1

Capitolo B50
campo dei complessi

Contenuti delle sezioni

a. ampliamento del campo dei numeri reali p. 2
b. campo dei numeri complessi p. 8
c. potenze e radici nel campo complesso p. 12
d. successioni e serie di numeri complessi p. 14
e. serie di potenze di variabili complesse p. 18
f. formule di Eulero e forma esponenziale dei numeri complessi p. 21
g. campo dei numeri complessi costruibili p. 22

22 pagine

B50 0.01 Questo capitolo definisce i numeri complessi, le operazioniche li caratterizzano e la struttura di campo di cui costituiscono il terreno; sono inoltre introdotte e le costruzioni su di essi (successioni, serie, serie di potenze e funzioni-CtC) che estendono le omologhe sui numeri reali e consentendo di sviluppare una strumentazione formale diportata sensibilmente maggiore.

La introduzion dei numeri complessi viene motivata come ampliamento del campo dei numeri reali che, con la disponibilità dei polinomi su tali numeri, consente di attribuire a ogni polinomio di grado n un insieme di n radici e quindi la possibilità di esprimerli come prodotto di n monomi. e quindi la possibilità di .

Questo apre la possibilità di controllare pienamente i polinomi e di renderli strumenti che aiutano a impostare e risolvere una ampia gamma di problemi, in particolare problemi che avevano impegnato i matematici dal periodo greco ellenistico fino all'inizio del secolo XIX.

B50 a. ampliamento del campo dei numeri reali

B50 a.01 Varie ragioni che inducono ad ampliare il campo dei numeri reali con il campo dei numeri complessi.

Questi numeri sono stati introdotti da Raphael Bombelli intorno al 1540 per dare pieno senso a formule che consentono di calcolare gli zeri reali di alcuni polinomi a coefficienti reali, ma purtroppo questa idea per molto tempo non è stata interamente compresa.

Nel XVIII secolo essi sono stati presi in considerazione per poter formulare il cosiddetto "teorema fondamentale dell'algebra", enunciato secondo il quale per ogni n intero positivo ogni polinomio di grado n possiede esattamente n zer

Nel XIX secolo si è compreso che l'insieme dei numeri complessi costituisce un ambiente entro il quale si possono sviluppare varie efficienti teorie che consentono di inquadrare procedimenti di calcolo di vasta portata.

In particolare l'ambiente dei numeri complessi risulta necessario per definire a un elevato livello di generalità l'operazione di elevamento a potenza e la sua inversa, l'estrazione di radice.

Lo studio dei complessi prende spunto da una richiesta ben definita: quella di individuare entità numeriche che elevate al quadrato forniscono numeri reali negativi.
Anche l'ampliamento che porta ai numeri complessi quindi parte dalla opportunità di metterci in grado di eseguire una operazione inversa in tutta la sua completezza.

B50 a.02 Cominciamo con la ricerca di una entità x tale che $x^2 = -1$ che possa considerarsi elemento di un'insieme che estende l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ossia un insieme di entità sulle quali si possano effettuare le operazioni aritmetiche sui reali e che godano di buona parte delle proprietà del campo totalmente ordinato $\mathbb{R}_{Fld}$.

Questa richiesta si può riformulare chiedendo un'estensione di $\mathbb{R}$ nel quale il polinomio $x^2 + 1$ possiedadelle radici; si auspica anche che esso possegga esattamente due radici, in analogia con quanto si riscontra per il polinomio $x^2 - 1$ nel campo reale e si auspica che questo primo obiettivo apra la possibilità di ottenere un simile risultato per le radici di (tutti gli) altri polinomi.

In questo insieme numerico ampliato devono essere estese anche le due operazioni di somma e di prodotto, in quanto elementi indispensabili per poter continuare a parlare di polinomi, le entità dalle quali parte la richiesta di ampliamento del campo dei reali e le cui prestazioni si intendono aumentare.

B50 a.03 Per determinare il valore (possibilmente i due valori) della x che annulla $x^2 + 1$ ci facciamo guidare dalla stretta connessione determinate dalle applicazioni delle operazioni di somma e prodotto.

Siamo quindi indotti a cercare una trasformazione dell'insieme numerico che estende $\mathbb{R}$ tale che la sua doppia applicazione a un reale r equivalga al passaggio al numero suo opposto $-r$.

Una trasformazione di questo genere è stata già incontrata esaminando la rotazione di 90° nel verso antiorario del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, naturale estensione di quella del piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ a sua volta ampliamento da una operazione simile su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Questa rotazione è rappresentata dalla matrice 2×2

$$I := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Va notato che la stessa proprietà è soddisfatta dalla sua trasformazione inversa, dalla rotazione di 90° nel verso orario, rappresentata dalla matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Questa è sia l'opposta che l'inversa della precedente e la si può denotare con $-I$.

A questo punto abbiamo due trasformazioni candidate a individuare due nuove entità numeriche che possono costituire due radici per l'equazione polinomiale di grado 2 $x^2 + 1 = 0$.

B50 a.04 Al fine di ampliare prestazioni computazionali stiamo chiedendo di individuare entità numeriche che possono svolgere il ruolo di radici delle altre equazioni polinomiali e che chiamiamo **numeri complessi**.

L'insieme di queste entità auspichiamo possa costituire un campo che denotiamo con

$$\mathbb{C}_{Fld} \;=\; \langle \mathbb{C}, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$$

e che chiamiamo

Quanto visto sopra induce a pensare che i numeri complessi si possano considerare anche vettori/punti bidimensionali e trasformazioni di tali vettori quando agiscono come fattori di moltiplicazioni; come trasformazioni agiscono come le matrici 2×2, ossia come trasformazioni lineari, in accordo con il fatto che la motiplicazione per un numero reale si può considerare un caso particolare di trasformazione lineare.
Si propongono dunque due rappresentazioni dei nuovi numeri: come elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (punti o vettori) e come matrici 2×2 con entrate reali; l'insieme di queste, semplificando, lo denotiamo con $\mathbf{Mat}_2$.

Occorre ora approfondire questi punti di vista per garantirne la coerenza, l'utilità operativa e i possibili limiti.

B50 a.05 Si osserva che con questa proposta si chiede che lo 0, elemento neutro per la somma, sia rappresentata dal vettore colonna $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, identificabile con il vettore $\mathbf{0}_2$, e dalla matrice $\mathbf{0}_{2,2} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Il numero 1, elemento neutro per il prodotto, deve essere rappresentato dalla matrice unità $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, elemento neutro per il prodotto entro $\mathbf{Mat}_2$. Più in generale ogni nomero reale a va rappresentato con la matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ in modo da agire sui vettori colonna e sulle altre matrici 2×2 come moltiplicatore per a di tutte le entrate.

Per la rappresentazione con vettori colonna del reale a si impone $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$: in tal modo si estendono senza problemi le proprietà della somma tra reali. In particolare l'unità per il prodotto, cioè $1 \in \mathbb{R}$ si può identificare con il vettore $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$.

Per l'operazione di passaggio al numero reale opposto diventa, non si incontrano difficoltà se si propone il cambiamento di segni delle entrate dei vettori colonna e delle matrici 2×2; di conseguenza si propone di rappresentare l'operazione differenza con la differenza tra matrici.

Per la generalizzazione dell'operazione prodotto si trova necessario mantenere la proprietà commutativa, in quanto è una essenziale proprietà per le operazioni che portano ai polinomi e lasciarla cadere sarebbe in contrasto con la motivazione primaria dell'ampliamento del campo dei reali al campo dei complessi.

Dato che il prodotto tra matrici di $\mathbf{Mat}_2$ non è commutativo, risulta necessario associare ai nuovi numeri solo matrici di $\mathbf{Mat}_2$ il cui prodotto sia commutativo, richesta soddisfatta per il prodotto con una matrice fattore diagonale, ossia con una matrice rappresentante un reale.

Tra queste matrici si trova la matrice che rappresenta I, la rotazione del piani-RR intorno all'origine di un angolo di 90° nel verso antiorario, ossia $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Il corrispondente numero complesso lo chiamiamo **unità immaginaria** e lo denotiamo con i
I suoi multipli li rappresentiamo con i vettori colonna $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ e con le matrici $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$, con a numero reale qualsiasi; questi numeri complessi sono chiamati **numeri immaginari [puri]** e tra di essi si trova $-\mathsf{i}$, l'opposto dell'unità immaginaria.

B50 a.06 Per ottenere tutti gli altri numeri complessi si ricorre al fatto che ogni vettore di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si ottiene come combinazione lineare dei due vettori della base canonica che corrispondono a 1 e a i.
Quindi introduciamo il generico numero complesso come combinazione lineare possiamo scrivere

$$z = a + \mathsf{i}\, b \;=\; \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{per ogni} \quad a, b \in \mathbb{R}\ .$$

Si osserva che sull'insieme delle matrici della forma precedente il prodotto è un'operazione commutativa:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\ .$$

Le matrici di $\mathbf{Mat}_2$ si possono applicare ai vettori colonna 2×1 con entrate reali in modo da ottenere come prodotti di matrici righe per colonne delle rappresentazioni di coppie di numeri reali rappresentate dai suddetti vettori.
In particolare applicando a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ la I si ottiene $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ed applicando a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ due volte la matrice $-I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ si ottiene $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'unità per il prodotto di matrici di $\mathbf{Mat}_2$ deve essere rappresentata dalla matrice unità $\mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e lo zero per la somma non può essere rappresentata che dalla matrice nulla $\mathbf{0}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Quindi si possono cercare polinomi di alcune matrici 2×2 (tra le quali le matrici unità e zero) che possano essere trattati come estensioni dei polinomi sui reali.

Accade però che il prodotto tra matrici generiche 2×2 non è commutativo e noncommutativi sono i polinomi su tali matrici; sarebbe dunque una eccessiva forzatura servirsi di polinomi noncommutativi per risolvere il problema posto all'inizio del paragrafo e riguardante operazioni commutative. Questo porterebbe lontano dalle strutture di campo.

Quindi è opportuno prendere in considerazione solo un insieme di matrici di 2×2 che commutano tra di loro.

La moltiplicazione per un numero reale $r \neq 0$ costituisce una omotetia per i numeri reali, mentre l'omotetia in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è data dalle matrici di $\mathbf{Mat}_2$ diagonali, ossia multiple della unità. È ragionevole quindi rappresentare ogni $r \in \mathbb{R}_{nz}$ con la matrice $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$, in accordo con la rappresentazione con la matrice nulla dello zero reale.
È anche opportuno chiedere che si possano trattare i prodotti dei reali per la matrice I, cioè matrici della forma $mat(r) = \begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$; queste matrici esprimono le composizioni di rotazioni di 90° con omotetie.

Abbiamo quindi una rappresentazione mediante trasformazioni lineari di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dei numeri complessi che stiamo introducendo.
I corrispondenti dei numeri reali r rappresentati da matrici diagonali li identifichiamo ancora con r; denotiamo invece con i e chiamiamo **unità immaginaria** l'entità rappresentata dalla I e i suoi multipli per un reale r li chiamiamo **numeri immaginari [puri]** e li denotiamo con $i \cdot r$.

I nuovi numeri che stiamo individuando, i **numeri complessi** che tipicamente sono denotati con la lettera z, a rigore vanno distinti dalle matrici 2×2 che denotiamo con $\boldsymbol{cmat}(z)$ che li possono rappresentare; tuttavia spesso questa distinzione per semplicità può essere lasciata cadere).

Abbiamo quindi che per ogni numero reale x $\boldsymbol{cmat}(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ e per ogni numero immaginario puro $\mathsf{i} \cdot y$ $\boldsymbol{cmat}(\mathsf{i} \cdot y) = \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix}$.

B50 a.07 A questo punto dobbiamo completare ora la definizione delle operazioni del campo sui numeri complessi, essenzialmente la somma e il prodotto, servendoci delle rappresentazioni matriciali. Per questo è sufficiente limitarsi alle combinazioni lineari di un generico reale x e di un generico immaginario puro $i \cdot y$, ovvero alle matrici della forma

$$\boldsymbol{cmat}(x + \mathsf{i}\, y) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \mathsf{i} \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} .$$

La somma si può definire tranquillamente mediante la somma di matrici.

$$\boldsymbol{cmat}(x_1 + \mathsf{i}\, y_1) + \boldsymbol{cmat}(x_2 + \mathsf{i}\, y_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} = mat(x_1 + x_2 + \mathsf{i}\,(y_1 + y_2)) ;$$

quindi un po' più astrattamente poniamo $(x_1 + \mathsf{i}\, y_1) + (x_2 + \mathsf{i}\, y_2) := (x_1 + x_2) + \mathsf{i}\,(y_1 + y_2)$.
Per quanto riguarda la somma dei reali la somma $x + s$ viene interpretata nella geometria dell'asse reale come traslazione di x per il tratto s.
La somma di un immaginario puro $\mathsf{i}\, y$ con un numero reale x si può vedere come la traslazione di $\mathsf{i}\, y$ in orizzontale per il passo x, o equivalentemente come la traslazione in verticale di x per il passo y.

È necessario chiedere di mantenere per i complessi anche la commutatività della somma valida per i reali; essa viene garantita semplicemente dalla commutatività della somma delle matrici in $\mathbf{Mat}_2$.

In tal modo la somma di queste matrici e la somma di numeri complessi sono evidentemente estensioni della somma dei reali e oltre ad essere commutative, sono associative come le somme di matrici (e di vettori).

Siamo dunque condotti a considerare l'insieme dei vettori-RR munito di due operazioni binarie: la somma vettoriale e un'operazione di prodotto nella quale rientrino sia le rotazioni di $\pm 90°$ che le omotetie.

È anche necessario garantire la commutatività del prodotto tra le matrici che stiamo individuando.

Esaminiamo quindi quali sono le matrici di $\mathbf{Mat}_2$ il cui prodotto è commutativo chiedendo per esse

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \tag{1}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} a\,e + b\,g & a\,f + b\,h \\ c\,e + d\,g & c\,f + d\,h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\,a + f\,c & e\,b + f\,d \\ g\,a + h\,c & g\,b + h\,d \end{bmatrix} . \tag{2}$$

L'uguaglianza (2) per le caselle $\langle 1,2\rangle$ comporta $a\,g + c\,h = e\,c + b\,g$; dato che la matrice del secondo fattore nella (1) va considerata arbitraria, si ottengono $a = d$ e $h = e$, due uguaglianze coerenti esprimenti l'uguaglianza delle componenti diagonali.
Le uguaglianze delle altre caselle derivanti dalla (2) si possono considerare conseguenze delle $a = d$ e $h = e$; quindi la richiesta di commutatività implica che ai numeri complessi possiamo associare solo matrici della forma $\begin{bmatrix} a & c \\ b & a \end{bmatrix}$.

B50 a.08 È anche necessario che queste matrici commutino con $mat(i)$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \begin{bmatrix} c & -a \\ a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -a \\ a & c \end{bmatrix} .$$

Pertanto deve essere $c = -b$.
Si osserva anche che la distributività di somma e prodotto è goduta anche dalle matrici quadrate e questo ci consente di concludere che le matrici di $\mathbf{Mat}_2$ commutative devono avere la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Si tratta dunque delle matrici ottenute combinando linearmente matrici diagonali e matrici antisimmetriche.

Per rafforzare le scelte fatte si osserva che queste matrici costituiscono un sistema chiuso per il prodotto:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,e - b\,f & -a\,f - b\,e \\ b\,e + a\,f & -b\,f + a\,e \end{bmatrix} .$$

Si osserva anche che le matrici che rappresentano numeri complessi sono determinate dalle rispettive prime colonne; in altre parole, queste matrici sono in biiezione con i vettori colonna con entrate reali.
Dunque uno di questi vettori, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, rappresenta fedelmente il numero complesso $x + \mathsf{i}\,y$.
Abbiamo quindi una seconda rappresentazione dei numeri complessi per la quale possiamo scrivere $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = vect(x + i\,y)$.

In molti contesti per semplicità è possibile identificare i numeri complessi con le rispettive rappresentazioni matriciali e vettoriali senza generare ambiguità.

Abbiamo inoltre che il prodotto di due numeri complessi si può esprimere come prodotto righe per colonne della matrice dell'uno per il vettore dell'altro:

$$vect((x_1 + i\,y_1)\,(x_2 + i\,y_2)) = mat(x_1 + i\,y_1) \cdot vect(x_2 + i\,y_2) .$$

La semplificazione suddetta porta a trascurare questa uguaglianza e di prendere in considerazione soprattutto la sua conseguenza più "astratta"

$$(x_1 + i\,y_1)\,(x_2 + i\,y_2) = (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + \mathsf{i}\,(y_1\,x_2 + x_1\,y_2) .$$

B50 a.09 Si dice **complesso coniugato** del numero complesso $z = x + \mathsf{i}\,y$ il numero $x - \mathsf{i}\,y$ che si denota con z^* .

In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il punto corrispondente a z^* si ottiene come riflesso rispetto all'asse reale $\mathsf{O}x$ del punto che cporrisponde a z.

Si dice norma o **modulo del numero complesso** e si denota con $|z|$, oppure con $|x + \mathsf{i}y|$, la lunghezza del segmento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che ha come estremi l'origine e $\langle x, y\rangle$; quindi $|z| = |x + \mathsf{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Spesso è utile denotare questo reale nonnegativo con una sola lettera, introducendola con una scrittura della forma $\rho := |x+\mathsf{i}y| := \sqrt{x^2+y^2}$.

Questa espressione estende la formula del quadrato di un numero reale $(\pm r)^2 = r^2$.

Si osserva inoltre che $|x+\mathsf{i}\,y|^2 = x^2+y^2 = (x+\mathsf{i}\,y)(x-\mathsf{i}\,y) = z\cdot z^*$.

Spesso è molto utile la cosiddetta **forma trigonometrica dei numeri complessi**

$$x+\mathsf{i}\,y = \rho(\cos\theta+\mathsf{i}\,\sin\theta)\ , \quad \text{dove} \quad \rho := \sqrt{x^2+y^2}\ , \ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\ , \ \sin\theta = \frac{yt}{\rho}\ .$$

I numeri complessi con la norma uguale a 1 corrispondono ai punti della circonferenza di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avente raggio uguale ad 1: i suoi punti hanno la forma $\cos\theta+\mathsf{i}\,\sin\theta$.

La moltiplicazione per un tale numero complesso corrisponde alla rotazione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ di un angolo θ in verso antiorario.

La moltiplicazione per un generico $x+\mathsf{i}\,y$ corrisponde dunque alla omotetia per il fattore $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$ seguita (o preceduta) dalla rotazione dell'angolo θ.

Conviene osservare esplicitamente che l'angolo θ non è completamente determinato: lo è solo a meno di un addendo che può essere un qualsiasi multiplo intero di $2\,\pi$.

Si conviene di definire **argomento di un numero complesso** $z = x+\mathsf{i}\,y$ e di denotare con $\arg(z)$ l'ampiezza appartenente all'intervallo $\mathbf{[}0°, 360°\mathbf{)}$ dell'angolo nel piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avente come lati il segmento dall'origine a $\langle x, 0\rangle$ e il segmento dall'origine a $cpxy$.

B50 a.10 Esprimiamo le precedenti moltiplicazioni mediante matrici 2×2.

Per la rotazione

$$\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\ ,$$

per la omotetia

$$\boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0}}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}\ ,$$

per la rotoomotetia

$$\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\theta}\circ\boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0},\rho} = \boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0},\rho}\circ\boldsymbol{Rot}_{\mathbf{0},\theta} = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}\ .$$

Questa trasformazione esprime la moltiplicazione per il numero $x+\mathsf{i}\,y$ con $x = \rho\cos\theta$ ed $y = \rho\sin\theta$, e quindi con

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\ , \ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Questa trasformazione come funzione di x e y è espressa dalla matrice

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}\ .$$

Quindi essa applicata al generico numero complesso $u+\mathsf{i}\,v$ fornisce

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\,u-y\,v \\ y\,u+x\,v \end{bmatrix}\ .$$

B50 b. campo dei numeri complessi

B50 b.01 Esaminiamo ora i numeri complessi dal punto di vista algebrico cominciando con il richiamare le definizioni

$$\mathbb{C} \;:=\; \{x, y \in \mathbb{R} :|\; x + \mathsf{i}\, y\} \quad \text{e} \quad \mathbb{C}_{Fld} \;:= \langle \mathbb{C}, +, -, 0, \cdot, {}^{-1}, 1 \rangle \;.$$

Se identifichiamo i numeri complessi $x + \mathsf{i}\, y$ con i corrispondenti vettori-RR, potremmo definire tali entità come coppie di numeri reali $\langle x, y \rangle$ munite delle operazioni di somma $+$ e di prodotto $\cdot$ che esprimiamo mediante le componenti come segue:

$$\begin{aligned} \forall \langle x_1, y_1 \rangle \;,\; \langle x_2, y_2 \rangle \in \mathbb{C} \;:\; & \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \;:= \langle x_1 + x_2 \;,\; y_1 + y_2 \rangle \\ & \langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle \;:= \langle x_1\, x_2 - y_1\, y_2 \;,\; x_1\, y_2 + y_1\, x_2 \rangle \end{aligned} \;.$$

La somma sui complessi è una operazione commutativa, associativa e dotata di operazione inversa; il passaggio all'opposto di un numero complesso viene denotato, come per i numeri reali, con il meno unario prefisso $-$ e ha come elemento neutro $\langle 0, 0 \rangle$, che si può denotare con il semplice "0".
Dunque $\langle \mathbb{C}, +, -, \langle 0, 0 \rangle \rangle$ è un gruppo abeliano chiamato **gruppo additivo del campo**.

Anche il prodotto sui complessi è una operazione commutativa, associativa e, quando ci si limita a $\mathbb{C}_{nz}$, ossia all'insieme dei complessi diversi da 0 dotata di operazione inversa, è definito il passaggio da un x al suo numero reciproco che caratterizziamo con il segno postfisso ${}^{-1}$, cioè a x^{-1}.
Dunque $\langle \mathbb{C}_{nz}, \cdot, {}^{-1}, \langle 1, 0 \rangle \rangle$ è un gruppo abeliano chiamato **gruppo moltiplicativo del campo**.

Si possono poi definire, in stretta somiglianza con il campo dei reali, la differenza tra complessi e la divisione tra complessi il secondo dei quali diverso da 0.

Osserviamo esplicitamete che il campo dei complessi si può definire anche come estensione del campo dei reali mediante l'entità numerica i alla quale si chiede di soddisfare l'equazione $\mathsf{i}^2 = -1$.

B50 b.02 Di un numero complesso $z = x + \mathsf{i}\, y$ la prima componente x si chiama **parte reale** e si denota con $\Re(z)$; si dice **parte immaginaria** di z e si denota con $\Im(z)$.

Per l'insieme dei numeri complessi useremo anche la denominazione **piano di Gauss-Argand**.

Su questo insieme definiamo le operazioni di somma e di prodotto ponendo, per ogni $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle \;&:=\; \langle a + c, b + d \rangle \;\; \text{e} \\ \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle \;&:=\; \langle ac - bd, ad + bc \rangle \;. \end{aligned}$$

La somma è l'estensione cartesiana della somma tra numeri reali; come già notato essa è una operazione commutativa dotata di elemento neutro; questo è $\langle 0, 0 \rangle$, corrisponde all'origine del piano sui reali, lo denotiamo anche con **0** e puotrebbe chiamarsi zero complesso.

Inoltre per l'operazione di somma ogni numero complesso $\langle a, b \rangle$ è dotato di inverso, questo è $\langle -a, -b \rangle$, cioè $-\langle a, b \rangle$ e viene chiamato più specificamente **opposto del numero complesso** $\langle a, b \rangle$; esso corrisponde al vettore-RR ottenuto da $\langle a, b \rangle$ per simmetria centrale rispetto all'origine.

Dunque $\mathbb{C}_{ag} \;:= \langle \mathbb{C}, +, -, \langle 0, 0 \rangle \rangle$ è un gruppo abeliano chiamato **gruppo additivo dei numeri complessi**.

Il prodotto tra numeri complessi è stato definito in modo che la moltiplicazione per un numero complesso corrisponda a una rotoomotetia di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Anche da questo discende che il prodotto è un'operazione commutativa (in accordo con la simmetria delle espressioni negli operandi del prodotto), che è un'operazione associativa (come le rotazioni e le omotetie) e che ogni numero complesso diverso dallo zero è dotato di inverso per il prodotto.

Si trova subito che il numero complesso $\langle 1,0\rangle$ si può far corrispondere alla omotetia di rapporto 1 composta con la rotazione di angolo 0, cioè alla trasformazione $\mathsf{Id}_{\mathbb{C}}$, l'identità dell'insieme $\mathbb{C}$; evidentemente esso costituisce l'elemento neutro del prodotto.

Per l'inverso dell'elemento generico si trova

$$\langle a,b\rangle^{-1} \;=\; \left\langle \frac{a}{a^2+b^2} \;,\; \frac{-b}{a^2+b^2} \right\rangle ,$$

in accordo con il fatto che la trasformazione corrispondente è la omotetia di rapporto $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ composta con la rotazione opposta a quella corrispondente ad $\langle a,b\rangle$.

Dunque, se si introduce $\mathbb{C}_{nz} := \mathbb{C}\setminus \mathbf{0}$, la struttura $\mathbb{C}_{mg} \;:= \left\langle \mathbb{C}_{nz}, \cdot, {}^{-1}, \langle 1,0\rangle \right\rangle$ costituisce un gruppo abeliano chiamato **gruppo moltiplicativo dei numeri complessi**.

B50 b.03 Per l'insieme dei numeri complessi l'operazione di prodotto è distributiva rispetto alla somma, cioè,

$$\forall \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in \mathbb{C} \;:\; \langle a,b\rangle \cdot \big(\langle c,d\rangle + \langle e,f\rangle\big) \;=\; \langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle + \langle a,b\rangle \cdot \langle e,f\rangle \;.$$

Questa uguaglianza si ricava facilmente dalla linearità rispetto a $\langle c,d\rangle$ dell'espressione per il prodotto oppure dalla osservazione di carattere geometrico che applicando la rotoomotetia associata ad $\langle a,b\rangle$, trasformazione che qui denotiamo con RO, alla somma di due vettori-RR $\mathbf{v} = \langle c,d\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle e,f\rangle$ si ottiene la somma del vettore $RO(\mathbf{v})$ con il vettore $RO(\mathbf{w})$.

Dunque l'insieme dei numeri complessi munito delle operazioni di somma e prodotto costituisce un campo. Questa struttura algebrica viene detta **campo dei numeri complessi** e si denota con

$$\mathbb{C}_{Fld} \;:= \left\langle \mathbb{C}, +, -, \mathbf{0}, \cdot, {}^{-1}, \langle 1,0\rangle \right\rangle .$$

I numeri complessi con parte immaginaria nulla si comportano come i numeri reali: infatti

$$\langle a,0\rangle + \langle c,0\rangle = \langle a+c,0\rangle \quad , \qquad \langle a,0\rangle \cdot \langle c,0\rangle = \langle a\,c,0\rangle \quad , \qquad \langle a,0\rangle^{-1} = \left\langle \frac{1}{a},0 \right\rangle .$$

Questi numeri complessi costituiscono un sottocampo del campo dei numeri complessi $\mathbb{C}_{Fld}$.

Inoltre la corrispondenza $\lceil\!\lceil\, a \in \mathbb{R} \mapsto \langle a,0\rangle \,\rceil\!\rceil$ costituisce un isomorfismo tra il campo dei reali e il suddetto sottocampo.
Questo rende in genere lecito identificare discorsivamente i numeri complessi con parte immaginaria nulla con i numeri reali.
A questo punto è pienamente lecito affermare che il campo dei numeri complessi estende il campo dei numeri reali.

B50 b.04 Vediamo come si semplifica la moltiplicazione per $z = \langle a,b\rangle$ per alcuni sottoinsiemi particolari di numeri complessi.

Per i complessi z con $b = 0$, cioè per punti-RR dell'asse orizzontale, la moltiplicazione per $\langle a,b\rangle$ si riduce a una omotetia di rapporto a: $\langle a,0\rangle \cdot \langle c,d\rangle = \langle a\,c, a\,d\rangle = a\,\langle c,d\rangle$.

Nel caso in cui $a^2+b^2 = 1$, cioè quando il corrispondente punto-RR si trova sulla circonferenza di centro $\mathbf{0}$ e raggio 1, la moltiplicazione per $\langle a,b\rangle$ si riduce a una rotazione.

Per i numeri immaginari puri, cioè per i numeri complessi z per i quali $a = 0$ corrispondenti ai punti-RR dell'asse verticale, la moltiplicazione per $\langle a,b\rangle$ si riduce a una omotetia di rapporto b composta con la rotazione di 90°: $\langle 0,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle = \langle -b\,d, b\,c\rangle = b\,\langle -d,c\rangle$.

In particolare i quadrati dei numeri immaginari puri sono i numeri reali negativi: $\langle 0,b\rangle^2 = -b^2$; ancor più in particolare $\mathsf{i}^2 = -1$.

Si osserva inoltre che $(-\langle 0,b\rangle)^2 = -b^2$ e $(-\mathsf{i})^2 = -1$; quindi,come nel campo reale ogni numero positivo k possiede due radici quadrate, la sua radice quadrata aritmetica $\sqrt{k} > 0$ e il numero reale suo opposto $-\sqrt{k}$, così nel campo dei complessi ogni numero reale negativo $-b^2$ possiede due radici quadrate, $\mathsf{i}b$ e $-\mathsf{i}b$.

Si osserva anche che tutti i reali negativi sono esprimibili in due modi come quadrati di immaginari puri: per ogni k reale positivo, si può scrivere $k = \left(\pm\sqrt{k}\right)^2$ e quindi $-k = \mathsf{i}^2\left(\pm\sqrt{k}\right)^2 = \left(\pm\mathsf{i}\sqrt{k}\right)^2$.

B50 b.05 Talora è utile denotare la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso con scritture specifiche: se $z = \langle a,b\rangle \in \mathbb{C}$ per la sua parte reale si scrive $a = \Re)(z)$ e per la sua parte immaginaria $b = \Im(z)$. Ogni numero complesso $z = \langle a,b\rangle$ si può esprimere come somma della sua parte reale e del prodotto dell'unità immaginaria per la sua parte immaginaria:

$$z = \langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle 0,1\rangle \cdot \langle b,0\rangle \;=\; a + \mathsf{i}\,b = \Re x + \mathsf{i}\,\Im z \ .$$

L'espressione $a + \mathsf{i}\,b$ si dice **forma cartesiana del numero complesso** o forma algebrica del numero complesso z; essa spesso risulta più maneggevole di quella della forma $z = \langle a,b\rangle$. Per esempio le definizioni della somma e del prodotto di due complessi diventano

$$(a + \mathsf{i}\,b) + (c + \mathsf{i}\,d) \;:=\; (a+c) + \mathsf{i}(b+d) \quad , \qquad (a + \mathsf{i}\,b)\cdot(c + \mathsf{i}\,d) \;:=\; (a\,c - b\,d) + \mathsf{i}(a\,d + b\,c) \ .$$

Si osserva che queste formule si possono ricavare applicando le regole per le espressioni riguardanti polinomi sui reali (cioè le cosiddette regole del calcolo letterale), trattando i come una indeterminata e tenendo conto dell'uguaglianza $\mathsf{i}^2 = -1$.

B50 b.06 Si definisce come **complesso coniugato** di $z = a + \mathsf{i}\,b$ il numero

$$z^* \;:=\; a - \mathsf{i}\,b = \Re z - \mathsf{i}\,\Im z \ .$$

Va segnalato che per il complesso coniugato di z vien usata anche la notazione $\overline{z}$.

Il passaggio da un numero complesso al suo coniugato corrisponde alla riflessione del piano dei complessi rispetto all'asse orizzontale, cioè all'asse dei numeri reali. Evidente quindi che questa trasformazione sia un'involuzione su $\mathbb{C}$, cioè che sia $(z^*)^* = z$.

Si ricavano subito le uguaglianze seguenti (con $z = \langle a,b\rangle$ e w numeri complessi qualsiasi):

$$z + z^* = 2\,a = 2\,\Re z \quad , \qquad z - z^* = \; b\,i = 2\,i\,\Im z$$

$$\Re z = \frac{z + z^*}{2} \quad , \qquad \Im z = \frac{z - z^*}{2\,i} \ ;$$

$$(z \pm w)^* = z^* \pm w^* \quad , \qquad (z\cdot w)^* = z^*\cdot w^* \quad , \qquad \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*} \ .$$

Le ultime uguaglianze si configurano come espressioni del rispetto delle operazioni algebriche da parte della coniugazione complessa.

Da queste uguaglianze segue che a ogni uguaglianza della forma

$$\mathcal{E}_1(z_1, z_2, ..., z_n) = \mathcal{E}_2(z_1, z_2, ..., z_n)$$

nella quale z_1, z_2, ... , z_n sono numeri complessi, mentre $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_1$ denotano due espressioni riguardanti le applicazioni di due combinazioni di operazioni algebriche sopra i numeri complessi loro argomenti, corrisponde una uguaglianza coniugata della forma

$$\mathcal{E}_1\left({z_1}^*, {z_2}^*, ..., {z_n}^*\right) \;=\; \mathcal{E}_2\left({z_1}^*, {z_2}^*, ..., {z_n}^*\right) \ .$$

Questa corrispondenza tra uguaglianze viene chiamato **dualità per coniugazione complessa** o concisamente **dualità-cc** e può venire utilizzata per ricavare con poca fatica nuove uguaglianze da uguaglianze accertate.

B50 b.07 Ricordiamo che

$$z\,z^* \;=\; (a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b) \;=\; a^2+b^2 \geq 0$$

e che la radice quadrata aritmetica di questa espressione $\sqrt{a^2+b^2}$ è $|z|$, il modulo del numero complesso z; questa notazione si accorda con quella che esprime il valore assoluto di un numero reale, in quanto se z è un numero reale, $z = \Re z = a$, il suo modulo non è che il valore assoluto della sua parte reale, $|z| = |a|$.

Valgono le seguenti relazioni per z e w numeri complessi arbitrari:

$$|z| \geq 0 \qquad , \qquad |z| = 0 \iff z = 0 \qquad , \qquad |z^*| = |z| \qquad ,$$

$$|\Re(z)|, |\Im()z| \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)| \qquad , \qquad ||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$$

Le prime tre discendono immediatamente dalle definizioni e hanno evidenti interpretazioni geometriche.

Anche le ultime due coppie di relazioni sono interpretabili in termini geometrici e sono chiamate **disuguaglianze triangolari per i numeri complessi**.

Può essere utile presentare anche una loro verifica algebrica.
Posto $z = \langle a, b\rangle$ e $w = \langle c, d\rangle$ e passando ai quadrati dei tre membri, si giunge alle disuguaglianze equivalenti

$$\left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \;\leq\; (a+c)^2 + (b+d)^2 \;\leq\; \left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \;.$$

Sviluppando i quadrati si hanno altre disuguaglianze equivalenti

$$-\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \;\leq\; a\,c + b\,d \;\leq\; \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\;;$$

queste equivalgono all'unica disuguaglianza

$$|a\,c + b\,d| \leq \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\;;$$

passando ancora ai quadrati, sviluppando e semplificando si arriva alla relazione

$$0 \;\leq\; -a\,b\,c\,d + a^2\,d^2 + b^2\,c^2 \;=\; (a\,d - b\,c)^2\;,$$

evidentemente verificata per ogni scelta di a, b, c e d reali.

B50 c. potenze e radici nel campo complesso

B50 c.01 Vediamo come la forma trigonometrica dei numeri complessi si riveli utile per esprimere prodotti e divisioni.
Consideriamo $n \geq 2$ numeri complessi della forma

$$z_j = |z_j| \, (\cos \theta_j + \mathsf{i} \sin \theta_j) \quad \text{per} \quad j = 1, 2, ..., n \; ;$$

Per il prodotto dei primi due abbiamo

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \; &= \; |z_1| \cdot |z_2| \, [\cos \theta_1 \, \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \, \sin \theta_2 + \mathsf{i} \, (\sin \theta_1 \, \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \, \sin \theta_2)] \\ &= \; |z_1| \cdot |z_2| \; [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathsf{i} \; \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \tag{1}$$

Per il **reciproco del numero complesso** z abbiamo invece

$$z^{-1} \; = \; \frac{1}{|z| \, (\cos \theta + \mathsf{i} \sin \theta)} \; = \; \frac{1}{|z|} \frac{\cos \theta - \mathsf{i} \sin \theta}{(\cos \theta + \mathsf{i} \sin \theta) \, (\cos \theta - \mathsf{i} \sin \theta)} \; = \; |z|^{-1} (\cos \theta - \mathsf{i} \sin \theta) \; ,$$

ovvero

$$\frac{1}{z} \; = \; \frac{1}{|z|} \, [\cos(-\theta) + \mathsf{i} \sin(-\theta)] \; . \tag{2}$$

Di conseguenza per la **divisione tra numeri complessi**

$$\frac{z_1}{z_2} \; = \; \frac{|z_1|}{|z_2|} \; [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathsf{i} \sin(\theta_1 - \theta_2)] \; . \tag{3}$$

Più in generale, per il prodotto degli n numeri complessi z_1, z_2, ..., z_n, dalla formula precedente e per l'associatività del prodotto si ottiene

$$\prod_{j=1}^{n} z_j \; = \; \prod_{j=1}^{n} |z_j| \; \left[\cos \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \right) + \mathsf{i} \, \sin \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \right) \right] \; . \tag{4}$$

In particolare se $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ si ha la formula per la **potenza intera positiva di un numero complesso**

$$z^n \; = \; |z|^n \, \Big(\cos(n \, \theta) + \mathsf{i} \, \sin(n \, \theta) \Big) \tag{5}$$

Grazie alla espressione (2) per il numero reciproco la precedente formula vale anche per qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$.
Questa formula viene detta **formula di de Moivre**.

B50 c.02 Dati l'intero naturale n e il numero complesso, $z = |z| \, (\cos \theta + \mathsf{i} \sin \theta)$, si dice **radice n-esima del numero complesso** z ogni numero complesso w tale che $w^n = z$.

(1) Teorema Ogni numero complesso nonnullo z possiede n radici n-esime date dalla espressione

$$|z|^{1/n} \; \left[\cos \left(\frac{\theta + 2 \, k \, \pi}{n} \right) + \mathsf{i} \, \sin \left(\frac{\theta + 2 \, k \, \pi}{n} \right) \right] \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \; .$$

Dim.: Si verifica facilmente che elevando alla potenza n-esima le espressioni precedenti si trova z, cioè che esse forniscono radici n-esime di z.
Si osserva poi che per ogni radice n-esima di z, alla quale assegnamo la forma $r(\cos \phi + \mathsf{i} \, \sin \phi)$, deve essere $r^n \, [\cos(n \, \phi) + \mathsf{i} \, \sin(n \, \phi)] \; = \; |z| \, [\cos \theta + \mathsf{i} \, \sin \theta]$.
Di conseguenza ciascuna di queste radici deve avere una delle forme enunciate ∎

B50 c.03 Fissato un intero n maggiore di 1, consideriamo gli n numeri complessi della forma

$$\mathtt{u}_{n,k} \; = \; \cos \left(k \, \frac{2 \, \pi}{n} \right) + \mathsf{i} \, \sin \left(k \, \frac{2 \, \pi}{n} \right) \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1 \; .$$

Si verifica facilmente che questi n numeri complessi sono **radici n-esime dell'unità**, cioè che per essi vale l'uguaglianza $\mathtt{u}_{n,k}{}^n = 1$.

Si constata inoltre che per ogni $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ si ha $\mathtt{u}_{n,k} = \mathtt{u}_{1,n}{}^k$.

Chiaramente nel piano complesso i numeri $\mathtt{u}_{n,0} = 1$, $\mathtt{u}_{n,1}$, ..., $\mathtt{u}_{n,n-1}$ si collocano nei vertici del poligono di n lati regolare inscritto nella circonferenza goniometrica, con il primo vertice nel punto $\langle 1, 0 \rangle$.

Si noti che per n pari (scriviamolo $n = 2\,h$) si ha $\mathtt{u}_{2h,h} = -1$; se invece n è dispari 1 è l'unica radice reale dell'unità.

Per la coniugazione complessa si constata che per $j = 0, 1, ..., \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ si ha $\mathtt{u}_{n,j}{}^* = \mathtt{u}_{n,n-j}$.

B50 c.04 Le n radici complesse del numero complesso $z = \rho\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta)$ si possono esprimere prendendo una qualsiasi di esse e moltiplicandola per le n radici dell'unità.

Si osserva anche che la moltiplicazione per le n radici dell'unità corrispondono alle rotazioni del piano complesso con centro nell'origine per l'angolo di ampiezza $\dfrac{2\,\pi}{n}$.

Di conseguenza anche le n radici del generico numero complesso $z = \rho\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta)$ costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza; più precisamente questa circonferenza, come la goniometrica ulla quale si trovano le radici dell'unità, ha centro nell'origine, ma ha raggio $|z|^{1/n}$.

B50 c.05 In seguito nelle considerazioni riguardanti numeri complessi useremo il segno di radice per individuare l'insieme di tutte le radici del radicando complesso e la notazione con esponente frazionario per la radice aritmetica.

$$\sqrt[n]{\rho\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta)} = \left\{ k = 0, 1, 2, ..., n-1 \;\vdots\; \rho^{1/n}\,\left[\cos\left(k\,\frac{2\,\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(k\,\frac{2\,\pi}{n}\right)\right] \right\} .$$

Per esempio abbiamo

$$\sqrt{9} = \{-3, +3\}\ ,\quad \sqrt[4]{1} = \{1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}\}\ ,\quad 9^{1/2} = 3\ ,\quad 8^{1/3} = 2\ ,\quad (-3\,125)^{1/5} = -5\ .$$

B50 c.06 Definiamo come **potenza del numero complesso z a esponente razionale** $\dfrac{n}{d}$, con d intero positivo, n intero nonnullo e $|n|$ e d coprimi, ciascuno dei numeri complessi forniti dall'espressione

$$\sqrt[\frac{n}{}]{\rho}\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta) = \sqrt[n/d]{\rho}\,(\cos\theta + \mathsf{i}\,\sin\theta)\ ,$$

cioè ogni numero dell'insieme

$$\left\{ k = 0, 1, 2, ..., n-1 \;\vdots\; \rho^{n/d}\,\left[\cos\frac{n\,\theta + k\,2\,\pi}{d} + \mathsf{i}\,\sin\frac{n\,\theta + k\,2\,\pi}{d}\right] \right\} .$$

B50 d. successioni e serie di numeri complessi

B50 d.01 Estendiamo ai numeri complessi le nozioni di successione e di serie, già trattate per i numeri razionali e reali [B35, B38b].

Definiamo **successione di numeri complessi**, una funzione del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ o di un genere simile, come $\lceil \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ o come $\lceil \{k, k+1, k+2, ...\} \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ per un qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$.

Accanto al termine "successione di numeri complessi", ci serviremo spesso anche del termine equivalente più conciso **successione-C**.

Per ogni n appartenente al dominio di una successione=C chiamiamo **componente della successione** di posizione n il valore che essa assume in corrispondenz di n.

Le successioni di numeri complessi si possono considerare successioni di coppie di reali e si possono introdurre i loro limiti riconducendosi ai limiti delle due successioni della parte reale e della parte immaginaria delle componenti.

Conviene tuttavia fare riferimento alle possibili distanze tra numeri complessi, in modo da definire costruzioni che si possano considerare casi particolari di successioni di elementi di spazi metrici che riprenderemo in I12 e che consentono di utilizzare gli strumenti generali, astratti e assai efficienti, della topologia [B46, T30].

B50 d.02 Consideriamo una successione di complessi presentandola con una scrittura come

$$\mathsf{c} = \langle c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{N} :| \ c_n \rangle \ , \tag{1}$$

dove $\forall n \in \mathbb{N} : \ c_n \in \mathbb{C}$.

Nella pratica tra le successioni di numeri complessi sono concretamente utilizzabili per affrontare problemi specifici solo le successioni di numeri complessi costruibili, cioè le successioni della forma (1) nelle quali per ogni $c_n =: a_n + \mathsf{i}\, b_n$ a_n e b_n sono numeri reali costruibili.

Vedremo che servono spprattutto successioni le cui componenti sono forniti da espressioni chiaramente interpretabili.

Nelle considerazioni a carattere generele che seguono tuttavia, facciamo riferimento a componenti aventi come parte reale e parte immaginaria dei numeri reali, lasciando le distinzioni sulla costruibilità agli sviluppi riguardanti elaborazioni specifiche, preoccupandoci solo ad avere enunciati più compatti e più leggibili.

B50 d.03 Ricordiamo che l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ munito di una delle funzioni distanza del genere $\lceil \mathbb{C} \times \mathbb{C} \triangleleft\!\longrightarrow \mathbb{R}_{0+} \rceil$, e in particolare della distanza $|c_1 - c_2|$, si può considerare uno spazio metrico [B46].

Introduciamo quindi la notazione $\mathbf{AdrnC}(E)$ per denotare l'insieme dei numeri complessi aderenti ad un sottoinsieme E di $\mathbb{C}$.

Consideriamo un qualsiasi insieme infinito di numeri complessi $D \subseteq \infty\mathbb{C}$ e una funzione $f \in \lceil D \longmapsto \mathbb{C} \rceil$.

Si dice **punto di accumulazione** o **valore limite**
per i valori di tale funzione ogni $L \in \mathbb{C}$ tale che, per qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si trovano infiniti elementi $x \in D$ per i quali $|f(x) - L| < \epsilon$.

La precedente definizione costituisce una generalizzazione della definizione di punto di accumulazione di una successione-C; infatti questa si può considerare una funzione a valori complessi avente come dominio l'insieme degli interi naturali o un insieme di interi facilmente riconducibile a $\mathbb{N}$.

Denotiamo con $\mathbf{LimvC}(f)$ l'insieme dei valori limite della funzione f. In particolare l'insieme dei valori limite di una successione-C s si denota con $\mathbf{LimvC}(\mathsf{s})$.

Si osserva che l'insieme dei punti limite della f si può definire anche con l'espressione

$$\mathbf{LimvC}(f) \ := \ \mathbf{AdrnC}(\mathsf{cod}(f)) \ .$$

Per la successione di espressioni in grado di fornire numeri complessi individuata dalla scrittura $\langle n \in \mathbb{N} :| \ \mathcal{E}_n \rangle$, in molti contesti risultano utili anche notazioni della forma $\mathbf{LimvC}\langle \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{N}}$, della forma $\mathbf{LimvC}\langle \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \rangle$ o anche della forma $\mathbf{LimvC}\langle \mathcal{E}_n \rangle$.

B50 d.04 Per l'insieme dei punti di accumulazione di una successione a valori in $\mathbb{C}$, si possono riscontrare varie situazioni.

Una successione a valori coincidenti $\langle c, c, c, ... \rangle$ con $c \subset \mathbb{C}$ ha c come unico valore limite $\mathbf{LimvC}\langle c \rangle_{\mathbb{N}} = \{c\}$-; questo numero da solo costituisce il codominio della successione.

Ogni successione di componenti esclusivamente razionali o reali possiede gli insiemi di valori limite individuati dall'analisi delle semplici successioni-Q o successioni-R.

Una successione come la $\mathsf{t} = \langle 1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}, 1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}, 1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}, ..., n\%4, ... \rangle$ possiede un numero finito, 4, di valori limite: $\mathbf{LimvC}(\mathsf{t}) = \{1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}\} = \mathsf{cod}(\mathsf{t})$; in questo caso l'insieme dei valori limite della successione coincide con il suo codominio (finito).

Una successione-C

$$\mathbf{r} = \left\langle \mathsf{i}+1 \ , \ -\mathsf{i}+1 \ , \ \mathsf{i}+\frac{1}{2} \ , \ -\mathsf{i}+\frac{1}{2} \ , \ \mathsf{i}+\frac{1}{3} \ , \ -\mathsf{i}+\frac{1}{3} \ , \ ... \ , \ \mathsf{i}+\frac{1}{n} \ , \ -\mathsf{i}+\frac{1}{n} \ , \ ... \right\rangle$$

ha come insieme di valori limite il duetto $\{\mathsf{i}, -\mathsf{i}\}$.

B50 d.05 Una successione-C $\mathsf{c} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ c_n \rangle$ si dice **successione-C convergente** sse possiede un solo valore limite appartenente a $\mathbb{C}$.
Questo valore, che qui denotiamo con L, si dice **limite della successione-C**; in tal caso si dice che questa a tende o converge ad L per n tendente all'infinito; questa situazione si enuncia scrivendo, come per le successioni-Q e le successioni-R,

$$\lim_{n\to\infty} c_n \ = \ L \qquad \text{oppure} \qquad \lim \mathsf{c} \ = \ L \qquad \text{oppure} \qquad \lceil\!\lceil \, c_n \to L \ \text{ per } \ n \to +\infty \, \rceil\!\rceil \ .$$

Si dimostrano facilmente varie proprietà delle successioni-C, in genere rifacendosi alle proprietà delle due succerssioni-R applicate alle parti reali e alle parti immaginarie dei componenti della successione-C.

Il limite di una successione-C convergente è unico ∎

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L \in \mathbb{C} \iff \lim_{n\to\infty} \Re(c_n) = \Re(L) \in \mathbb{R} \ \wedge \lim_{n\to\infty} \Im(c_n) = \Im(L) \in \mathbb{R} \ ∎$$

Per le successioni-C non convergenti ci limitiamo a segnalare che si ha una ampia varietà di situazioni: si possono trovare successioni con insiemi di punti di aderenza costituiti dai più disparati sottoinsiemi di CMb e si possono individuare successioni divergenti verso i punti all'infinito delle più diverse rette del piano dei numeri complessi o dei più diversi raggruppamenti di queste rette.

B50 d.06 Le successioni-C convergenti si possono comporre con varie operazioni a cominciare da quelle di natura algebrica per le proprietà delle quali risultano utili i vari risultati ottenuti per le successioni-Q [B35c] e per le successioni-Q .

Si possono definire facilmente le somme di successioni-C, le moltiplicazioni per costanti complesse, il passaggio alla successione-C opposta, la differenza tra successioni-C e un paio di tipi di prodotti di successioni-C.

Queste operazioni conducono sempre a successioni-C convergenti il cui limite si ottiene con semplici composizioni (somme, moltiplicazioni per costanti, differenze, prodotti, ... dei limiti delle successioni operande per le composizioni.

B50 d.07 Anche le successioni-C sono vantaggiosamente studiate insieme alle serie di addendi complessi, entità la cui definizione si richiama alle serie di numeri razionali [B35d] e di numeri reali.

Consideriamo una successione di numeri complessi

$$\mathsf{c} \;=\; \big\langle ca_1, c_2, ..., c_n, ... \big\rangle \;=\; \big\langle n \in \mathbb{P} :|\; c_n \big\rangle \in \big\lceil\, \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{C} \,\big\rceil \;; \tag{1}$$

definiamo come **successione delle somme parziali** associata alla c la successione di numeri complessi

$$\big\langle c_1 \,,\, c_1 + c_2 \,,\, c_1 + c_2 + c_3 \,,\, ... \,,\, c_1 + c_2 + \cdots + c_n \,,\, ... \big\rangle \;=\; \Big\langle n \in \mathbb{P} :\Big|\; \sum_{i=1}^{n} c_i \Big\rangle \;. \tag{2}$$

Questa nuova successione tipicamente la denotiamo scrivendo

$$\mathsf{s} = \big\langle s_1, s_2, ..., s_n, \ldots \big\rangle \quad \text{dove} \quad s_n := \sum_{i=1}^{n} c_i \;. \tag{3}$$

Inoltre per segnalare la dipendenza della s dalla c scriviamo

$$\mathsf{s} \;=\; \boldsymbol{Spsm}(\mathsf{c}) \;:=\; \Big\langle n \in \mathbb{P} :|\; \boldsymbol{Spsm}_n(\mathsf{c}) \Big\rangle \;. \tag{4}$$

Per la successione delle somme parziali della a potrebbe essere opportuno usare una scrittura come $\mathsf{s}(\mathsf{c})$ al fine di evidenziare le sua dipendenza dalla c.
Si osserva inoltre che la corrispondenza tra le successioni-C e le corrispondenti successioni-C delle loro somme parziali è biunivoca, ossia che la funzione $\boldsymbol{Spsm}$ è invertibile e precisamente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Spsm}(\mathsf{c}) \;&=\; \boldsymbol{Spsm}\big\langle n \in \mathbb{P} :|\; c_n \big\rangle \;= \big\langle n \in \mathbb{P} :|\; s_n \big\rangle \iff \\ &\qquad (\boldsymbol{Spsm}^{-\mathbf{1}})(\mathsf{s}) \;= \big\langle s_1 \,,\, s_2 - s_1 \,,\, s_3 - s_2 \,,\, ... \,,\, s_n - s_{n-1} \,,\, \ldots \big\rangle \end{aligned} \;. \tag{6}$$

B50 d.08 Consideriamo il caso in cui la successione delle somme parziali $\big\langle n \in \mathbb{P} :|\; s_n \big\rangle$ sia convergente-C e abbia come limite un numero complesso s, cioè sia $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$.
Per esprimere questa situazione ci serviremo delle due seguenti notazioni equivalenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \;=\; s \qquad \text{e} \qquad c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots \;=\; s \;. \tag{1}$$

Più formalmente introduciamo il tipo di entità chiamata **serie-C convergente** definita come coppia $\big\langle \mathsf{c} \,,\, \boldsymbol{Spsm}(\mathsf{c}) \big\rangle$. Si permette tuttavia di presentarla più semplicementcon ciascuna delle due precedenti scritture.

Inoltre per il valore limite s adottiamo il termine **somma della serie convergente** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ e il modo di dire

$$\text{“la serie } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ è una serie che converge ad } s\text{”} .$$

Inoltre le componenti c_n della successione da cui si è partiti le chiamiamo **addendi della serie**.

Similmente se la successione delle somme parziali `s` è divergente oppure indeterminata, si usa parlare, risp., di serie divergente a $+\infty$, di serie divergente , oppure di serie indeterminata.

B50 e. serie di potenze di variabili complesse

B50 e.01 Oltre alle successioni e la serie di numeri complessi è ragionevole prendere in considerazione le **successioni di funzioni di una variabile complessa**, cioè successioni di funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}\, \rceil$, nonché le serie di queste funzioni.

Consideriamo quindi una successione della forma

$$\big\langle f_0(z), f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z), ... \big\rangle \;=\; \big\langle n \in \mathbb{N} :|\; f_n(z) \big\rangle \;.$$

nella quale ciascuna delle $f_n(z)$ denota una funzione della variabile $z \in \mathbb{C}$ con valori in $\mathbb{C}$.

Per queste successioni si può parlare di convergenza, divergenza o irregolarità in un punto del piano dei complessi, oppure in un sottoinsieme di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Per la proprietà di convergenza in un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ si distingue tra convergenza semplice e convergenza uniforme, questa seconda consentendo di individuare strumenti che spesso si rivelano decisamente più efficaci.

B50 e.02 Alle successioni di funzioni-CtC convergenti si possono vantaggiosamente accostare le serie di queste funzioni e anche per queste entità si possono porre il problema della convergenza in un punto, della convergenza in un dominio $d \subseteq \mathbb{C}$ e il problema della convergenza uniforme.

In particolare si possono prendere in considerazione successioni di polinomi in una variabile complessa e serie di tali entità. Si trova che molte di queste costruzioni che si servono di polinomi con caratteristiche molto particolari portano a strumenti computazionali di notevole efficacia pratica e di grande importanza per sviluppi matematici di interesse generale.
Tra le molte successioni e serie di polinomi rivestono un ruolo basilare le successioni di polinomi dati da ben definite espressioni della forma $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_n\, z^n$.

B50 e.03 Si dice **serie di potenze di una variabile complessa** z ogni serie di funzioni di una variabile complessa della forma

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-z)^n + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \;, \tag{1}$$

dove a, c_0, c_1,... sono elementi del campo $\mathbb{C}_{Fld}$; a viene detto **centro della serie di potenze** e $\big\langle n \in \mathbb{N} :|\; c_n \big\rangle$ viene detta "successione dei coefficienti della serie".

Nel seguito useremo l'abbreviazione spvc per "serie di potenze di una variabile complessa".

Per ogni n intero naturale la **somma parziale n-esima della serie**

$$s_n(z) := c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-z)^n$$

è un polinomio di grado n nella variabile z.

Sono di grande importanza le serie di potenze convergenti di una variabile complessa, come lo sono le serie di potenze covergenti di un variabile reale, in quanto consentono di definire importanti funzioni sui reali e sui complessi.
Vedremo che l'ambiente nel quale risulta più opportuno studiare sistematicamente queste serie è il campo complesso. In effetti le serie di variabile comlessa costituiscono uno strumento cruciale per lo studio delle `funzioni analitiche (wi)` [I38].

Nell'attuale capitolo riguardiamo soprattutto le serie di potenze di una variabile complessa che in linea di massima chiameremo semplicemente *serie di potenze*.

Le spvc con centro nello zero del campo hanno la forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \;; \tag{2}$$

questa forma più semplice risulta spesso vantaggiosa e molte considerazioni su `spvc` specifiche riguardano serie con centro in 0. Spesso risulta conveniente ricondurre lo studio di una serie con centro generico c ad una serie con centro in 0 attraverso il cambiamento di variabile $z - c \longleftrightarrow Z$, ossia applicando una traslazione nel campo complesso.

B50 e.04 Ogni serie di potenze a.01(1) converge nel suo centro: infatti si riduce alla serie $c_0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$.

Esistono serie che convergono uniformemente per ogni $z \in \mathbb{C}$: questo è il caso della cosiddetta serie esponenziale

$$\exp(z) \;:=\; 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \;.$$

Infatti per la corrispondente serie dei moduli delle potenze si ha la convergenza per ogni valore di $|z|$ grazie al criterio del rapporto, poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z|}{n+1} = 0.$

Vi sono serie di potenze che convergono in alcuni punti di $\mathbb{C}$ ma non convergono in altri punti di tale piano. Questo è il caso della serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Infine esistono serie di potenze che convergono solo nel centro. Un esempio è dato dalla serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! \cdot z^n$: infatti se si considera un fissato z, alla successione dei valori assoluti dei suoi termini $\langle n \in \mathbb{N} :| \; n! \cdot z^n \rangle$ le si può applicare il criterio del rapporto che riguarda $\dfrac{(n+1)! \cdot |z|^{n+1}}{n! \cdot |z|^n} \;=\; (n+1) \cdot |z|$; questa quantità per $n \geq \dfrac{2}{|z|}$ è maggiore di 2 e questo implica la non convergenza della serie.

B50 e.05 Si pone il problema di stabilire per ogni serie di potenze la forma del dominio di convergenza.
(1) Teorema Data la `spvc`

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots + a_n(zc)^n + \cdots \;,$$

o essa converge per ogni $z \in \mathbb{C}$, o converge solo per $z = 0$ o esiste un numero positivo R tale che la serie converge per ogni z per il quale $|z| < R$ e non converge per $R < |z|$.

Dim.: . . . . . .

Questo reale positivo R viene detto **raggio di convergenza della serie**, il cerchio con centro nell'origine e raggio R viene chiamato **cerchio di convergenza della serie** e la sua circonferenza **circonferenza di convergenza della serie**.

I punti della circonferenza di convergenza possono appartenere o meno al dominio di convergenza: questo dipende dalle caratteristiche di ogni specifica serie di potenze.

B50 e.06 Prop. Se per la serie in esame esiste finito o infinito $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, allora questo fornisce il raggio di convergenza della serie.

Dim.: . . . . .

B50 f. formule di Eulero e forma esponenziale dei numeri complessi

B50 f.01 Ricordiamo gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni esponenziale, seno e coseno.

$$\mathsf{e}^x \;=\; 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\;, \tag{1}$$

$$\sin x \;=\; \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\,\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}+\cdots\;, \tag{2}$$

$$\cos x \;=\; 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\,\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}+\cdots\;. \tag{3}$$

Da queste si ricava l'espressione

$$\cos\theta+\mathsf{i}\,\sin\theta \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,\theta)^n}{n!} \;=\; \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\;. \tag{4}$$

B50 f.02 Si ottengono quindi le seguenti **formule di Eulero**

$$\sin x \;=\; \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x}-\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}}{2\,i}\qquad,\qquad \cos x \;=\; \frac{\mathsf{e}^{i\,x}+\mathsf{e}^{-i\,x}}{2}\;. \tag{1}$$

Si arriva quindi alla **forma esponenziale di un numero complesso**

$$z \;=\; \rho\,(\cos\theta+\mathsf{i}\,\sin\theta) \;=\; \rho\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\;. \tag{2}$$

Si osserva che le precedenti formule rendono molto chiare le simmetrie delle funzioni seno e coseno di argomenti reali.

La f01(2) e la prima delle f02(1) evidenziano la disparità della funzione seno, mentre la f01(3) e la seconda delle f02(1) rendono evidente la parità della funzione seno.

B50 f.03 La forma esponenziale dei numeri complessi risulta assai utile in molte manipolazioni simboliche.
Un primo esempio è dato dalla presentazione della circonferenza goniometrica come l'insieme dei numeri complessi della forma $\{\theta\in[0,2\,\pi)\;:|\;\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\}$.

Altri esempi di utilità di queste formule si ricavano sviluppando la formula di de Moivre c01(5) nel caso $\rho=1$ e argomento θ reale:

$$(\cos\theta+\mathsf{i}\,\sin\theta)^n \;=\; \cos(n\,\theta)+\mathsf{i}\,\sin(n\,\theta)\;. \tag{1}$$

B50 g. campo dei numeri complessi costruibili

B50 g.01 Quando si trattano concreti problemi computazionali, anche nel campo dei numeri complessi è necessario distinguere i **numeri complessi costruibili**
da quelli noncostruibili che chiamiamo anche numeri complessi nonesemplificabili. ?

I primi sono ottenibili mediante operazioni algebriche o come soluzioni di polinomi a coefficienti interi o come limiti di successioni di numeri razionali, di reali calcolabili o di numeri complessi preventivamente trovati costruibili; su di essi sono effettivamente eseguibili elaborazioni effettive che possono condurre a numeri dotati di precisione elevata quanto si vuole o quanto serve.

I numeri complessi rimanenti sono numeri complessi collegabili a numeri reali che possono essere introdotti solo assiomaticamente e che quindi non possono essere utilizzati per individuare valori a loro volta utilizzabiliin successive applicazioni effettive.

Ogni numero complesso costruibile risulta esprimibile come combinazione $z = a + \mathsf{i}\, b$ con a e b numeri reali costruibili. In altre parole si ha un numero complesso costruibile sse si conoscono due procedure che possono fornire la sua parte reale e la sua parte immaginaria con una precisione elevata quanto si vuole.

B50 g.02 Dato che sono note procedure che calcolano i valori assunti dalle funzioni radice quadrata, seno e coseno di argomenti costruibili con una precisione arbitrariamente elevata, una definizione equivalente di numero complesso costruibile può riferirsi alla sua forma polare $z = \rho(\cos\theta + \mathsf{i}\sin\theta)$; essa richiede due procedure in grado di fornire il modulo e l'argomento di tale z $\arg(z)$ con precisione elevata quanto si vuole.

Oltre alle costruzioni sopra indicate, può essere opportuno considerare molte altre costruzioni che da numeri reali costruibili e da numeri complessi costruibili portano a "nuovi" numeri complessi costruibili. In questo capitolo abbiamo visto l'elevamento a potenze intere e il passaggio alle radici complesse. Lo studio delle funzioni speciali ne fornisce molte altre [W50, W55, W60].

Chiarimenti di questo genere possono risultare utili in quanto consentono di avvalersi di strumenti di calcolo già predisposti per valutare i valori di operazioni o funzioni.

B50 g.03 L'insieme dei numeri complessi costruibili lo denotiamo con $\mathbb{C}_C$; come si è visto questo insieme è strettamente collegato con $\mathbb{R}_C \times \mathbb{R}_C$ e in vari contesti si può identificare con questo quadrato cartesiano.

Dato che effettuando operazioni di somma e prodotto sui numeri costruibili complessi si ottengono numeri dello stesso genere, $\mathbb{C}_C$ munito di somma, prodotto e quant'altro risulta essere un sottocampo di $\mathbb{C}_{Fld}$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php