiamo l'interpretazione sul dominio $\mathbb{N}$ degli interi naturali

$$I := \left\downarrow \begin{matrix} a & y & f & q \\ 0 & 2 & \lceil\, n \in \mathbb{N} \lceil\, n+1 \,\rceil & < \end{matrix} \right\downarrow$$

Il significato intuitivo della sentenza è

non è $2 < 2+1$ oppure $0 < (0+1)+1$

Riconducendoci alle regole semantiche si trova che il valore booleano della E è il vero.

B61 d.06 Prima di introdurre le regole semantiche per le sentenze contenenti quantificatori conviene introdurre una nuova nozione.
Consideriamo quindi una interpretazione $\mathcal{I}$ sopra un dominio D. Per ogni variabile x in D e per ogni $d \in D$ si definisce come **interpretazione estesa** e si denota con

$\langle x \longleftarrow d \rangle \circ \mathcal{I}$

l'interpretazione su D secondo la quale alla variabile x è assegnato il valore d, mentre le rimanenti variabili, le costanti, i simboli di attributi e i simboli di predicati rimangono con le assegnazioni o le mancanze di assegnazioni stabilite della $\mathcal{I}$.

Similmente per ogni costante a e per ogni $d \in D$ si definisce

$\langle x \longleftarrow d \rangle \circ \mathcal{I}$

l'interpretazione su D che differisce dalla $\mathcal{I}$ solo per assegnare il particolare valore d alla costante a.

Per ogni simbolo di attributo $f^{(m)}$ e per ogni funzione $\phi \in \lceil\, D^{\times m} \longmapsto D \,\rceil$ si definisce

$\langle f \longleftarrow \phi \rangle \circ \mathcal{I}$

l'interpretazione su D che differisce dalla $\mathcal{I}$ solo per assegnare ϕ alla $f^{(m)}$.

Per ogni simbolo di predicato $p^{(m)}$ e per ogni relazione $\pi \subseteq D^{\times m}$ si definisce

$\langle p \longleftarrow \pi \rangle \circ \mathcal{I}$

l'interpretazione su D che differisce dalla $\mathcal{I}$ solo per assegnare π alla $p^{(m)}$.

B61 d.07 La estensione di una interpretazione può essere reiterata.
Limitandoci alle estensioni riguardanti variabili ed elementi del dominio, possiamo introdurre una **interpretazione estesa multipla** come ad esempio la seguente

$$\langle x_h \longleftarrow d_h \rangle \circ \Big(... \big(\langle x_2 \longleftarrow d_2 \rangle \circ (\langle x_1 \longleftarrow d_1 \rangle \circ \mathcal{I}) \big) ... \Big) \ .$$

Per questa si conviene di adottare la notazione abbreviata che presume la priorità della applicazione delle trasformazioni più a destra

$$\langle x_h \longleftarrow d_h \rangle \circ_{rl} ... \langle x_2 \longleftarrow d_2 \rangle \circ_{rl} \langle x_1 \longleftarrow d_1 \rangle \circ_{rl} \mathcal{I} \ .$$

Si osserva che se x_1 e x_2 denotano variabili distinte coincidono le interpretazioni

$$\langle x_1 \longleftarrow d_1 \rangle \circ_{rl} \langle x_2 \longleftarrow d_2 \rangle \circ_{rl} \mathcal{I} \quad \text{e} \quad \langle x_2 \longleftarrow d_2 \rangle \circ_{rl} \langle x_1 \longleftarrow d_1 \rangle \circ_{rl} \mathcal{I} \ .$$

Se invece si applicano due estensioni semplici relative alla stessa variabile conta solo la ultima applicata:

$$\langle x \longleftarrow d_2 \rangle \circ_{rl} \langle x \longleftarrow d_1 \rangle \circ_{rl} \mathcal{I} \ = \langle x \longleftarrow d_2 \rangle \circ_{rl} \mathcal{I} \ .$$

Quindi è lecito prendere in considerazione solo le estensioni multiple delle interpretazioni relative a variabili diverse.

Considerazioni del tutto simili valgono per estensioni delle interpretazioni concernenti costanti, simboli di attributi e simboli di predicati eventualmente mescolati.

B61 d.08 Se $\mathcal{I}$ è una interpretazione per una sentenza F di una delle forme

$$for\ all\ x \ : \ F \qquad \text{oppure} \qquad for\ some\ x \ : \ F \ ,$$

allora per ogni $d \in D$ l'interpretazione $\langle x \longleftarrow d\rangle \circ_{rl} \mathcal{I}$ è una interpretazione per la sentenza F.

La sentenza F in genere presenta una o più occorrenze della variabile x che sono libere e che sono vincolate nelle sentenze contenenti un quantificatore.
L'interpretazione $\langle x \longleftarrow d\rangle \circ_{rl} \mathrm{I}\mathit{Icl}$ le sostituisce con l'elemento d.

B61 d.09 Siamo ora in grado di definire le regole semantiche per le sentenze contenenti quantificatori, cominciando da quelle delle forme prededenti.

Se $\mathcal{I}$ è una interpretazione su D per la sentenza universalmente quantificata stabiliamo che

$$\mathsf{vl}_{\mathcal{I},D}(\mathit{for\ all}\ x\ :\ F)\ :=\ \begin{cases} \mathsf{true} & \text{sse}\ \ \forall d \in D\ :\ \mathsf{vl}_{\langle x\longleftarrow d\rangle \circ_{rl} \mathcal{I},D} = \mathsf{true} \\ \mathsf{false} & \text{sse}\ \ \exists d \in D\ :\ \mathsf{vl}_{\langle x\longleftarrow d\rangle \circ_{rl} \mathcal{I},D} = \mathsf{false} \end{cases}$$

Se $\mathcal{I}$ è una interpretazione su D per la sentenza esistenzialmente quantificata stabiliamo che

$$\mathsf{vl}_{\mathcal{I},D}(\mathit{for\ some}\ x\ :\ F)\ :=\ \begin{cases} \mathsf{true} & \text{sse}\ \ \exists d \in D\ :\ \mathsf{vl}_{\langle x\longleftarrow d\rangle \circ_{rl} \mathcal{I},D} = \mathsf{true} \\ \mathsf{false} & \text{sse}\ \ \forall d \in D\ :\ \mathsf{vl}_{\langle x\longleftarrow d\rangle \circ_{rl} \mathcal{I},D} = \mathsf{false} \end{cases}$$

B61 d.10 Introduciamo ora la nozione di **concordanza tra due interpretazioni**.

Si dice che due interpretazioni $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sullo stesso dominio concordano sopra un simbolo (di costante, di variabile, di attributo o di predicato) sse

aut entrambe assegnano lo stesso valore al simbolo, aut entrambe non gli assegnano alcun valore .

Si dice che due interpretazioni $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ sullo stesso dominio concordano sopra una espressione E sse
aut il valore della interpretazione $\mathcal{I}$ sulla E coincide con il valore della $\mathcal{J}$ sulla E,
aut né $\mathcal{I}$ né $\mathcal{J}$ sono interpretazioni di E.

Dalle definizioni seguono subito le proprietà che seguono.

(1) Prop.: Se due interpretazioni sullo stesso dominio per una espressione E concordano su ogni simbolo libero della E, allora esse concordano sulla E stessa ∎

(2) Prop.: Consideriamo un'espressione E, una interpretazione $\mathcal{I}$ per E sul dominio D, le variabili x_1, x_2, ... e x_n prive di occorrenze libere in E e altrettanti elementi arbitrari di D d_1, d_2, ... e d_n. Allora la interpretazione molteplicemente estesa

$$\mathcal{J}\ := \langle x_h \longleftarrow d_h\rangle \circ_{rl} ... \langle x_2 \longleftarrow d_2\rangle \circ_{rl} \langle x_1 \longleftarrow d_1\rangle \circ_{rl} \mathcal{I}$$

e la $\mathcal{I}$ concordano sulla E ∎

B61 e. validità delle sentenze predicative

B61 e.01 Come per il calcolo proposizionale, anche per il calcolo dei predicati si definisce la validità per sentenze prive di variabili libere.

Una sentenza chiusa F si dice **sentenza valida** sse risulta vera per ogni interpretazione per essa.

Si possono introdurre metodi formali per dimostrare la validità o meno delle sentenze chiuse.
Qui ci limitiamo a presentare argomentazioni intuitive che riteniamo possano risultare piuttosto convincenti sulla validità di varie sentenze che possono considerarsi paradigmatiche.

B61 e.02 Per stabilire la nonvalidità di una sentenza occorre e basta individuare una interpretazione sotto la quale la sentenza risulta falsa.
In questi casi si parla di **individuazione di un controesempio**.

B61 f. soddisfacibilità, contradditorietà e coerenza

B61 f.01 Una sentenza chiusa si dice **sentenza soddisfacibile** sse è vera sotto qualche interpretazione.

Una sentenza chiusa si dice **sentenza contradditoria** sse è falsa sotto ogni interpretazione.

Un insieme di sentenze chiuse si dice **insieme di sentenze coerente** sse esiste qualche interpretazione per tutte queste sentenze sotto la quale ciascuna di esse risulta vera.

B61 g. chiusura universale e chiusura esistenziale

B61 g.01 Definiamo ora due operatori che trasformano una sentenza che presenta variabili libere in una sentenza chiusa.

Consideriamo una sentenza non chiusa F e una lista completa delle variabili libere distinte di tale sentenza; questa lista potrebbe essere compilata considerando le variabili secondo l'ordine delle rispettive prime occorrenze.

Nel caso di n variabili libere si dice **chiusura universale** della F la sentenza
$$(for\ all\ *\ :\ F)\ :=\ \Big(for\ all\ x_1\ :\ \big(for\ all\ x_2\ :\ \big(...(for\ all\ x_n\ :\ F)...\big)\big)\Big)\ .$$

Con n variabili libere si dice **chiusura esistenziale** della F la sentenza
$$(for\ some\ *\ :\ F)\ :=\ \Big(for\ some\ x_1\ :\ \big(for\ some\ x_2\ :\ \big(...(for\ some\ x_n\ :\ F)...\big)\big)\Big)\ .$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php