1

Capitolo B53
relazioni binarie in generale

Contenuti delle sezioni

a. relazioni binarie p. 2
b. operazioni su relazioni binarie p. 8
c. digrafi e relazioni binarie p. 10
d. caratterizzazioni principali delle relazioni p. 12
e. strutture dotate di ordinamento p. 17
f. relazioni ternarie e di arietà superiore p. 18

19 pagine

B53 0.01 Il capitolo è dedicato alle proprietà generali delle relazioni binarie e ad alcune semplici considerazioni sulle relazioni ternarie e su quelle di arietà superiore.

Alcune delle definizioni e delle segnalazioni nelle prossime pagine sono già comparse in precedenza e saranno ripresentate per maggiore autonomia delle pagine attuali.
In effetti il capitolo vuole servire a raccordare i molti risultati sopra le relazioni che devono essere tenute presenti praticamente in tutte le parti dell'*esposizione*.

Si inizia con l'inquadramento delle relazioni binarie tra le relazioni di generica arietà e con alcune loro caratterizzazioni generali.

Si prosegue con la presentazione delle svariate operazioni che risulta opportuno applicare alle relazioni e di alcune notazioni specifiche che riescono a prescindere dagli ambienti nei quali le singole relazioni sono collocate.

Successivamente per le relazioni finite e numerabili si riprendono le raffigurazioni mediante grafi e le relative terminologie.

Si espongono poi le più rilevanti caratterizzazioni delle relazioni, entrando in un buon numero di dettagli della casistica.

In seguito si accenna alle strutture che presentano relazioni d'ordine compatibili con importanti operazioni algebriche e con le proprietà topologiche più frequentemente invocate.

Infine si aggiungono alcune considerazioni sulle relazioni ternarie e di arietà superiore limitandosi a pochi esempi e segnalando come si può cercare di ricondurle a relazioni binarie.

B53 a. relazioni binarie

B53 a.01 Consideriamo l'intero k che inizalmente pensiamo maggiore o uguale a 2, gli insiemi non vuoti A_1, A_2,... e A_k (non necessariamente diversi, non necessariamente omogenei e non necessariamente con lo stesso cardinale) e il loro prodotto cartesiano $C := A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$.

Si dice **relazione k-aria** tra A_1, A_2, ... e A_k, oppure relazione k-aria entro C, ogni sottoinsieme $R \subseteq C$.
Il prodotto cartesiano C viene detto terreno della relazione R e l'intero k **arietà della relazione**.

Per disporre di espressioni e di locuzioni più versatili in grado di formulare definizioni ed enunciati di più ampia portata e opportunamente concisi e uniformi, si conviene che l'arietà k possa valere anche 1 0.

Diciamo quindi che ogni sottoinsieme di un dato ambiente E può assumere il ruolo di **relazione unaria entro l'insieme** che costituisce il suo terreno.

Per la maggior parte dei settori della matematica le relazioni più importanti sono le binarie, cioè i sottoinsiemi di un prodotto cartesiano della forma $A_1 \times A_2$.
Molte importanti relazioni binarie sono sottoinsiemi di un quadrato cartesiano $A_1 \times A_1$; per esse si parla di **relazioni entro un insieme** A_1.

Ricordiamo che una relazione tra A_1 ed A_2 viene chiamata anche corrispondenza tra A_1 ed A_2.

Tra le relazioni di arietà superiore a 2 si distinguono le relazioni associate a equazioni o disequazioni studiate nell'ambito della analisi infinitesimale e della geometria senza porre in rilievo il fatto che ciascuna di esse è una relazione k-aria con $k \geq 3$, ossia è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano di k fattori.

Tra questi ultimi vanno segnalate relazioni che si incontrano in alcuni settori dell'elaborazione dei dati, ed in particolare nel settore delle basi di dati [`Relational database (wi)`].

Nel seguito del capitolo, a esclusione dell'ultimo paragrafo dedicato alle relazioni di arietà superiore a 2, e in molti altri contesti la accennata prevalente importanza delle relazioni binarie, induce a chiamarle semplicemente **relazioni**.
Questa abbreviazione viene adottata in molti contesti senza rischiare serie ambiguità.

B53 a.02 Numerose relazioni binarie sono ben note e sono state incontrate in molte delle pagine precedenti. Alcune sono insiemi di coppie finite, altre insiemi costruibili, altre ancora sono state introdotte prescindendo dalla possibilità di esaminarle o di elaborarle concretamente, ossia come insiemi-E o insiemi-P.

Ricordiamone alcune.

- le relazioni $=$ e $\neq$ applicabili entro un qualsivoglia insieme;
- le relazioni tra stringhe essere prefisso, essere suffisso, essere infisso, essere sottostringa;
- le relazioni tra insiemi di ogni genere individuate dai simboli $\subset$, $\subseteq$, $\supset$, $\supseteq$, $\diamondsuit$, $\lozenge$, $\fallingdotseq$ e $\circledast$;
- le relazioni tra numeri naturali, tra interi, tra numeri razionali otra numeri reali individuate dai segni $<$, $\leq$, $>$ e $\geq$;
- le relazioni tra numeri interi collegate alla divisibilità come $\preceq_{:}$, cioè "essere divisore di", $\perp$, cioè "essere mutuamente primo con";
- relazioni tra enti geometrici tra le quali il parallelismo $/\!/$ e la perpendicolarità $\perp$ tra rette, segmenti, piani e sottospazi;
- le relazioni di incidenza tra vertici e spigoli di un grafo nonorientato;

- le relazioni di incidenza tra vertici, spigoli e facce di un poligono o di un poliedro.

Osserviamo anche che tutte le curve speciali piane (ad esempio quelle elencate in G70 o quelle presentate nella *Encyclopédie des Formes Mathématiques Remarquables* [`http://www.mathcurve.com/`], in quanto insiemi di coppie di numeri reali o complessi si possono considerare relazioni entro $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o entro $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Segnaliamo inoltre che a ogni curva piana nonintrecciata chiusa (ad esempio una ellisse, una tricuspoide o una quartica piriforme) sono associati l'insieme dei suoi punti interni e quello dei suoi punti esterni in modo da determinare una relazione di equivalenza entro $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Di queste equivalenze nella sezione :f saranno accennate le generalizzazioni relative alle figure in tre 4 e più dimensioni.

B53 a.03 Sia R una relazione binaria; in luogo di $\langle a, b\rangle \in R$ spesso conviene usare la notazione equivalente $a \mathrel{\text{⍝}} R \mathrel{\text{⍝}} b$; questa si dice **notazione infissa della relazione** inoltre in genere, se non si rischia l'ambiguità, a questa viene preferita l'abbreviazione aRb .

Una notazione come $4 \leq 6$ si può considerare la notazione infissa equivalente alla $\langle 4, 6\rangle \in \leq$, notazione nella quale $\leq$ è interpretato come un insieme di coppie di numeri.
Più precisamente, in relazione alle esigenze del contesto, accade di considerare $\leq$ come sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o di un quadrato cartesiano di qualche altro qualche altro insieme totalmente ordinato.

Dal complesso degli esempi precedenti emerge il carattere multivalente e versatile della nozione di relazione.
Ricordiamo inoltre la decisione [B19d02] di denotare con **Rel** la classe di tutte le relazioni binarie.

B53 a.04 Per una qualsiasi relazione $R \subseteq A \times B$ si introducono i seguenti elementi:

dominio della relazione : $R^{\vdash} := \mathsf{dom}(R) := \{\, a \in A \;\P\; (B \ni b \;\P\; a\,R\,b) \,\} = \boldsymbol{Prj}_1(R)$;

codominio della relazione : $R^{\dashv} := \mathsf{cod}(R) := \{\, b \in B \;\P\; (A \ni a \;\P\; aRb) \,\} = \boldsymbol{Prj}_2(R)$.

Il codominio di una relazione R si dice anche **immagine della relazione** R e si denota anche con $\mathrm{img}(R)$.

Per ciascuna relazione R si riscontra una e una sola delle situazioni che seguono.

- $R^{\vdash} = R^{\dashv}$; questo è il caso della uguaglianza, della differenza e delle svariate relazioni di equivalenza; le relazioni con questa proprietà sono chiamate **relazioni presimmetriche**.
- $R^{\vdash} \subset R^{\dashv}$, come la relazione $>$ sugli interi naturali e su ogni insieme totalmente ordinato inferiormente limitato (e in particolare finito), osservando in particolare che entro $\mathbb{N}$ $0 \in \geq^{\dashv} \setminus >^{\vdash}$.
- $R^{\vdash} \supset R^{\dashv}$, come la relazione $<$ sugli interi nonpositivi e su ogni insieme totalmente ordinato superiormente limitato (e in particolare finito), osservando in particolare che entro $\mathbb{Z}_{-0}$ $0 \in \leq^{\dashv} \setminus <^{\vdash}$.
- $R^{\vdash} \Diamond R^{\dashv}$, come accade per la incidenza tra vertici e spigoli dei grafi nonorientati e caratterizza i nodi dei digrafi bipartiti.
- $R^{\vdash} \mathrel{\substack{\mathrm{I}\\\mathrm{II}\\\mathrm{III}}} R^{\dashv}$, come accade per la funzione $\lceil a \in \{1, 2, 3\} \mapsto a + k \rceil$ con $k \in \mathbb{P}$ e per tutte le biiezioni ra insiemi diversi anche per pochi elementi.

B53 a.05 Per taluni sviluppi riguardanti una relazione $R \subseteq A \times B$ si pone la questione della distinzione tra l'insieme di coppie R e la coppia $\langle A \times B, R\rangle$.

Quando occorre evidenziare questa distinzione per la coppia della forma $\langle A \times B, R\rangle$ ci serviremo del termine relazione collocata in $A \times B$; per una tale coppia diremo che il rettangolo cartesiano $A \times B$ costituisce una collocazione della R.

Inoltre useremo la scrittura $\mathbf{Rel}_{A,B}$ per denotare l'insieme delle relazioni collocate entro $A \times B$.

Evidentemente l'insieme delle relazioni collocabili in $A \times B$ è $\mathfrak{P}(A \times B)$; per questo insieme si usa anche la notazione $\lceil\, A \text{——} B \,\rceil$, notazione che si avvicina alle notazioni per i generi delle funzioni come $\lceil\, A \longrightarrow B \,\rceil$ e $\lceil\, A \longmapsto\!\!\triangleright\, B \,\rceil$ [B12b].

Consideriamo in particolare le relazioni collocate in quadrati cartesiani, cioè insiemi di coppie della forma $R \subseteq A \times A$ per qualche insieme A; queste entità le chiamiamo **relazioni collocate entro un insieme**, A, e per il loro insieme usiamo la notazione $\mathbf{Rel}_A := \mathbf{Rel}_{A,A}$.

L'insieme delle relazioni che si possono collocare su A è dunque $\mathfrak{P}(A^{\times 2})$, ovvero $\lceil\, A \text{——} A \,\rceil$.

B53 a.06 Consideriamo una relazione collocata $\langle A \times B, R\rangle \in \mathbf{Rel}_{A,B}$.

Per ogni $\langle A'', B''\rangle$ con $A'' \supseteq A$ e ogni $B'' \supseteq B$ è evidentemente lecito prendere in considerazione la relazione collocata $\langle A'' \times B'', R\rangle$.
Inoltre la relazione R si può collocare senza perdita di elementi (coppie) sopra uno qualsiasi dei rettangoli cartesiani $A' \times B'$ che contengono $R^{\vdash} \times R^{\dashv}$.

Si osserva anche che per ogni $\langle \overline{A}, \overline{B}\rangle$ con $\overline{A} \subseteq A$ e $\overline{B} \subseteq B$ è lecito prendere in considerazione le relazione collocate $\langle \overline{A} \times \overline{B}, R \cap \overline{A} \times \overline{B}\rangle$, $\langle \overline{A} \times B, R \cap \overline{A} \times B\rangle$ e $\langle A \times \overline{B}, R \cap A \times \overline{B}\rangle$.

Occorre segnalare che vi sono proprietà e impieghi delle relazioni sulle quali la collocazione non ha alcuna influenza, mentre per altre essa presenta interesse.
In particolare spesso si studiano relazioni derivate da esigenze per le quali il dominio e il codominio rimangono da precisare.
In alcune circostanze la collocazione di una relazione deve essere riadattata se si deve armonizzare con la collocazione di altre relazioni. questo accade soprattutto per relazioni da considerate sottoinsiemi di quadrati cartesiani di interesse applicativo.

Può accadere che si introduca una relazione R come relazione tra due insiemi, $R \subset A \times B$, ma che per taluni sviluppi risulti opportuno considerare una sua variante definita tra un sottoinsieme o un sovrainsieme di A oppure di B.

Per esempio relazioni numeriche come $\leq$ e $>$ nell'analisi infinitesimale spesso si intendono collocate sopra l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ma in talune circostanze può essere opportuno limitarsi a considerarle relazioni sopra un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ come un suo intervallo, $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$, $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ o sopra il più circoscritto insieme dei numeri primi.

Spesso risulta comodo chiedere che una relazione sia collocata sopra un unico insieme, cioè che si consideri sottoinsieme di un quadrato cartesiano.
In effetti per ogni relazione si ha

$$R \subseteq (R^{\vdash} \times R^{\dashv}) \subseteq (R^{\vdash} \cup R^{\dashv}) \times (R^{\vdash} \cup R^{\dashv}) .$$

Quindi in considerazioni che non si curano di esigenze elaborative, ogni relazione R si può collocare sopra un unico ben determinato insieme; la scelta di questo insieme andrebbe effettuata tenendo conto soprattutto delle esigenze espositive; talora può essere opportuno scegliere questo insieme come il minimale, cioè $R^{\vdash} \cup R^{\dashv}$, in altri casi potrebbe essere preferibile un sovrainsieme del minimale avente limiti più evidentemente definibili.

B53 a.07 Consideriamo dunque una relazione collocata sopra un insieme $\langle A \times A, R\rangle$.
Si dice **relazione trasposta** o **relazione inversa** di R: $R^{\intercal} = R^{\leftarrow} := \{\langle a, b\rangle \in R :|\, \langle b, a\rangle\}$. Evidentemente anche $\langle A \times A, R^{\intercal}\rangle$ è una relazione collocata sopra A.

Chiaramente per ogni relazione R si ha $(R^\mathsf{T})^\mathsf{T} = R$. In altre parole la trasposizione è una involuzione entro ciascuna classe $\mathbf{Rel}_A$.
Si osserva che affermare ⌜ $R \subseteq A \times B$ ⌝ equivale a enunciare ⌜ $R^\mathsf{T} \subseteq B \times A$ ⌝ .
Inoltre sono evidentemente equivalenti gli enunciati ⌜ $\mathsf{dom}(R^\mathsf{T}) = \mathsf{cod}(R)$ ⌝ e ⌜ $\mathsf{cod}(R^\mathsf{T}) = \mathsf{dom}(R)$ ⌝ .

Per esempio per le relazioni numeriche si ha

$$\leq^\mathsf{T} = \geq \qquad \text{e} \qquad <^\mathsf{T} = > ,$$

mentre per le relazioni insiemistiche

$$\subseteq^\mathsf{T} = \supseteq \qquad \text{e} \qquad \subset^\mathsf{T} = \supset .$$

Inoltre la trasposta della relazione ⌜ essere divisore di ⌝ è la relazione ⌜ essere multiplo di ⌝ .

B53 a.08 Le relazioni invarianti per la trasposizione di relazioni collocate, cioè le relazioni coincidenti con la propria trasposta, sono dette **relazioni simmetriche**.

Sono evidentemente simmetriche l'uguaglianza e la diversità. È ragionevole ritenere che in genere risulti più semplice considerare una relazione simmetrica collocata sopra un quadrato cartesiano, cioè che abbia dominio e codominio coincidenti, cosa sempre ottenibile.

Evidentemente la trasposta di una relazione simmetrica è simmetrica: possiamo considerare che

$$R = R^\mathsf{T} \iff R^\mathsf{T} = (R^\mathsf{T})^\mathsf{T} = R .$$

Osserviamo esplicitamente che vi sono relazioni presimmetriche, cioè relazioni aventi dominio e codominio coincidenti, che non sono simmetriche: per esempio la relazione $\leq$ sopra insiemi come $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ è presimmetrica ma non simmetrica.

B53 a.09 Quando si deve esaminare una sola relazione spesso la sua collocazione è poco importante e spesso tale collocazione può non essere esplicitata senza che questo comporti serie ambiguità.

Talora il prodotto cartesiano $A \times B$ nel quale risulta opportuno collocare una relazione R si impone con una certa evidenza e quindi in molti di questi casi può essere sottinteso senza conseguenze.
In particolare molte relazioni R presimmetriche si intendono implicitamente collocate entro il rispettivo quadrato cartesiano minimale $R^\vdash \times R^\vdash$.

Talvolta invece si rende necessario essere circostanziati sulla collocazione di una relazione; questo accade quando la relazione riguarda entità in corso di indagine, ad esempio quando viene ottenuta componendone altre o quando è interessante confrontarla con altre [:b].

Vi sono inoltre molti sviluppi nei quali non ha sostanziale importanza definire la collocazione e risulta possibile senza rischiare ambiguità lasciarla inespressa e anche non distinguere tra le possibili relazioni collocate di uno stesso insieme di coppie.

La non precisazione della collocazione può semplificare sensibilmente alcune presentazioni e si giustifica nella confidenza che il lettore sia in grado di giungere a precisare le collocazioni nelle circostanze che lo richiedano (circostanze in genere considerate remote).

B53 a.10 Vediamo ora alcune situazioni nelle quali può essere opportuno esplicitare la collocazione di una relazione.

Quali che siano gli insiemi A e B, l'insieme vuoto collocato entro $A \times B$ si può chiamare **relazione assurda** tra A e B, mentre $A \times B$ collocato entro $A \times B$ si può chiamare **relazione ovvia** tra A e B.

Quale che sia l'insieme A, si dice **relazione identica** o **identità** su A l'insieme di tutte le coppie aventi i due membri identici e appartenenti ad A:

$$\mathsf{Id}_A \ := \ \{a \in A :| \ \langle a, a\rangle\} \ .$$

Essa si denota anche con A^{Id} e viene anche chiamata **diagonale** di $A \times A$ e viene denotata con diag(A).

B53 a.11 Si dice **relazione opposta** della relazione collocata $\langle A \times B, R\rangle$ la relazione collocata

$$\langle A \times B, (A \times B) \setminus R \ .$$

Essa viene anche detta **negazione della relazione** e se si è convenuto di collocare R in $A \times B$, la si può denotare con la semplice notazione $\neg R$.

Questa dizione, insieme a "relazione ovvia" e "relazione assurda", costituiscono termini adottati per il calcolo proposizionale [B60]. Questa teoria formale si applica in modo piuttosto semplice alle affermazioni riguardanti relazioni chiaramente collocate o facilmente collocabili.
Le proposizioni della forma $\langle a, b\rangle \in R$ forniscono chiari esempi di proprietà del calcolo proposizionale.

Il termine *negazione di una relazione* può essere chiarito dalla seguente equivalenza tra enunciati

$$\forall \langle a, b\rangle \in A \times B \quad : \quad \langle a, b\rangle \in (A \times B) \setminus R \iff \langle a, b\rangle \notin R \ .$$

B53 a.12 Vediamo situazioni nelle quali è ammissibile parlare di passaggio alla relazione opposta senza precisare la sua collocazione entro un rettangolo cartesiano $A \times B$.

Si può asserire senza collocazioni esplicite che l'opposta della relazione numerica $<$ è la relazione $\geq$.
Similmente si può affermare che l'opposta della relazione insiemistica $\supset$ è la $\subseteq$.

In molti di questi casi interessano conclusioni per le quali la precisa collocazione delle relazioni è ininfluente, oppure che risultano valide per tutte le collocazioni ragionevoli.
Per questi casi si possono citare le relazioni di parallelismo e di ortogonalità che possono riguardare vettori, rette e piani segmenti

In altre situazioni accade che il contesto e la finalità del discorso corrente conducono "naturalmente" a ritenere che, per esempio, $<$ e $\geq$ riguardino numeri reali, oppure numeri razionali positivi, oppure numeri interi, oppure ... .
In altri contesti il lettore può risultare indotto a pensare che $\supset$ e $\subseteq$ riguardino insiemi del tutto generici, oppure insiemi di vettori, oppure insiemi di figure piane, oppure ... .

B53 a.13 Consideriamo ancora $R \in \mathbf{Rel}_{A,B}$.

Per ogni $a \in A$ si dice **immagine della relazione** R di a $a_{\text{Я}} R \ := \ \{b \in B \mid a_{\text{Я}} R_{\text{R}} b\}$.

Per ogni $b \in B$ si dice **controimmagine della relazione** R di b $R_{\text{R}} b \ := \ \{a \in A \mid a_{\text{Я}} R_{\text{R}} b\}$.

I due segni ora introdotti "$_{\text{Я}}$" e "$_{\text{R}}$" sono connettivi riguardanti una relazione e un elemento che essa coinvolge: il primo serve a collegare esplicitamente un elemento o un sottoinsieme dell'insieme nel quale si colloca il dominio della relazione con la relazione stessa; il secondo si inserisce tra la relazione e un elemento o un sottoinsieme dell'insieme nel quale si colloca il codominio della relazione.

In genere questi segni possono essere sottintesi e si semplifica la scrittura $a_{\text{Я}} R$ con la $a\,R$ e la $R_{\text{R}} b$ con la $R\,b$.

Queste semplici espressioni si possono interpretare come insiemi di oggetti collegati alla relazione R:

(1) $$a_{\text{Я}} R := \{b \in \mathsf{cod}(R) \mid \langle a, b\rangle \in R\} \quad \text{e} \quad R_{\text{R}} b := \{a \in \mathsf{dom}(R) \mid \langle a, b\rangle \in R\} \ .$$

Diamo qualche esempio.

$$\{1, 2, 3\}_{\text{Я}} \supset \ = \ \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\big\} \ .$$

All'interno di un discorso riguardante dichiaratamente l'intervallo $[0 : 9]$, si può affermare

$$\leq_{\mathbb{R}} 5 \;=\; \{0,1,2,3,4,5\}\ .$$

B53 a.14 Dato che le relazioni sono insiemi, si possono applicare ad esse tutte le operazioni insiemistiche.

Spesso, date due relazioni R ed S è utile considerare la loro unione, la loro intersezione e l'operazione denotata con $\dot\cup$ esprimente la **unione con segnalazione di disgiunzione degli insiemi operandi**.

Facciamo alcune altre osservazioni che toccano il calcolo dei predicati [B61] applicato alle relazioni.

L'enunciato $a_{\mathbb{A}}(R\cup S)_{\mathbb{R}}b$ equivale all'affermazione ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$ o $a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ ; questo enunciato si dice **congiunzione degli enunciati** ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e ⌈ $a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e si scrive anche ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b \;\vee\; a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ .

L'enunciato $a_{\mathbb{A}}(R\cap S)_{\mathbb{R}}b$ equivale ad affermare ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$ e $a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ ; questo enunciato si dice **disgiunzione degli enunciati** ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e ⌈ $a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e si scrive anche ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b \;\wedge\; a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ .

L'affermazione $a_{\mathbb{A}}(R\dot\cup S)_{\mathbb{R}}b$ equivale ad affermare ⌈ aut $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$, aut $a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ ; questo enunciato viene chiamato **or esclusivo degli enunciati** o o **xor degli enunciati** ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e ⌈ $a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e si scrive anche ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b \;+_2\; a_{\mathbb{A}}S_{\mathbb{R}}b$ ⌉ .

Per completezza ribadiamo che se la relazione viene collocata, implicitamente o meno, in un dato ambiente $A\times B$, l'affermazione ⌈ $a_{\mathbb{A}}((A\times B)\setminus R)_{\mathbb{R}}b$ ⌉ equivale alla negazione dell'enunciato ⌈ $a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b$ ⌉ e risulta lecito enunciarla anche nella forma !⌈ $\neg(a_{\mathbb{A}}R_{\mathbb{R}}b)$ ⌉ .

B53 a.15 Spesso è significativo stabilire per due relazioni R ed S che sia $R\subseteq S$; in questo caso si dice che R è **relazione più stringente in senso lato** della S o, equivalentemente, che S è **relazione meno stringente in senso lato** della R.

Analogamente può essere utile stabilire che sia $R\subset S$, affermazione che si espone dicendo che R è una **relazione più stringente in senso stretto** della S o, equivalentemente, che S è **relazione meno stringente in senso stretto** della R.

L'accostamento tra "stringente" e "stretto" fa pensare a un gioco di parole, cosa dovuta all'aver applicato le due relazioni $\subseteq$ e $\subset$ a due relazioni: ma anche per queste due relazioni si può stabilire quale è la più stringente: evidentemente $\subset$ è più stringente della $\subseteq$.

A questo punto si potrebbe essere indotti a scrivere "$\subset\subset\subseteq$" .
Una tale scrittura evidentemente va considerata inopportuna e da evitare, in quanto a prima vista pesantemente ambigua, tale da richiedere di esplicitare le collocazioni di tutte le relazioni in gioco, cosa che la rendenderebbe quasi illeggibile.

Per tentare di chiarirla si potrebbe dire che in essa primo e terzo segno esprimono relazioni entro un non meglio identificato $A\times B$, cioè appartengono a $\mathfrak{P}(A\times B)$, mentre il segno infisso esprime una relazione tra relazioni del precedente insieme di parti e quindi appartiene a $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A\times B))$.

Osserviamo anche che $R\subseteq S \iff (\forall\langle a,b\rangle\in A\times B \;:\; a\,R\,b \implies a\,S\,b\,)$.

In varie circostanze si incontrano due relazioni R ed S in un contesto che rende utile stabilire se sono disgiunte, cioè se $R\diamondsuit S$ o meno, e decidere se non sono confrontabili, cioè se $R\nleftrightarrow S$ o meno.

B53 b. operazioni su relazioni binarie

B53 b.01 Procediamo a definire alcune utili composizioni peculiari delle relazioni. Per questo facciamo riferimento agli insiemi generici A, B, C e D e alle relazioni generiche R, S, R', S' e T.

Consideriamo le relazioni $R \subseteq A \times B$ ed $S \subseteq B \times C$; si dice **prodotto di composizione delle relazioni**, **prodotto.c delle relazioni** o **prodotto di Peirce delle relazioni** R ed S:

$$R \circ S \;:=\; \big\{ \langle a, c \rangle \in A \times C \;\; \big| \;\; \big(B \ni b \,\big|\, a\, R\, b \;\wedge\; b\, S\, c \big) \big\} \;.$$

Per questa importante operazione si derivano direttamente dalle definizioni le proprietà che seguono, nelle quali supponiamo che $R, R' \subseteq A \times B$, $S, S' \subseteq B \times C$ e $T \subseteq C \times D$.

(a) $R \circ S \;=\; \emptyset \iff R^{\dashv} \cap S^{\vdash} = \emptyset$ (non componibilità delle relazioni R ed S).

(b) $(R \circ S)^{\vdash} \subseteq R^{\vdash}$, $(R \circ S)^{\dashv} \subseteq S^{\dashv}$.

(c) $(R \circ S)^{\mathsf{T}} \;=\; S^{\mathsf{T}} \circ R^{\mathsf{T}}$.

(d) $(R \circ S) \circ T \;=\; R \circ (S \circ T)$ (associatività del prodotto di composizione).

(e) $(R \cup R') \circ S \;=\; R \circ S \;\cup\; R' \circ S$, $R \circ (S \cup S') \;=\; R \circ S \;\cup\; R \circ S'$
(distributività del prodotto di composizione rispetto all'unione).

(f) $A^{\mathsf{Id}} \circ R \;=\; R$, $R \circ B^{\mathsf{Id}} \;=\; R$.

(g) $(R \cap R') \circ S \;\subseteq\; (R \circ S) \cap (R' \circ S)$, $R \circ (S \cap S') \;\subseteq\; (R \circ S) \cap (R \circ S')$.

(h) $R \subset R' \implies R \circ S \subseteq R' \circ S$, $S \subset S' \implies R \circ S \subseteq R \circ S'$.

B53 b.02 Una semplice situazione nella quale $(R \cap R') \circ S \subset (R \circ S) \cap (R' \circ S)$ si ha con $R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, $R' = \{\langle 1, 3 \rangle\}$ ed $S = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$; in tal caso $(R \cap R') \circ S = \emptyset$, mentre $(R \circ S) \cap (R' \circ S) = \{\langle 1, 4 \rangle\}$.

Una semplice situazione nella quale $R \circ (S \cap S') \;\subset\; (R \circ S) \cap (R \circ S')$ si ha con $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, $S = \{\langle 2, 4 \rangle\}$ ed $S' = \{\langle 3, 4 \rangle\}$; in tal caso $R \circ (S \cap S') = \emptyset$, mentre $(R \circ S) \cap (R \circ S') = \{\langle 1, 4 \rangle\}$.

Una semplice situazione nella quale $R \subset R'$ ed $R \circ S \;=\; R' \circ S$ si ha con $R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, $R' = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, $S = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$; in tal caso $R \circ S = R' \circ S = \{\langle 1, 4 \rangle\}$.

Una semplice situazione nella quale $S \subset S'$ ed $R \circ S \;=\; R \circ S'$ si ha con $R = \{\langle 1, 2 \rangle \langle 1, 3 \rangle\}$, $S = \{\langle 2, 4 \rangle\}$, $S' = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$; in tal caso $R \circ S = R \circ S' = \{\langle 1, 4 \rangle\}$.

B53 b.03 Come per ogni operazione binaria associativa, a partire dal prodotto di composizione si introducono le **potenze di composizione di una relazione** o **potenze-c di una relazione** R.

$$R^1 \;:=\; R \;; \qquad \forall n \in \mathbb{P} \;:\; R^{n+1} \;:=\; R^n \circ R \;; \qquad \forall n \in \mathbb{P} \;:\; R^{-n} \;:=\; (R^{\mathsf{T}})^n \;=\; (R^n)^{\mathsf{T}} \;.$$

Definiamo come **potenza zero minima di una relazione** R la relazione

$$R^0 \;:=\; \mathrm{diag}(R^{\vdash} \cup R^{\dashv}) \;=\; \mathrm{diag}(R^{\vdash})^{\mathsf{Id}} \cup (R^{\dashv}) \;.$$

Una nozione molto vicina alla precedente è quella di **potenza zero della relazione collocata** $\langle A \times A, R \rangle$ per ogni $A \supseteq (R^{\vdash} \cup R^{\dashv})$, relazione definita come A^{Id}.

Si dimostrano facilmente i seguenti enunciati.

(a) $\forall m, n \in \mathbb{N} \;:\; R^m \circ R^n \;=\; R^{m+n}$, $R^{-m} \circ R^{-n} \;=\; R^{-(m+n)}$,

(b) $\forall m, n \in \mathbb{N} \;:\; (R^m)^n \;=\; (R^{-m})^{-n} \;=\; R^{m\,n}$, $(R^{-m})^n \;=\; (R^m)^{-n} \;=\; R^{-m\,n}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \mathsf{dom}(R^n) \subseteq \mathsf{dom}(R)$, $\mathsf{cod}(R^n) \subseteq \mathsf{cod}(R)$.

Per trovare esempi del caso (c) con le relazioni di inclusione forte consideriamo la relazione $R = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$, cioè la relazione "minore di" entro $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Si constata che $R^2 = \{13, 14, 15, 24, 25, 35\}$, $R^3 = \{14, 15, 25\}$, $R^4 = \{15\}$, $R^5 = \emptyset$; quindi $\mathsf{dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\} \supset \mathsf{dom}(R^2) = \{1, 2, 3\} \supset \mathsf{dom}(R^3) = \{1, 2\} \supset \mathsf{dom}(R^4) = \{1\} \supset \mathsf{dom}(R^5) = \emptyset$; inoltre $\mathsf{cod}(R) = \{2, 3, 4, 5\} \supset \mathsf{cod}(R^2) = \{3, 4, 5\} \supset \mathsf{dom}(R^3) = \{4, 5\} \supset \mathsf{dom}(R^4) = \{5\} \supset \mathsf{dom}(R^5) = \emptyset$.

B53 b.04 Introduciamo la **chiusura transitiva** o **chiusura cross-c** della relazione R:

$$R^{\oplus} \;:=\; R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \;=\; \bigcup\{n \in \mathbb{P} :|\; R^n\} \;.$$

Introduciamo anche la **chiusura riflessivo-transitiva della relazione** o **chiusura star-c della relazione**

$$R^{\otimes} \;:=\; R^0 \cup R^{\oplus} \;=\; \bigcup\{n \in \mathbb{N} :|\; R^n\} \;.$$

Per un insieme $N \subseteq \mathbb{N}$ useremo la scrittura: $R^N \;:=\; \bigcup\{i \in N :|\; R^i\}$ e le sue specializzazioni per casi particolari di N. Si introducono le seguenti scritture:

$\forall n \in \mathbb{P} \;:\; R^{<n} \;:=\; R^{[\mathrm{n}\,)} \;=\; R^0 \cup \cdots \cup R^{n-1}$; $\qquad R^{<0} \;:=\; \emptyset$; $\quad \forall n \in \mathbb{P} \;:\; R^{\leq n} \;:=\; R^{[n]} \;=\; R^{<n+1}$;

$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; R^{\geq n} \;:=\; R^n \cup R^{n+1} \cup \cdots$; $\qquad R^{>n} \;:=\; R^{\geq n+1}$.

Si trovano senza difficoltà le seguenti uguaglianze:

(a) $R^{\oplus} \;=\; R \circ R^{\otimes} \;=\; R^{\otimes} \circ R$; $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;:\; R^{\geq n} \;=\; R^n \circ R^{\otimes} \;=\; R^{\otimes} \circ R^n$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; R^{>n} \;=\; R^n \circ R^{\oplus} \;=\; R^{\oplus} \circ R^n$; $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;:\; R^{<n} \cup R^{\geq n} \;=\; R^{\leq n} \cup R^{>n} \;=\; R^{\otimes}$.

B53 b.05 Introduciamo le seguenti altre operazioni unarie, trasformazioni che mandano una relazione in un'altra relazione, ovvero si tratta di endofunzioni di **Rel**:

chiusura riflessiva minima di una relazione R: $\quad R \cup R^0$;

chiusura riflessiva di una relazione R entro un insieme A: $\quad R \cup A^{\mathsf{Id}}$;

chiusura simmetrica di una relazione R: $\quad R \cup R^{\top}$; **chiusura riflessivo-simmetrica di una relazione** R: $\quad R \cup R^0 \cup R^{\top}$;

chiusura di equivalenza di una relazione R: $\quad R^{\blacksquare} \;:=\; (R \cup R^{\top})^{\otimes} \;=\; \bigcup\{n \in \mathbb{Z} :|\; R^n\}$.

Si trova facilmente la relazione

(a) $$R^{\blacksquare} \;\supseteq\; R^{\otimes} \cup (R^{\top})^{\otimes} \;.$$

Consideriamo la relazione numerabile tra numeri interi $\overline{R} \;=\; \{n \in \mathbb{Z} :|\; \langle n, n+1\rangle\}$, cioè la relazione che si può leggere "essere l'intero immediatamente precedente".

Si trova facilmente che $(\overline{R}^{\top})^{\otimes}$ è la relazione $\geq$ entro $\mathbb{Z}$, ossia la relazione "essere l'intero immediatamente successivo" e che $\overline{R}^{\otimes}$ è la relazione $\leq$ entro $\mathbb{Z}$. Inoltre si constata che $\overline{R}^{\blacksquare} \;=\; \mathrm{diag}(\mathbb{Z})$, cioè la uguaglianza tra interi.

Consideriamo la relazione $\overline{R} = \{13, 23, 34, 35\}$; per essa si trova

$$\overline{R}^{\otimes} \;=\; \{11, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44, 55\} \;,\; \overline{R}^{\top} \;=\; \{31, 32, 43, 53\} \;;$$
$$(\overline{R}^{\top})^{\otimes} \;=\; \{11, 22, 31, 32, 33, 41, 41, 43, 44, 51, 52, 53, 55\} \text{ e } \overline{R}^{\blacksquare} \;=\; \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathsf{Id}} \;.$$

Per questa $\overline{R}$ la relazione (a) si riduce a una inclusione stretta:

$$\overline{R}^{\otimes} \cup (\overline{R}^{\top})^{\otimes} \;=\; \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathsf{Id}} \setminus \{12, 21, 45, 54\} \;\subset\; \{1, 2, 3, 4, 5\}^{\mathsf{Id}} \;.$$

B53 c. digrafi e relazioni binarie

B53 c.01 Si osserva che per analizzare le precedenti relazioni finite conviene prendere visione dei relativi digrafi.

Riprendiamo dunque le nozioni di digrafo e di grafo nonorientato che in B16b abbiamo introdotta a partire dalle matrici binarie e risultano criptomorfe delle relazioni finite.

Scopo di questa ripresa è quello di poterli utilizzare per presentare esempi semplici ed efficaci di vari tipi di relazioni finite.

Inoltre allarghiamo la visuale con due generalizzazioni che consentano di parlare di strutture grafiche e di digrafi costruibili.

Con il termine **strutture del genere grafo** intendiamo varie specie di strutture discrete, accomunate dal fatto di essere costituite da un numero finito di oggetti tendenzialmente semplici detti **nodi** o **vertici** e da collegamenti tra questi nodi, anch'essi in numero finito.

Questo comporta che esse possono essere presentate con raffigurazioni che nei casi meno elaborati sono facilmente comprensibili e aiutano ad analizzare le loro proprietà.

Come abbiamo visto in B16b vi sono due specie basilari di strutture del genere grafo finite i **grafi orientati** o **digrafi** e i **grafi nonorientati** che qui identifichiamo con casi particolari dei digrafi.

Ogni collegamento in un digrafo viene chiamato **arco** e va da un nodo iniziale ad un nodo finale (che potrebbe 'o coincidere con il primo); questo fatto si esprime dicendo che gli archi sono collegamenti muniti di una orientazione.

Anche ciascuno dei collegamenti di un grafo nonorientato, chiamati **spigoli** o **lati**, riguardano due nodi, tra i quali non si fa distinzione tra nodo iniziale e nodo finale, oppure un solo nodo.
Dato che uno spigolo di un grafo nonorientato risulta equivalente a una coppia di archi l'uno il riflesso dell'altro, possiamo considerare che i grafi nonorientati si possono identificare con digrafi particolari.

Una tipica applicazione delle strutture grafiche consiste nella schematizzazione di collegamenti (stradali, ferroviari, aerei, telematici, ...) riguardanti determinate località o postazioni. Se si hanno collegamenti a senso unico, percorribili solo da un nodo all'altro si utilizza un digrafo; se tutti i collegamenti si possono percorrere in entrambi i sensi basta un grafo nonorientato.

B53 c.02 Si studiano anche varie strutture grafiche che costituiscono degli arricchimenti delle due basilari; queste in parte riguardano problemi strettamente matematici, ma se ne incontrano moltissime studiate per soddisfare esigenze applicative.

Studiando un sistema stradale, ferroviario, marittimo o aereo può rendersi necessario caratterizzare i diversi tratti con distanze o tempi di percorrenza, oppure caratterizzare le località con la capienza dei suoi parcheggi, delle sue stazioni, dei suoi moli e delle sue piste di atterraggio.

Per trattare queste situazioni si rende necessario arricchire i grafi che le schematizzano con valori ed etichette distintive ai nodi e agli archi.

B53 c.03 Una **relazione finita** è una relazione $R \subseteq A \times B$ in cui A e B sono insiemi finiti.

Diciamo **digrafo** ogni coppia $\langle Q,\ R\rangle$ con Q insieme finito i cui elementi sono detti **nodi del digrafo**, ed $R \subseteq Q \times Q$ cioè R è una relazione entro Q (e quindi una relazione finita) i cui elementi sono detti **archi del digrafo**.
Lo studio dei digrafi quindi si confonde con quello delle relazioni finite.

Un digrafo che non sia costituito da un insieme troppo esteso di nodi si può presentare efficacemente attraverso la sua **raffigurazione**, rappresentazione visuale piana nella quale a ogni nodo corrisponde un punto di una porzione di piano e ogni arco $\langle a, b\rangle$ viene dato da un segmento che unisce a e b ed è dotato di un segno di freccia che segnala che a si trova prima di b nella precedente scrittura.

Mediante raffigurazioni di digrafi si possono quindi fornire esempi di relazioni finite. Per esempio la relazione $<$ entro l'insieme $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ viene efficacemente rappresentata dal seguente digrafo:

//input pB53c03

In B16b abbiamo visto come i digrafi (finiti) si possono rappresentare esaurientemente anche mediante le loro cosiddette matrici delle adiacenze. Di un digrafo $D = \langle Q, R\rangle$ la matrice delle adiacenze è la funzione indicatrice del sottoinsieme R dell'insieme $Q \times Q$; tale matrice si denota con D^{adjm}.

Per esempio le matrici delle adiacenze, risp., delle relazioni $<$ e $\geq$ entro $\{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ sono

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

B53 c.04 Sono di grande interesse anche entità simili alle strutture digrafiche ma costituite da insiemi costruibili non necessariamente finiti di nodi e di loro collegamenti.

A questo proposito definiamo **digrafo costruibile**, in breve **digrafo.c**, ogni struttura costituita da oggetti che vengono trattati come elementari, chiamati nodi, e da coppie di nodi, chiamate ancora archi, per i quali si chiede la disponibilità di una procedura in grado di generare i suddetti nodi e i suddetti archi.

Dopo queste strutture si possono proporre con formalizzazioni prevedibili i più particolari grafi.costruibili nonorientati e più ricche strutture grafiche costruibili.

Tra i digrafi.c si distinguono i digrafi (finiti) e i digrafi.c numerabili, strutture dotate di infiniti nodi che sono generabili progressivamente, come lo sono i suoi archi; in altre parole un digrafo.c si dice numerabile sse si dispone un algoritmo in grado di decidere se un possibile nodo è effettivamente un suo nodo e si dispone di un algoritmo in grado di decidere sse una coppia di possibili nodi è effettivamente un suo arco.

Usiamo inoltre il termine **digrafi.c contabili** per caratterizzare collettivamente i digrafi.c numerabili e i digrafi finiti.

A partire dai digrafi.c si possono definire, sostanzialmente come strutture particolari delle precedenti, i **grafi nonorientati.c**, i **grafi nonorientati numerabili**, i **grafi nonorientati contabili**. e i **digrafi contabili**.

Le strutture grafiche sono molto importanti per lo studio degli algoritmi, per la programmazione e per varie questioni di teoria dei linguaggi. In seguito svilupperemo con una certa ampiezza varie nozioni che riguardano queste strutture [D26 -D35] e alcune loro applicazioni a ben definiti problemi matematici.

B53 d. caratterizzazioni principali delle relazioni

B53 d.01 Introduciamo ora delle caratterizzazioni generali delle relazioni binarie, cioè caratterizzazioni indipendenti dalla peculiarità della loro costruzione e in particolare indipendenti dal prodotto cartesiano nel quale si collocano.

Consideriamo una relazione $R \subseteq A \times B$ e ricordiamo [a04] che R si dice relazione presimmetrica sse il suo dominio e il suo codominio coincidono, cioè sse $(R^{\vdash} = R^{\dashv})$. Ricordiamo anche che per relazione contabile, o relazione.c, si intende una relazione finita o numerabile e che la nozione parallela digrafo contabile o digrafo.c sta per digrafo finito o numerabile.

Una relazione R si dice **relazione riflessiva** sse è una relazione presimmetrica e $R^0 = (R^{\vdash})^{\mathsf{Id}} \subseteq R$, cioè sse $R \subseteq R^2$.

Si dice più particolarmente che R è una **relazione riflessiva su un dato insieme** A sse $A^{\mathsf{Id}} \subseteq R$.

La relazione R si dice **relazione antiriflessiva** sse $R^{\vdash} \diamondsuit R^{\dashv}$ ossia sse

$$\forall a \in (\mathsf{dom}(R) \cap \mathsf{cod}(R)) \ : \ \langle a, a \rangle \notin R \ .$$

Più particolarmente la R si dice **relazione antiriflessiva su un dato insieme** A sse $A^{\mathsf{Id}} \diamondsuit R$.

Tra le relazioni numeriche e insiemistiche di uso comune sono riflessive le relazioni associate ai segni $=$, $\leq$, $\geq$, $\subseteq$ e $\supseteq$, mentre sono antiriflessive quelle associate ai simboli $\neq$, $>$, $<$, $\subset$, $\supset$.

Evidentemente è antiriflessiva ogni relazione R con $\mathsf{dom}(R) \diamondsuit \mathsf{cod}(R)$, mentre la relazione $\neq$ è antiriflessiva su ogni insieme sul quale viene collocata.

Le relazioni.c riflessive hanno digrafi nei quali ogni nodo è dotato di **cappio**, cioè di un arco che parte da un nodo e arriva allo stesso nodo. All'opposto le relazioni.c antiriflessive hanno digrafi privi di cappi.

B53 d.02 Ricordiamo [a08) che la relazione R si dice relazione simmetrica sse $R = R^{\mathsf{T}}$; evidentemente una tale R deve essere presimmetrica.
Chiaramente una relazione R presimmetrica è una **relazione simmetrica** sse $\forall a, b \in R^{\vdash} (= R^{\dashv}) \ : \ a \, R \, b \Longrightarrow b \, R \, a$.

Esempi di relazioni simmetriche sono l'uguaglianza $=$ e la disuguaglianza $\neq$, quale che sia l'ambiente nel quale si colloca.
Sopra l'insieme degli interi positivi $\mathbb{P}$ è simmetrica la relazione di coprimalità $\perp$

Le relazioni.c simmetriche hanno digrafi in cui per ogni arco u è presente anche il suo riflesso, cioè un arco in cui il nodo d'arrivo è quello di partenza di u e viceversa il nodo di partenza è quello d'arrivo di u.
In altre parole un arco riflesso di un dato arco è l'arco che incide negli stessi nodi ma che presenta l'orientazione opposta.
Questo induce a raffigurare le relazioni.c simmetriche mediante grafi nonorientati, oggetti che si possono identificare, o meglio che si possono interpretare come semplificazioni dei digrafi che, insieme a ogni arco presentano anche l'arco riflesso.

L'insieme delle relazioni simmetriche entro A sarà denotato con RelSym_A.

B53 d.03 La relazione R si dice **relazione antisimmetrica** sse

$$\forall \ a, b \in R^{\vdash} \cap R^{\dashv} \ : \ a \, R \, b \wedge b \, R \, a \implies a = b \ ,$$

ovvero sse

$$R \cap R^{\top} \ \subseteq \ (R^{\vdash})^{\mathsf{Id}} \cap (R^{\dashv})^{\mathsf{Id}} \ = \ (R^{\vdash} \cap R^{\dashv})^{\mathsf{Id}} \ .$$

Le relazioni denotate dai segni $\leq$, $\geq$, $\subseteq$ e $\supseteq$ sono esempi di relazioni antisimmetriche.
Nel caso delle relazioni.c l'antisimmetria implica che gli archi dei digrafi associati che non sono cappi sono privi dei loro riflessi.

In particolare si hanno le relazioni R antisimmetriche e antiriflessive per le quali $R \cap R^{\top} \ = \ \emptyset$ e le relazioni R antisimmetriche e riflessive per le quali $R \cap R^{\top} \ = \ (\mathsf{dom}(R) \cap \mathsf{cod}(R))^{\mathsf{Id}}$, ovvero per le quali $.R \cap R^{\top} \subseteq \mathrm{diag}(\mathsf{dom}(R) \cap \mathsf{cod}(R))$.

L'insieme delle relazioni antisimmetriche entro A viene denotato con $\mathbf{RelAsym}_A$.

B53 d.04 Ancora più particolari delle antisimmetriche sono le relazioni R con $R^{\vdash} \diamondsuit R^{\dashv}$; esse sono dette **relazioni bipartite**.

Alle relazioni finite bipartite sono associati i **digrafi bipartiti**. In un tale digrafo si hanno solo archi che vanno da un nodo associato al dominio della relazione a un nodo associato al suo codominio.

Da un qualsiasi elenco di stringhe, che per una separazione più netta chiediamo non presentino alcun monogramma, si ricava un grafo bipartito i cui archi corrispondano ai collegamenti tra ciascuna delle stringhe e ciascuno dei caratteri che sia sua occorrenza.

La relazione che collega cognomi e nomi quando si applica a un gruppo ristretto di persone italiane di solito risulta bipartita; se invece si citano personaggi quali Giordano Bruno, Andrea Giordano, Corrado Alvaro e Alvaro Vitali si rischia di far venir meno il carattere bipartito del relativo digrafo.

B53 d.05 La relazione R si dice **relazione transitiva** sse

$$\forall a \in R^{\vdash} \ , \ b \in (R^{\vdash} \cap R^{\dashv}) \ , \ c \in R^{\dashv} \ : \ a \, R \, b \ \wedge \ b \, R \, c \implies a \, R \, c \ .$$

Quindi R è transitiva sse $R \circ R \subseteq R$, cioè sse

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ R^n \subseteq R \ , \quad \text{ossia} \quad \text{sse} \quad R \ = \ R^{\oplus} \ .$$

Sono transitive le relazioni associate ai segni $=$, $\geq$, $>$, $\leq$, $<$, $\subseteq$, $\subset$, $\supseteq$, $\supset$.

I digrafi associati a relazioni finite transitive sono caratterizzati dal fatto che la presenza di due o più archi consecutivi implica l'esistenza di un arco che collega il nodo di partenza del primo degli archi consecutivi e il nodo d'arrivo dell'ultimo di questi archi.

Un esempio di relazione transitiva nonpresimmetrica e antiriflessiva è quella che nell'insieme $\mathbb{N}$ (o in qualsiasi dei numeri naturali è rappresentata dal segno $<$.

La relazione $\perp$ di coprimalità non è transitiva: mentre $20 \perp 21$ e $21 \perp 55$, si riscontra che $20 \not\perp 55$.

Sono ben definite varie relazioni simmetriche e transitive: inparticolare le relazioni di parallelismo riguardanti segmenti, semirette, rette e piani nel piano-RR e nello spazio tridimensionale.

B53 d.06 Consideriamo altri tipi di relazioni che contengono nella loro definizione combinazioni delle relazioni viste in precedenza; tra queste alcune di quelle che sono anche costruibili riguardano rilevanti entità introdotte in precedenza.

La relazione R si dice **equivalenza** o **relazione di equivalenza** sse è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè sse

$$R^0 \ = \ (R^{\vdash})^{\mathsf{Id}} \ = \ (R^{\dashv})^{\mathsf{Id}} \ \subseteq R \ = \ R^{\top} \ = \ R^2 \ ,$$

cioè sse

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{nz} \ : \ R^0 \subseteq R \ = \ R^n \ ,$$

cioè sse

$$R \ = \ (R^{\top})^{\oplus} \cup R^0 \cup R^{\oplus} \ =: \ R^{\blacksquare} \ .$$

Le relazioni d'equivalenza che presentano interesse, pur costituendo una collezione molto estesa e variegata per quanto riguarda gli insiemi nei quali si collocano e i procedimenti con i quali vengono definite o costruite, non presentano forti distinzioni al livello delle caratterizzazioni insiemistiche generali.
Infatti ciascuna relazione R equivale alla partizione dell'insieme nel quale risulta collocata che si definisce come $R^{\blacksquare} \ := \ \lceil a \in \mathsf{dom}(R) \nmid a_{\lrcorner} R \rceil$.

Quindi la caratterizzazione insiemistica di una relazione di equivalenza è solo la caratterizzazione della relativa partizione.s.

L'importanza delle relazioni di equivalenza è anche dovuta al fatto che ogni funzione f avente come dominio l'insieme A induce su di esso una partizione che costituisce una caratteristica importante della stessa funzione f.

L'insieme delle equivalenze entro l'insieme A sarà denotato con Eqv_A.

B53 d.07 La relazione R si dice **preordine** sse è riflessiva e transitiva, cioè sse è presimmetrica e $R^0 \ = \ (R^{\vdash})^{\mathsf{Id}} \subseteq R \ = \ R^2$, cioè sse

$$R^{\vdash} \ = \ R^{\dashv} \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ R^0 \subseteq R \ = \ R^n \ ,$$

o equivalentemente sse

$$R^{\vdash} \ = \ R^{\dashv} \quad \text{e} \quad R \ = \ R^{\otimes} \ .$$

Osserviamo esplicitamente che ogni relazione R può ampliarsi fino a diventare un preordine: si tratta di sostituirla con la sua chiusura star-c. ?

La relazione R si dice **ordine parziale**, o anche semplicemente **ordine**, sse è riflessiva, antisimmetrica e transitiva , cioè sse è presimmetrica e $R \cap R^{\top} \ = \ R^0 \subseteq R \ = \ R^2$, cioè sse

$$R^{\vdash} \ = \ R^{\dashv} \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ R \cap R^{\top} \subseteq R^0 \subseteq R \ = \ R^n \ ,$$

ovvero sse

$$R^{\vdash} \ = \ R^{\dashv} \quad \wedge \quad R \cap R^{\top} \ = \ R^0 \quad \wedge \quad R \ = \ R^{\otimes} \ .$$

Occorre segnalare che si incontra una grande varietà di relazioni d'ordine che svolgono ruoli importanti per la comprensione e la organizzazione di tutti i settori della matematica e delle sue applicazioni, sia per quanto riguarda i terreni sui quali sono collocate, sia per i procedimenti con i quali sono definite e costruite, sia per le loro caratterizzazioni insiemistiche generali.

Qui ci limitiamo a segnalare che numerosi ordini costruibili hanno grande rilevanza pratica, in particolare quando possono essere utilizzati proficuamente attraverso le raffigurazioni dei corrispondenti digrafi ordinati [B55].

L'insieme degli ordini entro l'insieme A sarà denotato con Ord_A.

B53 d.08 La relazione R si dice **relazione totale** sse è presimmetrica e $R \cup R^{\top} \ \subseteq \ (R^{\vdash} \times R^{\dashv}) \setminus \mathsf{dom}(R)^{\mathsf{Id}}$.

All'insieme delle relazioni totali appartiene ogni disuguaglianza, quale che sia l'insieme nel quale si colloca.
Sugli insiemi di numeri reali come $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$, $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$ e sullo stesso $\mathbb{R}$, sono totali le relazioni espresse dai segni $<$ e $>$.

Una coppia $\langle a, b \rangle \in R^{\vdash} \times R^{\dashv}$ si dice **coppia confrontabile per una relazione** R, in breve **coppia confrontabile-**R, sse accade che $a \, R \, b$ oppure accade che $b \, R \, a$ (senza escludere che possano essere validi entrambi gli enunciati).

Chiaramente una relazione R è totale sse tutte le coppie di $R^{\vdash} \times R^{\dashv} \setminus \mathsf{dom}(R)^{\mathsf{Id}}$ hanno i membri confrontabili-R.

La relazione R si dice **ordine totale** sse è un ordine ed è totale.

Per esempio le relazioni $\geq$ e $\leq$, sopra $\mathbb{R}$ o sopra un qualsivoglia insieme di numeri reali risultano essere ordini totali.

Non sono invece ordini totali la relazione di divisibilità tra interi positivi e la relazione di inclusione in senso lato o in senso stretto tra gli insiemi di un qualsiasi ambiente.
Gli ordini nontotali Questi ordini si dicono **relazioni d'ordine strettamente parziale**.

Tra le relazioni numeriche quelle caratterizzate dai segni $<$ e $>$ non sono ordini totali, in quanto sono relazioni totali ma non sono riflessive.

Un altro esempio di ordine strettamente parziale è la relazione tra coppie di numeri reali definita da

$$\langle r, s\rangle \sqsubseteq \langle t, u\rangle \quad \text{sse} \quad r \leq t \ \wedge \ s \leq u \ .$$

Infatti due coppie come $\langle 3, 5\rangle$ e $\langle 6, 1\rangle$ non sono confrontabili.

Più in generale si individua in modo simile un ordine strettamente parziale su ogni prodotto cartesiano di due o più ordini totali.

L'insieme degli ordini totali entro A sarà denotato con OrdT_A.

B53 d.09 Una relazione R si dice **relazione tricotomica** sse è presimmetrica e per ogni coppia di elementi diversi $\langle a, b\rangle \in R^{\vdash} \times R^{\vdash}$ accade aut $a\,R\,b$ aut $b\,R\,a$. Quindi confrontando due elementi qualsiasi a e b del suo dominio, coincidente con il suo codominio, si possono dare tre possibilità mutuamente esclusive: $a = b$, $a\,R\,b$ e $b\,R\,a$.

Sono relazioni tricotomiche le relazioni numeriche $<$ e $>$.

In generale la relazione trasposta di una tricotomica è anch'essa tricotomica. Più precisamente una relazione $R \subset A \times A$ è tricotomica se $\{R, A^{\mathsf{Id}}, R^{\mathsf{T}}\}$ costituisce una tripartizione di $A \times A$.

Più in generale interessano insiemi di relazioni mutuamente collegate $R_1, R_2, ..., R_m \subset A \times A$, con A insieme nonvuoto, le quali costituiscono una partizione in m parti dell'insieme $A \times A$.

Il semplice caso $m = 2$ si riduce ai duetti formati da una relazione e dalla sua opposta: per esempio in $\mathbb{R}^2$ duetti di relazioni come $\{<, \geq\}$ e $\{>, \leq\}$.

Situazioni più complesse si presentano per relazioni tra sottoinsiemi di un dato insieme A. Si hanno partizioni come le seguenti

$$\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A) \quad = \quad (= \cap A \times A)\dot\cup \subset \dot\cup \supset \dot\cup \lesseqgtr \quad = \quad \supset \dot\cup \subseteq \dot\cup \diamondsuit \dot\cup \between \quad = \quad \subset \dot\cup \supseteq \dot\cup \diamondsuit \dot\cup \between \ .$$

Queste partizioni di un generico quadrato cartesiano possono servire per chiarire quali sono le possibili relazioni che intercorrono tra due oggetti omogenei; una partizione del quadrato cartesiano di un insieme delle parti in particolare collocati in uno stesso ambiente.

B53 d.10 Consideriamo una relazione $R \subseteq A \times B$ e due insiemi C, D tali che $C \subseteq A$ e $D \subseteq B$.
Si dice **restrizione di una relazione** R a $C \times D$ la relazione $R_{|_{C\times D}} := R \cap (C \times D)$.
Per esempio di molte relazioni entro l'insieme $\mathbb{R}$ risultano utili le restrizioni a sottoinsiemi rilevanti come $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

I sottodigrafi, cioè digrafi ottenuti da un certo digrafo eliminando alcuni nodi e archi, forniscono esempi di restrizioni di relazioni finite utili in varie applicazioni, in particolare per vari algoritmi.

Sono particolarmente praticate le cosiddette **restrizioni simmetriche delle relazioni**; se R è una relazione contenuta in un quadrato cartesiano $S \times S$, si chiama sua restrizione simmetrica ogni sua restrizione della forma a $R \cap (C \times C)$ con $C \subset S$.

Si considerano spesso le restrizioni simmetriche di relazioni sopra $\mathbb{R}$ ai suoi sottoinsiemi come quelli citati in precedenza.

Ricordiamo che le restrizioni simmetriche di $\leq$ e $\geq$ a un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$ continuano a essere ordini totali.

Più in generale ogni restrizione simmetrica di un ordine totale è un ordine totale.

B53 e. strutture dotate di ordinamento

B53 e.01 Vi sono molte strutture matematiche rilevanti per le quali è utile definire relazioni binarie che presentano proprietà di compatibilità con le operazioni e con gli oggetti che caratterizzano le strutture stesse.

Per tali strutture munite di relazioni si possono definire costruzioni e procedimenti utilizzabili proficuamente per varie finalità, in particolare per definire algoritmi efficaci.

Le relazioni che si rivelano più interessanti per arricchire le strutture algebriche sono le relazioni d'ordine.
In effetti vengono definite convenientemente varie **specie di strutture ordinate** che è risultato conveniente studiarein modo sistematico.
Qui ci limitiamo ad segalare alcune di esse per dare una prima percezione delle possibilità offerte da queste strutture "miste".

B53 e.02 Le prime strutture ordinate che conviene considerare sono talune strutture algebriche e tra queste le più basilari sono i semigruppi ordinati.

Per **semigruppo ordinato** si intende una struttura della forma $\langle S, \cdot, \preceq \rangle$, ove $\langle S, \cdot \rangle$ è un semigruppo e $\preceq$ una relazione d'ordine entro S tali che godono delle proprietà

$$\forall\ a, b, c \in S \quad : \quad a \preceq b \implies a \cdot c \preceq b \cdot c\ .$$

Una tale proprietà fa parte di una cosiddetta "legge di compatibilità".

Due esempi ben evidenti sono dati dal semigrupo noncommutativo $\left\langle A^*, {}_{\mathsf{I}}, \mathsf{pfx} \right\rangle$ con A alfabeto qualsiasi e dal semigruppo commutativo $\left\langle \mathbb{N}, +, \leq \right\rangle$.

Strutture più particolari specifiche sono i **gruppi ordinati**. Esempi elementari sono forniti da gruppi numerici come $\left\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \leq \right\rangle$ e $\left\langle \mathbb{R}_+, \cdot, {}^{-1}, 1, \leq \right\rangle$. Questi sono gruppi commutativi e totalmente ordinati.
Molti altri gruppi sono soltanto parzialmente ordinati.

Strutture algebriche ordinate più ricche sono gli **anelli ordinati**.

Più particolari e di grande utilità per i calcoli effettivi sono i **campi ordinati**. Particolarmente importante è il campo ordinato dei numeri reali costruibili.

B53 e.03 Grande rilievo hanno anche alcune strutture topologiche ordinate. Basilare è la topologia della retta.

Notevole interesse rivestono gli spazi vettoriali ordinati. Tra questi sono particolarmente fecondi gli spazi di polinomi.

Va notato che questi sistemi presentano sia una struttura algebrica che una struttura topologica e che entrambe sono compatibili con la rispettiva relazione d'ordine.

Altre strutture ordinate particolarmente ricche sono varie specie di algebre su campo.

B53 f. relazioni ternarie e di arietà superiore

B53 f.01 Osserviamo preliminarmente che tutte le funzioni multivariate, cioè le funzioni di un genere $\lceil A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \longrightarrow B \rceil$, se B non si considera decomponibile come prodotto cartesiano si possono considerare relazioni di arietà $k+1$.

Se invece il suddetto B viene preso in considerazione come prodotto cartesiano della forma

$$B = \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_h\} ,$$

le funzioni di cui sopra si possono considerare relazioni di arietà $k+h$.

Un tipo di relazione ternaria che si incontra spesso è dato dalle funzioni di un genere $\lceil A \times B \longrightarrow C \rceil$ con A, B e C insiemi qualsiasi; una tale funzione bivariata F individua l'insieme $\{\langle a,b\rangle \in \mathsf{dom}(F) :| \langle a,b,F(a,b)\rangle\}$, cioè un sottoinsieme di $A \times B \times C$.

In particolare le relazioni ternarie fornite dalle funzioni-RRtR, ossia dalle funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, individuano le superfici appartenenti a $\mathbb{R}^{\times 3}$ che presentano una sola intersezione con le rette parallele al terzo asse di riferimento, quello che in geografia riguarda l'altitudine.

Più in generale a ogni funzione del genere $F \in \lceil A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \longrightarrow B \rceil$ corrisponde la relazione n-aria $\{\langle a_1, ..., a_{n-1}\rangle \in \mathsf{dom}(F) :| \langle a_1, ..., a_{n-1}, F(a_1, ..., a_{n-1})\rangle\}$.

B53 f.02 Nei fondamenti della geometria euclidea [G25] si incontra la relazione tra i punti appartenenti a ciascuna retta R dello spazio in esame chiamata betweenness o relazione di interposizione.
Una terna $\langle p,q,r\rangle$ di punti di R si trova in tale relazione sse q appartiene al segmento $\overline{pr}$.

Si ha anche una sorta di variante ciclica della relazione precedente. Essa si applica a qualsiasi curva chiusa Γ e in particolare a ogni curva piana nonintrecciata, ad esempio alle circonferenze e alle ellissi. Su tale curva si fissa un verso di percorrenza, ad esempio su una curva piana si fissa il verso positivo, ossia il verso antiorario.
Sui punti di tale Γ risulta definita la relazione ternaria, relazione costituita dalle terne di punti diversi che denotiamo con $\langle p,q,r\rangle$ tali che un oggetto mobile per andare da p ad r percorrendo con continuità la Γ nel verso scelto tocca necessariamente q, che risulta essere il punto interposto tra p ed r.
Varianti discrete della relazione ternaria precedente si possono definire sulle poligonali chiuse (e ordinate).

B53 f.03 Ad ogni figura geometrica collocata in $\mathbb{R}^{\times 3}$ si associa un insieme di punti individuati da terne di coordinate reali; quindi anche ciascuna di queste figure si può considerare una relazione ternaria.

Ad esempio vengono studiate con cura le relazioni ternarie costituite dai punti delle superfici di elissoidi, paraboloidi, iperboloidi e tori e le relazioni ternarie fornite dai punti interni di tali figure [G52].

Più in generale per qualsiasi $d \in \{2,3,4,...\}$ ad ogni figura geometrica nello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ si possono associare relazioni d-arie costituite da insiemi di d-uple di numeri reali $\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle$.

Questo genere di relazioni possono essere esaminate utilizzando preferenzialmente diversi tipi di coordinate. Ad esempio le superfici nello spazio tridimensionale si possono riferire a terne di coordinate cartesiane, di coordinate sferiche, di coordinate cilindriche e di altre ancora [I49].

B53 f.04 Consideriamo un qualsiasi poliedro [D33, G37] e i tre insiemi V costituito dai suoi vertici, E formato dai suoi spigoli ed F l'insieme delle sue facce.

Una interessante relazione ternaria entro $V \times E \times F$ è costituita dalle terne $\langle v, e, f \rangle$ che coinvolgono un vertice v, uno spigolo e e una faccia f che sono mutuamente incidenti.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php