1

Capitolo B46
spazi metrici: topologia metrica, limiti e continuità

Contenuti delle sezioni

a. distanze, spazi metrici e relative disuguaglianze p. 2
b. insiemi aperti, insiemi chiusi e intorni p. 8
c. punti aderenti e aderenza di un insieme p. 15
d. insiemi densi, spazi separabili e sottospazi p. 18
e. funzioni continue tra spazi metrici p. 20
f. limiti di funzioni tra spazi metrici p. 23
g. insiemi convessi e insiemi connessi p. 25
h. prodotto di spazi metrici p. 26

28 pagine

B46 0.01 In queste pagine vengono introdotte le nozioni di distanza e di spazio metrico a un livello generale, ma facendo esempi collocati soprattutto negli gli spazi cartesiani finitodimensionali, ossia agli spazi delle sequenze finite di fissata lunghezza di numeri reali.

A partire dalla nozione di distanza vengono introdotte in modo relativamente semplice e intuitivo molte nozioni basilari per la `topologia (wi)`, uno dei filoni fondamentali della matematica, essenziale per lo sviluppo sistematico di vari strumenti conoscitivi.

Vengono successivamente introdotti gli spazi separabili, gli insiemi connessi e le nozioni di limite e di continuità per le funzioni tra spazi metrici.

B46 a. distanze, spazi metrici e relative disuguaglianze

B46 a.01 Le nozioni strettamente collegate di distanza e di spazio metrico si introducono in generale facendo riferimento a un insieme ambiente al quale a priori non si pone alcuna restrizione.

Diciamo **distanza** su un insieme S nonvuoto una funzione (bivariata) $\boldsymbol{d} \in \lceil S \times S \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ con le seguenti proprietà:

[Msp 1] $\forall P, Q \in S \ : \ \boldsymbol{d}(P,Q) \geq 0$ (nonnegatività della distanza) ;

[Msp 2] $\forall P, Q \in S \ : \ \boldsymbol{d}(P,Q) = 0$ sse $P = Q$ (potere separatore della distanza) ;

[Msp 3] $\forall P, Q \in S \ : \ \boldsymbol{d}(P,Q) = \boldsymbol{d}(Q,P)$ (la distanza è funzione bivariata simmetrica) ;

[Msp 4] $\forall P, Q, R \in S \ : \ \boldsymbol{d}(P,R) \leq \boldsymbol{d}(P,Q) + \boldsymbol{d}(Q,R)$ (la distanza soddisfa la disuguaglianza triangolare) .

L'affermazione di [Msp 1] e [Msp 2] equivale ad enunciareo che la distanza è una **funzione bivariata definita positiva**.

Si dice **spazio metrico** una coppia $\langle S, \boldsymbol{d} \rangle$ con S insieme nonvuoto e $\boldsymbol{d}$ distanza su S. Denotiamo con **Msp** la classe degli spazi metrici.

La componente insieme di uno spazio metrico costituisce il suo terreno.
La funzione distanza di uno spazio metrico viene chiamata anche **metrica**.

B46 a.02 Un esempio semplice di spazio metrico è fornito dall'insieme dei numeri reali munito della distanza fornita dal valore assoluto della differenza

$$\lceil x, y \in \mathbb{R} \mapsto |x - y| \rceil \ . \tag{1}$$

Tale spazio in molti contesti viene chiamato retta reale.

Come si è visto in B45c03, altri tipici spazi metrici sono gli spazi euclidei di 2, 3, ..., d dimensioni muniti della distanza

$$\text{dist}_2 \ := \ \lceil \ \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \times \mathbb{R}^{\times d} \ \mapsto \ \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} \ \rceil \ . \tag{2}$$

Qui e nel seguito del capitolo supponiamo sia $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle$ e $\mathsf{y} = \langle y_1, y_2, ..., y_d \rangle$

Più in generale, per ogni p reale maggiore di 1 si hanno gli spazi metrici ottenuti munendo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times d}$ della funzione

$$\text{dist}_p \ := \ \lceil \ \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \times \mathbb{R}^{\times d} \ \mapsto \ \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ \rceil \ . \tag{3}$$

È evidente che questa funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \times \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ soddisfi [Msp 1], [Msp 2] ed [Msp 3] e che sia invariante per traslazione.

Si definisce come **norma-p** del vettore x l'espressione $||\mathsf{x}||_p \ := \ \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.
Quindi il risultato dell'applicazione della funzione in (3) si può denotare con $||\mathsf{x} - \mathsf{y}||_p$.

B46 a.03 In molti contesti per garantire che dist_p sia una distanza il punto cruciale è la dimostrazione della validità della disuguaglianza triangolare [Msp 4] e per questo spesso servono le seguenti importanti disuguaglianze.

Consideriamo un reale $p \in \mathbf{(}1,+\infty\mathbf{)}$ e il reale $q := \dfrac{p}{p-1}$, anch'esso appartenente all'intervallo $\mathbf{(}1,+\infty\mathbf{)}$.
Una tale coppia di reali $\langle p,q\rangle$ si dice **coppia di esponenti coniugati** e l'insieme di tali coppie lo denotiamo c ***Cpcnjexp***.

Osserviamo che valgono le uguaglianze

$$(1) \qquad q\,p = q+ \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad , \quad 1=\frac{p+q}{p\,q} \quad , \quad p\,q = p+q \quad , \quad (p-1)(q-1)=1$$

e che ciascuna di esse può essere utilizzata per definire le nostre coppie.
Esempi di coppie appartenenti a $\boldsymbol{Cpcnjexp}\cap\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ sono:

$$\langle 2,2\rangle,\ \langle 3,1.5\rangle,\ \langle 4,1.\overline{333}\rangle\ ,\ \langle 5,1.25\rangle\ ,\ \langle 8,1.125\rangle\ \text{ e }\ \langle 11,1.1\rangle\ .$$

Diciamo **coppia di funzioni-RtR mutuamente reciproche**, in sigla cfrrr, una coppia $\big\langle y=\phi(x), x=\psi(y)\big\rangle$ di funzioni-RtR con argomenti e valori diversi da 0 aventi lo stesso dominio le quali sono l'una la reciproca dell'altra.

Si osserva che per ogni $\langle p,q\rangle \in \boldsymbol{Cpcnjexp}$ vale la relazione

$$(2) \qquad y = x^{p-1} \iff x = y^{q-1}\ .$$

Quindi $\big\langle x^{p-1}\ ,\ x^{q-1}\big\rangle$ costituisce una cfrrr.

B46 a.04 Prop. (**disuguaglianza di W. H. Young per i reali**)

$$\forall\langle p,q\rangle \in \boldsymbol{Cpcnjexp}\ ,\ x,y\in\mathbb{R}_{0+}\ :\ x\,y\ \le\ \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ .$$

Dim.: Consideriamo la seguente catena di relazioni:

$$x\,y\ =\ \mathsf{e}^{\ln x}\,\mathsf{e}^{\ln y}\ =\ \mathsf{e}^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(y^q)} \le \frac{1}{p}\,\mathsf{e}^{\ln(x^p)}+\frac{1}{q}\,\mathsf{e}^{\ln(y^q)}\ =\ \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ .$$

La precedente disuguaglianza, il centro della dimostrazione, costituisce la caratterizzazione della convessità della funzione e^x, disuguaglianza che per una generica funzione reale convessa $F(x)$ di dominio D ha la forma

$$\forall t\in\mathbf{[}0,1\mathbf{]}\ ,\ \forall x_1,x_2\in D\ :\ F\left(t\,x_1+(1-t)x_2\right)\ \le\ t\,F(x_1)+(1-t)\,F(x_2)\ \blacksquare$$

Conviene osservare che la precedente disuguaglianza si può far discendere da un fatto più generale che concerne coppie di funzioni $\langle\phi(x),\psi(y)\rangle$ definite, risp., negli intervalli $\mathbf{[}0,\alpha\mathbf{]}$ e $\mathbf{[}0,\beta\mathbf{]}$, ivi crescenti e continue (e integrabili) e costituenti una cfrrr.

B46 a.05 Prop. (**disuguaglianza di Hoelder per spazi sui reali**)

$$\forall\langle p,q\rangle \in \boldsymbol{Cpcnjexp}\ ,\ \mathsf{x},\mathsf{y}\in\mathbb{R}^{\times d}\ :\ \sum_{i=1}^{d}|x_i\,y_i|\ \le\ \left(\sum_{i=1}^{d}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{d}|y_i|^q\right)^{1/q}\ .$$

Dim.: Osserviamo preliminarmente che la disuguaglianza si riduce alla $0=0$ se $\mathsf{x}=\mathbf{0}_d$ oppure se $\mathsf{y}=\mathbf{0}_d$.
Assumiamo che x abbia norma-p positiva, $||\mathsf{x}||_p>0$, che y abbia norma-q positiva, $||\mathsf{y}||_q>0$ e introduciamo per ogni per $i=1,...,d$ i reali $\xi_i := \dfrac{|x_i|}{||\mathsf{x}||_p}$ e $\eta_i := \dfrac{|y_i|}{||\mathsf{y}||_q}$ appartenenti a $\mathbf{[}0,1\mathbf{]}$.
La disuguaglianza assume allora la forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\xi_i\,\eta_i\le 1$.

Per la concavità della funzione logaritmo naturale si ha

$$\ln(\xi_i\,\eta_i) \;=\; \frac{1}{p}\,\ln({\xi_i}^p) + \frac{1}{q}\,\ln({\eta_i}^q) \;\le\; \ln\left(\frac{1}{p}\,{\xi_i}^p + \frac{1}{q}\,{\eta_i}^q\right)\;.$$

Applicando la funzione esponenziale (monotona) a entrambi i membri si ricava $\xi_i\,\eta_i \le \frac{1}{p}\,{\xi_i}^p + \frac{1}{q}\,{\eta_i}^q$ per $i = 1, ..., d$. Sommando sugli indici i si ottiene l'enunciato ∎

B46 a.06 Prop. (**disuguaglianza di Minkowski**) per spazi reali

$$\forall p \in [1, +\infty)\;,\; \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^{\times d}\;\;:\;\;\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{d}|x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{d}|y_k|^p\right)^{1/p}\;.$$

Dim.: Per $p = 1$ la disuguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare [Msp 4] per i numeri reali che comporta $\forall i = 1, ..., d\;\;:\;\; |x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$.
Passiamo quindi al caso $p > 1$ e scriviamo $w_i := x_i + y_i$ per $i = 1, ..., d$.
Ancora grazie alla [Msp 4] per i reali abbiamo

$$|w_i|^p = |x_i + y_i|\,|w_i|^{p-1} \;\le\; (|x_i| + |y_i|)\,|w_i|^{p-1}$$

e sommando sugli i

$$\sum_{i=1}^{d}|w_i|^p \;\le\; \sum_{j=1}^{d}|x_j|\,|w_j|^{p-1} + \sum_{k=0}^{d}|y_k|\,|w_k|^{p-1}\;.$$

Applichiamo la disequazione di Hoelder a ciascuna delle somme a secondo membro ottenendo

$$\sum_{i=1}^{d}|z_i|\,|w_i|^{p-1} \;\le\; \left(\sum_{i=1}^{d}|z_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{d}\Big(|w_j|^{p-1}\Big)^q\right)^{1/q} \qquad \text{ove} \quad z_i \in \{x_i, y_i\} \;\text{ e }\; q := \frac{p}{p-1}\;.$$

Complessivamente, dato che $(p-1)\,q = p$ e $1/q = 1 - 1/p$, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{d}|w_i|^p \;\le\; \left[\left(\sum_{j=1}^{d}|x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{d}|y_k|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{d}|w_i|^p\right)^{1-1/p}\;.$$

Dividendo entrambi i membri per l'ultimo fattore e osservando che

$$\sum_{i=1}^{d}|w_i|^p \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{d}|w_i|^p\right)^{1-1/p} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{d}(|w_i|^p\right)^{1/p}\;,$$

si trova la formula enunciata ∎

B46 a.07 Si osserva che per ogni spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e ogni sottoinsieme del suo terreno $T \subset S$, anche la coppia $\left\langle T, \boldsymbol{d}\big|_{T\times T}\right\rangle$ costituisce uno spazio metrico.
Questo dipende innanzi tutto dal fatto che nella definizione in a01 nessuno degli elementi dell'insieme terreno risulta privilegiato e ciascuno di essi può essere eliminato dal terreno senza influire sulla distanza tra i restanti punti.
Inoltre la lecitezza di queste eliminazioni è consentita dalla possibilità che il codominio della funzione distanza sia un sottoinsieme molto ridotto di $\mathbb{R}_{0+}$

Dalla possibilità di ridurre senza restrizioni il terreno degli spazi metrici segue la possibilità di considerare una grande varietà di spazi metrici.

In concreto l'insieme degli spazi metrici che conviene prendere in considerazione è relativamente circoscritto. Infatti è ragionevole pensare che presentino maggiore interesse spazi metrici basati su terreni il più possibile estesi.
Non bisogna tuttavia escludere che si dimostri utile considerare come terreni di spazi metrici insiemi quali $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}$, $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$ e come vedremo loro prodotti cartesiani come, ad esempio, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}_{\mathsf{c}}\times\mathbb{R}_{\mathsf{c}}$ e $\mathbb{R}_{\mathsf{a}}\times[0:100]$.

B46 a.08 La definizione di spazio metrico è stata data attraverso richieste piuttosto generiche e in effetti questa mancanza di vincoli consente di trattare in modo unificato una gamma di entità matematiche molto ampia e differenziata.

Tra i molti spazi metrici specifici hanno particolare evidenza e utilità quelli utilizzati nella geometria e nella fisica.

In effetti risulta conveniente adottare per la teoria degli spazi metrici termini del linguaggio geometrico e fisico, elementi che consentano di visualizzare e rendere intuitivi molti sviluppi deduttivi e di facilitare la comprensione delle sue applicazioni.

Molte nozioni di grande rilevanza, come quelle di bolla, insieme aperto, insieme chiuso, intorno, punto di accumulazione, insieme derivato e chiusura topologica che si possono introdurre in modo abbastanza intuitivo per $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e per $\mathbb{R}^{\times 3}$ si possono basare solo sulla nozione di distanza e quindi si possono applicare a tutti gli spazi metrici, anche a quelli più "esotici", meno sostenuti dalla intuizione visiva.

Una ampia varietà di esempi di spazi metrici si trova in `Metric space (we)` e in `Spazio metrico (wi)`.

Qui interessano primariamente gli spazi euclidei, ma conviene segnalare che si possono definire delle metriche interessanti anche su ambienti che vanno da strutture discrete come i grafi nonorientati [D26] o come gli insiemi di d-uple di cifre binarie muniti della cosiddetta **distanza di Hamming** [C66a02], a insiemi di sequenze binarie con lunghezze anche diverse, a vari spazi di funzioni dei quali si fa cenno in a09.

B46 a.09 Per un insieme qualsiasi S definiamo come **funzione distanza binaria** la funzione

$$\text{dist}_{\neq} \;:=\; \lceil\!\lceil\, \langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle \in S\times S \;\mapsto\; \mathsf{Bval}(\mathsf{x}\neq\mathsf{y}) \,\rceil\!\rceil \;. \tag{2}$$

In parole povere due "punti" di S hanno distanza binaria 0 sse coincidono e distanza 1 sse sono diversi.

Che $\langle S, \text{dist}_{\neq}\rangle$ sia uno spazio metrico è piuttosto evidente: gli assiomi [Msp 1], [Msp 2] e [Msp 3] sono ovviamente soddisfatti; [Msp 4] si verifica facilmente sulle 5 possibili combinazioni di uguaglianza o diversità dei punti P, Q ed R.
La struttura $\langle S, \text{dist}_{\neq}\rangle$ viene detta **spazio metrico discreto**.

Nel caso particolare in cui $S=\{1,2,...,n\}$ si la funzione **distanza binaria** è esprimibile mediante la delta di Kronecker:

$$\forall\langle i,j\rangle \in S\times S \;:\; \text{dist}_{\neq} \;=\; 1-\delta(i,j)\;.$$

Nel caso che sia $S=\mathbb{N}$ o che S sia un qualsiasi altro insieme ricorsivo la distanza binaria corrisponde alla matrice-NN $\lceil\!\lceil\, \langle i,j\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto 1-\delta_{i,j} \,\rceil\!\rceil$.

Un altro ampliamento evidente si ha con $S=\mathbb{R}$ e in tal caso la distanza binaria corrisponde alla diagonale di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ossi alla retta-RR $y=x$.

B46 a.10 Consideriamo un $D\subseteq\mathbb{R}$ e l'insieme delle funzioni-RtR aventi come dominio D e limitate $S_D := \lceil\!\lceil\, D \longmapsto_{Ltd} \mathbb{R} \,\rceil\!\rceil$.

Definiamo tra queste entità la funzione distanza

$$\text{(1)} \qquad \text{dist}_\infty \ := \ \left\lceil\ f(x), g(x) \in \left\lceil\ D \longmapsto_{Ltd} \mathbb{R}\ \right\rceil \ \mapsto \ \sup_{x\in D} |f(x) - g(x)|\ \right\rceil \ .$$

Si dimostra facilmente che la coppia $\left\langle \left\lceil\ D \longmapsto_{Ltd} \mathbb{R}\ \right\rceil, \text{dist}_\infty \right\rangle$ è uno spazio metrico, che viene detto **spazio delle funzioni-RtR limitate**.

Consideriamo le funzioni del genere $\{\mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}\ \rceil$ aventi come dominio una cella rettangolare R e in tale dominio continue; il loro insieme è quindi $\left\lceil\ \mathsf{R} \longmapsto_{Cnt} \mathbb{R}\ \right\rceil$.
Definiamo tra queste entità la funzione

$$\text{(1)} \qquad \text{dist}_{maxdf} \ := \ \left\lceil\ F, G \in \left\lceil\ \mathsf{R} \longmapsto_{Cnt} \mathbb{R}\ \right\rceil \ \mapsto \ \max_{\mathsf{x}\in\mathsf{R}} |F(\mathsf{x}) - G(\mathsf{x})|\ \right\rceil \ .$$

La coppia $\left\langle \left\lceil\ \mathsf{R} \longmapsto_{Cnt} \mathbb{R}\ \right\rceil, \text{dist}_{maxdf} \right\rangle$, ossia lo spazio delle funzioni a valori reali continue in R, si dimostra facilmente costituire uno spazio metrico.

I due precedenti spazi sono esempi dei cosiddetti **spazi funzionali**, spazi i cui elementi sono funzioni caratterizzate da ben determinate proprietà.

Quando si trattano questi ambienti come spazi metrici risulta possibile servirsi di termini geometrici che possono essere facilmente visualizzati e intuiti, possibilità che consente di esaminare configurazioni di funzioni anche piuttosto complesse e di realizzare sintesi di notevole efficacia.
A questo proposito si parla di "geometrizzazione dello studio delle funzioni".

B46 a.11 Poniamoci in uno spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$.

Si dice **diametro** del sottoinsieme $A \subseteq S$ $\text{diam}(A) \ := \ \sup_{\mathsf{x},\mathsf{y}\in A} \boldsymbol{d}(\mathsf{x},\mathsf{y})$.

In ogni spazio metrico discreto ogni sottoinsieme del terreno con due o più elementi ha diametro 1.
Negli spazi $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{\times 3}$ muniti di distanza pitagorica la funzione bivariata diametro generalizza la nozione di diametro definita per le figure geometriche classiche.

Dati due sottoinsiemi A e B dello spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$, si dice **distanza.s** tra A e B la funzione del genere $\left\lceil\ \mathfrak{P}(S) \times \mathfrak{P}(S) \longmapsto \mathbb{R}_{0+}\ \right\rceil$

$$\boldsymbol{d}_{set}(A, B) \ := \ \inf_{\mathsf{x}\in A\ ,\ \mathsf{y}\in B} \boldsymbol{d}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \ .$$

In ogni spazio metrico due insiemi con punti in comune evidentemente hanno distanza.s nulla. Va osservato che viceversa due sottoinsiemi con distanza.s nulla non necessariamente hanno qualche punto in comune e tanto meno sono necessariamente coincidenti.

Nell'ambito della retta reale si trovano facilmente duetti di sottoinsiemi disgiunti con distanza.s nulla: due esempi sono dati dai due intervalli $\mathbf{(}-\infty, 1\mathbf{)}$ e $\mathbf{(}1, 5\mathbf{]}$ e dai due insiemi numerabili $\mathbb{P}$ e $\left\{ n \in \mathbb{P} :|\ n + \dfrac{1}{2^n} \right\}$.
Nello spazio metrico discreto la distanza.s tra due insiemi disgiunti è sempre 1, mentre due insiemi con qualche punto in comune hanno distanza.s nulla.

La distanza.s tra sottoinsiemi di S non è una funzione distanza su $\mathfrak{P}(S)$; infatti essa non soddisfa [Msp 2] e non soddisfa [Msp 4].
Per esempio nel caso del piano cartesiano metrico $\langle \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \text{dist}_2\rangle$, se si considerano i tre cerchi chiusi A, B e C di raggio 1 e aventi il centro, risp., in $\langle -3, 0\rangle$, $\langle 0, 0\rangle$ e $\langle 3, 0\rangle$ abbiamo

$$\text{dist}_{set}(A, B) = 1 \ , \ \text{dist}_{set}(B, C) = 1 \ , \ \text{dist}_{set}(A, C) = 4 > 2 = \text{dist}_{set}(A, B) + \text{dist}_{set}(B, C) \ ,$$

in disaccordo con la disuguaglianza triangolare.

Nel caso uno dei due argomenti della distanza.s sia un singoletto $\{aSd\}$, spesso si abbrevia la notazione $\mathrm{dist}_{set}(A, \{\mathsf{a}\})$ con la $\mathrm{dist}_{set}A, \mathsf{a})$.

B46 a.12 Spesso è utile stabilire che due spazi metrici si possono collegare con una trasformazione che conserva la distanza.

Due spazi metrici $\mathsf{S}_a := \langle S_a, \boldsymbol{d}_a \rangle$ e $\mathsf{S}_b := \langle S_b, \boldsymbol{d}_b \rangle$ si dicono **spazi isometrici** sse esiste una biiezione β del genere $\lceil\, S_a \lhd\!\longrightarrow\!\rhd S_b \,\rceil$ tale che

$$\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in S_a \;\; : \;\; \boldsymbol{d}_b(\beta(\mathsf{x}), \beta(\mathsf{y})) = \boldsymbol{d}_a(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \; .$$

Una tale biiezione si dice **isometria** e per affermare che S_a e S_b sono collegati da una isometria si scrive

$$\lceil\, \mathsf{S}_a \lhd\!\longrightarrow\!\rhd_{Msp} \mathsf{S}_b \,\rceil \neq \emptyset \quad \text{o semplicemente} \quad \mathsf{S}_a \lhd\!\longrightarrow\!\rhd_{Msp} \mathsf{S}_b \; .$$

Questa definizione generalizza quella di trasformazione isometrica di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ munito della distanza pitagorica dist_2.

Chiaramente la relazione isometria tra spazi metrici è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè è un'equivalenza

Particolare importanza hanno le isometrie di uno spazio metrico in se. In particolare sono isometrie degli spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ le traslazioni, le riflessioni e le rotazioni, mentre non lo sono le omotetie con fattori diversi da 1 e -1.

B46 a.13 Un insieme S può fare da terreno a diversi spazi metrici, ovvero può essere dotato di diverse metriche.
Per esempio se $\boldsymbol{d}$ è una distanza lo è anche la $k\,\boldsymbol{d}$ per ogni $k \in \mathbb{R}_+$ e se anche $\boldsymbol{d}'$ è una distanza lo è anche la funzione $\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}'$.

Le diverse distanze di cui si può munire un insieme S possono anche essere notevolmente diverse.

A questo proposito si osserva che a ogni distanza $\boldsymbol{d}$ su un insieme S si può associare la funzione del genere $\lceil\, S \times S \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \,\rceil$ definita da

$$\boldsymbol{d}_*(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \;:=\; \frac{\boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y})}{1 + \boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y})} \; .$$

Anche questa è una distanza, cioè soddisfa le richieste in a01 In effetti le proprietà [Msp 1], [Msp 2] e [Msp 3] sono ovvie, mentre la [Msp 4] si dimostra con manipolazioni algebriche non immediate ma elementari.

Va rilevato che, anche quando la distanza $\boldsymbol{d}$ può assumere valori arbitrariamente grandi, come accade alle dist_p in $\mathbb{R}^{\times d}$ quando a p si assegnano valori elevati, la distanza associata $\boldsymbol{d}_*$ può assumere solo valori inferiori di 1, valori che per taluni sviluppi sono gestibili più facilmente.

B46 b. insiemi aperti, insiemi chiusi e intorni

B46 b.01 o metrico $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d} \rangle \in \mathbf{Msp}$.

Si dice **bolla aperta** avente centro in $\mathsf{c} \in S$ e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ l'insieme

$$\mathsf{ball}(S, \boldsymbol{d}; \mathsf{c}, r) \ := \ \{\mathsf{x} \in S \ \big[\!\big] \ \boldsymbol{d}(\mathsf{c}, \mathsf{x}) < r\} \ .$$

Si dice **bolla chiusa** avente centro in $\mathsf{c} \in S$ e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ l'insieme

$$\overline{\mathsf{ball}}(S, \boldsymbol{d}; \mathsf{a}, r)) \ := \ \{\mathsf{x} \in S \ \big[\!\big] \ \boldsymbol{d}(\mathsf{a}, \mathsf{x}) \leq r\} \ .$$

Si dice **bordo di bolla** o **frontiera di bolla** avente centro $\mathsf{c} \in S$ e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ l'insieme

$$\partial\mathsf{ball}(S, \boldsymbol{d}; \mathsf{a}, r) \ := \ \{\mathsf{x} \in S \ \big[\!\big] \ \boldsymbol{d}(\mathsf{a}, \mathsf{x}) = r\} \ .$$

Evidentemente la frontiera di ogni bolla si può esprimere come differenza insiemistica tra la corrispondente bolla chiusa e la corrispondente bolla aperta, cioè come

$$\partial\mathsf{ball}(S, \boldsymbol{d}; \mathsf{a}, r) \ = \ \overline{\mathsf{ball}}(S, \boldsymbol{d}; \mathsf{a}, r)) \setminus \overline{\mathsf{ball}}(S, \boldsymbol{d}; \mathsf{a}, r)) \ .$$

Più precisamente i tre insiemi delle bolle aperte, delle chiuse e dei bordi di bolla di ogni spazio metrico sono in biiezione; in altre parole i tre suddetti insiemi hanno contenuti informativi equivalenti.

Quando si può considerare implicito che si fa riferimento a un unico ben definito spazio metrico le precedenti notazioni si semplificano, risp., nelle $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r)$, $\overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{a}, r)$ e $\partial\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r)$.

B46 b.02 Per gli spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ la nozione di bolla generalizza sia quella di sfera che quella di cubo; infatti si prova facilmente che la sfera $\mathsf{Sphr}(\mathsf{c}, r)$ coincide con $\mathsf{ball}(\mathbb{R}^{\times d}, \mathrm{dist}_2; \mathsf{c}, r)$, mentre il cubo $\mathsf{cube}(\mathsf{c}, \ell/2)$ è uguale a $\mathsf{ball}(\mathbb{R}^{\times d}, \mathrm{dist}_1; \mathsf{c}, \ell)$.

Nella figura che segue sono presentate le frontiere delle bolle con centro in $\mathbf{0}_2$ e raggio 1 negli spazi metrici $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{dist}_1 \rangle$, $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{dist}_2 \rangle$ e $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{dist}_{+\infty} \rangle$.

Consideriamo un qualsiasi spazio metrico discreto $\langle S, \boldsymbol{d} \rangle$ e un qualsiasi $\mathsf{c} \in S$. Per ogni $r \in \mathbf{(}0, 1\mathbf{]}$ la bolla $\mathsf{ball}(\mathsf{c}, r)$ si riduce a $\{\mathsf{c}\}$, mentre per ogni $r \in \mathbf{(}1, +\infty\mathbf{]}$ $\mathsf{ball}(\mathsf{c}, r) = S$.

B46 b.03 Si dice **insieme aperto** dello spazio metrico $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d} \rangle$, o più concisamente **aperto** di $\boldsymbol{S}$, ogni sottoinsieme A di $\boldsymbol{S}$ per il quale $\ \forall \mathsf{a} \in A \ : \ \mathbb{R}_+ \ni r \ \big[\!\big] \ \mathsf{ball}(\mathsf{a}, r) \subset A$.

Denotiamo con $\mathbf{Open}_{\boldsymbol{S}}$ la collezione degli insiemi aperti di $\boldsymbol{S}$.

Si osserva che per ogni spazio metrico $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d} \rangle$, quale che sia la distanza adottata, la definizione implica che sono insiemi aperti sia l'intero S che $\emptyset$.

(1) Prop.: Per ogni $\langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{d} \rangle \in \mathbf{Msp}$ ogni bolla aperta $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r)$ è un insieme aperto.

Dim.: Consideriamo un generico punto $\mathsf{b} \in \mathsf{ball}(\mathsf{c}, r)$; per esso si ha $\boldsymbol{d}(\mathsf{c}, \mathsf{b}) < r$ per definizione e la bolla avente centro in $\mathsf{b} \ \searrow \ \mathsf{ball}(\mathsf{b}, r - \boldsymbol{d}(\mathsf{a}, \mathsf{b}))$ è interamente contenuta nella $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r)$, in quanto per ogni suo punto x si ha $\boldsymbol{d}(\mathsf{c}, \mathsf{x}) \leq \boldsymbol{d}(\mathsf{c}, \mathsf{b}) + \boldsymbol{d}(\mathsf{b}, \mathsf{x}) < r$ ∎

Va segnalata la coerenza terminologica tra la precedente definizione di insieme aperto e i termini usati per gli intervalli reali e le definizioni di cerchi, poligoni, sfere, celle rettangolari aperte e altre figure della geometria classica assimilabili alle precedenti.

Esempi di insiemi non aperti della retta reale sono gli intervalli chiusi **[**a,b **]**; infatti i due elementi a e b di un tale insieme non sono i centri di alcuna bolla aperta (intervallo aperto) contenuta interamente nell'intervallo.

Similmente non sono insiemi aperti della retta reale i singoletti e gli intervalli delle forme **[**a,b **)**, **(**a,b **]** e **[**a,b **]**.

In ogni spazio metrico $\langle \mathbb{R}^{\times d}, \boldsymbol{d} \rangle$ sono insiemi non aperti le bolle chiuse $\overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{a}, r)$, in quanto ogni punto con distanza r dal centro a non è centro di alcuna bolla contenuta interamente nella data bolla chiusa. Conseguentemente non sono insiemi aperti le sfere chiuse, i cubi chiusi e le celle rettangolari chiuse.

Altri insiemi non aperti sono tutti gli insiemi E per i quali si possa affermare $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r) \subset E \subset \overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{a}, r)$ per qualche $\mathsf{a} \in S$ e qualche $r \in \mathbb{R}_+$.

Anche le frontiere delle bolle non sono insiemi aperti.

B46 b.04 (1) Prop.: In uno spazio metrico discreto tutti i sottoinsiemi del terreno sono insiemi aperti.

Dim.: Infatti per ogni punto p di tale spazio $\mathsf{ball}(\mathsf{p}, 1/2) = \{\mathsf{p}\}$ e quindi, in accordo con [b03], ogni singoletto è un insieme aperto.
Inoltre ogni sottoinsieme del terreno è unione di singoletti e quindi per b05(1) è aperto ∎

Conviene rilevare esplicitamente che il carattere aperto o meno di un insieme di punti dipende dallo spazio metrico nel quale si colloca.
Consideriamo per esempio un intervallo aperto J di una retta $\mathcal{R}$ facente parte del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. J è un insieme aperto in $\mathcal{R}$, ma non è un insieme aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: infatti per ogni $\mathsf{p} \in J$ si trova un intervallo aperto in $\mathcal{R}$ con centro in p e interamente contenuto in J che costituisce un intorno aperto di p, mentre ogni bolla (cerchio) aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contiene sia punti di J che punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus J$, cioè ogni punto di J non è interno a J in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

B46 b.05 (1) Prop.: L'unione di una famiglia qualsiasi di insiemi aperti in $\boldsymbol{S}$ $^{\searrow}$ $A := \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ è un insieme aperto in $\boldsymbol{S}$.

Dim.: Per ogni $\mathsf{a} \in A$ si trova $\lambda \in \Lambda$ tale che $\mathsf{a} \in A_\lambda$ e il fatto che $A_\lambda \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}}$ implica che si trova una $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r)$ interamente contenuta in A_λ e quindi in A; questo consente di concludere che A gode della proprietà che caratterizza gli insiemi aperti ∎

(2) Prop.: L'intersezione di una famiglia finita qualsiasi di insiemi aperti in $\boldsymbol{S}$ $^{\searrow}$ $A := \cap_{i=1}^{n} A_i$ è un insieme aperto in $\boldsymbol{S}$.

Dim.: Consideriamo un qualsiasi $\mathsf{a} \in A$ e una sequenza di bolle $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r_i)$ con i raggi r_i scelti in modo che per $i = 1, ..., n$ sia $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r_i) \subset A_i$; è possibile individuare $r := \min(r_1, ..., r_n)$ ed è evidente che la bolla $\mathsf{ball}(\mathsf{a}, r)$ appartiene all'intersezione A, e questa constatazione consente di concludere che A è un insieme aperto ∎

Può invece accadere che l'intersezione di una famiglia infinita di insiemi aperti non sia un insieme aperto. Per esempio nella retta reale l'intersezione degli intervalli aperti $\left(0, 1 + \dfrac{1}{n}\right)$ per $n = 1, 2, 3, ...$ è l'intervallo $(0, 1]$ che non è un insieme aperto.

Nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la famiglia continua di rettangoli aperti $\left(-1 - \dfrac{1}{r}, 1 + \dfrac{1}{r}\right) \times \left(-2 - \dfrac{1}{s^2}, 2 + \dfrac{1}{s^2}\right)$ definita per arbitrari $r \in [1, +\infty)$ e $s \in [1, +\infty)$ ha come intersezione il rettangolo chiuso $[-1, 1] \times [-2, 2]$.

B46 b.06 Nello spazio metrico cartesiano $\langle \mathbb{R}^{\times d}, \mathrm{dist}_2 \rangle$ sono insiemi aperti, oltre alle sfere aperte, le celle rettangolari aperte e in particolare i cubi aperti.

Infatti ogni punto c di una cella aperta $C := \mathsf{cell}(\mathsf{a}, \mathsf{b})$ è centro di un cubo aperto interamente contenuto nella C, cubo avente metà della lunghezza del lato uguale alla minima delle sue distanze dai punti del bordo della cella $\partial\mathsf{cell}(\mathsf{a}, \mathsf{b})$.

In uno spazio euclideo gli insiemi aperti si possono anche definire a partire dai cubi aperti o dalle celle rettangolari aperte; infatti se un punto x è contenuto in una cella aperta C interamente contenuta in un insieme aperto secondo le celle $^{\searrow}$ A, tale x è contenuto anche in una bolla aperta interamente contenuta nella C e quindi nella A.

Si intuisce che la definizione degli insiemi aperti basata sulla distanza euclidea è equivalente a quella basata sui cubi o sulle celle.
In effetti le definizioni date si possono generalizzare nell'ambito della topologia generale attraverso definizioni assiomatiche della collezione degli insiemi aperti [T30].

B46 b.07 In uno spazio metrico $\boldsymbol{S} := \langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ si dice **insieme chiuso** ogni $C \subseteq S$ che sia complementare in S di un insieme aperto.

La collezione degli insiemi chiusi di $\boldsymbol{S}$ si denota con $\mathsf{Clsd}_{\boldsymbol{S}}$.

Dalle definizioni segue subito che $\emptyset$ ed S sono insiemi chiusi, oltre ad essere insiemi aperti.

Sulla retta reale, se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sono insiemi chiusi gli intervalli illimitati $\mathbf{[}a, +\infty\mathbf{)}$ e $\mathbf{(} -\infty, b\mathbf{]}$ e gli intervalli limitati **[**a,b **]**.
Non sono invece né chiusi né aperti gli intervalli **[**a,b **)** e **(**a,b **]**.
Sono insiemi chiusi anche i singoletti $\{a\}$

Nel piano cartesiano metrico $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{dist}_2\rangle$ sono insiemi chiusi tutte le rette, tutte le semirette che contengono la loro estremità, tutti i segmenti che contengono le loro estremità, tutte le poligonali che contengono le loro estremità e tutte le poligonali chiuse.

Conviene rilevare che l'aggettivo chiuso attribuito alle poligonali ha significato ben diverso da quello usato per gli insiemi chiusi definiti in questo paragrafo.

In ogni spazio discreto tutti i sottoinsiemi sono aperti [b04(1)] e quindi, essendo complementari di aperti, sono anche tutti chiusi.

B46 b.08 Ricordiamo che quando si può sottintendere che si considerano solo insiemi contenuti in un ambiente S ed $E \subseteq_{ne} S$, con $E^{\complement}$ si denota il complementare di E in S.

(1) Prop.: In un qualsiasi spazio metrico $\boldsymbol{S}$ ogni bolla chiusa è un insieme chiuso e, similmente, ogni complementare di bolla chiusa è un insieme aperto.

Dim.: Consideriamo una generica bolla chiusa $B := \overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{c}, r)$ e poniamo $Y := B^{\complement}$.
Per la definizione di Y per ogni $\mathsf{y} \in Y$ esiste $R_{\mathsf{y}} \in \mathbf{(}r, +\infty\mathbf{)}$ tale che $\boldsymbol{d}(\mathsf{c}, \mathsf{y}) = R_{\mathsf{y}}$. Quindi la bolla aperta $\mathsf{ball}\left(\mathsf{y}, \dfrac{R - r}{2}\right)$ è interamente contenuta in Y e questo implica $Y \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}}$, cioè l'enunciato ∎

(2) Prop.: In un qualsiasi spazio metrico $\boldsymbol{S}$ ogni bordo di bolla è un insieme chiuso e, similmente, ogni complementare di bordo di bolla è un insieme aperto.

Dim.: Serviamoci delle notazioni usate per (1). Basta considerare che ogni bordo di bolla in $\boldsymbol{S}$ $^{\searrow}$ $\partial\mathsf{ball}(\mathsf{c}, r)$ ha come complementare $B \dot\cup Y$, unione di due insiemi aperti e quindi insieme aperto, grazie a b05(1) ∎

B46 b.09 **(1) Prop.**: L'unione di una collezione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Dim.: L'unione dell'enunciato si può esprimere come intersezione degli insiemi complementari dei chiusi dati, complementari che sono insiemi aperti e l'enunciato segue da b05(2) ∎

(2) Prop.: L'intersezione di una famiglia arbitraria di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Dim.: L'intersezione dell'enunciato si può esprimere come unione degli insiemi complementari dei chiusi dati, complemetari che sono insiemi aperti e l'enunciato segue da b05(1) ∎

Si osserva che ogni singoletto $\{\mathsf{c}\}$ è un insieme chiuso, in quanto esprimibile come intersezione delle bolle $\mathsf{ball}(\mathsf{c}, r)$ per $r \in \mathbb{R}_+$. Inoltre per (1) ogni insieme finito nonvuoto di punti è un insieme chiuso.

Tra i sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}^{\times d}$ se ne trovano di chiusi e di non chiusi. Limitiamoci a esaminare due casi nell'ambito della retta reale.

(3) Prop.: L'insieme $\mathbb{Z}$ è chiuso nella retta reale.

Dim.: Si constata che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è un insieme aperto in quanto per ogni $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ si trova l'intervallo aperto $\mathsf{I} := \mathbf{(}r - d, r + d\mathbf{)}$ con $d := \min(r - \lfloor r \rfloor, \lfloor r + 1 \rfloor - r)$ tale che $r \in \mathsf{I} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ∎

(4) Prop.: Nella retta reale l'insieme $\mathbb{Q}$ e l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, non sono né aperti né chiusi.

Dim.: Basta mostrare la proprietà per $\mathbb{Q}$. Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e per ogni $r \in \mathbb{R}_+$ la bolla $\mathsf{ball}(q, r)$ contiene sia numeri razionali che irrazionali ∎

Si osserva che questa proprietà dei razionali è strettamente collegata con la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ [B30a04].

B46 b.10 Un punto P di un $E \subset \mathbb{R}^{\times d}$ si dice **punto isolato** di E sse si individua una $\mathsf{ball}(P, \delta)$ che ha in comune con E solo il punto P.

Nella retta reale tutti gli elementi dell'insieme $\mathbb{Z}$ sono punti isolati di $\mathbb{Z}$ stesso.
Più in generale per qualsiasi $m = 2, 3, ...$ tutti gli elementi di $\mathbb{Z}/m$ sono punti isolati in $\mathbb{R}$ considerato spazio metrico.
Al contrario, sempre nella retta reale, nessuno dei punti a ordinata razionale è punto isolato di $\mathbb{Q}$considerato spazio metrico; infatti, quale che sia $q \in \mathbb{Q}$, in ogni intervallo aperto $\mathbf{(}q - \delta, q + \delta\mathbf{)}$ si trovano infiniti punti razionali.

B46 b.11 Gli insiemi aperti accompagnati da un loro punto "privilegiato" si possono considerare strumenti che permettono di individuare le "vicinanze" o "prossimità" di tale punto.

Sulle vicinanze dei punti, come vedremo, si basano molte importanti costruzioni per gli spazi metrici (e più in generale per gli spazi topologici) che a loro volta rivestono di grande importanza nell'analisi infinitesimale e nello studio delle funzioni e delle figure continue.

In effetti risulta necessario disporre di più tipi di strumenti per operare sulle vicinanze dei punti dei vari tipi di spazi. Talora servono gli insiemi aperti e/o chiusi; in altri casi, come vedremo risulta utile operare con famiglie di insiemi più comprensive delle famiglie di insiemi aperti o chiusi, mentre in altre circostanze servono famiglie piuttosto specifiche, in particolare famiglie numerabili e famiglie finite.

Facciamo riferimento ancora a un generico spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d} \rangle$. Se E è un sottoinsieme nonvuoto di S si dice **intorno aperto** di E ogni insieme aperto contenente E.
Chiaramente la nozione di intorno aperto generalizza quella di bolla aperta. In modo simile si definisce la nozione di **intorno chiuso**.

Più in generale si dice **intorno di un insieme** E entro S un qualunque sottoinsieme di S contenente un intorno aperto di E.

Se il sottoinsieme E è un singoletto $\{\mathsf{x}\}$ si semplifica il termine "intorno di un singoletto" con la locuzione **intorno di un punto**.
Nel caso di un punto $\mathsf{c} = \langle c_1, c_2, ..., c_d \rangle \in \mathbb{R}^{\times d}$ si può affermare che per intorno di c si intende ogni sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}^{\times d}$ per il quale si trova un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che $\mathsf{ball}(\mathsf{c}, \delta) \subseteq I$.

Esempi di intorni di punti di spazi metrici che non sono insiemi aperti sono le bolle chiuse contenenti tali punti e tutti i sottoinsiemi non aperti di tali bolle.

Denotiamo con $\mathsf{Ngbr}(E)$ l'insieme degli intorni del sottoinsieme E e nel caso dei sottoinsiemi ridotti a un singoletto $\{\mathsf{c}\}$ abbreviamo $\mathsf{Ngbr}(\{\mathsf{c}\})$ con $\mathsf{Ngbr}(\mathsf{c})$.

B46 b.12 Ad ogni sottoinsieme nonvuoto $E \subset S$ e a ogni $r \in \mathbb{R}_+$ si associa il sottoinsieme di S definito mediante bolle di raggio r

$$NgbrB_r(E) \ := \ \{\mathsf{x} \in S \ \P \ \boldsymbol{d}(\mathsf{x}, E) < r\} \ .$$

Chiaramente si tratta di un ampliamento di E, ossia $E \subseteq NgbrB_r(E)$; ovviamente se $E \subset S$ si ha $E \subset NgbrB_r(E)$.

Per esempio nella retta reale, per ogni intervallo chiuso $I = [\mathrm{a,b}\,]$ si ha l'intervallo aperto $NgbrB_r(I) = (a - r, b + r)$.
Nel piano cartesiano per ogni rettangolo R $NgbrB_r(R)$ è l'insieme dei punti "interni" alla curva costituita da quattro segmenti ciascuno dei quali si ottiene con una traslazione di ampiezza r da un lato di R e da quattro quarti di circonferenza aventi il centro in un vertice del rettangolo; questa figura è ottenuta ampliando R con una sorta di "fascia di rispetto" di ampiezza r.

(1) Prop.: Per ogni $E \subset_{ne} S$ e ogni $r \in \mathbb{R}_+$ l'insieme $NgbrB_r(E)$ è un intorno aperto di E.

Dim.: Consideriamo il generico $\mathsf{x} \in NgbrB_r(E)$ e la bolla con centro in x $B_{\mathsf{x}} := \mathsf{ball}(\mathsf{x}, r - \boldsymbol{d}_{set}(\mathsf{x}, E))$.
Per ogni $\mathsf{y} \in B_{\mathsf{x}}$ si ha $\boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) < r - \boldsymbol{d}_{set}(\mathsf{x}, E)$ e quindi, grazie a [Msp 4],

$$\boldsymbol{d}_{set}(\mathsf{y}, E) \ < \ \boldsymbol{d}(\mathsf{y}, \mathsf{x}) + \boldsymbol{d}_{set}(\mathsf{x}, E) \ = \ r - \boldsymbol{d}_{set}(\mathsf{x}, E) + \boldsymbol{d}_{set}(\mathsf{x}, E) \ = \ r \ .$$

Abbiamo quindi la possibilità di associare a ogni x la B_{x} e questo equivale all'asserto ▮

(2) Prop.: Se E è costituito da un solo punto c, $NgbrB_r(E) = \mathsf{ball}\,(\mathsf{c}, r)$ ▮

B46 b.13 L'insieme degli intorni di un punto o di un insieme di un $\mathbb{R}^{\times d}$ o di un qualsiasi altro spazio metrico, insieme che individuiamo con $\mathsf{Ngbr}(E)$, è assai esteso e poco definito.
Risulta utile servirsi di insiemi di intorni con caratteristiche meglio definite che costituiscono sottocollezioni di $\mathsf{Ngbr}(E)$ più maneggevoli.

A questo proposito si osserva che tra gli intorni di un punto c di ogni spazio metrico si trovano, in particolare, tutte le bolle (aperte e chiuse) con centro in c e tutte le celle (aperte e chiuse) con centro in c.

Tra queste sottocollezioni si può scegliere con una certa libertà grazie alle constatazioni che seguono.

In ogni bolla aperta con centro in c è contenuta una altra bolla aperta con lo stesso centro e quindi sono contenute infinite bolle aperte con centro in c.

Analoga constatazione vale per le bolle chiuse, per le celle aperte e per le celle chiuse.

Inoltre in ogni bolla aperta sono contenuta: almeno una bolla chiusa concentrica (e quindi infinite bolle chiuse concentriche), almeno una cella aperta concentrica (e quindi infinite celle aperte concentriche), almeno una cella chiusa concentrica (e quindi infinite celle chiuse concentriche).

Analoghe constatazioni valgono per i sottoinsiemi di ogni bolla chiusa, di ogni cella aperta e per ogni cella chiusa.

Da queste constatazioni appare chiara la elevata intercambiabilità tra le sottocollezioni di ogni $\mathsf{Ngbr}(E)$, entità che possiamo vedere come insiemi di strumenti utili alle indagini negli spazi metrici.

B46 b.14 Facciamo ancora riferimento a un generico $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d}\rangle \in \mathbf{Msp}$ e a un generico $E \subseteq S$.

Si dice **sistema fondamentale di intorni** dell'insieme E una famiglia F di intorni di E tale che ogni intorno di E contiene almeno uno dei suoi elementi (e quindi contiene infiniti membri di F).
In particolare risultano definiti i sistemi fondamentali di intorni dei singoletti $\{\mathsf{a}\}$, che più semplicemente chiamiamo sistemi fondamentali di intorni dei punti di S.

Per ogni $\mathsf{a} \in S$ due sistemi fondamentali di intorni di a sono la collezione di tutte le bolle aperte con centro in a e la collezione delle bolle $\mathsf{ball}\left(\mathsf{c}, \dfrac{1}{n}\right)$ per $n \in \mathbb{P}$. Quest'ultima è una collezione numerabile, mentre la prima è una famiglia continua, essendo indicizzata dal parametro raggio r variabile in $\mathbb{R}_+$.
Vedremo che in genere i sistemi fondamentali di intorni più ridotti e in particolare numerabili costituiscono strumenti più maneggevoli.

(1) Prop.: L'intersezione di una collezione finita di intorni di un insieme E è un intorno di E.

Dim.: Ciascun intorno di E contiene un insieme aperto contenente E e l'intersezione di questi insiemi, grazie a $\mathsf{b05}(2)$, è un insieme aperto ∎

(2) Prop.: Un insieme E entro $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ è intorno di ciascuno dei suoi punti sse E è un insieme aperto.

Dim.: "$\Longleftarrow$": Segue dalle definizioni di insieme aperto e di intorno.
"$\Longrightarrow$": L'ipotesi equivale alla possibilità di associare ad un generico $\mathsf{x} \in E$ un insieme aperto $V_{\mathsf{x}} \subset E$ tale che $\mathsf{x} \in V_{\mathsf{x}}$. Queste relazioni implicano $E = \bigcup_{\mathsf{x}\in E} \{\mathsf{x}\} \subseteq \cup_{\mathsf{x}\in E} V_{\mathsf{x}} \subseteq E$, ovvero $E = \cup_{\mathsf{x}\in E} V_{\mathsf{x}}$; grazie a $\mathsf{b05}(1)$ questo implica $E \in \mathbf{Open}_{\boldsymbol{S}}$ ∎

B46 b.15 Consideriamo un punto $\mathsf{p} \in S$ e un $E \subset_{ne} S$.
Si dice che p è un **punto interno di un insieme** E sse E è un intorno di p, ovvero sse si trova un intorno aperto di p interamente contenuto in E.
In contrapposizione si dice che p è un **punto esterno di un insieme** E sse si trova un intorno di p privo di punti in comune con E.

Denotiamo con $\mathsf{Intrn}(E)$ oppure con E^o l'insieme dei punti interni di E; denotiamo invece con $\mathsf{Extrn}(E)$ oppure con $E^{\overline{o}}$ l'insieme dei punti esterni di E.

Nel caso in cui $\boldsymbol{S} = \langle \mathbb{R}^{\times d}, \mathrm{dist}_2\rangle$ risultano utili le seguenti constatazioni sopra un generico punto p e un generico sottoinsieme E di $\mathbb{R}^{\times d}$.

(1) Prop.: p è interno ad E sse si trova un $r \in \mathbb{R}_+$ tale che $\mathsf{ball}(\mathsf{p}, r) \subset E$ ∎

(2) Prop.: p è esterno ad E sse si trova un $r \in \mathbb{R}_+$ tale che $\mathsf{ball}(\mathsf{p}, r) \cap E = \emptyset$ ∎

B46 b.16 Consideriamo i due punti $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

$(\mathrm{a,b}\,)^o = [\mathrm{a,b}\,)^o = (\mathrm{a,b}\,]^o = [\mathrm{a,b}\,]^o = (\mathrm{a,b}\,)$ ∎

$(\mathrm{a,b}\,)^{\overline{o}} = [\mathrm{a,b}\,)^{\overline{o}} = (\mathrm{a,b}\,]^{\overline{o}} = [\mathrm{a,b}\,]^{\overline{o}} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

Consideriamo lo spazio metrico $\langle \mathbb{R}^{\times d}, \boldsymbol{d}\rangle$, $\mathsf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ ed $r \in \mathbb{R}_+$.

$\mathsf{Intrn}(\mathsf{ball}(\mathsf{p}, r)) = \mathsf{Intrn}(\overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{p}, r)) = \mathsf{ball}(\mathsf{p}, r)$,

$$\mathsf{Extrn}(\mathsf{ball}(\mathbf{p},r)) = \mathsf{Extrn}(\overline{\mathsf{ball}}(\mathbf{p},r)) = (\overline{\mathsf{ball}}(\mathbf{p},r))^{\complement} \ .$$

Queste constatazioni si generalizzano facilmente.

(1) Prop.: Per ogni spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e ogni $E \subset_{ne} S$ si ha

$$\mathsf{Intrn}(E) \ = \ \mathsf{Extrn}(E^{\complement}) \qquad \text{ossia} \qquad \mathsf{Intrn}(E^{\complement}) \ = \ \mathsf{Extrn}(E) \ .$$

Dim.: La prima uguaglianza segue direttamente dalle definizioni. La seconda si può ottenere dalla prima sostituendo in essa l'insieme E al quale si richiede solo $\emptyset \subset E \subset S$, con il suo complementare che soddisfa le stesse richieste ∎

B46 b.17 (1) Prop.: Un sottoinsieme di S è aperto sse tutti i suoi punti sono interni.

Dim.: Scende direttamente dalle definizioni ∎

(2) Prop.: Per ogni $E \subset_{ne} S$ il suo sottoinsieme $\mathsf{Intrn}(E)$ è il suo più esteso sottoinsieme aperto.

Dim.: Ogni insieme $A \in \mathfrak{P}(E) \cap \mathbf{Open}_{\boldsymbol{S}}$ è costituito da punti interni di E ed ogni punto interno di E appartiene a un sottoinsieme aperto di E. Quindi $\mathsf{Intrn}(E)$ si può esprimere come

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{P}(E) \cap \mathbf{Open}_{\boldsymbol{S}}} A \ . \tag{3}$$

Per b05(1) questo è un insieme aperto ed evidentemente contiene ogni sottoinsieme aperto di E ∎

(3) Prop.: Se $E \subseteq F \subseteq S$, allora $\mathsf{Intrn}(E) \subseteq \mathsf{Intrn}(F)$.

Dim.: Segue facilmente dall'enunciato (1) ∎

(4) Prop.: $\forall E, F \subseteq S \ : \ \mathsf{Intrn}(E \cap F) \ = \ \mathsf{Intrn}(E) \cap \mathsf{Intrn}(F)$.

Dim.: La (3) implica $(E \cap F)^o \subseteq E^o, F^o$, cioè $(E \cap F)^o \subseteq E^o \cap F^o$.
Per ogni $\mathbf{p} \in E^o \cap F^o$ esistono $\mathsf{ball}(\mathbf{p}, r_e) \subset E$ e $\mathsf{ball}(\mathbf{p}, r_f) \subset F$; quindi $\mathsf{ball}(\mathbf{p}, \min(r_e, r_f)) \subset E \cap F$; quindi $E^o \cap F^o \subseteq (E \cap F)^o$ ∎

(5) Prop.: Siano $E \subseteq_{ne} S$ e $\mathbf{p}$ un punto qualsiasi di S.

$$\mathbf{p} \in \mathsf{Extrn}(E) \iff \boldsymbol{d}(\mathbf{p}, E) > 0 \ .$$

Dim.: "$\Longrightarrow$": Sia $\mathsf{ball}(\mathbf{p}, r)$ una bolla aperta che non interseca E; deve quindi essere $\boldsymbol{d}(\mathbf{p}, E) > r > 0$.
"$\Longleftarrow$": Sia $r := \dfrac{\boldsymbol{d}(\mathbf{p}, E)}{2}$; la bolla aperta $\mathsf{ball}(\mathbf{p}, \rho)$ non interseca E, cioè $\mathbf{p} \in \mathsf{Extrn}(E)$ ∎

B46 c. punti aderenti e aderenza di un insieme

B46 c.01 Consideriamo lo spazio metrico $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e un sottoinsieme di S nonvuoto E; si dice **punto aderente** ad E ovvero **punto di accumulazione** di E ogni $\mathsf{p} \in S$ tale che in ogni suo intorno si trova almeno un punto di E distinto da p.

Conviene notare subito che un punto aderente ad E potrebbe sia appartenere ad E che non appartenergli.

Denotiamo con $\boldsymbol{Adrn}_{\boldsymbol{S}}(E)$ l'insieme dei punti aderenti all'insieme E secondo $\boldsymbol{S}$.
In molti contesti si può trascurare $\boldsymbol{S}$ considerandolo sottinteso e adottare la notazione abbreviata $\boldsymbol{Adrn}(E) := \boldsymbol{Adrn}_{\boldsymbol{S}}(E)$.

(1) Prop.: Un punto $\mathsf{p} \in S$ è un punto aderente ad E sse in ogni suo intorno si trovano infiniti punti di E distinti da p.

Dim.: "$\Longrightarrow$": Introduciamo l'insieme $E_1 := E \setminus \{\mathsf{p}\}$. Consideriamo un arbitrario intorno V_1 di p e un punto p_1 di $E_1 \cap V_1$. Introduciamo $V_2 := \mathsf{ball}\left(\mathsf{p}, \dfrac{\boldsymbol{d}(\mathsf{p}, \mathsf{p}_1)}{2}\right)$, anch'esso intorno di p; per l'ipotesi in tale intorno V_2 si trova un punto $\mathsf{p}_2 \in E_1$ con $\boldsymbol{d}(\mathsf{p}, \mathsf{p}_2) < \boldsymbol{d}(\mathsf{p}, \mathsf{p}_1)$.
Questo processo di individuazione di punti di E sempre meno distanti da p può proseguire illimitatamente e comporta la tesi.
"$\Longleftarrow$": La proprietà dell'ipotesi è più esigente di quella della tesi ∎

Sulla retta reale le estremità di un qualsiasi intervallo I, sia che appartengano sia che non appartengano ad I, sono suoi punti di accumulazione.

Inoltre in $\mathbb{R}$ il punto 1 è punto di accumulazione dell'intervallo $\mathbf{[}0, 1\mathbf{)}$, dell'insieme dei reali diversi da 1 e dell'intervallo illimitato $\mathbf{(}1, +\infty\mathbf{)}$.

Il punto 0 della retta reale è il punto di accumulazione delle immagini delle seguenti successioni

$$\left\langle n \in \mathbb{P} \,:\, \left| \frac{1}{n} \right\rangle \right. \quad , \quad \left\langle n \in \mathbb{N} \,:\, \left| \frac{1}{2^n} \right\rangle \right. \quad , \quad \left\langle n \in \mathbb{P} \,:\, \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right\rangle \right. .$$

Questi esempi mostrano che vi sono insiemi con punti di accumulazione che appartengono a essi e punti di accumulazione che non vi appartengono.

Evidentemente se un E sottoinsieme di S possiede punti interni ciascuno di questi elementi è punto di accumulazione di E.
Viceversa ogni punto isolato di un insieme non può essere suo punto di accumulazione.

B46 c.02 L'insieme $\boldsymbol{Adrn}(E)$ dei punti aderenti di un $E \subseteq (S)$ viene chiamato anche insieme derivato topologico di E o semplicemente **derivato di un insieme** E; nei contesti nei quali non si rischiano ambiguità si usano anche notazioni concise come $\overline{E}$ ed E'.

Entro ogni spazio metrico l'insieme derivato di una bolla aperta $\mathsf{ball}(\mathsf{p}, r)$ è la corrispondente bolla chiusa $\overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{p}, r)$.
In $\langle \mathbb{R}^{\times d}, \mathrm{dist}_2\rangle$ l'insieme derivato di una cella rettangolare aperta è la corrispondente cella chiusa.
Evidentemente $S' = S$ e $\emptyset' = \emptyset$.

(1) Prop.: Per ogni spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e ogni $E \subseteq_{ne} S$ si ha $E' = \mathsf{Extrn}(E)^{\complement}$.

Dim.: Infatti se $\mathsf{p} \notin E'$ vi è un insieme aperto che contiene p e non contiene alcun punto di E ∎

(2) Prop.: Consideriamo $E \subset S$ e $D := E'$; $D' = D$, ossia la derivazione è una applicazione idempotente su $\mathfrak{P}(S)$ per ogni S terreno di spazio metrico.

Dim.: . . . . . ∎

B46 c.03 Si dice **chiusura [topologica] di un insieme** $E \subset \mathbb{R}^{\times d}$ l'insieme costituito dai suoi punti e dai suoi punti di accumulazione.
Esso si denota con $\boldsymbol{Tclsr}(E)$ o, in contesti nei quali non si rischiano ambiguità, sovralineando il simbolo dell'insieme, ovvero definendo $\overline{E} := \boldsymbol{Tclsr}(E) = E \cup E'$.

Un insieme C si dice **insieme topologicamente chiuso**, o semplicemente **insieme chiuso**, sse coincide con la propria chiusura, cioè sse $C = \boldsymbol{Tclsr}(C)$.

Equivalentemente si definisce insieme chiuso un insieme C che contiene il proprio derivato, cioè tale che $C' \subseteq C$.

In $\mathbb{R}$ tra gli intervalli solo i chiusi sono insiemi topologicamente chiusi, mentre non sono tali gli intervalli aperti e i semiaperti.

In ogni spazio metrico ogni bolla chiusa è topologicamente chiusa, mentre non lo sono le bolle aperte.

In $\mathbb{R}^{\times d}$ ogni cella rettangolare chiusa è topologicamente chiusa, mentre non sono insiemi chiusi le celle rettangolari aperte e le parzialmente aperte.

B46 c.04 Dalla (1), da alcune proprietà precedenti e dalle basilari formule per le operazioni booleane si deducono, senza difficoltà, gli enunciati che seguono.

(1) Prop.: Per ogni $E \subseteq S$ la chiusura topologica $\overline{E}$ è il più ridotto degli insiemi chiusi che contengono E ∎

(2) Prop.: Tutti e soli gli insiemi chiusi K sono caratterizzato dall'uguaglianza $K = \overline{K}$ ∎

(3) Prop.: $\forall E, F \subseteq S \ : \ \overline{E \cup F} \ = \ \overline{E} \cup \overline{F}$ ∎

(4) Prop.: Un punto $\mathsf{p} \in S$ è aderente di E sse $\boldsymbol{d}(\mathsf{p}, E) \ = \ 0$ ∎

(5) Prop.: $E' \ = \ \cap_{V \in \mathsf{Ngbr}(E)} V$ ∎

B46 c.05 Si definisce come **insieme limitato** in uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ un insieme contenuto interamente in una bolla chiusa di $\mathbb{R}^{\times d}$.

Si dimostra facilmente che l'intersezione e l'unione di due insiemi limitati sono insiemi limitati e che ogni sottoinsieme di un insieme limitato è limitato.

Si dimostra anche che si può equivalentemente definire insieme limitato di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ ogni insieme contenuto interamente in una sfera aperta, oppure in un cubo aperto, oppure in una cella rettangolare aperta.
Alternative equivalenti consistono nel richiedere che un insieme limitato sia interamente contenuto in una sfera chiusa, in un cubo chiuso o in una cella rettangolare chiusa.
In effetti per ciascuno dei tipi precedenti di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\times d}$ si trova un sottoinsieme di qualsiasi altro tipo che lo contiene [v.a. b13].

Si trova anche facilmente che sottoponendo un insieme limitato di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ a trasformazioni come traslazioni, omotetie, rotazioni e in genere a trasformazioni lineari si ottiene ancora un insieme limitato.

B46 c.06 Un punto $\mathsf{p} \in S$ si dice **punto di frontiera** o **punto di contorno** o punto di bordo di $E \subseteq_{ne} S$ sse non è né interno né esterno ad E, cioè se è aderente sia di E che di $E^{\complement}$.
L'insieme dei punti di frontiera di E e si denota co $\mathsf{Frntr}(E)$ o con ∂E.

(1) Prop.: $\forall E \subseteq S \ : \ \mathsf{Frntr}(E) \ = \ \overline{E} \cap \overline{E^{\complement}} \ = \ \mathsf{Frntr}(E^{\complement})$.

Dim.: Le uguaglianze scendono direttamente dalle definizioni ∎

(2) Prop.: $\forall E \subset S \ : \ S = E \dot\cup \mathsf{Frntr}(E) \dot\cup E^{\complement}$ ∎

B46 c.07 Teorema (**teorema di Bolzano-Weierstrass**)
Ogni sottoinsieme $B \subset_{ne} \mathbb{R}^{\times d}$ limitato ammette almeno un punto di accumulazione.

Dim.: Per l'ipotesi della limitatezza si trovano due vettori di $\mathbb{R}^{\times d}$, $\mathbf{a} = \langle a_1, ..., a_d \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, ..., b_d \rangle$ con $\mathbf{a} << \mathbf{b}$ tali che $S \subseteq \mathbf{[a, b]}$.

Eseguiamo un primo passo di riduzione del multiintervallo dividendo ogni intervallo $\mathbf{(}a_i, b_i\mathbf{]}$ con $i = 1, 2, ..., d$ in due intervalli di ampiezza dimezzata, cioè uguale a $\dfrac{b_i - a_i}{2}$, individuando i 2^d multiintervalli determinati da questi nuovi intervalli e scegliendo tra di essi uno di quelli del quale fanno parte infiniti elementi di S. Denotiamo con $\mathbf{a}^{(1)}$ e $\mathbf{b}^{(1)}$ i vettori che delimitano il nuovo multiintervallo.

Procediamo quindi con successivi passi di riduzione simili al primo individuando successivamente multiintervalli $\mathbf{a}^{(j)}$ e $\mathbf{b}^{(j)}$ per $j = 1, 2, 3, ...$ basati su d-uple di intervalli aventi ampiezze della forma $\dfrac{b_i - a_i}{2^j}$ per $i = 1, 2, ..., d$, cioè aventi ampiezze progressivamente dimezzate.

Si individua quindi una d-upla di successioni di intervalli reali annidati e convergenti. Ciascuna delle d successioni individua un numero reale r_i e complessivamente si individua una d-upla di numeri reali $\mathbf{r} = \langle r_1, r_2, ..., r_d \rangle$.

Questo vettore determina il punto di accumulazione cercato: infatti scelto un reale positivo δ arbitrario (idap), si trova un multiintervallo chiuso contenente infiniti punti dell'insieme S interamente contenuto nella bolla $\mathsf{ball}(\mathbf{r}, \delta)$: per questo basta scegliere j tale che sia $\dfrac{1}{2^j} \displaystyle\sum_{i=1}^{d} (b_i - a_i) < \dfrac{\delta}{2}$, cioè che sia

$$j > \log_2 \frac{2 \sum_{i=1}^{d} (b_i - a_i)}{\delta}$$ ∎

B46 d. insiemi densi, spazi separabili e sottospazi

B46 d.01 Anche in questa sezione facciamo riferimento a un generico spazio metrico $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d} \rangle$ e per l'insieme dei punti aderenti secondo $\boldsymbol{S}$ di un generico $E \subseteq_{ne} S$ useremo la notazione semplificata $\overline{E}$ invece della $\boldsymbol{Adrn}_{\boldsymbol{S}}(E)$.

Dato un sottoinsieme nonvuoto E di S, si dice che un secondo sottoinsieme D di S è **sottoinsieme denso** per E sse ogni punto di E è aderente a D, ossia sse $E \subseteq \overline{D}$, ossia sse per ogni $\mathsf{p} \in E$ ogni intorno di tale punto contiene un punto (ossia contiene infiniti punti) di D diversi da p.
Evidentemente un sottoinsieme denso per un $E \subseteq_{ne} S$ non può essere vuoto.

(1) Prop.: Se D è denso per E ed E è denso per un $F \subset_{ne} S$, allora D è denso per F.

Dim.: La relazione $E \subseteq \overline{D}$, grazie a c02(1), implica $\overline{E} \subseteq \overline{D}$ e l'ipotesi $F \subseteq \overline{E}$ porta a $F \subseteq \overline{D}$, cioè alla tesi ∎

Viene detto insieme ovunque denso o semplicemente **insieme denso** in $\boldsymbol{S}$ ogni insieme T denso per l'intero S, ossia tale che $\overline{T} = S$, ossia tale che ogni insieme aperto nonvuoto contiene almeno un punto di T.

B46 d.02 Uno spazio metrico si dice **spazio separabile** sse possiede almeno un insieme denso numerabile.

(1) Prop.: La retta reale è separabile.

Dim.: L'insieme numerabile $\mathbb{Q}$ è ovunque denso in $\mathbb{R}^{\times d}$ ∎

(2) Prop.: Ogni spazio metrico $\langle \mathbb{R}^{\times d}, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ è separabile.

Dim.: L'insieme numerabile $\mathbb{Q}^{\times d}$ è ovunque denso in $\mathbb{R}^{\times d}$ ∎

B46 d.03 Una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi aperti non vuoti di $\boldsymbol{S}$ si dice **base topologica per una famiglia di insiemi**, $\boldsymbol{S}$, sse ogni $A \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}}$ si può esprimere come unione di una sottofamiglia di $\mathcal{F}$.

(1) Prop.: Una famiglia $\{\mu \in M :| F_\mu\}$ di sottoinsiemi aperti di $\boldsymbol{S}$ è una base topologica di tale spazio metrico sse

$$\forall \mathsf{p} \in S \ , \ V \in \mathsf{Ngbr}(\mathsf{p}) \quad : \quad M \ni \mu_{\mathsf{p}} \ \left[\!\right] \ \mathsf{p} \in F_{\mu_{\mathsf{p}}} \subseteq V \ .$$

Dim.: . . . .

B46 d.04 **(1) Prop.**: Uno spazio metrico $\boldsymbol{S}$ è separabile sse possiede una base topologica numerabile o finita.

Dim.: . . . .

B46 d.05 Spesso mentre si studia uno spazio metrico $\boldsymbol{S}$ accade di dover focalizzare l'attenzione su un sottoinsieme T di S e procedere occupandosi delle distanze $\boldsymbol{d}$ tra elementi di T trascurando completamente gli elementii in $S \setminus T$.
In questi casi può risultare comodo fare riferimento ad uno spazio metrico avente come terreno T e come distanza la riduzione della $\boldsymbol{d}$ a $T \times T$.

Esaminiamo come si può procedere con precisione formale in questa direzione definendo le nozioni di sottospazio metrico e di distanza indotta.

(1) Prop.: Sia $T \subset S$; un $B \subset T$ si dice aperto in $\boldsymbol{T}$ sse $\mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}} \ni A \left[\!\right] B = A \cap T$.

Dim.: . . . .

B46 d.06 (1) Prop.: Ogni sottospazio di uno spazio metrico separabile è separabile

Dim.: Se $\{n \in \mathbb{N} :| F_n\}$ è una base topologica al più numerabile per $\mathbf{Open}_{\boldsymbol{S}}$, per ogni $T \subset S$ gli insiemi $F_n \cap T$ costituiscono una base topologica al più numerabile per gli insiemi aperti di T e quindi l'enunciato

∎

B46 e. funzioni continue tra spazi metrici

B46 e.01 Consideriamo due spazi metrici $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e $\boldsymbol{T} = \langle T, \boldsymbol{t}\rangle$ e una funzione del genere $f \in \{S \longrightarrow T\,\rceil$; scriviamo inoltre $D := \mathsf{dom}(f)$.

La f si dice **funzione continua in un punto** $\mathsf{x}_0 \in D$ sse per ogni intorno W di $f(\mathsf{x}_0)$ esiste un intorno V di x_0 tale che $f(V) \subseteq W$.

La proprietà richiesta agli intorni di $f(\mathsf{x}_0)$ per assicurare la continuità risulta più impegnativa per gli intorni meno estesi: infatti se $W \subset W_1$ e si è trovato $V \in \mathsf{Ngbr}(\mathsf{x}_0)$ tale che $f(V) \subseteq W$, questo V riesce a garantire anche W_1, in quanto $f(V) \subseteq W_1$.

Per evidenziare questa tendenza la definizione si enuncia anche dicendo che per ogni *intorno arbitrariamente piccolo* W esiste $V \in \mathsf{Ngbr}(\mathsf{x}_0)$ tale che $f(V) \subseteq W$.

La nozione formale di intorno di un punto o di un insieme serve a esprimere la nozione intuitiva di prossimità quando si trattano proprietà che riguardano procedimenti da proporre come potenzialmente ripetibili utilizzando intorni che si possono assumere progressivamente più ridotti, senza che si pongano limiti alla riduzione, ossia utilizzando intorni che si possono dichiarare "arbitrariamente ridotti" o "ridotti quanto si vuole".

Anche la definizione di continuità in un punto x di una funzione f tra due spazi metrici $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ si può presentare attraverso uno scenario di ripetibilità di misure di distanze che vengono descritte servendosi di oggetti fisici mobili e quindi parlando del valore della funzione f che si avvicina quanto si vuole a $f(\mathsf{x}_0)$ quando l'argomento x della funzione si avvicina sufficientemente a x_0.

B46 e.02 La definizione di continuità di una funzione tra spazi metrici in un punto del suo dominio si riesprime utilmente con le due formulazioni che seguono.

(1) Prop.: La funzione f è continua in x_0 sse $\;W \in \mathsf{Ngbr}\,(f(\mathsf{x}_0)) \Longrightarrow f^{-1}(W) \in \mathsf{Ngbr}\,(f(\mathsf{x}_0))$ ∎

(2) Prop.: La funzione f avente come dominio D è continua in x_0 sse

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; : \;\; \mathbb{R}_+ \ni \delta \;\; \S \;\; \lceil \mathsf{x} \in D \wedge \boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{x}_0) < \delta \Longrightarrow \boldsymbol{d}(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{x}_0)) < \epsilon \rceil$$ ∎

B46 e.03 La funzione f si dice **funzione continua in un insieme** $E \subseteq D$ sse è continua in ogni punto di E. Una funzione della quale sia noto o si supponga conoscibile il dominio si dice semplicemente **funzione continua** sse si dichiara essere continua nel suo intero dominio.

Si vede facilmente che per ogni $\mathsf{y}_0 \in T$ la funzione costante $\lceil \mathsf{x} \in S \mapsto \mathsf{y}_0 \rceil$ è continua nell'intero S e che per ogni $E \subset_{ne} S$ la iniezione naturale $\lceil \mathsf{x} \in E \mapsto \mathsf{x} \rceil$ è continua nell'intero E.

Più in generale per ogni spazio metrico $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e ogni $T \subset_{ne} S$ la iniezione $\lceil \mathsf{x} \in T \mapsto \mathsf{x} \rceil$ è continua in T.

Tra le funzioni di $\lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ tutti i polinomi in una variabile reale sono funzioni continue nell'intero $\mathbb{R}$.

Tra le funzioni di $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ tutti i polinomi in d variabili reali sono funzioni continue nell'intero $\mathbb{R}^{\times d}$.

Tra le funzioni di $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R}^{\times e} \rceil$ tutte le funzioni della forma

$$\lceil \langle x_1, ..., x_d\rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \;\mapsto\; \langle p_1(x_1, ..., x_d), ..., p_e(x_1, ..., x_d)\rangle \rceil \;\;,$$

ove per ogni $j = 1, ..., e$ p_j denota un polinomio in d variabili reali, sono funzioni continue nell'intero $\mathbb{R}^{\times d}$.

B46 e.04 Torniamo a considerazioni generali su funzioni tra due spazi metrici $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ prendendo in considerazione una $f \in \lceil S \longrightarrow T \rceil$, $D := \mathsf{dom}(f)$ e $C := \mathsf{cod}(f)$.

(1) Prop.: Consideriamo un $E \subseteq_{ne} S$ e sia x_0 un suo punto aderente, $\mathsf{x}_0 \in E \cap E'$. Se f è continua in x_0, allora $f(\mathsf{x}_0)$ è aderente a $f(E)$.

Dim.: Per ogni $W \in \mathsf{Ngbr}(f(\mathsf{x}_0))$, per la continuità della f, deve essere $f^{-\mathbf{1}}(W) \in \mathsf{Ngbr}(\mathsf{x}_0)$; di conseguenza esiste un $\mathsf{y} \in E \cap f^{-\mathbf{1}}(W)$ e quindi $f(\mathsf{y}) \in f(E) \cap W$ ∎

(2) Prop.: Gli enunciati che seguono sopra una $f \in \lceil S \longrightarrow T \rceil$ sono equivalenti.

(a) f è continua.

(b) $\forall B \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{T}} \ : \ f^{-\mathbf{1}}(B) \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}}$.

(c) $\forall K \in \mathsf{Clsd}_{\boldsymbol{T}} \ : \ f^{-\mathbf{1}}(K) \in \mathsf{Clsd}_{\boldsymbol{S}}$.

(iv) $\forall E \subseteq S : f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$

Dim.: . . . . . ∎

B46 e.05 Va osservato che una funzione continua non trasforma necessariamente un insieme aperto in un insieme aperto e non trasforma necessariamente un insieme chiuso in un insieme chiuso.

Alcuni esempi:

- la funzione $\lceil x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \rceil$ trasforma l'insieme aperto $(-1, +1)$ nell'insieme semiaperto $[0, +1)$;
- la funzione $\sin x$ trasforma l'insieme aperto $(-\pi, \pi)$ nell'insieme chiuso $[-1, 1]$;
- la funzione $\lceil x \in \mathbb{R} \mapsto 1/x \rceil$ trasforma l'insieme chiuso $[1, +\infty)$ nell'insieme semiaperto $(0, +1]$;
- la funzione $\arctan x$ trasforma il suo dominio chiuso $\mathbb{R}$ nell'insieme aperto $\Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

B46 e.06 **(1) Prop.**: Consideriamo le funzioni $f \in \lceil S \longrightarrow T \rceil$ e $g \in \{T \longrightarrow U \rceil$.

(a) Se f è continua in $\mathsf{x}_0 \in S$ e g continua in $f(\mathsf{x}_0)$, allora $h := g \circ_{rl} f$ è continua in x_0.

(b) Se f è continua in S e g continua in $f(S)$, allora $h := g \circ_{rl} f$ è continua in S.

Dim.: (a) Sia X un intorno di $g(f(\mathsf{x}_0))$; allora, per le ipotesi di continuità e per e02(1), $g^{-\mathbf{1}}(X)$ è un intorno di $f(\mathsf{x}_0)$ in $\boldsymbol{T}$ e inoltre $f^{-\mathbf{1}}(g^{-\mathbf{1}}(X))$ è un intorno di x_0 in S; dato che $f^{-\mathbf{1}}(g^{-\mathbf{1}}(X)) = h^{-\mathbf{1}}(X)$, segue l'enunciato ∎

(b) Segue per semplice estensione booleana dalla (a) ∎

(2) Prop.: Consideriamo $f \in \lceil S \longrightarrow T \rceil$ continua in $\mathsf{x}_0 \in \mathsf{dom}(f)$. Se R è il terreno di un sottospazio metrico di S contenente x_0, allora la restrizione di f ad R è continua in x_0.

Dim.: Segue da (1)(a) nel caso del prodotto di composizione $f_{\restriction R} = f \circ_{lr} \lceil \mathsf{x} \in R \mapsto \mathsf{x} \rceil$ ∎

Osserviamo che vi sono funzioni la cui restrizione a un sottoinsieme del dominio è continua e che non sono continue nel loro intero dominio.

Per esempio la **funzione di Dirichlet** $\lceil x \in \mathbb{Q} \mapsto 0 \rceil \dot\cup \lceil x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mapsto 1 \rceil$ non è continua per nessun x reale, mentre la sua restrizione a $\mathbb{Q}$ è addirittura una funzione costante.

B46 e.07 Una funzione di $\lceil S \longmapsto T \rceil$ si dice **funzione uniformemente continua** nel proprio dominio S sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste $\delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tale che $\boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) < \delta_\epsilon \Longrightarrow \boldsymbol{t}\big(f(\mathsf{x}), f(\mathsf{y})\big) < \epsilon$.

È facile vedere che funzioni costanti e iniezioni sono funzioni uniformemente continue.

Evidentemente una funzione uniformemente continua in S è continua in S, mentre l'implicazione inversa non è necessariamente vera.

A questo proposito diciamo **funzione nonuniformente continua** una funzione che nel proprio dominio è continua ma nonuniformemente continua.
Ad esempio la funzione $\lceil x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \rceil$ è continua in $\mathbb{R}$ ma è nonuniformemente continua in tale spazio metrico: infatti la sua oscillazione nell'intervallo $[\overline{x}, \overline{x} + \delta]$ è data da $|\delta(2\,\overline{x} + \delta)|$, espressione che nell'intero $\mathbb{R}$ può assumere valori elevati quanto si vuole.

Più in generale ogni funzione polinomiale di grado superiore al primo in $\mathbb{R}$ è continua ma nonuniformemente continua.

Ovviamente una funzione avente una riduzione nonuniformemente continua non può essere uniformemente continua.

Di conseguenza sono nonuniformemente continue tutte le funzione-RtR le quali in qualche intervallo limitato sono definite e continue ma non sono limitate. Sono dunque nonuniformemente continue le funzioni razionali non polinomiali e funzioni come $\tan(x)$ e $\sinh(x)$.

B46 e.08 **(1) Prop.**: Per ogni $E \subset_{ne} S$ è uniformemente continua la funzione $\lceil \mathsf{x} \in S \mapsto \boldsymbol{d}(\mathsf{x}, E) \rceil$.

Dim.: Discende dalla definizione e dalla disuguaglianza

$$\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in S \;\; : \;\; |\boldsymbol{d}(\mathsf{x}, E) - \boldsymbol{d}(\mathsf{y}, E)| \leq \boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \;\blacksquare$$

Facciamo riferimento a tre spazi metrici $\langle S, \boldsymbol{d}\rangle$, $\langle T, \boldsymbol{t}\rangle$ e $\langle U, \boldsymbol{u}\rangle$.

(2) Prop.: Consideriamo $f \in \lceil S \longrightarrow T \rceil$ e $g \in \{T \longrightarrow U \rceil$. Se f è uniformemente continua in S e g uniformemente continua in $f(S)$, allora $h := g \circ_{rl} f$ è uniformemente continua in S.

Dim.: Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \ni \delta$ tale che $\boldsymbol{t}(f(x), f(y)) < \delta \Longrightarrow \boldsymbol{u}(g(f(x)), g(f(y))) < \epsilon$. In tal caso $\mathbb{R}_+ \ni \eta$ tale che $\boldsymbol{d}(x, y) < \eta \Longrightarrow \boldsymbol{t}(f(x), f(y)) < \delta$ e quindi $\boldsymbol{d}(x, y) < \eta \Longrightarrow \boldsymbol{u}(h(x), h(y)) < \epsilon \;\blacksquare$

B46 f. limiti di funzioni tra spazi metrici

B46 f.01 Anche in questo paragrafo facciamo riferimento a due spazi metrici $\boldsymbol{S} = \langle S, \boldsymbol{d}\rangle$ e $\boldsymbol{T} = \langle S, \boldsymbol{t}\rangle$; Consideriamo inoltre $E \subseteq_{ne} S$, a punto aderente ad E ed f funzione da E in T.

Supponiamo che a non appartenga ad E. Si dice che per $\mathsf{x} \in E$ tendente ad a la $f(\mathsf{x})$ **tende al limite** b, o equivalentemente che la $f(\mathsf{x})$ nel punto a e nell'ambito di E ha come limite b, sse è continua la funzione

$$g \;:=\; \lceil\, \mathsf{x} \in E \mapsto f(\mathsf{x}) \,\rceil \,\dot\cup\, \lceil\, \mathsf{a} \mapsto \mathsf{b} \,\rceil \;\in\; \lceil\, E \cup \{\mathsf{a}\} \longmapsto f(E) \cup \{\mathsf{b}\,\rceil\} \,.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) \;=\; \mathsf{b}\,. \tag{1}$$

Nel caso in cui $\mathsf{a} \in E$ si usano le stesse locuzioni e la stessa notazione per enunciare che la $f(\mathsf{x})$ è funzione continua nel punto a del suo dominio e che $f(\mathsf{a}) = \mathsf{b}$.

B46 f.02 La fondamentale definizione precedente conviene averla presente nelle riformulazioni che si servono di intorni e di bolle, cioè nelle definizioni che fanno rifeimento alla distanza.

(1) Prop.: La $f(\mathsf{x})$ per $\mathsf{x} \in E$ tendente ad a tende al limite b sse per ogni intorno W di b in $\boldsymbol{T}$ esiste un intorno V_W di a in $\boldsymbol{S}$ tale che $f(V_W \cap E) \subseteq W$ ∎

(2) Prop.: La $f(\mathsf{x})$ per $\mathsf{x} \in E$ tendente ad a tende al limite b sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste $\delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tale che $\mathsf{x} \in E \wedge \boldsymbol{d}(\mathsf{x},\mathsf{a}) < \delta_\epsilon \implies \mathsf{e}(\mathsf{b}, f(\mathsf{a})) < \epsilon$ ∎

(3) Prop.: La funzione $f \in \lceil\, S \longrightarrow T \,\rceil$ è continua in un punto $\mathsf{a} \in S$ aderente a $\mathsf{dom}(f) \setminus \{\mathsf{a}\}$ sse

$$\lim_{\mathsf{x}\in E\setminus\mathsf{a}\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) \;=\; f(\mathsf{a}) \;\text{ ∎}$$

B46 f.03 La scrittura $\lim\limits_{\mathsf{x}\,\in\,E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x})$ esprime un'operazione che a un sottoinsieme E del terreno di uno spazio metrico $\boldsymbol{S}$, a una funzione f avente dominio in E e a un punto a aderente ad E cerca di associare un punto dello spazio $\boldsymbol{T}$ cui appartiene il codominio della f.

Questa operazione viene detta **passaggio al limite**.
Essa può non avere successo e in tal caso la relativa scrittura non conduce ad alcun elemento di $\boldsymbol{T}$.

Si può invece affermare che quando un limite esiste esso è unico.

(1) Prop.: Se si trova che $\lim\limits_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) = \mathsf{b}$ e $\lim\limits_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) = \mathsf{b}'$, deve essere $\mathsf{b} = \mathsf{b}'$.

Dim.: I due enunciati, se fosse $\mathsf{b} \neq \mathsf{b}'$ implicherebbero che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste $\delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni $\mathsf{x} \in E \cap \mathsf{ball}(\mathsf{a}, \delta_\epsilon)$ deve essere $\boldsymbol{t}(f(\mathsf{x}), \mathsf{b}) < \epsilon$ e $\boldsymbol{t}(f(\mathsf{x}), \mathsf{b}') < \epsilon$; per la disuguaglianza triangolare deve essere $\boldsymbol{t}(\mathsf{b}, \mathsf{b}') < 2\,\epsilon$ relazione che per l'arbitrarietà di ϵ equivale a $\mathsf{b} = \mathsf{b}'$ ∎

B46 f.04 Prop. Supponiamo $\lim\limits_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) = \mathsf{b}$ e $M \subset_{ne} E$ tale che $\mathsf{a} \in \overline{M}$.
Allora si ha anche $\lim\limits_{\mathsf{x}\in M\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) \;=\; \mathsf{b}$.

Dim.: Segue dalle definizioni e da $\mathsf{e06}(2)$ ∎

L'enunciato precedente vale in particolare per ogni sottoinsieme di E esprimibile come $M = V \cap E$ per ogni $V \in \mathsf{Ngbr}(\mathsf{a})$.

B46 f.05 Prop. Sia $\mathsf{a} \in \overline{E}$, si abbia $\lim\limits_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) = \mathsf{b}$ e si consideri $g \in \lceil\, F \longrightarrow G \,\rceil$ continua in b.

Allora $\lim\limits_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} g(f(\mathsf{x})) \;=\; g(\mathsf{b})$.

Dim.: Segue direttamente da e06(1)(a) ∎

B46 f.06 Prop. Se $\lim\limits_{\mathsf{x}\in E\,,\,\mathsf{x}\to\mathsf{a}} f(\mathsf{x}) = \mathsf{b}$. Allora $\mathsf{b} \in \overline{f(E)}$.

Dim.: Grazie a f02(1) per ogni $W \in \mathsf{Ngbr}(\mathsf{b})$ l'insieme $W \cap f(E)$ contiene $f(V_W \cap E)$, insieme nonvuoto in quanto $\mathsf{a} \in \overline{E}$ ∎

B46 g. insiemi convessi e insiemi connessi

B46 g.01 Un sottoinsieme C di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ si dice **insieme convesso** sse per ogni coppia di suoi punti esso contiene anche tutti i punti del segmento di cui essi sono le estremità.

Sono evidentemente convessi le bolle aperte e chiuse e le celle rettangolari aperte e chiuse.

Si dimostra facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è anch'essa un insieme convesso.

B46 g.02 Per quanto riguarda invece l'unione di insiemi convessi si individuano facilmente coppie di insiemi convessi la cui unione non è convessa: per esempio per $d = 2$ l'unione dei due insiemi rettangolari $\mathbf{[}\langle -1, -5\rangle, \langle 1, 5\rangle\mathbf{]}$ e $\mathbf{[}\langle -5, -1\rangle, \langle 5, 1\rangle\mathbf{]}$.

Si dimostra inoltre che sottoponendo a trasformazioni lineari un insieme convesso si ottiene ancora un insieme convesso.
In effetti, più in generale, le trasformazioni lineari trasformano in un segmento di punti interni.

B46 g.03 Un $K \subseteq \mathbb{R}^{\times d}$ si dice **insieme connesso** in $\mathbb{R}^{\times d}$ sse dati due suoi punti arbitrari P e Q si trova una sequenza finita di punti $\langle P_1, P_2, ..., P_n\rangle$ tali che:

- ciascuno di questi P_i possiede un intorno N_i interamente contenuto in K;
- $P \in N_1$ e $Q \in N_n$;
- le intersezioni di intorni successivi $N_1 \cap N_2$, $N_2 \cap N_3$, ... $N_{n-1} \cap N_n$ non sono vuote.

Intuitivamente un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^{\times d}$ è connesso quando è possibile collegare due suoi punti qualsiasi con una linea costituita da segmenti successivi ciascuno dei quali interamente contenuto in un intorno che a sua volta è interamente contenuto in K.

Un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^{\times d}$ non può possedere punti isolati e non si può esprimere come unione di insiemi disgiunti.

B46 g.04 Chiamiamo **dominio dello spazio** $\mathbb{R}^{\times d}$ ogni sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^{\times d}$.
I domini sono sottoinsiemi degli spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ mediante i quali si possono precisare varie costruzioni di grande interesse.

B46 g.05 Si dice **insieme semplicemente connesso** .... .

B46 h. prodotto di spazi metrici

B46 h.01 Dati due spazi metrici $\boldsymbol{S}_1 = \langle S_1, \boldsymbol{d}_1 \rangle$ e $\boldsymbol{S}_2 = \langle S_2, \boldsymbol{d}_2 \rangle$, il prodotto cartesiano dei rispettivi terreni $\overline{S} := S_1 \times S_2$ può essere dotato in vari modi di distanze ottenibili servendosi delle due distanze $\boldsymbol{d}_1$ e $\boldsymbol{d}_2$; ogni spazio metrico così ottenuto si dice **spazio metrico prodotto** dei due spazi metrici di partenza.
Nel seguito per i punti di $\overline{S}$ useremo le notazioni $\overline{x} := \langle x_1, x_2 \rangle$, $\overline{y} := \langle y_1, y_2 \rangle$ e $\overline{z} := \langle z_1, y_2 \rangle$.
Tre tipi di distanze per spazi metrici prodotto di notevole utilità sono dati dalle espressioni seguenti

$$\boldsymbol{d}_m(\overline{x}, \overline{y}) := \max\left(\boldsymbol{d}_1(x_1, y_1), \boldsymbol{d}_2(x_2, y_2)\right) ; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{d}_q(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\boldsymbol{d}_1(x_1, y_1)^2 + \boldsymbol{d}_2(x_2, y_2)^2} ; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{d}_s(\overline{x}, \overline{y}) := \boldsymbol{d}_1(x_1, y_1) + \boldsymbol{d}_2(x_2, y_2) . \tag{3}$$

(1) Prop.: (a) $\langle S_1 \times S_2, \boldsymbol{d}_m(\overline{x}, \overline{y}) \rangle$ è uno spazio metrico.
(b) $\langle S_1 \times S_2, \boldsymbol{d}_s(\overline{x}, \overline{y}) \rangle$ è uno spazio metrico.
(c) $\langle S_1 \times S_2, \boldsymbol{d}_q(\overline{x}, \overline{y}) \rangle$ è uno spazio metrico.
Dim.: Per tutte le distanze le proprietà [Msp 1], [Msp 2] e [Msp 3] sono evidenti. Per la disuguaglianza triangolare le tre distanze si devono considerare separatamente.
Per la funzione $\boldsymbol{d}_s$ abbiamo:
$\boldsymbol{d}_s(\overline{x}, \overline{z}) = \boldsymbol{d}(x_1, z_1) + \boldsymbol{d}(x_2, z_2) \leq \boldsymbol{d}(x_1, y_1) + \boldsymbol{d}(y_1, z_1) + \boldsymbol{d}(x_2, y_2) + \boldsymbol{d}(y_2, z_2) = \boldsymbol{d}(\overline{x}, \overline{y}) + \boldsymbol{d}(\overline{y}, \overline{z})$ ∎

B46 h.02 Nel caso dello spazio metrico prodotto in cui $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono due spazi discreti abbiamo:
$\boldsymbol{d}_m(\overline{x}, \overline{y}) = \mathrm{dist}_{bin}(\overline{x}, \overline{y})$ e quindi anche $\langle S_1 \times S_2, \boldsymbol{d}_m \rangle$ è uno spazio metrico discreto.

$$\boldsymbol{d}_q(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \overline{x} = \overline{y} \\ 1, & \text{se } (x_1 = x_2 \wedge y_1 \neq y_2) \vee (x_1 \neq x_2 \wedge y_1 = y_2) \\ \sqrt{2}, & \text{se } x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2 \end{cases} .$$

$$\boldsymbol{d}_s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \overline{x} = \overline{y} \\ 1, & \text{se } (x_1 = x_2 \wedge y_1 \neq y_2) \vee (x_1 \neq x_2 \wedge y_1 = y_2) \\ 2, & \text{se } x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2 \end{cases} .$$

(1) Prop.: Valgono le disuguaglianze

$$\boldsymbol{d}_m(\overline{x}, \overline{y}) \leq \boldsymbol{d}_q(\overline{x}, \overline{y}) \leq \boldsymbol{d}_s(\overline{x}, \overline{y}) \leq 2\, \boldsymbol{d}_m(\overline{x}, \overline{y}) .$$

Dim.: Discendono direttamente dalle definizioni ∎

Dalle disuguaglianze precedenti segue che in ogni bolla aperta secondo una delle tre distanze precedenti è contenuta almeno una bolla secondo le altre due distanze: quindi le tre distanze presentate sono uniformemente equivalenti.

B46 h.03 Facciamo ora riferimento alle distanze $\boldsymbol{d}_m$ e $\boldsymbol{d}_s$ per $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ e agli spazi metrici prodotto $\boldsymbol{S}_{m12} := \langle S_1 \times S_2, \boldsymbol{d}_m \rangle$ e $\boldsymbol{S}_{s12} := \langle S_1 \times S_2, \boldsymbol{d}_s \rangle$.
Usiamo inoltre le notazioni:

ball_{mi} per le bolle degli spazi $\langle S_i, \boldsymbol{d}_m \rangle$ per $i = 1, 2$;

ball_{si} per le bolle degli spazi $\langle S_i, \boldsymbol{d}_s \rangle$ per $i = 1, 2$;

ball_{m12} e ball_{s12} per le bolle degli spazi $\boldsymbol{S}_{12m}$ e $\boldsymbol{S}_{12s}$.

(1) Prop.: $\forall \overline{\mathsf{c}} = \langle c_1, c_2 \rangle \in \overline{S}\ ,\ \forall r \in \mathbb{R}_+\ :$
$\mathsf{ball}_{m12}(\overline{\mathsf{c}}, r) = \mathsf{ball}_{m1}(c_1, r) \times \mathsf{ball}_{m2}(c_2, r)\ ,\ \mathsf{ball}_{s12}(\overline{\mathsf{c}}, r) = \mathsf{ball}_{s1}(c_1, r) \times \mathsf{ball}_{s2}(c_2, r)$

Dim.: Discende direttamente dalle definizioni ∎

(2) Prop.: $\forall A_1 \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}_{1m}}\ ,\ A_2 \in \mathsf{Open}_{\boldsymbol{S}_{2m}}\ :\ A_1 \times A_2 \in \mathsf{Open}\boldsymbol{S}_{m12}$.

Dim.: Se $\overline{\mathsf{a}} = \langle \mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 \rangle \in A_1 \times A_2$, esistono $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ tali che $\mathsf{ball}_{m1}(\mathsf{a}_1, r_1) \subset A_1$ e $\mathsf{ball}_{m2}(\mathsf{a}_2, r_2) \subset A_2$; di conseguenza $\mathsf{ball}_{m12}(\overline{\mathsf{a}}, \min(r_1, r_2)) \subset A_1 \times A_2$ ∎

(3) Prop.: Consideriamo i due insiemi $M_1 \subseteq_{ne} S_1$ e $M_2 \subseteq_{ne} S_2$.

(a) $\overline{M_1 \times M_2} = \overline{M_1} \times \overline{M_2}$.

(b) $M_1 \times M_2 \in \mathsf{Clsd}_{\boldsymbol{S}_{12}} \iff M_1 \in \mathsf{Clsd}_{\boldsymbol{S}_1} \wedge M_2 \in \mathsf{Clsd}_{\boldsymbol{S}_2}$

Dim.: (a) Se $\mathbf{m} = \langle m_1, m_2 \rangle \in \overline{M_1} \times \overline{M_2}$, allora per un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esistono $x_1 \in M_1$ e $x_2 \in M_2$ tali che $\boldsymbol{d}_1(m_1, x_1) < \epsilon$, $\boldsymbol{d}_2(m_2, x_2) < \epsilon$ e, posto $\mathsf{x} := \langle x_1, x_2 \rangle$, $\boldsymbol{d}_{m12}(\mathbf{m}, \mathsf{x}) < \epsilon$, per cui $\mathbf{m} \in \overline{M_1 \times M_2}$.
Consideriamo invece $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2 \rangle \notin \overline{M_1} \times \overline{M_2}$. Nel caso $n_1 \notin M_1$ l'insieme $(S_1 \setminus \overline{M_1}) \times S_2$, per (2) è aperto in $\boldsymbol{S}_{m12}$, contiene $\mathbf{m}$ e non interseca $M_1 \times M_2$: pertanto $\mathbf{n} \notin \overline{M_1 \times M_2}$.

Il caso $n_2 \notin M_2$ si tratta con una argomentazione ottenibile dalla precedente scambiando gli indici 1 e 2.

(b) Segue direttamente dalla formula in (a) ∎

B46 h.04 Consideriamo ora uno spazio metrico $\boldsymbol{R} = \langle R, \boldsymbol{t} \rangle$, $L \subseteq R$ e le funzioni $f_1(x_1) \in \lceil\!\lceil\ L \longmapsto S_1\ \rceil\!\rceil$, $f_2(x_2) \in \lceil\!\lceil\ L \longmapsto S_2\ \rceil\!\rceil$ ed $f(\mathsf{x}) := \langle f_1, f_2 \rangle \in \lceil\!\lceil\ L \longmapsto S_{12}\ \rceil\!\rceil$.

(1) Prop.: La funzione $f(\mathsf{x})$ è continua in $\mathsf{x}_0 \in L$ sse $f_1(\mathsf{x})$ ed $f_2(\mathsf{x})$ sono continue in x_0.

Dim.: Consideriamo $\mathsf{y}_0 = \langle f_1(\mathsf{x}), f_2(\mathsf{x}) \rangle$ e la bolla con centro in y_0 e raggio r; grazie a h03(1) abbiamo

$$f^{-\mathbf{1}}(\mathsf{ball}_{\boldsymbol{S}}(\mathsf{y}_0, r)) = f_1^{-\mathbf{1}}(\mathsf{ball}_{m1}(\mathsf{y}_0, r)) \cap f_2^{-\mathbf{1}}(\mathsf{ball}_{m2}(\mathsf{y}_0, r))\ .$$

Da qui, in forza di e02(1) e di b05(2), segue l'enunciato ∎

(2) Prop.: Consideriamo ora un punto $\mathsf{a} \in \overline{L}$.
La funzione f tende a un limite in rapporto ad L nel punto a sse esistono i due limiti

$$b_1 := \lim_{\mathsf{x} \in A\,,\, \mathsf{x} \to \mathsf{a}} f_1(\mathsf{x}) \quad , \quad b_2 := \lim_{\mathsf{x} \in A\,,\, \mathsf{x} \to \mathsf{a}} f_2(\mathsf{x})\ .$$

In queste circostanze $\lim_{\mathsf{x} \in L\,,\, \mathsf{x} \to \mathsf{a}} f(\mathsf{x}) = \langle b_1, b_2 \rangle$.

Dim.: Scende direttamente dalla (1) ∎

B46 h.05 I risultati precedenti si possono applicare alle successioni di punti appartenenti a un prodotto di spazi metrici. Consideriamo in particolare la successione

$$\mathsf{x} = \left\langle n \in \mathbb{N} :|\ \mathsf{x}_n \right\rangle = \left\langle n \in \mathbb{N} :|\ \langle x_{1,n}, x_{2,n} \rangle \right\rangle\ \in\ \lceil\!\lceil\ \mathbb{N} \longmapsto S_1 \times S_2\ \rceil\!\rceil\ .$$

(1) Prop.: La successione x è convergente sse esistono i due limiti

$$\lim_{n \to +\infty} x_{1,n} =: x_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} x_{2,n} =: x_2\ .$$

in tal caso $\lim_{n \to +\infty} \mathsf{x}_n = \langle x_1, x_2 \rangle$.

Dim.: Si tratta della particolarizzazione della h04(2) ∎

(2) Prop.: La successione $\left\langle n \in \mathbb{N} :\middle|\ \mathsf{x}_n \right\rangle$ è una successione di Cauchy sse sono successioni di Cauchy sia $\left\langle n \in \mathbb{N} :|\ x_{1,n} \right\rangle$ che $\left\langle n \in \mathbb{N} :|\ x_{2,n} \right\rangle$.

Dim.: Discende dalla definizione di successione di Cauchy [I12d01] e dalle relazioni tra le distanze in $\boldsymbol{S}_{m1}$, $\boldsymbol{S}_{m2}$ e $\boldsymbol{S}_{m21}$ ∎

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php