1

Capitolo B55
insiemi ordinati e reticoli

Contenuti delle sezioni

a. insiemi ordinati [1] p. 2
b. insiemi ordinati finiti p. 8
c. catene e anticatene p. 11
d. reticoli [1] p. 14
e. reticoli booleani [1] p. 18
f. reticoli di partizioni di insiemi p. 24
g. omomorfismo e isomorfismo tra digrafi p. 26

26 pagine

B55 0.01 Questo capitolo è dedicato a un primo esame complessivo degli insiemi ordinati, strutture relazionali che presentano una grande varietà di tipi, molti dei quali giocano ruoli di grande importanza sia per la matematica che per le sue applicazioni.

Dopo aver esposte le caratteristiche comuni a tutti gli insiemi ordinati, si presentano le peculiarità degli insiemi ordinati finiti e le loro proprietà che conviene tenere presenti fino dagli inizi degli studi di gran parte degli argomenti della matematica.

Va segnalato che molte altre nozioni e proprietà degli insiemi ordinati finiti sarano presentate nel tomo D dedicato alla matematica discreta e in singole sezioni degli altri tomi successivi, quando richieste da sviluppi specifici.

Atteggiamento simile viene assunto per gli insiemi reticolati, particolari insiemi ordinati ricchi di strumenti computazionali e adatti ad intervenire in svariati sviluppi della matematica e delle sua applicazioni.

In particolare si incontrano i reticoli booleani, strutture notevolmente utili che dovranno essere riprese nel successivo capitolo B56.

B55 a. insiemi ordinati [1]

B55 a.01 Ricordiamo che per insieme ordinato si intende [B16b] un insieme munito di una relazione binaria $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ che gode delle tre proprietà seguenti

- **riflessività**: per ogni $x \in P$ si ha $x \preceq x$;
- **antisimmetria**: per ogni coppia $\langle x, y \rangle \in P \times P$, $x \preceq y$ e $y \preceq x$ implicano $x = y$;
- **transitività**: per ogni terna $x, y, z \in P$, $x \preceq y \preceq z$ implicano $x \preceq z$.

Una tale struttura $\langle P, \preceq \rangle$ è chiamata anche **ordine parziale** (termine spesso semplificato in ordine), **insieme parzialmente ordinato**, o, con un conciso termine del gergo matematico anglosassone, **poset**.

Nel presente capitolo interessano principalmente i posets $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ con il terreno P finito.

Denotiamo con **Poset** la classe dei posets e con **PosetF** la classe dei posets finiti.

La relazione $x \preceq y$ si legge "x precede o coincide con y", oppure "x precede in senso lato y".

B55 a.02 Abbiamo già incontrato vari posets: numeri positivi con la relazione della divisibilità, insiemi numerici con la relazione $\leq$, collezioni di insiemi con la relazione di inclusione, partizioni con la relazione di raffinamento, sottospazi di spazi vettoriali, ...
Inoltre abbiamo mostrato che molti posets finiti è vantaggioso servirsi di loro raffigurazioni mediante digrafi [B16c, B53c].

Anche l'insieme delle relazioni d'ordine esplicite e l'insieme degli equivalenti digrafi ordinati presentano una grande varietà di elementi e rivestono grande importanza per i molteplici collegamenti con altre strutture discrete e per le loro numerose applicazioni.

Qui ci proponiamo di sviluppare alcune nozioni generali sui posets senza preoccuparci molto della loro effettiva costruibilità.

B55 a.03 Consideriamo un poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ e un elemento $x \in P$.

Si dicono **minoranti di un elemento** x tutti gli elementi $y \in P$ tali che $y \preceq x$.
Si dicono invece **maggioranti di un elemento** di x tutti gli elementi $y \in P$ tali che $x \preceq y$.
Denotiamo con x^{Mnrnt} o con $\mathsf{Mnrnt}(x)$ l'insieme dei minoranti di x e con x^{Mjrnt} o con $\mathsf{Mjrnt}(x)$ l'insieme dei suoi maggioranti.

Si definiscono gli insiemi di minoranti e gli insiemi di maggioranti Denotiamo con S^{Mnrnt} o con $\mathsf{Mnrnt}(S)$ l'**insieme dei minoranti di un insieme** S definito come insieme degli elementi di P che sono preceduti in senso lato da tutti gli elementi di S.
Denotiamo invece con S^{Mjrnt} o con $\mathsf{Mjrnt}(S)$ l'**insieme dei maggioranti di un insieme** di S definito come insieme degli elementi di P che precedono in senso lato tutti gli elementi di S. Dunque le formule

$$S^{\mathsf{Mnrnt}} := \bigcap_{s \in S} s^{\mathsf{Mnrnt}} \qquad \text{e} \qquad S^{\mathsf{Mjrnt}} := \textstyle\bigcap_{s \in S} s^{\mathsf{Mjrnt}} \, .$$

B55 a.04 Si dice **elemento minimale di un poset** $\boldsymbol{P}$ ogni elemento privo di minoranti.
Si dice **elemento massimale di un poset** $\boldsymbol{P}$ ogni elemento privo di maggioranti, cioè un $M \in P \;\P\; M \preceq y \Rightarrow y = M$.]JP Denotiamo con $\boldsymbol{P}^{\mathsf{Mnml}}$ e $\boldsymbol{P}^{\mathsf{Mxml}}$, risp., l'insieme degli elementi minimali e l'insieme degli elementi massimali del poset $\boldsymbol{P}$.

Quindi formalmente

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{Mnml}} := \{m \in P \;\P\; y \preceq m \Rightarrow y = m\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P}^{\mathsf{Mxml}} := \{M \in P \;\P\; M \preceq y \Rightarrow y = M\} \, .$$

Un poset dotato di elementi minimali si dice **poset inferiormente limitato**.
Un poset dotato di elementi massimali si dice **poset superiormente limitato**.
Un poset dotato sia di elementi minimali che di massimali si dice **poset limitato**.
Collettivamente gli elementi minimali e i massimali si dicono **elementi estremali di un poset**.

L'insieme degli interi $[2 : 30]$ ordinati per divisibilità presenta come elementi minimali 2, 3 5 7 11 13 17 19 23 29 e come elementi massimali 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19 18, 17, 16.

B55 a.05 Se un poset ha un unico elemento minimale, questo viene detto **elemento minimo del poset** o anche **zero del poset**.

Se un poset ha un unico elemento massimale, questo viene detto **massimo del poset** o anche **unità del poset**.

L'insieme degli interi positivi che dividono un qualsiasi numero intero positivo n ordinati per divisibilità presentano 1 come elemento minimo ed n come elemento massimo.

Nel seguito in genere il minimo del poset $\boldsymbol{P}$ sarà denotato con $\min(\boldsymbol{P})$ ed il massimo dello stesso poset con $\max(\boldsymbol{P})$.
Tuttavia in molte considerazioni locali per lo zero e l'unità di un poset generico si usano notazioni come $\mathsf{0}$ e$\mathsf{1}$, come $\underline{0}$ e $\underline{1}$, oppure come $\overline{0}$ e $\overline{1}$.

Le nozioni di elemento minimale, elemento massimale, minimo e massimo relative alla relazione $\preceq$ si possono definire anche per ogni sottoinsieme S di un poset.
Inoltre ciascun sottoinsieme di un poset può essere o meno caratterizzato come sottoinsieme limitato inferiormente, limitato superiormente o limitato tout court.

B55 a.06 Spesso studiando un poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$, accanto alla relazione $\preceq$, è opportuno considerarne altre ad essa strettamente collegate.

Innanzi tutto si introduce la relazione detta **relazione d'ordine stretto** associata alla $\preceq$, denotata con $\prec$ e definita chiedendo

$$\text{per ogni } \langle x, y \rangle \in P \times P \text{ si ha } x \prec y \text{ sse } y \preceq x \text{ e } x \neq y \ .$$

Questa può leggersi "precede in senso stretto" e chiaramente risulta essere una relazione antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Si hanno poi le negazioni delle relazioni precedenti, $\not\preceq$ e $\not\prec$.

In termini insiemistici abbiamo

$$\prec \ := \ \preceq \setminus \mathsf{Id}_P \quad , \quad \not\preceq \ := \ P \times P \setminus \ \preceq \quad , \quad \not\prec \ := \ P \times P \setminus \ \prec \ = \not\preceq \ \setminus \mathsf{Id}_P \ .$$

Accanto a una relazione d'ordine $\preceq$ spesso risulta utile prendere in considerazione la sua relazione trasposta per la quale usiamo la notazione $\succeq$.

Si definisce quindi $\succeq \ := \ \preceq^{\mathsf{T}}$ e si può affermare

$$\text{per ogni } \langle x, y \rangle \in P \times P \text{ si ha } x \succeq y \text{ sse } y \preceq x \ .$$

La $\succeq$ si può leggere "segue o coincide con", oppure "segue in senso lato".

Anche della $\succeq$ si definisce la variante stringente che denotiamo con $\succ$ e che à la relazione trasposta della $\prec$; quindi si può affermare

$$\text{per ogni } \langle x, y \rangle \in P \times P \text{ si ha } x \succ y \text{ sse } y \prec x \ .$$

Questa relazione si può leggere "segue" oppure "segue in senso stretto" e, come la $\prec$, risulta antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Per comprensibile completezza si definiscono infine le negazioni delle precedenti $\not\preceq$ e $\not\prec$.

Conviene osservare esplicitamente che a ogni relazione d'ordine $\preceq$ sono associate "naturalmente", o meglio sono associate al fine di disporre di una strumentazione più completa, altre 7 relazioni:

$$\prec,\ \npreceq,\ \not\prec,\ \succeq,\ \succ,\ \not\preceq \text{ e } \not\succ\ .$$

B55 a.07 Delle relazioni introdotte a partire dalla $\preceq$, solo $\succeq$ è una relazione d'ordine; questa constatazione induce a introdurre il cosiddetto **poset duale** di $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} \ := \ \langle P, \succeq \rangle \ = \ \langle P, \preceq^{\mathsf{T}} \rangle\ .$$

Questa struttura è chiamata anche **poset riflesso** o **poset trasposto** di $\boldsymbol{P}$.

Il passaggio al poset duale è una trasformazione involutoria; in altre parole il poset duale di un poset duale coincide con il poset di partenza: $(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \ = \ \boldsymbol{P}$.

Questa trasformazione può vedersi come involuzione entro la classe **Poset** ed essere chiamata dualità di controordinamento o più concisamente **dualità-UD**, nella quale la specificazione sincopata -UD intende abbreviare *up vs. down*.

Essa costituisce una involuzione sulla classe **Poset** e consente di riutilizzare attraverso modifiche ben definite ogni costruzione formale, cioè ogni definizione, ogni sviluppo deduttivo e ogni enunciato concernente un poset $\boldsymbol{P}$ per una costruzione concernente il suo duale-UD $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}$: ad ogni costruzione (enunciato) sopra elementi generici di P e $\preceq$ risulta associata biunivocamente (o meglio involutivamente) una costruzione coinvolgente elementi di P e $\succeq$.

La modifica di una costruzione formale su un poset nella sua duale-UD si effettua modificando le varie nozioni derivate dalla $\preceq$ nelle rispettive duali-UD ed è importante il fatto che questi collegamenti involutori sono facilmente individuabili.

In particolare abbiamo introdotte le seguenti coppie di nozioni duali-UD: minorante e maggiorante, minimale e massimale, minimo e massimo; le proprietà di limitatezza inferiore e di limitatezza superiore.

Nello scenario della dualità-UD (come per ogni altra involuzione che conviene qualificare come dualità) si incontrano anche nozioni e proprietà autoduali, cioè le costruzioni invarianti per la trasformazione.

In particolare è autoduale la proprietà di limitatezza dei posets.

B55 a.08 Nello scenario delle costruzioni formali sui posets, come per ogni altro genere di strutture per le quali si individua una dualità, si hanno quindi singole nozioni e proprietà autoduali, o invarianti, e duetti di nozioni, proprietà e sequenze deduttive che si scambiano tra di loro quando si passa da un poset al suo duale le quali sono dette (mutuamente) **nozioni [mutuamente] duali**.

In molti sviluppi risulta assai conveniente chiarire queste situazioni, in quanto si consegue maggiore chiarezza nella visione dei risultati, si possono precisare alcune costruzioni e ricavare alcune proprietà ricordando le rispettive duali e sottoponendo queste a trasformazioni in genere piuttosto agevoli; in tal modo si riesce a **realizzare una economia di pensiero** assai conveniente.

In particolare risulta conveniente stabilire la dualità l'autodualità di proprietà che si possono derivare facilmente da proprietà già riconosciute come duali o autoduali.

Gli sviluppi formali che si servono della accennata simmetria si dice che utilizzano il **principio di dualità**.

B55 a.09 Prendiamo in considerazione su un piano di genericità due costruzioni sviluppate nell'ambito dello studio di un qualsiasi poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$, le quali conducono, risp., a due elementi di P che denotiamo con x e con y.

Si possono riscontrare quattro situazioni mutuamente esclusive: può accadere che $x \prec y$, che si riscontri $y \prec x$, che si constati che $x = y$ o, infine, che si dimostri non valere nessuna delle relazioni precedenti.

Nell'ultimo caso si dice che x ed y sono **noncomparabili** per $\preceq$; nei primi tre casi si dice invece che $\langle x, y\rangle$ costituisce un duetto (o una coppia) di **elementi comparabili** o di **elementi confrontabili**.

Ad esempio nel poset degli interi maggiori di 1 ordinati per divisibilità sono noncomparabili due numeri primi come 7 e 101 e sono noncomparabili due interi coprimi come 35 e 77.

Nel poset dei sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{P}$ degli interi positivi ordinati per inclusione sono noncomparabili due diversi sottoinsiemi finiti con lo stesso cardinale e anche due sottoinsiemi il secondo dei quali ottenibile dal primo eliminando alcuni suoi elementi ad aggiungendone altri.

Va segnalato invece che il problema della comparabilità di due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{P}$ individuati da due diverse definizioni può presentare delle difficoltà e anche risultare irrisolvibile.

È invece sicuro che sono noncomparabili due sottoinsiemi cofiniti definiti come complementari di due insiemi espliciti noncomparabili; in particolare sono incomparabili i complementari di due diversi insiemi finiti aventi lo stesso cardinale.

B55 a.10 Si dice **ordine totale**, **insieme totalmente ordinato**, o anche insieme linearmente ordinato, un poset $\langle P, \preceq\rangle$ nel quale gli elementi di ogni coppia di $P \times P$ risultano comparabili.

Il tipico insieme totalmente ordinato con un numero finito n di elementi è l'insieme degli interi da 1 a n ordinati dalla usuale relazione $\leq$.
Ogni altro poset totalmente ordinato di n elementi si devo poter mettere in corrispondenza biunivoca con il suddetto intervallo **(**n **]**.
Ciascuno di questi insiemi totalmente ordinati viene chiamato anche **catena** di cardinale n.

Tre importanti insiemi totalmente ordinati numerabili sono $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ e $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$.
$\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$ è invece un insieme totalmente ordinato più che numerabile.

Si trova facilmente che il duale-UD di un poset totalmente ordinato è anch'esso un poset di questo tipo. In effetti le proprietà di comparabilità e noncomparabilità sono invarianti per dualità-UD.

Va segnalato che spesso risulta importante individuare un sottoinsieme S del terreno di un poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq\rangle$ munito della restrizione di $\preceq$ che costituisce un sottoterreno totalmente ordinato, cioè una catena; un tale sottoinsieme viene detto **sottocatena di un poset $\boldsymbol{P}$**.

Spesso accade di prendere in esame una generica catena prescindendo dalla individualità dei suoi elementi; per una tale catena spesso useremo l'identificatore $\mathcal{C}h_n$.

B55 a.11 Consideriamo due posets $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq\rangle$ e $\boldsymbol{Q} = \langle Q, \sqsubseteq\rangle$.
Si dice **prodotto cartesiano** di $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ e si denota con $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$, la struttura $\langle P \times Q, \preceq \times \sqsubseteq\rangle$ avente come terreno l'insieme delle coppie $\langle x, u\rangle$ con $x \in P$ e $u \in Q$ per le quali si può stabilire che

$$\langle x, u\rangle(\preceq \times \sqsubseteq)\langle y, v\rangle \text{ sse } x \preceq y \text{ e } u \sqsubseteq v \ .$$

Si constata facilmente che l'insieme $\preceq \times \sqsubseteq$, costituito da coppie di coppie appartenenti a $P \times Q$, è una relazione di ordine parziale; quindi $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$ si dice **poset prodotto** dei posets $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ e si denota con $\boldsymbol{P} \times_{Ord} \boldsymbol{Q}$.

Come esempi di posets prodotti si possono considerare prodotti di due posets totalmente ordinati come $\langle \mathbf{3}, \leq\rangle \times \langle \mathbf{3}, \leq\rangle$ e $\langle \mathbf{2}, \leq\rangle \times \langle \mathbf{4}, \leq\rangle$. Si tratta di posets facilmente visualizzabili come griglie con maglie quadrate che conviene visualizzare con le diagonali dei quadrati disposte orizzontalmante e verticalmente.

In particolare $\langle (8] \times (8] \, , \, \leq \times \leq \rangle$ si visualizza comprensibilmente con un insieme di coppie collocabili ciascuna all'interno di una casella di una usuale scacchiera con i lati disposti in diagonale.

Quest'ultima struttura, come ogni poset prodotto di due repliche dello stesso poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ si dice **poset al quadrato** e si può denotare con $\boldsymbol{P}^{\times 2}$.

Esempi di poset quadrati di posets totalmente ordinati infiniti numerabili sono $\langle \mathbb{P} \times \mathbb{P}, \leq \times \leq \rangle$, $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq \rangle$, e $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq \times \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \leq \times \leq \rangle$.
Un esempio di quadrato cartesiano di un posets totalmente ordinato con il cardinale del continuo è $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq \times \leq \rangle$.
Un altro interessante poset prodotto è $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \times_{Ord} \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, poset il cui terreno è l'insieme delle successioni di numeri reali.

B55 a.12 Prop. Se $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ e $\boldsymbol{Q} = \langle Q, \sqsubseteq \rangle$ sono posets totalmente ordinati con due o più elementi ciascuno, il loro poset prodotto non è totalmente ordinato.

Dim.: Se in $\boldsymbol{P}$ abbiamo $x \prec y$ e in $\boldsymbol{Q}$ si ha $u \sqsubseteq \neq v$, allora $\langle x, v \rangle$ e $\langle y, u \rangle$ sono noncomparabili nel prodotto $\boldsymbol{P} \times_{Ord} \boldsymbol{Q}$ ∎

Accade tuttavia che una relazione come $\preceq \times \sqsubseteq$ si può estendere a una relazione fino a diventare una relazione d'ordine totale.

Si dice **estensione lessicografica della relazione** $\preceq \times \sqsubseteq$ la relazione che denotiamo con $\preceq$ **lxg** $\sqsubseteq$ definita chiedendo che per ogni coppia di coppie $\big\langle \langle x, u \rangle \, , \, \langle y, v \rangle \big\rangle \in (P \times Q) \times (P \times Q)$ sia $\langle x, u \rangle$ ($\preceq$ **lxg** $\sqsubseteq$) $\langle y, v \rangle$ sse $x \prec y$ oppure $x = y$ e $u \sqsubseteq v$.

Questo ordinamento totale si descrive facilmente, per esempio, per $\mathbf{8} \times \mathbf{8}$ e per $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con le seguenti elencazioni:

$00, 01, 02, 03, ..., 07, 10, 11, 12, 03, ..., 17, 20, 21, 22, ...30, ...70, 72, ...77$

$00, 01, 02, 03, ..., 10, 11, 12, 03, ..., 20, 21, 22, ...30, 31, ..., 40, ...$

B55 a.13 La costruzione di posets prodotti si può ampliare a prodotti di tre o più posets e per essa si mostra facilmente la proprietà associativa.

Inoltre di un poset totalmente ordinato si possono definire tutte le potenze intere naturali con un procedimento che ricalca quelli già adottati per le potenze naturali di numeri (interi, razionali, reali, ...), per funzioni, per matrici e per altri generi di entità che si possono considerare elementi di un semigruppo o di un monoide.

Per ogni poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ definiamo

$$\boldsymbol{P}^{\times 0} := P^{\mathsf{Id}} \quad , \quad \boldsymbol{P}^{\times 1} := \boldsymbol{P} \quad , \quad \forall k = 2, 3, 4, ... \; : \; \boldsymbol{P}^{\times k} := \boldsymbol{P}^{\times (k-1)} \times_{Ord} \boldsymbol{P} \, .$$

B55 a.14 Anche per i prodotti di 3 o più posets totalmente ordinati si trova che la relazione prodotto diretto delle relazioni dei componenti, non ordinamento totale, può estendersi a una relazione totale detta estensione lessicografica.

Consideriamo dunque l'intero $k = 2, 3, 4, ...,$ k posets totalmente ordinati

$$\boldsymbol{P}_h = \langle P_h, \preceq_h \rangle \text{ per } h = 1, 2, ..., k$$

e il loro poset prodotto

$$\mathbf{P} \; :=: \; \langle \mathsf{P}, \mathsf{R} \rangle \; := \; \boldsymbol{P}_1 \times_{Ord} \boldsymbol{P}_2 \times_{Ord} \cdots \times_{Ord} \boldsymbol{P}_k \, ,$$

riguardante la relazione di ordine parziale

$$\mathsf{R} = \preceq_1 \times \preceq_2 \times \cdots \times \preceq_k \ .$$

Definiamo come estensione lessicografica della R e denotiamo con $\mathsf{R}^{\mathbf{lxg}}$ la relazione che, dati due diversi elementi di P $\searrow$ $\mathsf{p} = \langle p_1, p_2, ..., p_k \rangle$ e $\mathsf{q} = \langle q_1, q_2, ..., q_k \rangle$ decide che $\mathsf{p} \,{}_{\mathsf{R}}\!\!\sqsupset (\mathsf{R}^{\mathbf{lxg}})_{\mathsf{R}}\, \mathsf{q}$ sse si trova $j = 1, ..., k$ tale che $\forall i = 1, 2, ..., j-1 \ : \ (p_i = q_i) \wedge p_j \preceq_j q_j$.

Chiaramente questa relazione è un ordinamento totale, in quanto la decisione precedente è sempre ottenibile algoritmicamente quando si sappiano controllare algoritmicamente le relazioni $\preceq_i$.

B55 a.15 Siano x, y elementi di un poset $\langle P, \preceq \rangle$; diciamo che x **precede immediatamente** y oppure che x viene coperto da y, e scriviamo $x \prec_{\mathtt{I}} y$, sse $x \prec y$ e nessun $z \in P$ (diverso da x e da y) soddisfa la $x \prec z \prec y$.

Equivalentemente, servendoci delle relazioni $\succeq$ e $\succ$ (trasposte, risp., della $\preceq$ e della $\prec$), diciamo che y **segue immediatamente** x oppure che y copre x, e scriviamo $y \succ_{\mathtt{I}} x$, sse $y \succ x$ e nessun $z \in P$ soddisfa la $y \succ z \succ x$.

In un poset $\boldsymbol{P}$ dotato di minimo, gli elementi che coprono questo elemento si chiamano **atomi del poset**; denotiamo il loro insieme con $\mathsf{Atom}(\boldsymbol{P})$.

In un poset $\boldsymbol{Q}$ dotato di massimo, gli elementi coperti da questo elemento si dicono **coatomi del poset**; denotiamo il loro insieme con $\mathsf{Coatom}(\boldsymbol{Q})$.

Nel poset degli interi $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ per ogni intero n possiamo scrivere $n <_I n+1$.
Nel poset dei reali $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ le relazioni $<_I$ e $>_I$ sono vuote; in altre parole per nessun numero reale r si trova un reale in grado di succedergli immediatamente o di precederlo immediatamente.

Nel poset dei sottoinsiemi di un insieme finito S di $n = 2, 3, 4, ...$ elementi $\langle S^{\mathfrak{P}}, \subseteq \rangle$ tra due sottoinsiemi A e B di S sussiste la relazione $A \subset_I B$ sse $B = A \,\dot\cup\, \{b\}$ per qualche $b \in S \setminus A$.
Gli atomi di questo poset sono gli n singoletti costituiti dai singoli elementi di S, mentre i coatomi sono gli n sottoinsiemi ottenuti da S eliminando uno dei suoi elementi.

Il poset di tutti gli interi positivi ordinati per divisibilità ha come minimo il numero 1 e i suoi atomi sono i singoletti costituiti da ciascuno dei numeri primi; inoltre tra due interi positivi h e k sussiste la relazione $h \preceq_{:} k$ sse $k = h\,p$ con p numero primo.

B55 a.16 Si dice **sottoposet** di $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle \in \mathsf{Poset}$ ogni $\boldsymbol{Q} = \langle Q, \sqsubseteq \rangle$ con $Q \subseteq P$ e $\sqsubseteq$ relazione ottenuta riducendo $\preceq$ a $Q \times Q$. In tal caso si scrive $\boldsymbol{P} \leq_{Poset} \boldsymbol{Q}$.

Si dice **intervallo di un poset** $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ compreso tra x e z, l'insieme $\Big\{ y \in P \,\P\, x \preceq y \preceq z \Big\}$.
Gli elementi x e y sono detti **estremità dell'intervallo**. Un tale insieme si denota con una scrittura della forma $[x, y]_{\boldsymbol{P}}$.
Questo insieme munito della restrizione della relazione $\preceq$ alle sole coppie di elementi di tale intervallo è un ben definito tipo di sottoposet di $\boldsymbol{P}$.

Osserviamo che si sono definiti intervalli di tipo chiuso, in quanto contengono i propri estremi; talora serve anche prendere in considerazione intervalli di tipo aperto o semiaperto aventi, risp., le forme

$$(x, z)_{\boldsymbol{P}} \ := \ \{ y \in P \,\P\, x \prec y \prec z \} \quad ,$$
$$(x, z]_{\boldsymbol{P}} \ := \ \{ y \in P \,\P\, x \prec y \preceq z \} \quad , \quad [x, z)_{\boldsymbol{P}} \ := \ \{ y \in P \,\P\, x \preceq y \prec z \} \ .$$

B55 b. insiemi ordinati finiti

B55 b.01 Ci occupiamo ora dei posets finiti, ricordando che essi sono equivalenti ai digrafi ordinati e quindi possono essere raffigurati efficacemente nel piano.

A causa della riflessività, ogni nodo di un digrafo ordinato è dotato di cappio, mentre per la transitività, la presenza di due archi consecutivi $\langle q, r\rangle$ ed $\langle r, s\rangle$, implica che sia presente anche l'arco $\langle q, s\rangle$, cioè l'arco che va dall'estremità iniziale del primo arco all'estremità finale del secondo.

Quindi le regole generali per le raffigurazioni dei digrafi nel caso dei digrafi ordinati comportano la presenza di numerosi archi "pleonastici", desumibili facilmente dai rimanenti: i cappi presenti in tutti i nodi e gli archi deducibili da cammini di lunghezza superiore o uguale a 2.

Ne segue la possibilità di servirsi per ogni digrafo della raffigurazione semplificata ottenuta da quella che segue le indicazioni generali eliminando cappi e archi riconducibili a cammini. Rimangono solo gli archi che collegano un nodo a un suo nodo immediatamente successore, collegamenti che chiamiamo **archi essenziali**.

La possibilità di una ulteriore semplificazione delle raffigurazioni viene consentita dalla proprietà di antisimmetria. Questa non consente che nei digrafi ordinati siano presenti circuiti di due o più archi. Infatti la presenza di due archi l'uno riflesso dell'altro contraddice l'antisimmetria.
Inoltre non può essere presente alcun circuito della forma $\big\langle\langle q_0, q_1\rangle, ..., q_{s-2}, q_{s-1}, \langle q_{s-1}, q_0\rangle\big\rangle$ avente lunghezza s superiore a 2: infatti per la transitività dovrebbe essere presente anche l'arco $\langle q_0, q_{s-1}\rangle$, situazione in contraddizione con la riflessività.

B55 b.02 Risulta dunque possibile presentare ogni digrafo con una raffigurazione nella quale si trascurano le segnalazioni delle orientazioni dei collegamenti essenziali, pur di posizionare i nodi in modo che ogni arco essenziale si discosti meno di 90° da una orientazione fissata.

Questa potrebbe essere quella che va dall'alto in basso, quella che va da sinistra verso destra o una delle due opposte. Una tale raffigurazione evita di segnare il senso delle frecce e risulta decisamente più semplice e chiara di quelle costruite seguendo le regole per i digrafi in genere; essa viene chiamata **diagramma di Hasse**.

Per esempio una raffigurazione come:

può essere vantaggiosamente rimpiazzata da:

In genere i digrafi ordinati che presentano un numero contenuto di nodi sono presentati solo attraverso diagrammi di Hasse. Tra questi si adottano spesso quelli con presuppongono archi rivolti dal basso verso l'alto; meno spesso diagrammi di Hasse dei tipi alto ⇒ basso e sinistra ⇒ destra; raramente quelli del tipo destra ⇒ sinistra.

B55 b.03 Prop. Ogni sottoinsieme S nonvuoto di un poset finito contiene almeno un elemento minimale e, dualmente-UD, almeno un elemento massimale.

Dim.: Proviamo l'esistenza di un elemento minimale delineando un procedimento che consente di individuare tale oggetto.

Si sceglie un elemento qualsiasi x_1; con un numero finito di confronti si stabilisce se esso è minimale; in caso positivo il procedimento è concluso. In caso contrario, dato che si è incontrato un $x_2 \prec x_1$ e si riprende l'esame di minimalità da questo x_2; per la finitezza di S il procedimento si conclude sicuramente con il reperimento di un minimale ∎

B55 b.04 (1) Prop.: Per ogni elemento di un poset finito $\langle P, \preceq \rangle$ si possono individuare effettivamente tutti gli altri elementi che lo seguono immediatamente.

Dim.: Dall'insieme delle coppie della relazione $\preceq$ risulta banale estrarre l'insieme delle coppie il cui primo membro è x, cioè l'insieme $\preceq \cap \{y \in P :| \langle x, y \rangle\}$ i secondi membri di queste coppie, ecluso il cappio $\langle x, x \rangle$, costituiscono l'insieme dei maggioranti di x, cioè $\mathsf{Mjrnt}(x)$.
Di questo insieme si deve ricavare l'insieme degli elementi minimali $\mathbf{Mnml}(\mathsf{Mjrnt}(x))$ e questo, per la definizione di $\prec_{\mathtt{I}}$, risulta essere l'insieme degli elementi che seguono immediatamente x, cioè $x \lrcorner \prec_{\mathtt{I}}$.
A questo scopo si devono scorrere tutti gli elementi z delle coppie $\langle x, z \rangle$, per ciascuna di esse cercare se si trova un y per il quale si abbia $y \prec z$ e in tal caso scartare z ∎

Dall'enunciato (1) riguardante un elemento di un poset si ricava il seguente algoritmo di portata complessiva, cioè riguardante l'intero poset.

Preliminarmente precisiamo che per sottodigrafo di un digrafo $\boldsymbol{D} = \langle Q, U \rangle$ si intende una struttura ottenuta da D eliminando alcuni dei nodi di Q e gli archi in U che li riguardano [D27d].

(2) Algoritmo: Da ogni poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ si può ricavare il sottodigrafo $\boldsymbol{P} = \langle P, \prec_{\mathtt{I}} \rangle$.

In una prima fase si scorre la lista L_1 delle coppie di nodi costituenti $\preceq$ e per ciascuna di tali coppie $\langle x, y \rangle$ si aggiunge una terna $\langle x, y, 1 \rangle$ ad una lista L_2 inizialmente vuota; questa verrà modificata gradualmente trasformando in 0 la terza componente corrispondente a ogni coppia di $\preceq \setminus \prec_{\mathtt{I}}$.

Viene poi organizzata una iterazione primaria sulle coppie di L_1 e per ciascuna di queste $\langle x, z \rangle$ si scorrono le coppie $\langle y, z \rangle$ in L_1 per verificare se si trova un y tale che $\langle x, y \rangle$ appartenga ad L_1.
Se questo accade si modifica nella L_2 la $\langle x, z, 1 \rangle$ nella $\langle x, z, 0 \rangle$ per rendere conto che $x \not\prec_{\mathtt{I}} z$.

Alla fine di questa iterazione primaria le coppie $\langle x, z, 1 \rangle$ rimaste nella L_2 forniscono la relazione $\prec_{\mathtt{I}}$ ∎

B55 b.05 Prop. La relazione di copertura per posets numerabili come $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $[z : +\infty)$, $(-\infty : z]$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$ e $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ è quella che collega interi consecutivi, in quanto $w <_I z \iff z = w + 1$ ∎

All'opposto $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ è un poset numerabile privo di relazione di copertura: infatti dati due numeri razionali si trova sempre un razionale compreso tra di essi.
Neppure $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ dispone di una relazione di copertura, in quanto dati due numeri reali si trova sempre un reale compreso tra di essi.

Per un poset finito con minimo e massimo si sanno individuare effettivamente anche gli insiemi $\mathbf{Atom}(P)$ e $\mathbf{Coatom}(P)$ a partire, risp., dalla sottorelazione $\prec_{\mathtt{I}}$ e dalla sottorelazione $\succ_{\mathtt{I}}$.

Il poset $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ha 0 come elemento minimo ed 1 come unico atomo, mentre manca di massimo e di coatomi; $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ non ha nessuno di questi elementi particolari: infatti $\mathbb{Z}$ è illimitato sia inferiormente che superiormente.

B55 b.06 Si dicono **digrafi graduati** i digrafi ordinati i cui nodi si possono ripartire su una sequenza o su una successione di cosiddetti "livelli progressivi" in modo che due nodi si trovano nella corrispondente relazione di copertura sse appartengono a due livelli consecutivi.
I corrispondenti poset si dicono **posets graduati**.

I digrafi graduati si distinguono principalmente per l'insieme dei rispettivi livelli. Vi sono digrafi graduati con un numero finito r di livelli per i diversi $r \in \{2, 3, 4, ...\}$, quelli con l'insieme dei livelli in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ e quelli con l'insieme dei livelli in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Z}$.

Denotiamo con $\mathsf{DgrfGrd}_r$ le classi dei digrafi del primo tipo, con $\mathsf{DgrfGrd}_{\mathbb{N}}$ la classe dei digrafi del secondo tipo e con $\mathsf{DgrfGrd}_{\mathbb{Z}}$ la classe dei digrafi del terzo tipo.
Denotiamo con **DgrfGrd** l'intera classe dei digrafi graduati.

Per quanto riguarda i digrafi degli ordini totali, evidentemente:
su ciascuno dei livelli si trova un solo nodo;
per ogni $r = 2, 3, 4, ...$ il digrafo $\langle \mathbf{r}, \leq \rangle$ è un elemento della classe del primo tipo;
per ogni $z \in \mathbb{Z}$ $\langle (z : +\infty), \leq \rangle$ è un elemento della classe del secondo tipo;
$\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ è un elemento della classe del terzo tipo.

Più formalmente un digrafo finito $D := \langle Q, U \rangle$ si dice **digrafo graduato** sse $\mathsf{Partord}_Q \ni \langle Q_1, ...Q_r \rangle$ per un qualche $r = 2, 3, 4, ...$ e i cui archi sono tali che

$$Q_1 \,{}_{\sqcap}U \subseteq Q_2 \quad , \quad Q_2 \,{}_{\sqcap}U \subseteq Q_3 \quad , \quad \ldots , \quad Q_{r-1} \,{}_{\sqcap}U \subseteq Q_r \ .$$

Varianti facilmente prevedibili formalizzano i digrafi graduati dei tipi restanti.

Interessano soprattutto digrafi graduati connessi; in un digrafo graduato nonconnesso la attribuzione dei livelli ai nodi di una componente connessa potrebbe essere modificata con aumenti o diminuzioni complessive arbitrarie e in genere prive di interesse.

Osserviamo anche che non si possono considerare graduati i digrafi illimitati $\langle \mathbb{Q} \ , \ \leq \ \mathbf{lxg} \ \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{R} \ , \ \leq \ \mathbf{lxg} \ \leq \rangle$ [a12] .

B55 c. catene e anticatene

B55 c.01 Ricordiamo [a10] che un sottoposet totalmente ordinato di un poset è chiamato catena.
Si dice lunghezza di una catena finita il numero dei suoi elementi diminuito di 1.

All'opposto un sottoposet di un poset costituito da elementi mutuamente incomparabili è detto **anticatena**.
Evidentemente alle anticatene si può attribuire la forma $\langle S, \emptyset \rangle$ ove S denota un qualche insieme.

Se $\boldsymbol{P}$ è un poset denotiamo con $\mathsf{Chn}(\boldsymbol{P})$ l'insieme delle sue catene e denotiamo con $\mathsf{Antichn}(\boldsymbol{P})$ l'insieme delle sue anticatene.

Evidentemente ogni sottoposet di una catena è una catena e ogni sottoposet di una anticatena è una anticatena.
Quindi le catene più interessanti di un poset sono le sue catene massimali, cioè le catene che non possono essere estese.
Similmente le anticatene più interessanti di un poset sono le anticatene massimali, cioè le anticatene che non possono essere ampliate.

Tutte le catene nonmassimali possono essere ottenute come sottoposet di catene massimali e tutte le anticatene nonmassimali possono essere ottenute come sottoposet di anticatene massimali

Tutte le catene massimali di un poset limitato iniziano in un nodo minimale e terminano in un nodo massimale.
Tutte le catene massimali di un poset dotato di minimo iniziano con tale nodo. Tutte le catene massimali di un poset dotato di massimo finiscono con tale nodo (enunciato duale-UD del precedente).

B55 c.02 Consideriamo un insieme S di n elementi e il reticolo dei suoi sottoinsiemi $\left\langle S^{\mathfrak{P}}, \subseteq \right\rangle$; esso è dotato del minimo, $\emptyset$, e del massimo, lo stesso S.

Le sue catene massimali sono i cammini di lunghezza n (massimali) che iniziano con , terminano in S e toccano i nodi che si possono raggiungere con successive aggiunte di un suo elemento.
In effetti ogni catena massimale corrisponde a un processo di costruzione dell'insieme terreno attraverso n aggiunte di ciascuno dei suoi elementoi.

Ciascuna catena massimale è individuabile con la permutazione degli elementi di S che corrisponde agli n passi del corrispondente processo di "riempimento graduale" del "contenitore" S che inizia dal vuoto e si conclude con il "riempimento" dell'intero S.
Quindi nel poset $\left\langle S^{\mathfrak{P}}, \subseteq \right\rangle$ si trovano $n = |S|!$ cammini massimali.

Consideriamo il reticolo della divisibilità degli interi positivi, un intero positivo m, la sua decomposizione in fattori primi

$$m \;=\; {p_1}^{e_1}\, {p_2}^{e_2}\, \ldots\, {p_h}^{e_h}$$

e il poset reticolato finito $\left\langle \mathbf{(}m\mathbf{]}, \preceq_{:} \right\rangle$.

Per quanto riguarda le catene massimali del reticolo della divisibilità si giunge a conclusioni del simili a quelle raggiunte per i reticoli di sottoinsiemi.
Tutte le catene massimali vanno dal minimo 1 al massimo m.

In una catena massimale si può leggere il processo che considera una variabile intera il cui valore iniziale è 1 e che ad ogni passo viene moltiplicata per uno dei numeri primi p_j per ottenere un nuovo sottomultiplo di m fini ad ottenere m.

Ogni catena massimale corrisponde a una permutazione con ripetizione corrispondente al multiset stabilito dagli e_j e quindi il numero della catene massimale è dato dal valore indipendente dai fattori primi p_1, p_2,...,p_h [B13f18]

$$\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_h)!}{p_1!\, p_2! \cdots p_h!} \ .$$

B55 c.03 Un poset si dice **poset localmente finito** sse ogni suo intervallo è finito. Denotiamo con **PosetLf** la classe di questi posets.

Si dimostra facilmente che sono posets localmente finiti i seguenti posets numerabili e graduati:

$\langle \mathbb{P}, \preceq_{:} \rangle$ e $\langle \mathbb{P}^{\mathfrak{P}}, \subseteq \rangle$, aventi come terreno l'insieme degli interi positivi;

$\langle \mathsf{A}^*, \mathsf{pfx} \rangle$, $\langle \mathsf{A}^*, \mathsf{sfx} \rangle$, $\langle \mathsf{A}^*, \mathsf{ifx} \rangle$ e $\langle \mathsf{A}^*, \mathsf{sbseq} \rangle$, per ogni alfabeto A;

$\langle \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \subseteq \rangle$ e $\langle \mathfrak{P}(\mathbb{Z}) \subseteq \rangle$.

Le nozioni di intervallo e di intervallo finito sono autoduali-UD; quindi il duale-UD di un poset localmente finito è anch'esso localmente finito.

Ovviamente tutti i posets finiti sono localmente finiti. Sono tali anche $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ed $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$; ogni loro intervallo di lunghezza h è isomorfo a ogni catena di $h+1$ nodi e quindi all'intervallo di interi $\{0, 1, 2, ..., h\}$.

Non sono invece localmente finiti $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, in quanto tra due numeri razionali (risp. reali) si trovano sempre infiniti razionali (risp. reali).

Anche per tutti gli intervalli dei posets localmente finiti si può individuare effettivamente la relazione di copertura $\prec_{\mathtt{I}}$.

B55 c.04 Tra le catene di un poset localmente finito interessano in particolare le **catene massimali di un poset**, cioè le catene C che non possono essere estese, cioè tali che ogni altro elemento del poset ambiente risulta incomparabile con qualche elemento della C.

Risulta opportuno definire anche le **catene con ripetizione di un poset**, sequenze di elementi x_0, x_1,...,x_s tali che $x_0 \preceq x_1 \preceq ... \preceq x_s$.

Un poset $P = \langle P, \preceq \rangle$ si dice che soddisfa la condizione catenaria di Jordan-Dedekind o **condizione catenaria-JD** estremità (comparabili) hanno la stessa lunghezza finita.

Questa condizione evidenzia una regolarità che può aiutare a conoscere meglio le caratteristiche di un poset. Essa presenta interesse in particolare per i posets dotati di minimo **0** e per tutte le catene massimali che iniziano **0**, hanno lo stesso elemento massimo a ed hanno la stessa lunghezza.

Questa lunghezza viene chiamata **rango** di a di a e si denota con $\mathrm{rnk}(a)$; anche questa funzione del genere $\mathrm{rnk} \in \lceil\!\lceil\ P \longrightarrow \mathbb{N}\ \rceil\!\rceil$ può contribuire a conoscere meglio un poset.

(1) Prop.: Sia $\boldsymbol{P} = \langle P, \leq \rangle$ un poset dotato di zero **0** che soddisfa la condizione catenaria-JD. Per la sua funzione rango abbiamo:

(a) $\mathrm{rnk}(\mathbf{0}) = 0$,
(b) $a \prec_{\mathtt{I}} b \implies \mathrm{rnk}(b) = \mathrm{rnk}(a) + 1$ ∎

B55 c.05 Evidentemente la individuazione entro un poset di sottoposet con caratteristiche semplici come quelle delle catene e delle sottocatene possono migliorare la su comprensione.
Un modo di migliorare la conoscenza di un poset (come di strutture di molti altre specie) cerca di esprimere la struttura stessa come composizione di sue parti di con caratteristiche semplici.
Si cercano quindi caratterizzazioni di decomponibilità e in particolare si ricercano decomposizioni mediante catene e anticatene.

A questa esigenza danno risposte un teorema di Robert Palmer Dilworth (1950), che qui presentiamo in una versione per i posets finito ed una per i posets infiniti, e un successivo teorema duale dovuto a Leon Minski (1971) nel quale catene e anticatene si scambiano i ruoli.

B55 c.06 Teorema (**teorema di Dilworth**)
Sia $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ un poset finito. Il minimo numero di catene disgiunte la cui unione contiene tutti gli elementi di $\boldsymbol{P}$ è uguale al massimo numero di elementi costituenti un'anticatena di $\boldsymbol{P}$.

V. `Dilworth's theorem (we)`.

B55 c.07 Teorema (**teorema di Mirsky**)
Se il poset finito $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ possiede una catena di m elementi ma nessuna catena di $m+1$, allora $\boldsymbol{P}$ è unione di m anticatene.

V. `Mirsky's theorem (we)`.

B55 d. reticoli [1]

B55 d.01 In un poset due elementi x e y possono avere nessuno, uno o molti minoranti comuni; le stesse possibilità si hanno per i maggioranti comuni.

Se esistono minoranti di x e y e se esiste un massimo di tali minoranti, questo elemento viene chiamato l'**infimo dei due elementi** o l'**incontro dei due elementi** x e y.

Dualmente-UD si dice **supremo dei due elementi** o la **giunzione dei due elementi** x e y il minimo dei loro maggioranti, se questo elemento esiste.

Più in generale si possono definire l'infimo e il supremo di un qualsiasi sottoinsieme S di un poset, sempre condizionati dalla loro effettiva esistenza.

Ricordiamo che in inglese "incontro" si traduce *meet* e "giunzione" si rende *join*.

Per l'infimo di x e y si usano le notazioni $x \wedge y$ e $\inf(x, y)$; il supremo si denota con $x \vee y$ e con $\sup(x, y)$.
Per l'infimo di S si scrive $\inf(S)$ o $\bigwedge_{x \in S} x$, mentre il supremo di S si denota con $\sup(S)$ o $\bigvee_{x \in S} x$.

B55 d.02 Si dice **poset reticolato** un poset $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ in cui ogni coppia di elementi possiede un infimo e un supremo.

L'associazione a una coppia di elementi $\langle x, y \rangle$ di un poset reticolato dell'incontro $x \wedge y$ e l'associazione della giunzione $x \vee y$ si possono considerare due operazioni binarie.
Questo consente di esaminare i posets reticolati con gli strumenti dell'algebra.

Evidentemente queste due operazioni sono commutative: $x \wedge y = y \wedge x$ e $x \vee y = y \vee x$. Inoltre esse sono associative: infatti due espressioni come $x \wedge (y \wedge z)$ e $(x \wedge y) \wedge z$ individuano l'elemento $\inf(x, y, z)$, sicuramente esistente se le due precedenti espressini portano a un elemento di P; inoltre due espressioni come $x \vee (y \vee z)$ e $(x \vee y) \vee z$ individuano l'elemento $\sup(x, y, z)$, sicuramente esistente se le due espressioni individuano un elemento di P.

Osserviamo anche che le due operazioni sono costruzioni duali-UD, come lo sono le costruzioni inf e sup.

Si definisce più stringentemente **poset completamente reticolato** un poset tale che ogni suo sottoinsieme possiede un infimo e un supremo.

Denotiamo con **PosetLatt** la classe dei posets reticolati e con **PosetLattC** la classe dei posets completamente reticolati, classe evidentemente contenuta nella precedente.

I posets totali sono posets reticolati molto particolari, **PosetT** $\subset$ **PosetLatt**.

B55 d.03 Visto che in un poset reticolato $\langle P, \preceq \rangle$ il passaggio da due elementi x e y al loro infimo $x \wedge y$ e il passaggio al loro massimo $x \vee y$ sono operazioni binarie, possiamo prendere in considerazione la struttura algebrica costituita da $\langle P, \wedge, \vee \rangle$. Essa viene detta **reticolo** associato al poset reticolato.

Conviene ricordare che il termine "reticolo" viene tradotto in inglese con *lattice*, in francese da **treillis**, in tedesco da *verband*. Invece del termine reticolo, talora è stato usato il termine traliccio.

Si osserva poi che $x \preceq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$.
Da questo si deduce che valgono le cosiddette **proprietà di assorbimento in un reticolo**:

$$\forall x, y \in P \ : \ x \vee (x \wedge y) = x \qquad x \wedge (x \vee y) = x \ .$$

B55 d.04 Percorriamo ora il cammino opposto, definendo la nozione di reticolo esclusivamente in termini di operazioni algebriche e quindi associando a un generico reticolo un poset che si dimostra essere reticolato.

Definiamo **reticolo** una struttura algebrica della forma $\langle P, \wedge, \vee \rangle$, ove R è un insieme detto terreno del reticolo, mentre $\wedge$ e $\vee$ sono due operazioni binarie dette, risp., giunzione e incontro per le quali valgono le proprietà di

- commutatività $\forall x, y \in P \ : \ x \vee y = y \vee x \ \wedge x \wedge y = y \wedge$;
- idempotenza $\forall x \in P \ : \ x \vee x = x \ \wedge \ x \wedge x = x$;
- associatività $\forall x, y, z \in P \ : \ x \wedge (y \wedge z (x \wedge y) \wedge z \wedge x \vee (y \vee z (x \vee y) \vee z$;
- assorbimento $\forall x, y \in P \ : \ x \vee (x \wedge y) = x \qquad x \wedge (x \vee y) = x$.

Denotiamo con **Latt** la classe dei reticoli e con **LattF** la classe dei reticoli finiti.

Ad una struttura algebrica $\boldsymbol{L} = \langle P, \wedge, \vee \rangle \in$ **Latt** si associa canonicamente la relazione $\preceq_{\boldsymbol{L}}$ (che in seguito abbrevieremo con $\preceq$), definita da

$$x \preceq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y \ .$$

Si dimostra che $\preceq$ è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva e, complessivamente, che $\langle P, \preceq \rangle$ è un poset reticolato. Esso si dice **poset associato al reticolo** e si scrive

$$\langle P, \preceq_{\boldsymbol{L}} \rangle \ = \ \langle P, \wedge, \vee \rangle^{PosetLatt} \ .$$

B55 d.05 Si verifica anche che passando da un poset reticolato $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ al reticolo associato e da questo al poset associato si ritorna al poset $\boldsymbol{P}$.
Inoltre si dimostra che trasformando un reticolo $\boldsymbol{L}$ nel corrispondente poset reticolato e quest'ultimo nel reticolo associato si riottiene $\boldsymbol{L}$.

Abbiamo quindi che le nozioni di poset reticolato e di reticolo sono **nozioni logicamente equivalenti**, cioè ogni affermazione vera per uno di queste strutture può essere trasformata in una affermazione vera per la struttura corrispondente, previa modifica mediante un procedimento univoco di alcuni costrutti (come sostituire una relazione d'ordine con una coppia di operazioni binarie).

Si ha quindi un interessante esempio di **criptomorfismo** tra la specie delle strutture reticolo e la specie delle strutture poset reticolato.

Si tratta di una situazione che consente di portare sistematicamente le costruzioni e le proprietà di una specie di struttura all'altra.
Quindi si possono attribuire a i reticoli le nozioni di maggioranti e minoranti, di copertura, di zero o minimo e di unità o massimo, di atomi e di coatomi.

B55 d.06 Un'altra importante trasformazione applicabile a tutti i reticoli è il **passaggio al reticolo duale**: si tratta della trasformazione in cui i due operatori di incontro e giunzione si scambiano i ruoli.
Si dice anche che le operazioni di giunzione e incontro costituiscono un duetto di operazioni duali-UD.

Osserviamo che un reticolo è limitato inferiormente sse è dotato di minimo.
Dualmente-UD un reticolo è limitato superiormente sse è dotato di massimo.
Inoltre il minimo, se esiste, è l'elemento neutro per l'operazione $\vee$ ed è l'elemento assorbente o zero per la $\wedge$.
Dualmente-UD il massimo, se esiste, è l'elemento neutro per l'operazione $\wedge$ ed è l'elemento zero per la $\vee$.

B55 d.07 Consideriamo un sottoinsieme M del terreno P di un reticolo $\boldsymbol{L} = \langle P, \wedge, \vee \rangle$ e le restrizioni a $M \times M$ delle operazioni di giunzione e incontro $\wedge_M := \wedge|_{M \times M}$ e $\vee_M := \vee|_{M \times M}$.

Se queste operazioni forniscono elementi di M, ossia se M è un insieme chiuso rispetto alle due operazioni binarie di $\boldsymbol{L}$, la struttura $\boldsymbol{M} := \langle M, \wedge_M, \vee_M \rangle$ costituisce un reticolo che viene chiamato **sottoreticolo** di $\boldsymbol{L}$
Per enunciare la suddetta situazione si scrive $\boldsymbol{M} \leq_{Latt} \boldsymbol{L}$.

La definizione non esclude che sia $M = P$; se $M \subset P$ si dice che $\boldsymbol{M}$ è un sottoreticolo proprio di $\boldsymbol{L}$ e si scrive $\boldsymbol{M} <_{Latt} \boldsymbol{L}$.

B55 d.08 Un reticolo $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ dotato di minimo $\underline{0}$ è chiamato **reticolo atomico** sse ogni elemento $a \in L$ è esprimibile come supremo di un insieme di suoi atomi, cioè di suoi elementi che coprono il minimo.

Un reticolo $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ è chiamato **reticolo distributivo** sse valgono le seguenti identità:

$$\forall x, y, z \in L \ : \ x \wedge (y \vee z) \ = \ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{e} \quad x \vee (y \wedge z) \ = \ (x \vee y) \wedge (x \vee z) \ .$$

Queste identità esprimono la cosiddetta **proprietà distributiva dei reticoli**.

Entrambe le identità precedenti, grazie alla proprietà associativa delle operazioni di giunzione e incontro, possono essere generalizzate ad arbitrari insieme finiti di operandi:

$$\forall m, n \in \mathbb{P} \ , \forall x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n \in L \ : \ \begin{array}{l} \bigvee_{i=1}^{m} x_i \ \wedge \ \bigvee_{j=1}^{n} y_j \ = \ \bigvee_{i,j}^{m,n} (x_i \wedge y_j) \ , \\ \bigwedge_{i=1}^{m} x_i \ \vee \ \bigwedge_{j=1}^{n} y_j \ = \ \bigwedge_{i,j}^{m,n} (x_i \vee y_j) \end{array} \ .$$

B55 d.09 Un reticolo $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ è detto **reticolo modulare** sse per tutte le coppie di suoi elementi x, z avviene che:

$$z \leq x \quad \Longrightarrow \quad \forall y \in P \ : \ x \wedge (y \vee z) \ = \ (x \wedge y) \vee z \ .$$

Un reticolo $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ è chiamato **reticolo semimodulare** sse per tutte le coppie di suoi elementi x, z si ha

$$x \wedge y \prec_{\mathtt{I}} x \quad \Longrightarrow \quad \forall y \in P \ : \ y \prec_{\mathtt{I}} x \vee y \ .$$

B55 d.10 Consideriamo un reticolo limitato, cioè dotato del minimo $\underline{0}$ e del massimo $\underline{1}$, e sia x un suo elemento qualsiasi. Si dice **complemento nel reticolo** di x ogni x' tale che $x \wedge x' = \underline{0}$ e $x \vee x' = \underline{1}$.

Evidentemente $\underline{0}$ è complemento di $\underline{1}$ e viceversa; inoltre se x' è un complemento di x, allora x è un complemento di x'.

In un reticolo generico si possono avere sia elementi privi di complementi, sia elementi con un complemento e sia elementi con più complementi.

Un reticolo limitato è chiamato **reticolo complementato** sse ciascun suo elemento è dotato di uno e un solo complemento.
Nella figura che segue accanto a ogni elemento è scritto il numero dei suoi complementi.

B55 d.11 Consideriamo due posets $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle$ e $\boldsymbol{Q} = \langle Q, \leq \rangle$.
Si dice **prodotto diretto dei reticoli** $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} \ := \ \langle P \times Q, \preceq \times \leq \rangle$.

Osserviamo che $\preceq \times \leq = \{\langle p_1, p_2\rangle \in \preceq\ ,\ \langle q_1, q_2\rangle \in \leq : |\Big\langle\langle p_1, q_1\rangle, \langle p_1, q_1\rangle\Big\rangle$.
Si verifica facilmente che anche $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$ è un poset.

Esempi facilmente comprensibili di prodotti diretti di posets sono $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq\rangle$, $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq \times \leq\rangle$ e $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq \times \leq\rangle$.

Si osserva che questi prodotti di posets totali sono posets nontotali. Accade invece che sono posets reticolati. In effetti si dimostra facilmente che il prodotto diretto di posets reticolati è un poset reticolato.

La costruzione prodotto di posets si estende senza difficoltà agli insiemi finiti e agli insiemi numerabili di posets.

B55 d.12 Consideriamo gli insiemi delle potenze naturali dei due numeri primi 2 e 3 ordinate per divisibilità ed il loro prodotto diretto.

Esso è isomorfo al poset dei numeri naturali che sono potenze di 2 e 3 ordinati per divisibilità $\langle\{i, j \in \mathbb{N} :|\ 2^i\, 3^j\}, \preceq_:\rangle$.

Questo poset a sua volta è isomorfo a $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,, \leq \times \leq\rangle$.

Inoltre, evidentemente posets isomorfi a questi sono i posets della forma $\langle\{i, j \in \mathbb{N} :|\ m^i\, n^j\}, \preceq_:\ \rangle$, con n e m interi positivi coprimi.

Un ulteriore ampliamento riguarda i posets della forma $\langle\{i, j, k \in \mathbb{N} :|\ m^i, n^j, p^k\}, \preceq_:\ \rangle$, con m, n e p interi positivi mutuamente coprimi, tutti isomorfi tra di loro e al poset $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ,\ \leq \times \leq \times \leq\rangle$.

Non è difficile presentare come esempi di posets quelli aventi come terreno una generica potenza cartesiana d-esima di $\mathbb{N}$ e come relazione la potenza d-esima della divisibilità.

Ancora più esteso è il poset $\langle \mathbb{P}, \preceq_:\rangle$ descritto nel paragrafo che segue.

B55 d.13 Consideriamo ora l'insieme di interi positivi e la relazione di divisibilità che intercorre tra i suoi elementi: evidentemente si tratta di una relazione d'ordine che ha la una seguente raffigurazione di Hasse:

Osserviamo che si tratta di un digrafo graduato numerabile nel quale al livello più basso, livello 0, si trova il minimo 1 e al livello 1 degli atomi si trovano i numeri primi; al generico livello r si trovano i numeri interi positivi dati dal prodotto di r fattori primi, da contare con la propria molteplicità.

Questo reticolo si può considerare il prodotto diretto degli infiniti reticoli totali delle potenze naturali dei numeri primi.

Esso è isomorfo al reticolo delle sequenze finite di numeri naturali con le operazioni di sup e inf che a due sequenze $\langle a_1, ..., a_r\rangle$ e $\langle b_1, ..., b_s\rangle$ associano le sequenze di lunghezza $m = \max(r, s)$ formate, risp., dai $\max(a_i, b_i)$ e $\min(a_i, b_i)$, convenendo di assumere $a_j = 0$ per $r < j \leq m$ e $b_j = 0$ per $s < j \leq m$.

B55 e. reticoli booleani [1]

B55 e.01 Con le raffigurazioni essenziali di digrafi parzialmente ordinati si possono rappresentare efficacemente molte situazioni riguardanti importanti entità matematiche e oggetti o processi di elevato interesse pratico.

In questo paragrafo e nel seguente presentiamo alcune di queste situazioni concernenti entità matematiche fondamentali, molto semplici da definire e richieste da moltissime applicazioni.

B55 e.02 Sia S un insieme qualsiasi; si dice **poset booleano dei sottoinsiemi** di S $\langle \mathfrak{P}(S), \subseteq \rangle$.
L'insieme S viene detto **supporto del poset**, mentre il suo terren è $\mathfrak{P}(S)$.

I posets booleani di due insiemi equicardinali sono isomorfi: infatti le modalità di costruzione degli elementi di un supporto di poset booleano non influisce sulla relazione d'ordine "essere sottoinsieme di".

Questo fatto implica anche che permutando gli elementi di S si permutano i nodi del digrafo che raffigura $\langle \mathfrak{P}(S), \subseteq \rangle$ lasciando invariata la sua struttura: in altre parole il digrafo che corrisponde a un poset booleano e che possiamo chiamare **digrafo booleano** è invariante per le permutazioni dei suoi nodi indotte dalle permutazioni del suo supporto. Esso quindi presenta un esteso insieme di simmetrie.

Si individuano quindi classi di isomorfismo dei poset booleani che dipendono unicamente dal cardinale dell'insieme supporto.

Il poset $\langle \mathfrak{P}(S), \subseteq \rangle$ è un poset reticolato. Infatti per due qualsiasi sottoinsiemi A e B di S, il loro infimo, essendo il massimo dei sottoinsiemi di entrambi, non è che la loro intersezione $A \cap B$.
Dualmente-UD l'insieme dei maggioranti di A e B è dotato di un minimo che più precisamente non è altro che l'unione dei due sottoinsiemi $A \cap B$.

Dunque il reticolo associato a $\langle \mathfrak{P}(S), \subseteq \rangle$ è $\langle \mathfrak{P}(S), \cap, \cup \rangle$, struttura chiamata **reticolo booleano** di S.

B55 e.03 Le raffigurazioni dei digrafi dei posets booleani e dei corrispondenti reticoli , sono molto semplici quando il cardinale del supporto $n := |S|$ è piccolo, ad esempio per $n = 1, 2, 3$.

Le figure si appesantiscono notevolmente se si aumenta n: infatti il numero di parti di S è dato da 2^n, quantità che cresce in una misura molto rilevante con il crescere di n: in effetti per essa si parla di **crescita esponenziale**.

Cerchiamo di dare una raffigurazione dell'inclusione tra le parti di un insieme di 4 elementi. Si deve tracciare un digrafo con $2^4 = 16$ nodi ciascuno dei quali caratterizzato da un insieme con 0, 1, 2, 3 o 4 elementi.

Un primo problema pratico che si pone è quello della rappresentazione o codifica dei sottoinsiemi: un modo per individuarli si serve di stringhe binarie di lunghezza 4 corrispondenti alle sequenze indicatrici del supporto S che conviene arricchire con un ordinamento totale dei suoi elementi.

Per esempio se l'insieme supporto è $\{a, b, c, d\}$, in luogo di $\{b\}$ si scrive 0100, invece di $\{a, c\}$ si usa 1010 ed invece di $\{a, c, d\}$ si scrive 1011.

In tal modo si hanno scritture non facilmente interpretabili, in quanto basate su un ordinamento totale convenzionale, ma mediamente più concise, soprattutto per gli n elevati [B13d05].

Inoltre come vedremo su queste scritture bianarie si basano molti algoritmi efficientemente implementabili ed esse facilitano la comprensione dei mutui collegamenti tra i nodi della raffigurazione del reticolo.

B55 e.04 Ora una breve digressione collegata alla geometria multidimensionale.
Si osserva che il reticolo booleano per $n = 2$ è un quadrato e quello per $n = 3$ è la rappresentazione assonometrica di un cubo.
Per $n = 4$ si ha invece una figura che suggerisce una sovrapposizione di cubi; questa figura riguarda un cosiddetto **ipercubo quadridimensionale**, denotato da $\mathbf{Q}_4$, estensione delle figure precedenti allo spazio a 4 dimensioni.

È evidente che il cubo tridimensionale $\mathbf{Q}_3$ è delimitato da 6 facce (bidimensionali) $\boldsymbol{Q}_2$; non è difficile constatare che l'ipercubo $\boldsymbol{Q}_4$ è delimitato da 8 cubi $\mathbf{Q}_3$.

Situazioni analoghe si verificano per le dimensioni $d = 5, 6, 7, ...$, per le quali si hanno i cubi denotati con Q_d. Per trattare queste configurazioni più della intuizione spaziale estrapolata alle molte dimensioni risultano utili le codifiche binarie dei nodi del reticolo, ossia dei sottoinsiemi che essi rappresentano.

B55 e.05 Si osserva che per il reticolo booleano $\langle \mathfrak{P}(S), \cap, cup \rangle$ a ogni nodo $q \subseteq S$ corrisponde involutivamente il nodo rappresentante il sottoinsieme del supporto complemento di q, cioè $S \setminus q$.

Chiamiamo **poset complementato** un poset booleano $\langle P, \preceq \rangle$ sul cui supporto è definita una involuzione κ tale che

$$\forall x, y \in P : \; x \preceq y \Longrightarrow y^{\kappa} \preceq x^{\kappa} \; .$$

Si osserva che l'involuzione invocata è una **antiisotonia**, dove questo termine si applica a ogni trasformazione dal terreno di qualsiasi nel terreno di un altro poset (eventualmente lo stesso) scambiando l'ordinamento di due elementi comparabili.

Tornando al generico reticolo booleano risulta che è complementato, ove la complementazione corrisponde al passaggio da un sottoinsieme del suo supporto al sottoinsieme suo complementare.

Nei reticoli booleani si possono cercare di visualizzare o di immaginare le operazioni di unione, intersezione e complementazione in relazione alle rispettive raffigurazioni.

L'unione tra due parti dell'insieme supporto corrispondenti ai nodi q_1 e q_2 individua l'insieme corrispondente al nodo più in basso tra quelli che si trovano al di sopra sia di q_1 che di q_2 (maggioranti di q_1 e q_2).
L'intersezione tra due parti dell'insieme supporto corrispondenti ai nodi q_1 e q_2 individua invece l'insieme corrispondente al nodo più in alto tra quelli che si trovano al di sotto sia di q_1 che di q_2, nodi minoranti.

Infine la complementazione corrisponde a passare da un nodo x del reticolo a quello, che denotiamo con $\overline{x}$, che rappresenta il sottoinsieme del supporto complementare ed è individuabile con la n-upla binaria complementare di quella di x.

Si osserva che questo è il più distante sul reticolo, ossia è il nodo che può essere raggiunto da x solo con un percorso costituito da n archi, ciascuno dei quali comporta l'esclusione o l'inclusione di uno degli elementi del supporto.
Infatti per passare da un x al corrispondente $\overline{x}$ si devono cambiare tutte le n componenti della codifica binaria di x e ciascuna di queste modifiche corrisponde a percorrere un arco del reticolo. Chiaramente

ad un arco discendente corrisponde la trasformazione di un bit 1 in un bit 0, mentre un arco ascendente comporta la trasformazione di un bit 0 in un bit 1.

Le precedenti considerazioni possono essere chiarito dal digrafo per $n = 4$ e da alcuni cammini di complementazione messi in evidenza.

B55 e.06 Accade spesso di considerare collezioni limitate di parti di un insieme supporto, vuoi perché le parti rimanenti non rivestono interesse, vuoi perché non si riesce a conoscerle e a controllarle con sufficiente padronanza.

Per i sottoinsiemi ai quali si presta attenzione si devono prendere in considerazione le relazioni di inclusione, ricavabili riducendo i cammini sul reticolo booleano mediante eliminazione dei nodi corrispondenti alle parti trascurate.

Si osserva che le possibilità di effettuare su un digrafo così ottenuto le operazioni di unione, intersezione e complementazione rimangono: infatti il sottodigrafo così ottenuto è ancora un digrafo booleano.

Questa operazione di riduzione di un digrafo booleano è immaginabile con relativa facilità nel caso di eleiminazione dal supporto di un solo elemento: la cosaè del tutto evidente quando $|S| \leq 4$.
Per la comprensione della riduzione di più elementi basta pensare che si può ottenere con successive eliminazioni di singoli elementi.

Osserviamo che i sottodigrafi dei digrafi ordinati [D27d] sono anch'essi ordinati; questo discende dal fatto che eliminando un nodo di un digrafo ordinato si ottiene in digrafo che è ancora riflessivo, antisimmetrico e transitivo e questa invarianza si riscontra anche eliminando un qualsiasi insieme di nodi.
Con queste riduzioni si possono ottenere digrafi che non mantengono altre proprietà; nel caso dei sottodigrafi di digrafi booleani la caratteristica dell'essere booleani, come si è visto, viene mantenuta.

I sottodigrafi dei digrafi booleani costituiscono alternative interessanti ed efficaci dei diagrammi di Venn per raffigurare le relazioni che intercorrono tra collezioni di oggetti che soddisfano determinate proprietà e quindi per raffigurare fatti concernenti la classificazione di oggetti di vari generi.

In molte attività di interesse pratico, in particolare in varie attività amministrative, si incontra la opportunità di servirsi attentamente di questi sottodgrafi.

B55 e.07 In un reticolo booleano finito $\boldsymbol{P} = \langle \mathfrak{P}(S), \subseteq \rangle$ con supporto S di n elementi i nodi si ripartiscono nei livelli 0, 1, 2, ..., $n-1$ ed n: nel livello i si collocano i sottoinsiemi con i elementi.

La collezione di questi sottoinsiemi di S la denoteremo con le scritture $\mathfrak{P}_i(S)$ per $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Denotiamo con $\binom{n}{i}$ la numerosità di $\mathfrak{P}_i(S)$, cioè il numero delle parti di S contenenti i elementi.
Questa scrittura riteniamo opportuno che venga letta come "n binomiale i"; spesso essa viene letta "n su i", ma pensiamo che questa dizione sia più opportuno riservarla ad espressioni di una forma simile a n/i.

Un'altra dizione interessante per $\binom{n}{i}$, è "i scelte tra n" , dizione utilizzata dai testi in inglese e in particolare dal linguabggio TEX.

Gli interi positivi $\binom{n}{i}$ si dicono **coefficienti binomiali**, in quanto costituiscono i coefficienti dello sviluppo della potenza del binomio [B33f01].

Spesso essi vengono introdotti quando si presenta questo sviluppo: qui invece vengono presentati e studiati in relazione a nozioni che ci sembrano più essenziali.

B55 e.08 Osserviamo che $\binom{n}{i}$ dipende solo da n e da i e non dall'insieme supporto S: infatti se S è in corrispondenza biunivoca con un insieme S' questa biiezione induce un isomorfismo tra i reticoli booleani $\langle \mathfrak{P}(S), \subseteq \rangle$ e $\langle \mathfrak{P}(S'), \subseteq \rangle$.

In effetti questa considerazione implica anche che tutti i reticoli booleani relativi agli insiemi con un dato numero di elementi sono isomorfi.

Per calcolare i coefficienti binomiali è opportuno prendere in considerazione la loro totalità e pensarli disposti in un triangolo infinito, più precisamente in un triangolo del genere $\lceil \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$.

Questo schema in Italia viene solitamente chiamato triangolo di Tartaglia, dal soprannome del matematico rinascimentale che l'ha studiato. Più diffusamente viene chiamato triangolo di Pascal per ricordare il grande matematico francese che utilizzò i coefficienti binomiali in fondamentali studi sul calcolo delle probabilità.
In realtà esso è stato studiato fin dall'antichità in India, Grecia, Persia e Cina [`Pascal's triangle (we)`]. Qui, con una scelta forse troppo eurocentrica, lo chiamiamo **triangolo di Tartaglia-Pascal** [v.a. D20b05].

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n} \\
 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots &
\end{array}$$

B55 e.09 Osserviamo innanzi tutto che $\binom{0}{0} = 1$. Questo equivale ad affermare che esiste un solo insieme costituito da 0 elementi, l'insieme vuoto $\emptyset$.

Da questo fatto e dalla osservazione dei reticoli booleani relativa a $n = 1, 2, 3, 4$ si trova che la parte più alta del triangolo di Tartaglia-Pascal è la seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 1 &
\end{array}$$

B55 e.10 Si trova facilmente che per ogni n intero naturale:

$$\binom{n}{0} \;=\; \binom{n}{n} = 1 \;;$$

infatti un insieme qualsiasi di n elementi possiede un unico sottoinsieme con 0 elementi, $\emptyset$, e un unico sottoinsieme con n elementi, S stesso.

Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\binom{n}{i} \;=\; \binom{n}{n-i} \,.$$

Questa uguaglianza esprime il fatto che il numero dei sottoinsiemi di S con i elementi è uguale al numero dei sottoinsiemi con $n - i$ elementi, cioè che:

$$|\mathfrak{P}_i(S)| \;=\; |\mathfrak{P}_{|S|-i}(S)| \;.$$

In effetti a ogni sottoinsieme I di S si può associare il complementare $S \setminus I$ e questa corrispondenza è evidentemente biunivoca (anzi essa è una involuzione senza punti fissi) ∎

La precedente uguaglianza dice che il triangolo di Tartaglia-Pascal è simmetrico rispetto alla verticale, fatto evidente nel triangolino trovato in precedenza.

B55 e.11 Un altro fatto generale è dato dall'uguaglianza:

$$\binom{n}{1} \;=\; \binom{n}{n-1} \;=\; n \;.$$

Questa dice semplicemente che il numero dei sottoinsiemi di S con un solo elemento è uguale al numero degli elementi di S; in effettiè evidente che:

$$\mathfrak{P}_1\{a, b, ..., h\} \;=\; \{\{a\}, \{b\}, ..., \{h\}\} \;.$$

B55 e.12 Un po' più complessa è l'espressione del numero di sottoinsiemi con due elementi:

$$\binom{n}{2} \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;.$$

Dimostriamola considerando rappresentazioni dei sottoinsiemi che individuano ogni elemento di S con un segno peculiare e che si servono di allineamenti di questi segni.

Un sottoinsieme di due elementi è individuato da una coppia di segni diversi: il numero di tali coppie è chiaramente $n(n-1)$, in quanto il primo componente può scegliersi tra n segni e il secondo tra gli $n - 1$ rimanenti. Accade però che due rappresentazioni come ab e ba forniscono lo stesso insieme.

Quindi si hanno $\dfrac{n(n-1)}{2}$ blocchi, ciascuno con due stringhe che danno lo stesso duetto. La formula è così dimostrata.

B55 e.13 Dimostriamo ora una formula che consente di estendere il triangolo di Tartaglia-Pascal quanto si vuole:

$$\binom{n}{i} \;=\; \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \;.$$

Per dimostrare questa uguaglianza pensiamo di ripartire la collezione $\mathcal{C}$ dei sottoinsiemi di S con i elementi in due sottocollezioni: la collezione $\mathcal{C}'$ dei sottoinsiemi che contengono un dato elemento a e la collezione $\mathcal{C}''$ di quelli che non contengono a.

Dimostriamo ora che la precedente uguaglianza traduce l'uguaglianza evidente:

$$|\mathcal{C}| \;=\; |\mathcal{C}'| + |\mathcal{C}''| \;.$$

Se da ciascuno dei sottoinsiemi di S facenti parte di $\mathcal{C}'$ eliminiamo a abbiamo la collezione dei sottoinsiemi con $i - 1$ elementi di $S \setminus \{a\}$; per il loro numero si trova induttivamente:

$$|\mathcal{C}'| \;=\; \binom{n-1}{i-1} \;,$$

in quanto $S \setminus \{a\}$ possiede $n - 1$ elementi.

Per il numero di sottoinsiemi facenti parte di $\mathcal{C}''$ basta osservare che questa si può considerare come la collezione dei sottoinsiemi di $S \setminus \{a\}$ con i elementi: quindi

$$|\mathcal{C}''| \;=\; \binom{n-1}{i}$$

e l'uguaglianza è dimostrata.

B55 e.14 Possiamo ora dimostrare la seguente espressione chiusa per i coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{i} \;=\; \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\;.$$

Questa formula si verifica essere vera per le parti alte del triangolo di Tartaglia-Pascal relative a $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e per n qualsiasi e $i = 0, 1, 2, n-2, n-1, n$.

Dimostriamola pensando a rappresentazioni dei sottoinsiemi di S fornite da stringhe formate da n segni che consentono di identificare gli elementi di S. Le stringhe formate da questi n segni diversi sono $n!$. Ogni stringa individua un sottoinsieme di $\mathfrak{P}_i(S)$, se si conviene che i suoi primi i segni individuino gli elementi nel sottoinsieme.

Di queste rappresentazioni molte individuano lo stesso sottoinsieme, precisamente le $i!(n-i)!$ stringhe ottenibili l'una dall'altra permutando come si vuole i primi i segni tra di loro e i rimanenti $n-i$ segni tra di loro.

Quindi l'insieme delle $n!$ rappresentazioni si suddivide in $\dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$ blocchi, ciascuno contenente $i!(n-i)!$ rappresentazioni, tutte rappresentanti lo stesso sottoinsieme.
La formula risulta così dimostrata.

B55 e.15 A questo punto si può procedere a estendere il triangolo di Tartaglia-Pascal in ciascuno dei contesti nei quali serve. Nella presente pagina scriviamo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & & \\
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\
\end{array}$$

B55 f. reticoli di partizioni di insiemi

B55 f.01 Introducendo le partizioni di un insieme, che chiameremo anche **partizioni-s** per distinguerle dalle partizioni.i o partizioni di un qualche intero positivo, abbiamo definito la relazione "essere non meno fine di".

Anche questa è una relazione di ordine: riflessività e antisimmetria sono evidenti; per la transitività basta osservare che il passaggio da una partizione π a una più fine può descriversi come l'effettuazione di nuove suddivisioni sopra alcune parti di π e quindi due passaggi a partizioni via via più fini possono descriversi come l'effettuazione di un nuovo gruppo di suddivisioni eseguite in due momenti successivi.

La raffigurazione sopra-sotto delle partizioni dell'insieme $\{a, b, c, d\}$ è:

B55 f.02 Si può osservare che anche con un insieme formato da pochi elementi si ottiene un digrafo delle partizioni-s piuttosto complesso che presenta una grande varietà di collegamenti.

Molti problemi pratici portano a considerare digrafi di partizioni e a operare mediante essi ed entro di essi.
Come suggerisce la figura precedente si tratta di strutture discrete definibili con richieste generali facili da formulare, ma assai estese e articolate quando gli insiemi supporto diventano un poco estesi.
Questo comporta l'onerosità della individuazione delle soluzioni per molti degli accennati problemi pratici.

B55 f.03 Accanto alla relazione tra partizioni-s, è interessante esaminare le corrispondenti partizioni-I, partizioni degli interi positivi.

Ricordiamo che, date due partizioni-I y_1 e y_2 di un intero positivo, si dice che y_2 è più fine di y_1 se y_2 si può ottenere suddividendo in più addendi uno o più addendi di y_1. La raffigurazione di questa relazione nel caso delle partizioni-I di 4 è:

Si ha quindi un digrafo assai più semplice del precedente.
Questi digrafi, noti come **reticoli di Young** (in onore di Alfred Young) si possono tracciare facilmente anche nei casi delle partizioni-I di 5 e di 6.

B55 f.04 Osserviamo che a una partizione-s π di un insieme S di n elementi corrisponde naturalmente una partizione.i di n, quella avente come addendi i cardinali delle parti di π.

Per questa trasformazione due partizioni ottenibili l'una dall'altra con una permutazione degli elementi di S conducono alla stessa partizione.i.

Questa trasformazione si può presentare come il processo consistente nel considerare o rendere indistinguibili i diversi elementi di S, oppure nel "dimenticare" o "cancellare" le loro individualità.

Questa trasformazione fortemente semplificatrice, ossia caratterizzata da forte perdita di informazioni riguardanti singoli elementi (accorpamento deindividualizzante) e da evidenziazione di caratteristiche

che possono risultare più essenziali per la definizione di algoritmi "strategici", la chiameremo **quoziente dimenticanza**.

È poi evidente che a due partizioni-s π_1 e π_2 dello stesso insieme, la prima strettamente più fine della seconda, il quoziente dimenticanza fa corrispondere, risp., due partizioni-I y_1 e y_2, la prima delle quali strettamente più fine della seconda.

B55 f.05 A questo punto si può osservare che il reticolo di Young di un intero positivo n si ottiene dal reticolo delle partizioni di un insieme con n elementi "fondendo" i nodi che corrispondono a partizioni-s ottenibili l'una dall'altra permutando gli elementi di S e fondendo di conseguenza gli archi.
Questo fatto dovrebbe risultare chiaro anche dalla sola osservazione dei digrafi nel caso $S = \{a, b, c, d\}$.
Si può dire che i nodi dei reticoli di Young permettono di dare una classificazione importante dei nodi dei reticoli delle partizioni-s, reticoli che rispetto ai precedenti sono assai più "affollati" e tendenzialmente presentano svariati raggruppamenti di sottoinsiemi mutuamente isomorfi.

B55 g. omomorfismo e isomorfismo tra digrafi

B55 g.01 A questo punto può essere utile ritornare sulla nozione di isomorfismo tra digrafi facendo riferimento ai reticoli booleani e ai reticoli delle partizioni-s relativi a insiemi diversi ma con uguale numerosità.

Spesso si sostiene che l'identità dei singoli elementi del sostegno di un reticolo o in generale di una relazione coinvolgente un insieme ambiente non presenta un interesse sostanziale. Questo in particolare consente di giustificare come veniale l'abuso di linguaggio che porta a parlare, per insiemi supporto o più genericamente per insiemi ambiente di data numerosità n, di un solo reticolo o in generale di una sola relazione (se non si vuole parlare di classi di equivalenza).

Occorre dire che questo atteggiamento è giustificato per le persone che si occupano di conoscenze di interesse generale, ma non deve indurre ad attribuire scarsa importanza, anche dal punto di vista dei potenziali contenuti matematici, alle attività finalizzate alla soluzione di problemi più circoscritti che possono essere oggetti di un inquadramento generale indotto dalla focalizzazione sulle argomentazioni considerate più essenziali.

Infatti il lavoro da svolgere per giungere a soluzioni effettive e riutilizzabili di problemi specifici in molte circostanze fa emergere esigenze che si scoprono essere presenti in molte altre problematiche e quando si esaminano queste esigenze spesso si aprono nuove prpblematiche di ampia portata e quindi tematiche di interesse generale che sono risultate riconoscibili come tali solo dopo riscontri applicativi tangibili e giudicati non episodici.

B55 g.02 A rigore si dovrebbe parlare della classe di isomorfismo dei reticoli booleani relativi agli insiemi con n elementi e della classe di isomorfismo dei reticoli delle partizioni-s degli insiemi formati da n elementi.
La pesantezza e la poca immediatezza della frase precedente giustifica le abbreviazioni introdotte precedentemente.

Si può inoltre ritornare sulla nozione di omomorfismo tra digrafi facendo notare che la trasformazione che porta dal reticolo delle partizioni-s per gli insiemi di un dato cardinale n al reticolo di Young relativo allo stesso n costituisce un significativo esempio di omomorfismo tra reticoli.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php