1

Capitolo B19
insiemi caratterizzati da proprietà

Contenuti delle sezioni

a. oltre gli insiemi procedurali p. 3
b. insiemi-P p. 7
c. operazioni su insiemi-P p. 13
d. relazioni-P p. 19
e. funzioni-P p. 24
f. cardinali degli insiemi p. 28
g. numeri transfiniti p. 32
h. composizioni su famiglie di insiemi p. 40

43 pagine

B19 0.01 Questo capitolo riprende a occuparsi degli insiemi-P, gli insiemi individuati dalle proprietà che caratterizzano i loro elementi, dedicando maggiore attenzione alle espressioni e alle formule che consentono di utilizzarli per le esigenze dell'*apparato* matematico-informatico.

Le proprietà vengono viste sia nell'ottica costruttiva richiamando quelle degli insiemi finiti, sia nella prospettiva degli sviluppi prevedibili avanzando la sola richiesta di proprietà definite con una chiarezza che le renda affidabilmente comprensibili e univocamente interpretabili da tutti i lettori che mostrano interesse per lo sviluppo del nostro *apparato*.

Ricordiamo che gli insiemi-P sono da considerare più generici degli insiemi-G, cioè degli insiemi definiti da macchine sequenziali programmabili generatrici (MSPG) che devono essere definite o definibili con enunciati affidabili a loro volta meno controllabili degli insiemi-GB, cioè degli insiemi-G ciascuno dei quali dotato di un algoritmo che consente di decidere il problema dell'appartenenza per tutte le stringhe costituenti l'ambiente nel quale si collocano.

Ricordiamo anche che gli insiemi-P vanno considerati meno controllabili degli insiemi astratti, le entità che qui semplicemente segnaliamo come entità governate dalla teoria assiomatica degli insiemi ZF (o del suo ampliamento ZFC) e che si possonavvalere di tutti gli strumenti che questa teoria e del suo rigore.

La presentazione formale della teoria ZF/ZFC considerata standard sarà affrontata con gli adeguati strumenti nel cap. B65, dopo aver affrontate alcune cruciali questioni riguardanti i fondamenti.

Spesso si parla anche di insiemi costruibili; qui ci limitiamo a considerare che gli insiemi-G (e ovviamente gli insiemi finiti) sono sicuramente insiemi costruibili, mentre nell'attuale stato della nostra *esposizione* non ci azzardiamo a ricorrere a insiemi costruibili che non possono contare su procedure generatrici.

Osserviamo inoltre che gli insiemi-P possono essere trattati con maggiore libertà degli insiemi-G, in quanto per essi non è indispensabile individuare procedimenti costruttivi da definire in modo da dare buone garanzie della possibilità di relizzarli effettivamente.

Tutto questo rende delicata e bisognosa di adeguati controlli la utilizzazione dei risultati delle analisi di ogni insieme-P specifico.

B19 0.02 Le considerazioni sugli insiemi-P che seguono consentono di portare avanti molte definizioni e argomentazioni per fini esplorativi e di prospettiva le quali consentono di accostare ed esaminare con buona chiarezza numerosi problemi che possono risultare molto stimolanti per ampliare e meglio delineare le prospettive dell'apparato matematico informatico continuamente sottoponibile a riscontri.

Rispetto agli insiemi basati sugli assiomi gli insiemi-P consentono di procedere senza doversi addentrare nell'impegnativo linguaggio richiesto dalle teorie formali e della logica matematica.

È quindi possibile discuterne usando un linguaggio che si sforza di essere accurato, ma a tratti si serve di argomenti intuitivi, ingenui, al fine di procedere con una certa scioltezza nella scoperta di nuovi esempi di insiemi con ruoli interessanti per nella matematica e nelle sue applicazioni.

In tal modo giunge a introdurre un comprensivo sistema di termini, di costruzioni formali, di operazioni, di relazioni e di notazioni che può essere ampiamente utilizzato per molteplici considerazioni (anche euristiche) imperniate sugli insiemi.

B19 0.03 All'inizio del capitolo si ribadisce l'opportunità di disporre di alcune nozioni sugli insiemi che consentano di utilizzare il linguaggio di queste entità per affrontare situazioni per le quali gli insiemi-G risultano insufficienti.

Si riconosce utile prendere in considerazione le entità che chiamiamo insiemi-P, cioè insiemi definiti solo su proprietà, ossia raggruppamenti costituiti da tutti e soli gli oggetti (i loro elementi) che si riconoscono o si suppongono godere di proprietà specifiche.

Quali possano essere le proprietà che caratterizzano gli insiemi-P non lo si specifica in modo preciso e generale; ci si limita invece a chiedere che le proprietà degli elementi di un insieme si possano tenere sotto controllo in modo sufficientemente condivisibile. Per ogni insieme-P che non sia un insieme-G (caso particolare di insieme-P) si richiede anche la disponibilità di esempi di elementi ampiamente condivisibili.

Per gli insiemi-P vengono poi introdotte le operazioni, le relazioni e le funzioni definendole facendo riferimento a corrispondenti proprietà.

Vengono inoltre presentati i principali risultati sopra il cardinale degli insiemi e vengono introdotti i numeri transfiniti.

Si passa infine a trattare, mediante la nozione di famiglia di insiemi, le generalizzazioni infinitistiche delle operazioni e delle relazioni.

B19 a. oltre gli insiemi procedurali

B19 a.01 Molteplici problemi nella matematica e nelle sue applicazioni richiedono di servirsi di insiemi che non possono dipendere da macchine il cui comportamento è legato, più o meno direttamente, a oggetti e a processi tangibili.

In particolare la geometria e la fisica matematica richiedono di muoversi entro sottoinsiemi della retta, del piano sui reali, del cosiddetto "spazio tridimensionale ordinario" e di altri insiemi continui, decisamente non finiti e nemmeno discreti.

Si è sentita quindi la necessità di ampliare la gamma delle entità che consideriamo lecito chiamare "insiemi" oltre alla collezione degli insiemi-G, nella convinzione, suffragata dalla storia, che queste entità possano costituire strumenti di primaria utilità per lo sviluppo della matematica e delle sue applicazioni e anche per la organizzazione delle molteplici conoscenze chepossono rivestire interesse.

Per trattare queste entità nel modo più aderente alle richieste di rigore e di consequenzialità logica della matematica è necessario dare a questa disciplina delle basi logicamente solide.

Serve un apparato formale che oggi può essere scelto tra vari disponibili; il primo proposto all'inizio del 1900 legato ai nomi di Zermelo e Fraenkel è il più frequentemente adottato e quello comunemente considerato lo standard della "teoria assiomatica degli insiemi" [B66].

B19 a.02 Gli accennati apparati formali risultano piuttosto impegnativi, in quanto richiedono nozioni afferenti alla logica matematica che si possono padroneggiare solo ad un rilevante livello di generalità e di astrazione.

C'è quindi da temere che gran parte delle persone interessate principalmente ad applicazioni settoriali possano giudicare questi formalismi insufficientemente motivati, non supportati da quanto esposto finora e troppo distanti dalle loro esigenze.

Riteniamo dunque più conveniente posticipare [B65] la precisazione dell'accennata impostazione formale rigorosa dopo aver presentato buoni motivi per la sua adozione e dopo aver introdotte altre nozioni basilari di logica matematica che riteniamo moderatamente impegnative e quindi che si possono esporre comprensibilmente, anche grazie ai molti esempi di applicazioni ampiamente comprensibili che le richiedono.

Nello stadio attuale dell*esposizione* invece ci proponiamo di ampliare la discussione sulla nozione di insieme ad un livello più discorsivo e su base fiduciaria, cioè utilizzando argomentazioni piuttosto intuitive che possono essere ragionevolmente condivise, promettendo che saranno presentate adeguatamente più oltre.

Con questo modo di procedere si vogliono rendere subito disponibili termini, notazioni, risultati e schemi mentali, prima di avere sufficientemente giustificata la loro robustezza logica, al fine di far procedere l'*esposizione* con un linguaggio sufficientemente leggibile, mantenendo collegamenti con problemi concreti e portando avanti le motivazioni della organicità della matematica e del suo potenziale applicativo.

B19 a.03 Ricordiamo che la caratteristica primaria delle entità matematiche per le quali conviene usare il termine insieme-E consiste nella relazione di appartenenza che sussiste tra una tale entità S e le entità x diverse da S che si dicono appartenere a essa.

Questa relazione viene chiamata **appartenenza** e per esprimere simbolicamente che x appartiene a S si scrive

$$x \in S\ .$$

Nella teoria assiomatica degli insiemi questa relazione viene considerata esclusivamente sul piano formale; per essa vengono avanzate richieste formali (assiomi) alle quali si chiede di non risultare contradditorie.

Sul piano della applicabilità di una teoria degli insiemi, come per ogni altra teoria matematica, naturalmente, si chiede che le proprietà espresse dagli assiomi e quelle dedotte da questi siano coerenti con i risultati sulle elaborazioni verificabili nel finito e con i risultati delle argomentazioni matematiche che si servono delle nozioni intuitive sugli insiemi e quindi con i risultati che si sono consolidati nel passato e che vengono ampiamente utilizzati per problemi tangibili.

Nelle più semplici presentazioni discorsive la relazione di appartenenza viene introdotta con metafore intuitive e con l'aiuto di esempi che vogliono essere condivisibili al livello delle argomentazioni colloquiali e che inoltre vogliono mostrare la utilità argomentativa di questa relazione.

B19 a.04 Una metafora per gli insiemi molto intuitiva e ampiamente utilizzata nelle esposizioni intuitive ricorre alla nozione materiale di contenitore.

Si presenta come **insieme** ogni entità che si possa assimilare ad un contenitore idealizzato il quale ha lo scopo di raccogliere degli oggetti formali che si sono definiti con argomentazioni che intendono risultare condivisibili.

Ogni oggetto x che si intende utilizzare in definizioni o in costruzioni per fini matematici o elaborativi, in genere assieme ad altri oggetti a lui simili, viene considerato "contenuto" in una entità S alla quale si attribuisce il ruolo del "contenitore".

In tal caso ogni x viene chiamato **elemento dell'insieme** S; questa situazione si esprime equivalentemente affermando che x appartiene ad S e scrivendo $x \in \mathsf{S}$.
Un'altra affermazione equivalente è "S contiene x", enunciato che si trascrive simbolicamente con la formula $\mathsf{S} \ni x$.

Va dichiarato che si possono prendere in considerazione contenitori di oggetti non omogenei, anche se questo nella pratica raramente risulta utile.
Inoltre si chiede, in genere non esplicitamente, che ogni contenitore S si intende distinto da ogni suo possibile elemento x. Si possono invece prendere in considerazioni contenitori i cui elementi, tutti o in parte, sono essi stessi contenitori.

In questa direzione si ammette di trattare contenitori i cui elementi sono (in parte) contenitori i cui elementi sono (in parte) contenitori e così via.
Accade quindi di incontrare insiemi di insiemi (che qui consideriamo opportuno chiamare collezioni di insiemi), insiemi di insiemi di insiemi e così via.

B19 a.05 Un poco più definiti dei precedenti insiemi-E sono stati chiamati [B08f] **insiemi-P** , insiemi basati su una proprietà che caratterizza tutti e soli gli oggetti che costituiscono i rispettivi elementi.

Gli insiemi finiti e gli insiemi procedurali, insiemi generati da una macchina sequenziale programmabile generatrice (MSPG) ricadono evidentemente sotto questa definizione.

Per un insieme finito S l'enunciato $x \in S$ è giustificato dalla possibilità di trovare l'oggetto x in una delle liste (finite) effettiva di un elenco o da una regola che consenta (almeno in linea di principio) di costruire un tale elenco.

Se S è un insieme procedurale, $x \in \mathsf{S}$ corrisponde alla possibilità di trovare x nella lista.G che viene generata da una elaborazione effettuata da una MSPG.

Questa lista.G può risultare illimitata e questo fa sì che non è garantito che si possa decidere con un algoritmo, cioè con una elaborazione di durata finita, se una generica stringa sull'alfabeto di uscita della MSPG appartenga o meno all'insieme.

Tra gli insiemi-G quindi si devono distinguere quelli che sono chiamati insiemi ricorsivi [B18e] definiti proprio richiedendo che per ciascuno di essi, S, sia disponibile un algoritmo che di fronte a un qualsiasi oggetto x del genere candidabile come elemento di S sia in grado di decidere con una sequenza finita di passi se appartiene o meno ad S.

Va detto a questo punto che non esistono criteri generali concretamente attuabili per decidere se una MSPG qualsiasi generi un insieme ricorsivo o meno; per questa decisione occorrono analisi specifiche che non sempre si possono applicare facilmente e condurre a termine.

Di conseguenza nelle applicazioni gli insiemi-G che non sono insiemi-GB, cioè gli insiemi nonricorsivi, si cerca di individuarli per evitare di utilizzarli o per utilizzarli solo in ben definite situazioni o solo per delineare tentativi di ottenere soluzioni prima di disporre di una seria garanzia di successo.

B19 a.06 Come vedremo, si incontra una certa varietà di insiemi-P che sicuramente non possono essere generati da alcuna MSPG e che chiamiamo **insiemi più che procedurali**, concisamente **insiemi-PnG**.

Questi insiemi-PnG sono definiti mediante proprietà dei loro elementi la cui individuazione effettiva, ineludibile quando si hanno scopi applicativi, può non essere agevole.

In effetti un insieme-PnG nelle elaborazioni finalizzate a soluzioni concrete non può essere coinvolto direttamente e nella sua totalità; possono essere coinvolti solosuoi elementi precisamente individuati, entità definite come suoi elementi che possono avere il ruolo di elementi generici o si possono considerare sostituti di suoi elementi ottenibili con processi costruttivi necessariamente discreti.

Tipicamente uno di questi sostituti si ottiene con un processo di approssimazione che è necessariamente condizionato da specifici obiettivi applicativi e dalle risorse che vengono effettivamente messe a disposizione; inoltre un tale sostituto si può utilizzare solo per argomentazioni circoscritte riguardanti specifiche esigenze pratiche.

Molti di questi insiemi-PnG risultano essenziali per alcuni degli sviluppi strategici della matematica e per delineare l'ambiente di qualche algoritmo e di qualche metodo di calcolo che si intende impiegare in situazioni concrete.

Queste situazioni possono essere trattate solo in termini finitistici e costituiscono sostituzioni praticamente giustificabili (tipicamente approssimazioni) delle situazioni esaminate negli sviluppi conoscitivi che conducono a enunciati che fanno parte del quadro generale dei risultati della matematica.

Occorre quindi distinguere tra le situazioni ottenibili con processi costruttivi effettivi o con processi attuabili idealmente (ma entro prospettive di realizzabilità), e le situazioni tendenzialmente astratte che si possono solo definire formalmente attraverso discorsi a un livello di precisione e di rigore tanto elevato da essere ampiamente e motivatamente giudicati affidabili.

Come già segnalato questa sistematica contrapposizione (insieme alla distinzione per i risultati tra formali e astratti da una parte e concreti e costruibili dall'altra) in buona parte è giustificato dalla necessità di servirsi di linguaggi e di formule che consentano di argomentare con relativa speditezza sopra svariati insiemi-PnG e di far entrare tali insiemi nelle esposizioni più concise e più leggibili (indispensabili a vari livelli per le comunicazioni riguardanti la matematica e le sue applicazioni).

B19 a.07 Si incontrano molti insiemi-PnG riguardanti problemi impegnativi che non si sanno trattare con precise procedure; ciascuno di essi risulta tanto capiente da contenere più elementi di quanti

possono essere messi in biiezione con gli elementi di un insieme procedurale, ovvero di quanti possono essere rappresentati da liste.GI, per quanto queste possano essere estesamente esplicitate.

Un cruciale esempio di queste entità è l'insieme dei punti della retta reale [B42].

Andando più oltre si individuano insiemi contenenti più elementi di quanti possono essere messi in biiezione con i punti di una retta: in particolare si individuano l'insieme dei sottoinsiemi della retta reale e l'insieme delle funzioni-RtR, le funzioni che associano valori reali a una variabile reale.

Il precedente arricchimento dei generi di insiemi può essere proseguito illimitatamente e non è il solo; se ne trovano vari altri simili.

Per questi insiemi-PnG, più che procedurali, non si può proporre alcun tipo di costruzione effettiva attuabile per tutti i suoi elementi: una costruzione effettivamente attuabile, secondo la cosiddetta congettura di Church-Turing [C21] si può ottenere solo mediante qualche genere di procedura.

I collegamenti e le composizioni tra le proprietà che caratterizzano gli insiemi-PnG, devono servirsi di attività deduttive consistenti nella formulazione di enunciati rappresentati comunicabili e quindi espressi da stringhe finite la cui validità si presume condivisibile e in successive trasformazioni degli enunciati disponibili, trasformazioni basate su regole di inferenza anch'esse da esprimere finitamente e che devono risultare ampiamente condivise.

A questo punto risulta più chiaro il conflitto tra l'uso degli insiemi più che costruibili e la esigenza di costruibilità degli insiemi degli oggetti sui quali si basano le elaborazioni effettive e con le quali si devono eseguire i calcoli con i quali si cerca di contribuire concretamente a risolvere problemi.

Questo conflitto merita di essere approfondito da parte di tutti gli studiosi che non siano assorbiti da esigenze applicative non dilazionabili.

A coloro che sono interessati primariamente ai calcoli effettivi e alle loro applicazioni va segnalato che le proprietà trovate attraverso deduzioni formali concernenti insiemi-PnG, come dice la storia della scienza e della tecnologia, hanno ampliato in misura determinante la possibilità di prospettare, inquadrare e precisare una grande varietà di procedimenti effettivi utilizzabili per affrontare problemi concreti.

Possiamo aggiungere che queste soluzioni sono ottenibili e comunicabili con relativa semplicità anche grazie all'adozione dei linguaggi consentiti dai riferimenti ai vari generi di insiemi con i quali si riesce ad argomentare.

B19 b. insiemi-P

B19 b.01 Ricordiamo [B08f08] che un insieme-P è stato definito come una entità alla quale possono essere attribuiti come elementi alcuni degli oggetti che appartengono a un insieme ambiente che è stato introdotto con definizioni ampiamente condivise e auspicabilmente rigorose; ciascuno di questi oggetti candidati si giudica elemento dell'insieme-P quando è ampiamente accettato che soddisfi una proprietà (o una combinazione di proprietà) definita in modo attento e ampiamente condiviso.

Nel seguito ci occupiamo principalmente di un generico insieme-P che denotiamo con S il quale trova collocazione entro un insieme ambiente U e viene individuato da una proprietà $\mathcal{P}$ sua caratteristica, cioè da una proprietà che deve essere soddisfatta dai suoi elementi e da nessun altro elemento di U.

La collocabilità di S in U consiste nella richiesta che per ciascuno degli oggetti di U che sono candidati ad essere considerati elementi di S sia sensato e ragionevle chiedersi e cercare di stabilire se soddisfa o meno la proprietà $\mathcal{P}$.

B19 b.02 Le proprietà che definiscono un insieme-P spesso hanno la forma di **relazioni** tra i suoi elementi o tra suoi elementi ed oggetti ben noti.

Come vedremo le entità che vengono considerate insiemi-P servono ad affrontare gran parte delle esigenze di sviluppo della matematica.

Va anche segnalato che si confida nel fatto che l'impostazione assiomatica degli insiemi [B66] consenta di dare una base rigorosa anche a tutti gli insiemi-P che sono stati e saranno introdotti sulla base di proprietà espresse intuitivamente e dichiarando che si tratta di proprietà ampiamente riconosciute come chiaramente definite.

Quindi confidiamo che i risultati che nelle prossime pagine attribuiremo agli insiemi-P risultino validi anche per gli insiemi basati su assiomi.

Questo consente che nelle argomentazioni nelle quali non si ha interesse a puntualizzare le distinzioni tra i generi degli insiemi che si esaminano si parli semplicemente di insiemi, sottacendo le distinzioni individuate dalle specificazioni -F, -I, -P, -G, -GI, -B, -GB -PnG.

Nel seguito utilizzeremo anche il termine **insieme astratto** per caratterizzare insiemi introdotti assiomaticamente ai quali può essere opportuno non attribuire alcuna caratteristica specifica.

B19 b.03 Rinunciando a delimitazioni vincolanti per i possibili ambienti U e per le possibili proprietà $\mathcal{P}$, intendiamo semplicemente proporre definizioni colloquiali presentate con motivazioni pragmatiche ragionevoli e con argomentazioni chiare che inducano ad essere ampiamente condivise.

Anche l'ambiente U nel quale si colloca un insieme-P si chiede si un insieme definito mediante una proprietà la cui formulazione sia ampiamente accettabile; in particolare sono da accettare ambienti generati da procedure, mentre in mancanza di una procedura generatrice sono auspicabili insiemi ambiente definiti da proprietà accettate ampiamente, anche se con riserve di verifiche successive.

Ci serve riprendere il termine **formula ben formata**, abbreviato con la sigla `wff`, acronimo del termine inglese *well formed formula*, termine che definiremo con precisione in C14 avvalendoci di nozioni introdotte nello studio dei linguaggi formali.

Le wff sono stringhe che soddisfano regole lessicali e sintattiche definite con precisione e che sono interpretabili mediante regole semantiche anch'esse chiaramente fondate.

Esempi di `wff` sono le formule utilizzate nell'algebra elementare, nella combinatorica e nell'algoritmica delle configurazioni discrete, nella geometria analitica, nella trigonometria, nell'analisi infinitesimale,

nella fisica matematica, nelle tecnologie consolidate, e nei più precisi tra i modelli matematici delle scienze naturali, biologiche, sociali e comportamentali.

B19 b.04 Presentiamo alcuni esempi di insiemi-P, dopo aver introdotto la notazione per il loro insieme: **SetP**.

Si possono definire insiemi di numeri interi naturali che soddisfano un'equazione della forma $P(n) = 0$ con n variabile in $\mathbb{N}$ o in $\mathbb{Z}$ e $P(n)$ espressione ben formata nella quale compaiono la variabile incognita n, costanti intere, operazioni aritmetiche e coppie di parentesi coniugate aventi il ruolo di delimitatori di sottoespressioni.

Altre proprietà concernenti incognite variabili in $\mathbb{N}$ o in $\mathbb{Z}$ possono essere espresse con un algoritmo, cioè con una MSPTA, o con una MSPG [B18a01]. Quindi gli insiemi-G si possono considerare insiemi-P.

La gamma delle proprietà che consentono di individuare gli insiemi-P dovrebbe essere individuata da un linguaggio di espressioni ciascuna delle quali in grado di formulare una proprietà.
A questo punto dell'*esposizione* ci limitiamo a rinviare questa questione [B65] e a procedere euristicamente prendendo in considerazione solo insiemi-P caratterizzati da proprietà esplicitate da giudicare ragionevolmente condivisibili.
In tal modo si rinuncia a delineare precisi confini per **SetP**, la classe.E degli insiemi-P, cioè si rinuncia a stabilire dei confini per la totalità delle proprietà utilizzabili in matematica e ci si limita a procedere presentando esempi specifici per i quali si propone l'ampia condivisibilità.

B19 b.05 Sul piano dell'interesse per le applicazioni è ragionevole rivolgere maggiore attenzione agli insiemi-P che fanno meglio intravvedere sviluppi ricchi di risultati e soprattutto la possibilità di definire procedure e metodologie.

Molti insiemi-P saranno proposti come interessanti sulla base della conoscenza di risultati della tradizione matematica assimilabili a risultati attesi.
La proposta di un nuovo insieme-P, in particolare, deve essere esente dal peggiore dei sospetti in matematica, cioè dalla possibilità di condurre a situazioni di contradditorietà.

Nella individuazione di un insieme-P potrebbero essere utili anche congetture supportate da dimostrazioni incomplete o da risultati parziali.
Tra questi pensiamo diventino sempre più utili i risultati incompleti ottenibili con sperimentazioni e simulazioni condotte mediante apparecchiature per l'elaborazione automatica dei dati.
Un esempio è fornito dalla verifica della congettura di Goldbach [`Godbach conjecture (we)`].

Ovviamente a chi propone un nuovo insieme-P i richiede di essersi accertat con cura della fondatezza delle congetture e dell'attendibilità d risultati sperimentali sui quali si basa.
Ampiamente sentita e particolarmente delicata è la attribuzione di attendibilità di risultati ottenuti mediante calcoli approssimati, attraverso elaborazioni statistiche e con simulazioni basate su modelli non tradizionali.

B19 b.06 L'insieme-P ottenibile con la selezione degli elementi dell'ambiente U concernente il soddisfacimento della proprietà $\mathcal{P}$ si esprime con la formula:

$$\{x \in \mathsf{U} \,\P\, \mathcal{P}(x)\} \; ; \tag{1}$$

questa espressione va letta "insieme degli oggetti x appartenenti all'insieme U tali da verificare la proprietà $\mathcal{P}(x)$" o equivalentemente "insieme degli oggetti di U che rendono vero l'enunciato $\mathcal{P}(x)$" .

Sono particolarmente interessanti i casi in cui $\mathcal{P}(x)$ è costituito da un'equazione in una variabile x o da un sistema di equazioni in una sequenza di variabili $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$.

Più avanti incontreremo altri schemi di formule atte a individuare insiemi in generale.

Una variante della formulazione (1) riguarda la individuazione degli oggetti ottenibili dai diversi elementi v di un insieme V tendenzialmente controllabile (in particolare di un insieme-G o di un insieme-B) con una trasformazione algoritmica $\boldsymbol{T}$ che a partire da ciascuno di tali $v \in \mathsf{V}$ individua un elemento $x \in \mathsf{U}$ che si denota con $\boldsymbol{T}(v)$.
Questi elementi di U, e solo questi, sono caratterizzati dalla proprietà di essere ottenibili come risultati della trasformazione $\boldsymbol{T}$ a partire da un elemento di V. Questa proprietà svolge il ruolo rappresentato genericamente da $\mathcal{P}(x)$ e quindi gli oggetti $\boldsymbol{T}(v)$ al variare di v in un insieme-P costituiscono un insieme-P.

Questo tipo di insieme-P si denota con la espressione

$$\{x \in \mathsf{V} :|\ \boldsymbol{T}(x)\}\ , \tag{2}$$

formula da leggere "insieme ottenuto con la trasformazione $\boldsymbol{T}$ applicata agli elementi dell'insieme (precedentemente definito) V" .

Per un'espressione della forma precedente, presumendo ben definito V, potrebbe costituire un problema la precisa individuazione dell'ambiente nel quale si collocano i risultati della trasformazione $\boldsymbol{T}$, ossia di $\mathsf{cod}(\boldsymbol{T})$.

Le espressioni insiemistiche (1) e (2) sono largamente usate. In particolare molti insiemi-G che rivestono un interesse specifico, soprattutto molti insiemi ricorsivi, si esprimono più significativamente con una formula che ricorre a proprietà secondo uno degli schemi precedenti, piuttosto che mediante una MSPG.

B19 b.07 Il problema della formulazione delle proprietà che sono in grado di individuare gli insiemi-P riveste notevole importanza e in effetti ha condotto a una discussione che è stata al centro degli interessi in quanti si sono occupati dei fondamenti della matematica tra il 1880 e 1l 1910.

Tra le molte convinzioni alle quale questa discussione ha condotto quella forse più determinante ha riguardato il fatto che i fondamenti si devono basare su una teoria essenzialmente e puramente simbolica.

Per questo per definire un insieme-P S è fortemente raccomandato, innanzi tutto, che sia definito un insieme-B ambiente nel quale si devono trovare le entità candidate a essere incluse tra i suoi elementi.

Serve poi accordo sulle argomentazioni che conducono alla definizione della $\mathcal{P}$. Si chiede infine che vi sia accordo sulla individuazione di almeno una entità che si possono considerare condivisibilmente elementi del nostro S.

Se questi accordi venissero a mancare, la fondatezza della entità S proposta come insieme-P entrerebbe in crisi e crescerebbe la preoccupazione che l'utilizzo di questo S possa condurre a situazioni di contradditorietà.

Talora si riscontra il viceversa: la preoccupazione che un tale S possa portare a contraddizioni mina la proposta di considerarlo un insieme-P.

Va segnalato anche che incertezze e difficoltà si incontrano soprattutto quando si cerca di individuare oggetti di U che non appartengono all'entità proposta come insieme-P.

Di fronte a questi possibili dubbi si impone il ricorso a strumenti logici più cogenti, essenzialmente a una teoria assiomatica degli insiemi.

Anche per una tale teoria si pongono questioni di fondatezza da affrontare e possibilmente risolvere con strumenti formali, anch'essi afferenti alla logica matematica.

Ma per ora proseguiamo solo a un livello intuitivo, ma confidando di ottenere risultati che possano essere confermati con strumenti giudicati più rigorosi.

B19 b.08 Gli insiemi-P possono essere considerati entità (matematiche) rappresentate da identificatori o da espressioni simboliche sulle quali si possono svolgere argomentazioni la cui validità caso per caso rimane condizionata dalla possibilità di definire attendibilmente gli insiemi coinvolti.

Come identificatori in genere useremo lettere maiuscole eventualmente dotate di deponenti, di esponenti e di segni diacritici.

Per le loro espressioni useremo stringhe costituite da identificatori, da segni specifici, da segni delimitatori e da segni connettivi che devono costituire delle formule ben forma o loro giustificate semplificazioni.

Le argomentazioni coinvolgenti un insieme-P parte di un determinato ambiente U possono condurre a enunciare proprietà concernenti singole entità di U o relazioni concernenti due o più entità.

In genere le espressioni usate in queste argomentazioni sono `wff` di un tipo ben definito.

In una espressione che definisce un oggetto matematico (un insieme, una caratterizzazione, una relazione, una struttura o qualche altra entità articolata) possono comparire lettere di diversi alfabeti il cui complesso va considerato finito, ma in grado di crescere in relazione a ogni esigenza giustificata.

Se $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$ sono espressioni ben formate che sul piano semantico sono in grado di individuare raggruppamenti di entità significative tendenzialmente omogenee, l'enunciato della forma $(\mathcal{E} = \mathcal{F})$ è da ritenersi espressione ben formata e significa che ogni entità rappresentata dalla espressione $\mathcal{E}$ può essere rappresentata anche dall'espressione $\mathcal{F}$ e viceversa.

La negazione del precedente enunciato è espressa dalla scrittura $(\mathcal{E} \neq \mathcal{F})$.

L'enunciato espresso dalla relazione $(\mathcal{E} = \mathcal{F})$ viene letto anche come l'affermazione

"coincidono l'insieme-P degli oggetti che soddisfano $\mathcal{E}$ e l'insieme-P degli oggetti che soddisfano $\mathcal{F}$" .

Dopo una tale affermazione si considera lecito identificare l'insieme-P in causa con una lettera contrassegno, per esempio S, suscettibile di comparire in una relazione della forma $(x \in \mathsf{S})$ o nella sua negazione $(x \notin \mathsf{S})$, dove con x denotiamo una wff in grado di identificare una entità facente parte di S che abbia senso trattare come oggetto di indagine matematica.

B19 b.09 Alla precedente nozione essenzialmente formale di insieme-P si possono ricondurre sia la nozione di insieme finito esprimibile con una lista nonripetitiva (riguardante i suoi elementi [B11], sia la nozione di insieme-G [B18] dalla cui MSPG dipende la proprietà che caratterizza l'insieme-P .

Si osserva che in questa definizione di insieme-P non si è posto alcun limite a quella che nell'ambito della metafora che vede l'insieme com un contenitore si può chiamare "capienza del contenitore" .

B19 b.10 Le proprietà che definiscono un insieme-P sono individuate con delle formule ben formate che nell'ambito dello sviluppo di una teoria di tale insieme devono potersi valutare come vere o false.

Anche sulla loro forma rinviamo al capitolo B65 e per ora ci limitiamo a chiedere che la loro interpretazione sia condivisibile.

Le lettere che compaiono in una proprietà $\mathcal{P}$ possono individuare entità definite in precedenza, oppure possono avere il ruolo di **elementi variabili** e ciascuna di tali lettere si descrive come in grado di muoversi in un insieme-G ampiamente accettabile; come si è detto di ciascuno di questi elementi restano da determinare l'identità e/o le caratteristiche specifiche.

A ogni elemento variabile x nella $\mathcal{P}$ si impone di assumere come valore un qualsiasi elemento di U o più in generale un qualsiasi elemento di un ben definito $\mathsf{V} \subseteq \mathsf{U}$. Quindi deve "avere senso" proporre la $\mathcal{P}$

come proprietà soddisfacibile da qualche elemento di V, ovvero deve essere sensatamente proponibile che gli sviluppi delle indagini possano stabilire per quali valori della x la $\mathcal{P}$ risulta vera e per quali falsa.

I segni che rappresentano elementi variabili di una proprietà $\mathcal{P}$, secondo tradizione, sono chiamate anche **elementi arbitrari**, **elementi generici** e **argomenti variabili** della $\mathcal{P}$.

Per segnalare che in una relazione $\mathcal{P}$ compaiono le variabili x, y e z useremo anche la scrittura specifica $\mathcal{P}\left[x, y, z\right]$.

B19 b.11 Una relazione nella quale compaiono argomenti variabili si dice **identità** sse risulta vera per tutti i valori che il contesto rende sensato attribuire a tali variabili.

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ denotano due proprietà, si dice che $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$ sse $\mathcal{Q}$ risulta vera per tutte le scelte di valori per le variabili che rendono vera la $\mathcal{P}$.
L'implicazione della $\mathcal{Q}$ da parte della $\mathcal{P}$ si esprime con la formula

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q} \; ; \tag{1}$$

il segno $\Longrightarrow$ è detto **simbolo dell'implicazione** e la formula precedente si legge "la proprietà $\mathcal{P}$ implica la proprietà $\mathcal{Q}$" .

Si dice che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono **proprietà equivalenti** sse la $\mathcal{P}$ implica la $\mathcal{Q}$ e viceversa la $\mathcal{Q}$ implica la $\mathcal{P}$.
Questa situazione si caratterizza con la scrittura

$$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q} \; . \tag{2}$$

Si dice **negazione della proprietà** $\mathcal{P}\left[x, y, ..., z\right]$ la relazione che risulta vera per le sequenze $\langle x, y, ..., x\rangle$ per le quali $\mathcal{P}\left[x, y, ..., z\right]$ risulta falsa. Essa si denota con la scrittura $\neg\mathcal{P}\left[x, y, ..., z\right]$.

B19 b.12 Data una relazione $\mathcal{P}\left[x, y, z\right]$, l'enunciato "per ogni x si ha $\mathcal{P}\left[x, y, z\right]$" lo consideriamo la relazione concernente le variabili y e z che risulta vera per tutte e sole le coppie $\langle \overline{y}, \overline{z}\rangle$ tali che $\mathcal{P}\left[x, \overline{y}, \overline{z}\right]$ risulta vera per ogni x.

Inoltre l'enunciato "esiste x tale che $\mathcal{P}\left[x, y, z\right]$" lo consideriamo la relazione concernente le variabili y e z che risulta vera per tutte e sole le coppie $\langle \overline{y}, \overline{z}\rangle$ tali che esiste almeno un x per il quale $\mathcal{P}\left[x, \overline{y}, \overline{z}\right]$ risulta vera.

Ciascuna delle suddette relazioni potrebbe essere convenientemente individuata da una scrittura della forma $\overline{\mathcal{P}}\left[y, z\right]$.

La negazione dell'enunciato "quale che sia x vale $\mathcal{P}$" è "esiste x tale che vale $\neg\mathcal{P}$" .

La negazione dell'enunciato "esiste x tale che vale $\mathcal{P}$" è "per ogni x vale $\neg\mathcal{P}$" .

Conviene osservare esplicitamente che alla nozione di esistenza di una entità $\mathcal{E}\left[x\right]$ qui richiamata va attribuita una validità formale che va chiaramente distinta da una validità che può essere attribuita a una evenienza fisica, mentale o interpersonale.

B19 b.13 Consideriamo due proprietà $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Conveniamo che l'enunciato "$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$" sia la proprietà che risulta vera sse lo sono sia la $\mathcal{P}$ che la $\mathcal{Q}$. Tale proprietà viene denotata anche con $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ e viene chiamata **congiunzione** di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Conveniamo invece che l'enunciato "$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$" sia la proprietà che risulta vera sse lo sono o la $\mathcal{P}$ o la $\mathcal{Q}$ (o entrambe). Tale proprietà viene denotata anche con $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ e viene chiamata **disgiunzione degli**

insiemi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Conviene segnalare che il connettivo "o" corrisponde al connettivo latino "*vel*" (diverso da "aut").

Si osserva che l'enunciato "$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$" equivale a "$\neg(\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})$".

Si osserva che l'enunciato "$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$" equivale a "$\neg(\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q})$".

Si osserva che l'enunciato $\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ equivale all'enunciato $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

La relazione di implicazione tra enunciati si trova essere una relazione d'ordine: infatti se si considerano tre proprietà $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ ed $\mathcal{R}$ si ha

$$((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \ \wedge \ (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \ .$$

B19 c. operazioni su insiemi-P

B19 c.01 Procediamo ora a estendere agli insiemi-P le operazioni e le relazioni che sono state introdotte per gli insiemi finiti [B08d, B08e] e per gli insiemi-G [B18e].

Per l'ampliamento di queste nozioni ci serviamo delle stesse notazioni usate in precedenza; esse in effetti sono notazioni costituenti *standardd de facto*, in quanto sono adottate dalle teorie assiomatiche più adottate e da buona parte degli sviluppi tecnico-scientifici.

Nel seguito avremo a che fare, tipicamente, con insiemi che denoteremo con lettere come S, T, ... e con le proprietà atte a caratterizzarli che denoteremo, risp., con $\mathcal{P}_{\mathsf{S}}$, $\mathcal{P}_{\mathsf{T}}$, ...
Quando servirà collocare gli elementi degli insiemi-P in ben determinati insiemi ambiente, per questi useremo identificatori come U e V.

Useremo inoltre scritture della forma $\mathsf{S} \in \mathbf{SetP}$ per enunciare che con S si denota un insieme-P.
A questo proposito è opportuno ricordare che l'entità **SetP** non va considerato un insieme-E, in quanto se così fosse la sua definizione indurrebbe a pensare che si tratta di un insieme-P e quindi porterebbe alla affermazione $\mathbf{SetP} \in \mathbf{SetP}$, enunciato che porta a contraddizioni che si devono decisamente evitare.

Si può invece dire che **SetP**, come l'intero **Set** costituisce una cosiddetta "classe.E", termine che (come vedremo in B65d] viene usato per denotare entità più generali degli insiemi ai quali, in parole povere, si potrebbe applicare la metafora di contenitori fantastici e immateriali ai quali è consentito di contenere se stessi.

B19 c.02 Consideriamo due insiemi-P S e T caratterizzati, risp., dalle proprietà $\mathcal{P}_{\mathsf{S}}$ e $\mathcal{P}_{\mathsf{T}}$.

Si dice che S è **sottoinsieme di un insieme** T sse la proprietà $\mathcal{P}_{\mathsf{S}}$ implica la proprietà $\mathcal{P}_{\mathsf{T}}$. Questo equivale ad affermare che ogni elemento di S è anche elemento di T, cioè che "$x \in \mathsf{S} \implies x \in \mathsf{T}$".
Per enunciare questa situazione scriviamo $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T}$.

Si osserva che con l'affermazione precedente abbiamo esteso agli insiemi-P il significato del segno $\subseteq$, simbolo denotante la relazione di **inclusione**, precedentemente introdotta per gli insiemi finiti.

L'enunciato $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T}$ si legge anche "S è una **parte dell'insieme** T" .

Come per gli insiemi finiti si introduce la relazione **essere sottoinsieme proprio** e la corrispondente notazione $\mathsf{S} \subset \mathsf{T}$, scrittura che equivale all'enunciato "$\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T} \ \wedge \ \mathsf{S} \neq \mathsf{T}$" .

Si dimostra facilmente che il segno "$\subseteq$" rappresenta una relazione d'ordine, cioè che valgono le seguenti proprietà per gli insiemi-P (già stabilite per le relazioni finite):

$\forall \mathsf{S} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \subseteq \mathsf{S}$ (riflessività) ;

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \subseteq \mathsf{T} \wedge \mathsf{T} \subseteq \mathsf{S} \implies \mathsf{S} = \mathsf{T}$ (antisimmetria) ;

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{U} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \subseteq \mathsf{T} \ \wedge \ \mathsf{T} \subseteq \mathsf{U} \implies \mathsf{S} \subseteq \mathsf{U}$ (transitività) .

Come per le altre relazioni d'ordine conviene introdurre la relazione riflessa (detta anche trasposta o reciproca) della $\subseteq$ che si denota con $\supseteq$ e la riflessa della $\subset$ che si denota con $\supset$.

L'enunciato $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{S}$ si legge "S è **sovrainsieme** di T"; si introduce poi l'enunciato $\mathsf{T} \supset \mathsf{S}$ come equivalente di $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{S} \wedge \mathsf{T} \neq \mathsf{S}$ e si legge "T è **sovrainsieme proprio** di S".

Sono utilizzate anche le negazioni delle relazioni precedenti per le quali si usano le notazioni $\not\subseteq$, $\not\subset$, $\not\supseteq$ e $\not\supset$.

Due insiemi-P diversi S e T si dicono **insiemi noncomparabili** sse $\mathsf{S} \not\subset \mathsf{T} \ \wedge \ \mathsf{T} \not\subset \mathsf{S}$. Tale relazione tra insiemi la esprimiamo anche con la notazione $\mathsf{S} \nsubseteq \mathsf{T}$.

Evidentemente la relazione $\subseteq$ è una relazione d'ordine parziale nontotale: sono facilmente individuabili duetti di insiemi noncomparabili come:

$\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 4\}$ tra gli insiemi finiti;

$\mathbb{N}$ e $2\,\mathbb{Z}$ tra gli insiemi ricorsivi;

gli intervalli $[0, 2]$ e $[1, 3]$ tra gli insiemi continui.

B19 c.03 Siano dati due insiemi-P S caratterizzato dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{S}$ e T definito dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{T}$, collocabili in un insieme ambiente U.
Si dice **unione degli insiemi** S e T l'insieme degli elementi di U che soddisfano la proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{S}$ o la $\mathcal{P}_\mathsf{T}$ (senza escludere che le soddisfino entrambe).

Per tale entità useremo la notazione

$$\mathsf{S} \cup \mathsf{T} \ := \ \{x \,[\!] \, x \in \mathsf{S} \ \vee \ x \in \mathsf{T}\} \ . \tag{1}$$

Chiaramente si tratta dell'insieme caratterizzato dalla proprietà "$\mathcal{P}_\mathsf{S} \ \vee \ \mathcal{P}_\mathsf{T}$" .

Dunque l'unione tra insiemi-P è un'operazione binaria e per questa operazione si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \cup \mathsf{T} = \mathsf{T} \cup \mathsf{S}$ (commutatività);

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{V} \in \mathbf{SetP} \ : \ (\mathsf{S} \cup \mathsf{T}) \cup \mathsf{V} = \mathsf{S} \cup (\mathsf{T} \cup \mathsf{V})$ (associatività);

$\forall \mathsf{S} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \cup \mathsf{S} = \mathsf{S}$ (idempotenza).

L'associatività dell'unione consente la scrittura semplificata

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{V} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \cup \mathsf{T} \cup \mathsf{V} := (\mathsf{S} \cup \mathsf{T}) \cup \mathsf{V} = \mathsf{S} \cup (\mathsf{T} \cup \mathsf{V})$.

e determina il significato di scritture ottenute per iterazione come la $\mathsf{S}_1 \cup \mathsf{S}_2 \cup \mathsf{S}_3 \cup \ldots \cup \mathsf{S}_n$.

B19 c.04 Dati due insiemi-P S, caratterizzato dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{S}$ e T definito dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{T}$, si dice **intersezione** di tali insiemi-P l'insieme-P caratterizzato dalla proprietà "$\mathcal{P}_\mathsf{S} \wedge \mathcal{P}_\mathsf{T}$" . Per tale entità si usa la notazione

$$\mathsf{S} \cap \mathsf{T} \ := \ \{x \,[\!] \, x \in \mathsf{S} \ \wedge \ x \in \mathsf{T}\} \ . \tag{1}$$

Dunque l'intersezione può considerarsi anche un'operazione binaria tra insiemi-P e per questa composizione si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \cap \mathsf{T} = \mathsf{T} \cap \mathsf{S}$ (commutatività);

$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{V} \in \mathbf{SetP} \ : \ (\mathsf{S} \cap \mathsf{T}) \cap \mathsf{V} = \mathsf{S} \cap (\mathsf{T} \cap \mathsf{V})$ (associatività);

$\forall \mathsf{S} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \cap \mathsf{S} = \mathsf{S}$ (idempotenza).

L'associatività dell'intersezione consente la scritture semplificata

$$\forall \mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{V} \in \mathbf{SetP} \ : \ \mathsf{S} \cap \mathsf{T} \cap \mathsf{V} := (\mathsf{S} \cap \mathsf{T}) \cap \mathsf{V} = \mathsf{S} \cap (\mathsf{T} \cap \mathsf{V}) \ ,$$

e consente scritture ottenute per iterazione come $\mathsf{S}_1 \cap \mathsf{S}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{S}_n$.

Due insiemi-P privi di elementi in comune si dicono **insiemi-P disgiunti**; questo equivale a dire che la loro intersezione è vuota.
Anche per l'unione di due insiemi-P S e T disgiunti si può usare la notazione $\mathsf{S} \dot\cup \mathsf{T}$: questo tipo di scrittura serve sia a denotare l'unione di S e T che a segnalare che i due insiemi-P coinvolti sono disgiunti.

B19 c.05 Per unione e intersezione di insiemi-P si dimostrano facilmente anche le proprietà che seguono.

(1) $$\forall \mathsf{S},\mathsf{T}\subseteq\mathsf{U}\ :\ \mathsf{S}\subseteq\mathsf{S}\cup\mathsf{T}\ ,\ \mathsf{S}\cap\mathsf{T}\subseteq\mathsf{S}\blacksquare$$

(2) $$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\subseteq\mathsf{U}\ :\ \mathsf{S}\subseteq\mathsf{T}\implies\mathsf{S}\cup\mathsf{V}\subseteq\mathsf{T}\cup\mathsf{V}\ \wedge\ \mathsf{S}\cap\mathsf{V}\subseteq\mathsf{T}\cap\mathsf{V}\blacksquare$$

(3) $$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\subseteq\mathsf{U}\ :\ \mathsf{V}\subseteq\mathsf{S}\wedge\mathsf{V}\subseteq\mathsf{T}\iff\mathsf{V}\subseteq\mathsf{S}\cap\mathsf{T}\blacksquare$$

(4) $$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\subseteq\mathsf{U}\ :\ \mathsf{S}\subseteq\mathsf{V}\wedge\mathsf{T}\subseteq\mathsf{V}\iff\mathsf{S}\cup\mathsf{T}\subseteq\mathsf{V}\blacksquare$$

(5) $$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\subseteq\mathsf{U}\ :\ (\mathsf{S}\cup\mathsf{T})\cap\mathsf{V}\ =\ (\mathsf{S}\cap\mathsf{V})\cup(\mathsf{T}\cap\mathsf{V})\blacksquare$$

(6) $$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\subseteq\mathsf{U}\ :\ (\mathsf{S}\cap\mathsf{T})\cup\mathsf{V}=(\mathsf{S}\cup\mathsf{V})\cap(\mathsf{T}\cup\mathsf{V})\blacksquare$$

Le due precedenti uguaglianze esprimono le proprietà di **distributività per unione e intersezione**.

B19 c.06 Dati due insiemi-P: S caratterizzato dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{S}$ e T caratterizzato dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{T}$, si dice **eliminazione** di T da S l'insieme-P definito dalla proprietà

$$\text{“}\mathcal{P}_S \text{ e non } \mathcal{P}_\mathsf{T}\text{”}\ .$$

Per tale insieme-P e si usa la notazione

(1) $$\mathsf{S}\setminus\mathsf{T}\ :=\ \{x\ \big[\!\big]\ x\in\mathsf{S}\wedge x\notin\mathsf{T}\}\ .$$

Anche l'eliminazione può considerarsi un'operazione binaria tra insiemi-P.
Può essere efficace leggere l'espressione $\mathsf{S}\setminus\mathsf{T}$ come “insieme S **senza** T”.

Per questa operazione su insiemi-P si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ (\mathsf{S}\setminus\mathsf{T})\setminus\mathsf{V}\ =\ (\mathsf{S}\setminus\mathsf{V})\setminus\mathsf{T}\ =\mathsf{S}\setminus(\mathsf{T}\cup\mathsf{V})$;
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ \mathsf{S}\setminus(\mathsf{T}\cup\mathsf{V})\ =\ (\mathsf{S}\setminus\mathsf{T})\cap(\mathsf{S}\setminus\mathsf{V})$;
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ \mathsf{S}\setminus(\mathsf{T}\cap\mathsf{V})\ =\ \big(\mathsf{S}\setminus(\mathsf{T}\cup\mathsf{V})\big)\ \dot\cup\ (\mathsf{T}\ominus\mathsf{V})$;
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ (\mathsf{S}\cup\mathsf{T})\setminus\mathsf{V}\ =\ (\mathsf{S}\setminus\mathsf{V})\ \cup\ (\mathsf{T}\setminus\mathsf{V})$.

B19 c.07 Dati due insiemi-P S, caratterizzato dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{S}$ e T caratterizzato dalla proprietà $\mathcal{P}_\mathsf{T}$, si dice **differenza simmetrica** di T da S l'insieme-P definito dalla proprietà

$$\text{“ }\mathcal{P}_\mathsf{S}\text{ e non }\mathcal{P}_\mathsf{T}\ \text{ oppure }\ \mathcal{P}_\mathsf{T}\text{ e non }\mathcal{P}_\mathsf{S}\text{ ”}.$$

Per questo insieme-P e si usa la notazione concisa

(1) $$\mathsf{S}\ominus\mathsf{T}\ :=\ \Big\{x\ \big[\!\big]\ x\in S\wedge x\notin\mathsf{T}\ \vee\ (x\in\mathsf{T}\wedge x\notin\mathsf{S})\Big\}\ .$$

Quindi anche la differenza simmetrica può considerarsi un'operazione binaria tra insiemi-P.

Per questa operazione binaria di insiemi si dimostrano le seguenti proprietà:

$\forall \mathsf{S}\in\mathbf{SetP}\ :\ \mathsf{S}\ominus\mathsf{S}=\emptyset$ (nilpotenza);
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T}\in\mathbf{SetP}\ :\ \mathsf{S}\ominus\mathsf{T}=\mathsf{T}\ominus\mathsf{S}$ (commutatività);
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ \mathsf{S}\setminus(\mathsf{T}\ominus\mathsf{V})=\Big((\mathsf{S}\setminus\mathsf{T})\cup(\mathsf{S}\setminus\mathsf{V})\Big)\,\dot\cup\,(\mathsf{S}\cap\mathsf{T}\cap\mathsf{V})$.
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ (\mathsf{S}\ominus\mathsf{T})\setminus\mathsf{V}=(\mathsf{S}\setminus\mathsf{V})\ominus(\mathsf{T}\setminus\mathsf{V})$;
$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V}\in\mathbf{SetP}\ :\ (\mathsf{S}\ominus\mathsf{T})\ominus\mathsf{V}\ =\ (\mathsf{S}\setminus(\mathsf{T}\cup\mathsf{V}))\,\dot\cup\,(\mathsf{T}\setminus(\mathsf{V}\cup\mathsf{S}))\,\dot\cup\,(\mathsf{V}\setminus(\mathsf{S}\cup\mathsf{T}))$ (associatività) .

Nell'ultima relazione la comparsa della notazione $\dot\cup$ introdotta in c04 consente di affermare che il secondo membro esprime l'unione dei tre insiemi disgiunti ciascuno dei quali contiene gli elementi di uno degli insiemi dati che non appartengono agli altri due.
In questa caratterizzazione i tre insiemi del primo membro risultano evidentemente intercambiabili e quindi possiamo affermare

$$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V} \in \mathbf{SetP} \;:\; (\mathsf{S} \ominus \mathsf{T}) \ominus \mathsf{V} \;=\; (\mathsf{T} \ominus \mathsf{V}) \ominus \mathsf{S} \;=\; (\mathsf{V} \ominus \mathsf{S}) \ominus \mathsf{T}$$

Anche la differenza simmetrica, come l'unione e l'intersezione, è una operazione binaria insiemistica che gode della associatività, oltre che della commutatività. Quindi le tre espressioni precedenti possono essere sostituite dalla più concisa

$$\mathsf{S} \ominus \mathsf{T} \ominus \mathsf{V} \;.$$

Possiamo anche introdurre la definizione

$$\forall \mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{V} \in \mathbf{SetP} \;:\; \mathsf{S} \ominus \mathsf{T} \ominus \mathsf{V} \;:=\; \mathsf{S} \ominus (\mathsf{T} \ominus \mathsf{V}) \;=\; (\mathsf{S} \ominus \mathsf{T}) \ominus \mathsf{V} \;.$$

B19 c.08 Dato un insieme-P S e un ambiente U, anch'esso caratterizzato da una proprietà e quindi che si può considerare un insieme-P, nel quale si possono collocare gli elementi di S, si dice **insieme complementare** di S entro U l'insieme caratterizzato dalla proprietà "essere incluso in U e non osservare $\mathcal{P}_\mathsf{S}$".
Anche questa entità è un insieme-P e per essa si usano le notazioni

$$\complement_\mathsf{U}(\mathsf{S}) \;:=\; \mathsf{S}\complement_\mathsf{U} \;:=\; \{x \in \mathsf{U} \,\big[\!\big]\, x \notin \mathsf{S}\} \;. \tag{1}$$

Potendo sottintendere l'ambiente U, la trasformazione di S nel suo complementare può considerarsi un'operazione unaria applicabile a ogni sottoinsieme-P di U.

Per la complementazione entro l'ambiente U si dimostrano le seguenti proprietà.

(2) Prop.: $\forall \mathsf{S} \subseteq \mathsf{U} \;:\; (\mathsf{S}\complement_\mathsf{U})\complement_\mathsf{U} \;=\; \mathsf{S}$ (carattere involutorio della complementazione) ∎

(3) Prop.: $\emptyset\complement_\mathsf{U} = \mathsf{U} \qquad , \qquad \mathsf{U}\complement_\mathsf{U} = \emptyset$ ∎

(4) Prop.: $\forall \mathsf{S},\mathsf{T} \subseteq \mathsf{U} \;:\; (\mathsf{S} \cup \mathsf{T})\complement_\mathsf{U} \;=\; S\complement_\mathsf{U} \cap \mathsf{T}\complement_\mathsf{U} \;,\; (\mathsf{S} \cap \mathsf{T})\complement_\mathsf{U} \;=\; \mathsf{S}\complement_\mathsf{U} \cup \mathsf{T}\complement_\mathsf{U}$ ∎ (**leggi di De Morgan**)

(5) Prop.: $\forall \mathsf{S},\mathsf{T} \subseteq \mathsf{U} \;:\; \mathsf{T} \setminus \mathsf{S} \;=\; \complement_\mathsf{U}(\mathsf{S}) \cap \mathsf{T}$ ∎

(6) Prop.: $\forall \mathsf{S},\mathsf{T} \subseteq \mathsf{U} \;:\; \mathsf{S} \subseteq \mathsf{T} \iff \complement_\mathsf{U}(\mathsf{S}) \supseteq \complement_\mathsf{U}(\mathsf{T}) \iff \mathsf{S} \cup \mathsf{T} = \mathsf{T} \iff \mathsf{S} \cap \mathsf{T} = \mathsf{S}$ ∎

(7) Prop.: $\forall \mathsf{S},\mathsf{T} \subseteq \mathsf{U} \;:\; \mathsf{S} \cap \mathsf{T} = \emptyset \iff \mathsf{S} \subseteq \complement_\mathsf{U}(\mathsf{T}) \iff \mathsf{T} \subseteq \complement_\mathsf{U}(\mathsf{S})$ ∎

(8) Prop.: $\forall \mathsf{S},\mathsf{T} \subseteq \mathsf{U} \;:\; \mathsf{S} \cup \mathsf{T} = \mathsf{U} \iff \complement_\mathsf{U}(\mathsf{S}) \supseteq (\mathsf{T} \setminus \mathsf{S}) \iff \complement_\mathsf{U}(\mathsf{T}) \supseteq (\mathsf{S} \setminus \mathsf{T})$ ∎

Nei brani espositivi nei quali l'ambiente può essere sottinteso risulta comodo sostituire notazioni come $\complement_\mathsf{U}(\mathsf{S})$ ed $\mathsf{S}\complement_\mathsf{U}$ con le più semplici $\complement(\mathsf{S})$, $\mathsf{S}\complement$ ed $\overline{S}$.

Le operazioni di unione, intersezione, eliminazione, differenza simmetrica e complementazione di insiemi fanno parte delle cosiddette **operazioni booleane sugli insiemi**.

B19 c.09 Agli insiemi-P si estende la regola di dualità vista per gli insiemi-G.

Si consideri un'espressione ben formata avente come operandi alcuni sottoinsiemi X_1, X_2, ..., X_n di un ambiente U, e come operatori $\cap$, $\cup$ e $\complement_\mathsf{U}$, espressione che individuiamo con la scrittura

$$\mathcal{E}\left[\cap, \cup, \complement_\mathsf{U}, X_1, ..., X_n\right] \tag{1}$$

e che chiamiamo **espressione insiemistica booleana**.

Diciamo **espressione duale** in U della espressione $\mathcal{E}$ l'espressione ottenibile sostituendo in questa ogni X_i con il suo complementare in U e scambiando $\cap$ e $\cup$; per essa scriviamo, sottintendendo l'ambiente,

$$\overline{\mathcal{E}}\left[\cap, \cup, \complement, X_1, ..., X_n\right] \;:=\; \mathcal{E}\left[\cup, \cap, \complement, \complement(X_1), ..., \complement(X_n)\right] \tag{2}$$

(3) Prop.: Il complementare in U del sottoinsieme di U fornito da una qualsiasi espressione insiemistica booleana $\mathsf{Y} := \mathcal{E}\left[\cap, \cup, \complement_{\mathsf{U}}, X_1, ..., X_n\right]$ si ottiene come

$$\complement_{\mathsf{U}}(\mathsf{Y}) \;=\; \overline{\mathcal{E}}\left[\cap, \cup, \complement_{\mathsf{U}}, X_1, ..., X_n\right] \quad \blacksquare$$

(4) Prop.: Consideriamo due espressioni insiemistiche booleane

$$\mathcal{E}\left[\cap, \cup, X_1, ..., X_n\right] \quad \text{ed} \quad \mathcal{F}\left[\cap, \cup, X_1, ..., X_n\right] \;.$$

Se esse individuano lo stesso insiem-P $\mathsf{Y} \subseteq \mathsf{U}$, allora le rispettive espressioni duali forniscono il complementare di Y, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left[\cap, \cup, \complement_{\mathsf{U}}, X_1, ..., X_n\right] \;&= \mathcal{F}\left[\cap, \cup, \complement_{\mathsf{U}}, X_1, ..., X_n\right] \implies \\ \overline{\mathcal{E}}\left[\cap, \cup, \complement_{\mathsf{U}}, X_1, ..., X_n\right] \;&= \overline{\mathcal{F}}\left[\cap, \cup, \complement_{\mathsf{U}}, X_1, ..., X_n\right] \end{aligned} \tag{5}$$

$\blacksquare$

Queste considerazioni si possono estendere a espressioni nelle quali compaiono anche le relazioni $\subseteq$, $\supseteq$, $\subset$ e $\supset$; per esse la dualità richiede anche lo scambio di $\subseteq$ con $\supseteq$ e lo scambio di $\subset$ con $\supset$.

B19 c.10 Si dice **insieme delle parti di un insieme-P** S l'insieme-P i cui elementi sono i sottoinsiemi di S.

Il fatto di aver individuato un insieme-P scende direttamente dall'aver data la sua definizione.

L'insieme delle parti di S viene denotato con $\mathfrak{P}(\mathsf{S})$, $\mathsf{S}^{\mathfrak{P}}$ e 2^{S} .

Termini equivalenti a insieme delle parti di S sono: **collezione dei sottoinsiemi** di S, **booleano** di S e potenza di S.

Spesso si devono trattare particolari tipi di sottocollezioni dell'insieme delle parti di un insieme S.
Per la collezione dei sottoinsiemi finiti di S useremo le scritture $\mathfrak{P}_F(\mathsf{S})$ o l'equivalente $\mathsf{S}^{\mathfrak{P}_F}$.
Per la collezione dei sottoinsiemi cofiniti di S, cioè dei sottoinsiemi con complementare finito useremo le scritture $\mathfrak{P}_{cof}(\mathsf{S})$ e $\mathsf{S}^{\mathfrak{P}_{cof}}$.

B19 c.11 Consideriamo un intero positivo $n > 1$ e gli interi $i = 1,\ 2,\ ...n$ e consideriamo inoltre alcuni oggetti matematici a_i e alcuni insiemi-P S_i contrassegnati dai detti interi.

Consideriamo inoltre la coppia (ordinata) costituita da a_1 ed a_2 $\langle a_1, a_2\rangle$. Si osserva che, evidentemente, $\langle a_1, a_2\rangle$ è un oggetto diverso da $\langle a_2, a_1\rangle$ sse $a_1 \neq a_2$ e che ogni coppia $\langle a_1, a_2\rangle$ è diversa dal duetto $\{a_1, a_2\}$ (che si riduce a un singoletto se $a_1 = a_2$).

Si definisce **prodotto cartesiano degli insiemi**-P S_1 ed S_2 l'insieme-P delle coppie la cui prima componente appartiene ad S_1 e la seconda ad S_2:

$$\mathsf{S}_1 \times \mathsf{S}_2 \;:=\; \{\langle a_1, a_2\rangle \,\text{⅋}\, a_1 \in \mathsf{S}_1 \;\wedge\; a_2 \in \mathsf{S}_2\} \;. \tag{2}$$

Anche il prodotto cartesiano è un'operazione binaria tra insiemi-P.

La composizione prodotto cartesiano si può estendere a sequenze costituite da più di due componenti.
Sia $n = 2, 3, 4, ...$ e consideriamo la n-upla $\langle a_1,\ ...,\ a_n\rangle$, cioè la sequenza costituita accostando secondo l'ordine determinato dalla scrittura gli oggetti a_1, a_2, ..., a_n tali che $\forall i \in (\mathrm{n}\,] : a_i \in \mathsf{S}_i$.
Definiamo quindi come **prodotto cartesiano degli** n **insiemi** S_1, S_2, ... ,S_n l'insieme-P delle n-uple

$$\mathsf{S}_1 \times ... \times \mathsf{S}_n \;:=\; \{\langle a_1,\ ...,\ a_n\rangle \;\text{⅋}\; \forall i = 1, 2, ..., n : a_i \in \mathsf{S}_i\} \;.$$

Il fatto di avere un insieme-P discende evidentemente dalla definizione stessa.

Se $\mathsf{S}_1 = ... = \mathsf{S}_n =: \mathsf{S}$ si ha la cosiddetta **potenza cartesiana n-esima** dell'insieme-P S che denotiamo con $\mathsf{S}^{\times n}$; spesso questa notazione si può semplificare nella S^n.

Possiamo definire inoltre

$$\mathsf{S}^{\times 1} := \mathsf{S} \quad \text{e} \quad \mathsf{S}^{\times 0} := \{\mu\} ,$$

in modo da poter identificare gli insiemi-P costituiti dalle potenze cartesiane n-esime di $\mathsf{S}1$ per ogni n intero naturale, ossia gli S^n.

Si dimostra senza difficoltà che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \ : \ \mathsf{S}^{\times m} \times \mathsf{S}^{\times n} = \mathsf{S}^{\times (m+n)} \blacksquare$$

Si possono inoltre definire la **chiusura-cross** di S

$$\mathsf{S}^{\times +} := \bigcup\nolimits^{\cdot}_{n \in \mathbb{P}} \mathsf{S}^{\times n}$$

e la sua estensione **star chiusura di un insieme** S o **insieme delle sequenze** di elementi di S

$$\mathsf{S}^{\times *} := \bigcup\nolimits^{\cdot}_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{S}^{\times n} .$$

Chiaramente le loro stesse definizioni implicano che anche queste entità sono insiemi-P.

B19 d. relazioni-P

B19 d.01 Per ogni $n = 2, 3, 4, ...$ si definisce **relazione-P su n variabili** x_1, x_2,...,x_n che possono assumere valori, risp., negli insiemi-P X_1, X_2,...,X_n ogni sottoinsieme-P del prodotto cartesiano $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times \cdots \times \mathsf{X}_n$.

Per una tale relazione $\boldsymbol{R}$ si può dunque scrivere

$$\boldsymbol{R}\left[x_1, x_2, ..., x_n \right] \ \subseteq \ \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times \cdots \times \mathsf{X}_n \ . \tag{1}$$

Una relazione della forma precedente viene chiamata più precisamente **relazione-P n-aria**.

Il prodotto cartesiano $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times \cdots \times \mathsf{X}_n$ si chiama **terreno della relazione**. e per segnalare il suo ruolo rispetto alla $\boldsymbol{R}$ si scrive $\mathsf{SetY}(\boldsymbol{R})$.

La negazione della precedente relazione $\boldsymbol{R}$ è data da

$$\neg\boldsymbol{R} \ := \ \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n \ \setminus \ \boldsymbol{R} \ ; \tag{2}$$

anch'essa è una relazione-P n-aria.

Per descrivere la situazione espressa dall'enunciato $\left\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \right\rangle \in \boldsymbol{R}$ si dice che per la la n-upla $\left\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \right\rangle$ la relazione $\boldsymbol{R}$ è vera, oppure che la relazione $\boldsymbol{R}$ è resa valida dalla n-upla $\left\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \right\rangle$.

Per la totalità delle relazioni facenti parte del terreno $\mathsf{X} := \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times \cdots \times \mathsf{X}_n$ si adotta la notazione

$$\mathsf{RelP}_{\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_n} \ := \ \left\{ \boldsymbol{R} \subseteq \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n \ \P \ \ \boldsymbol{R} \in \mathsf{SetP} \right\}$$

Per la totalità delle relazioni n-arie, quale che sia il suo terreno, si usa RelP_n.

B19 d.02 La gran parte delle considerazioni generali sopra le relazioni riguardano quelle su due argomenti, cioè le relazioni binarie.

Infatti a due relazioni binarie si può ricondurre una qualsiasi relazione ternaria $\boldsymbol{R}\left[x, y, z \right]$.
La proprietà "quale che sia x $:$ $\boldsymbol{R}\left[x, y, z \right]$" definisce la relazione binaria entro y e z che risulta vera sse $\boldsymbol{R}\left[x, y, z \right]$ è vera per ogni valore di x.
A sua volta la proprietà "esiste x tale che $\boldsymbol{R}\left[x, y, z \right]$" definisce la relazione binaria entro y e z che risulta vera sse $\boldsymbol{R}\left[x, y, z \right]$ è vera per almeno un valore di x.

La importanza prevalente delle relazioni-P binarie induce in genere a trascurare l'aggettivo "binarie" e a chiamarle semplicemente "relazioni-P".
Per denotare l'insieme delle relazioni-P binarie useremo quindi la semplice notazione RelP.

Osserviamo anche che potremmo limitarci a considerare le relazioni aventi come terreno un quadrato cartesiano della forma $A \times A$.
Infatti una relazione $\boldsymbol{R}$ contenuta in un prodotto cartesiano $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ si può considerare sottoinsieme di $(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) \times (\mathsf{X} \cup \mathsf{Y})$.

Occorre tuttavia tenere presente che questo secondo punto di vista può risultare svantaggioso rispetto al primo in quanto sminuisce la peculiarità degli insiemi X e Y.

Una relazione considerata come sottoinsieme di $A \times A$ si dice **relazione entro l'insieme** A.

In talune circostanze accade, all'opposto, che si trova qualche vantaggio nel sostituire lo studio di una $\boldsymbol{R} \subseteq \mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ con X e Y comprendenti elementi comuni attraverso l'introduzione di un insieme Y' privo di elementi in comune con X, cioè tale che $\mathsf{Y}' \diamondsuit \mathsf{X}$ e tale che sia nota una biiezione $\beta \in \left\lceil \mathsf{Y} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \mathsf{Y}' \right\rceil$, procedendo all'esame della relazione $\boldsymbol{R}' \ := \ \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \ :| \ \langle x, \beta(y) \rangle \right\}$.

Si dice **identità** o **relazione ovvia** entro X la relazione

$$\mathsf{Id}_{\mathsf{X}} \;:=\; \Big\{ x \in \mathsf{X} \;:|\; \langle x, x\rangle \Big\} \;. \tag{1}$$

Questa relazione viene detta anche **diagonale del quadrato cartesiano** $\mathsf{X} \times \mathsf{X}$ e, prevedibilmente, viene denotata con diag(X).
Quando si può considerare sottinteso che si parla dell'ambiente X essa viene spesso individuata con il semplice segno di uguaglianza "=".

Chiamiamo **diversità** entro X la negazione della identità entro X

$$\mathsf{X} \times \mathsf{X} \setminus \mathsf{Id}_{\mathsf{X}} \;=\; \Big\{ \langle x, y\rangle \in \mathsf{X} \times \mathsf{X} \;⟦\; x \neq y \Big\} \;. \tag{2}$$

Quando si può sottintendere che ci si trova nell'ambiente X, la diversità viene individuata con il semplice segno di disuguaglianza "$\neq$".

B19 d.03 Consideriamo una relazione-P binaria $\boldsymbol{R} \subseteq \mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ e conveniamo di usare la lettera x per la generica variabile in X e la lettera y per la generica variabile in Y.
Accettata e sottintesa questa convenzione può risultare convenien individuare la $\boldsymbol{R}$ con la scrittura $\boldsymbol{R}\big[x, y\big]$.

Si dice **prima proiezione** o **dominio della relazione** $\boldsymbol{R}$ l'insieme

$$\mathsf{dom}(\boldsymbol{R}) \;:=\; \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;=\; \Big\{ x \;⟦\; \exists y \;⟦\; \boldsymbol{R}\big[x, y\big] \Big\} \;. \tag{1}$$

Si dice **seconda proiezione** o **codominio della relazione** $\boldsymbol{R}$ l'insieme

$$\mathsf{cod}(\boldsymbol{R}) \;:=\; \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \;=\; \Big\{ y \;⟦\; \exists x \;⟦\; \boldsymbol{R}\big[x, y\big] \Big\} \;. \tag{2}$$

$\boldsymbol{Prj}2(\boldsymbol{R})$
Dunque ogni relazione binaria $\boldsymbol{R}$ si può considerare un sottoinsieme del prodotto cartesiano delle sue due proiezioni:

$$\boldsymbol{R} \;\subseteq\; \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \;. \tag{3}$$

A questo punto appare evidente come si possono estendere alle relazioni sopra ed entro arbitrari insiemi-P le considerazioni su dominio e codominio che avevamo svolte per le relazioni sopra ed entro insiemi finiti e sopra ed entro insiemi-G.

Diciamo invece **tirannia sul dominio** della relazione-P $\boldsymbol{R}$ l'insieme-P

$$\mathsf{Tyrny}_{dom}(\boldsymbol{R}) \;:=\; \Big\{ x \;⟦\; \forall y \in \mathsf{cod}(\boldsymbol{R}) \;:\; \boldsymbol{R}\big[x, y\big] \Big\} \;. \tag{4}$$

Per dualità-LR diciamo **tirannia sul codominio** della $\boldsymbol{R}$ l'insieme-P

$$\mathsf{Tyrny}_{cod}(\boldsymbol{R}) \;:=\; \Big\{ y \;⟦\; \forall x \;:\; \boldsymbol{R}\big[x, y\big] \Big\} \;. \tag{5}$$

Si osserva che per gran parte delle relazioni-P dotate di interesse questi insiemi-P sono piuttosto ridotti.
Inoltre se $\boldsymbol{R}_1$ e $\boldsymbol{R}_2$ sono relazioni-P si trovano le seguenti relazioni-P:

$$\boldsymbol{R}_1 \subseteq \boldsymbol{R}_2 \implies \forall w \in \{dom, cod\} \;:\; \mathsf{Tyrny}_w(\boldsymbol{R}_1) \subseteq \mathsf{Tyrny}_w(\boldsymbol{R}_2) \blacksquare$$

B19 d.04 Per ogni $x \in \mathsf{dom}(\boldsymbol{R})$ si dice **taglio verticale di una relazione** $\boldsymbol{R}$ relativo al valore x della prima variabile l'insieme

$$\boldsymbol{R}\big|_{x,*} \;:=\; \{y \in \mathsf{cod}(\boldsymbol{R}) \;⟦\; \langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\} \;. \tag{1}$$

Per dualità-LR per ogni $y \in \mathsf{cod}(\boldsymbol{R})$ si dice **taglio orizzontale di una relazione $\boldsymbol{R}$** relativo al valore y della seconda coordinata y l'insieme

$$\boldsymbol{R}\big|_{*,y} \;:=\; \{x \in \mathsf{dom}(\boldsymbol{R}) \,\big[\!\big]\, \langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\} \;. \tag{2}$$

Ora ci serviremo di alcuni aspetti della nozione di funzione-P alla quale è dedicata la successiva sezione :e, ritenendo che la loro somiglianza con aspetti già incontrati per le funzioni finite e le funzioni-G rendano tutto comprensibile.

Si osserva che una relazione-P $\boldsymbol{R}$ consente di individuare due funzioni

$$\lceil\!\lceil\, x \in \mathsf{dom}(\boldsymbol{R}) \;\mapsto\; \boldsymbol{R}\big|_{x*} \,\rceil\!\rceil \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{dom}(\boldsymbol{R}) \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{P}(\mathsf{cod}(\boldsymbol{R})) \,\rceil\!\rceil \quad \text{e} \tag{3}$$

$$\lceil\!\lceil\, y \in \mathsf{cod}(\boldsymbol{R}) \;\mapsto\; \boldsymbol{R}\big|_{y*} \,\rceil\!\rceil \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{cod}(\boldsymbol{R}) \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{P}(\mathsf{dom}(\boldsymbol{R})) \,\rceil\!\rceil \;. \tag{4}$$

Evidentemente le corrispondenze individuate sono due funzioni-P.

Il precedente scenario si può osservare da un altreo punto di vista

Consideriamo due insiemi-P X e Y e le funzioni-P della forma

$$H = \lceil\!\lceil\, x \in \mathsf{X} \;\mapsto\; \mathcal{H}(x) \,\rceil\!\rceil \;\in\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{X} \lhook\joinrel\longrightarrow \mathfrak{P}(\mathsf{Y}) \,\rceil\!\rceil \;,$$

nella quale abbiamo distinto la funzione H da una espressione $\mathcal{H}$ in grado di individuarla.

Ciascuna di queste funzioni può essere posta in biiezione con la relazione-P che chiamiamo la sua relazione associata,

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \,\big[\!\big]\, y \in H(x)\} \;.$$

B19 d.05 Si dice **trasposta di una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$** la relazione-P

$$\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \;:=\; \Big\{\langle y, x\rangle \in \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \times Prj_1(\boldsymbol{R}) \,\big[\!\big]\, \boldsymbol{R}\big[\,x, y\,\big]\Big\} \;. \tag{1}$$

In alternativa di trasposta si usa anche il termine riflessa e reciproca.

Chiaramente la trasposizione è un'involuzione, cioè

$$\forall \boldsymbol{R} \in \mathbf{Rel} \;:\; (\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \;=\; \boldsymbol{R} \;. \tag{2}$$

Consideriamo due relazioni-P binarie $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$. Si dice **prodotto di composizione di due relazioni** o anche **prodotto di Peirce di due relazioni** di $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{S}$ la relazione

$$\boldsymbol{R} \circ_{lr} \boldsymbol{S} \;:=\; \Big\{\langle x, z\rangle \,\big[\!\big]\, \exists y \,\big[\!\big]\, \boldsymbol{R}\big[\,x, y\,\big] \wedge \boldsymbol{S}\big[\,y, z\,\big]\Big\} \;. \tag{1}$$

Chiaramente

$$\boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R} \circ_{lr} \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \qquad , \qquad \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R} \circ_{lr} \boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{S}) \;. \tag{2}$$

È anche evidente che

$$\mathsf{cod}(\boldsymbol{R}) \cap \mathsf{dom}(\boldsymbol{S}) = \emptyset \implies \boldsymbol{R} \circ_{lr} \boldsymbol{S} = \emptyset \;.$$

Applicando la trasposizione al prodotto di Peirce di due relazioni-P $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{S}$ si ottiene

$$(\boldsymbol{R} \circ_{lr} \boldsymbol{S})^{\mathsf{T}} \;=\; (\boldsymbol{S}^{\mathsf{T}}) \circ_{lr} (\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}) \;. \tag{3}$$

B19 d.06 Riprendiamo i principali tipi di relazioni binarie trattate in B16b e in B18d [v.a. B53].

Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P riflessiva** sse

$$\boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;=\; \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \quad \text{e} \quad \forall x \in \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \,:\, \boldsymbol{R}\big[\,x, x\,\big] \;. \tag{1}$$

Entro qualsiasi terreno l'identità e ogni sottoinsieme dell'identità, in particolare la relazione assurda, sono relazioni riflessive.

Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P antiriflessiva** sse

$$\boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;=\; \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \quad \text{e} \quad \forall x \in \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;:\; \neg \boldsymbol{R}\left[x, x\right] \;. \tag{2}$$

Quindi una relazione $\boldsymbol{R}$ è antiriflessiva sse è disgiunta dalla relazione diagonale $\mathsf{Id}\,(\mathsf{dom}(\boldsymbol{R}) \cap \mathsf{cod}(\boldsymbol{R}))$. In altro modo una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P antiriflessiva** sse non contiene alcuna coppia con componenti uguali.

Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P simmetrica** sse

$$\boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;=\; \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{R} \;=\; \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \;. \tag{3}$$

ovvero sse

$$\boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;=\; \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \quad \text{e} \quad \forall x, y \in \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \;:\; \boldsymbol{R}\left[x, y\right] \implies \boldsymbol{R}\left[y, x\right] \;. \tag{4}$$

L'identità e la diversità su X sono particolari relazioni simmetriche.

Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P antisimmetrica** sse

$$\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \subseteq \mathsf{Id}_{Prj_1(\boldsymbol{R})} \;. \tag{5}$$

ovvero sse

$$\forall \langle x, y\rangle \in \boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{R}) \;:\; \boldsymbol{R}\left[x, y\right] \wedge \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\left[x, y\right] \implies x = y \;. \tag{6}$$

La relazione-P tra insiemi-P $\subseteq$ è una particolare relazione-P antisimmetrica.

B19 d.07 Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P transitiva** sse

$$\boldsymbol{R}\left[x, y\right] \wedge \boldsymbol{R}\left[y, z\right] \implies \boldsymbol{R}\left[x, z\right] \;. \tag{1}$$

Le relazioni tra insiemi $\subseteq$ e *subset* e le relazioni numeriche $\leq$ e $<$ sono relazioni transitive.

La trasposta di una relazione transitva è una relazione transitiv, come si constata trasponendo l'implicazione che definisce le relazioni transitive. Quindi sono relazioni transitive anche *supseteq*, *supset*, $\geq$ e $>$.

Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **equivalenza-P** sse è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempi di relazioni di equivalenza-P entro insiemi-P non necessariamente costruibili sono:

il differire per un addendo intero dei numeri reali;

la congruenza tra i triangoli del piano o più in generale la congruenz tra le figure nel piano e la congruenza tra le figure isolide.

la similarità tra coniche aventi la stessa eccentricità.

Le equivalenze saranno esaminate su un piano generale con una certa ampiezza insieme alle partizioni, entità loro strettamente associate, in B54b.

Conviene osservare che la relazione di equivalenza viene introdotta per coppie di entità $\langle \alpha, \beta\rangle$ che si collocano in uno stesso ambiente U e che la constatazione di una equivalenza tra una α e una β viene utilizzata spesso per giustificare la sostituzione in adeguati contesti della α con la β.
In particolare risulta conveniente trasformare le proprietà di una entità in proprietà di ciascuna delle entità dimostrate sue equivalenti.

Inoltre sarà utile confrontare la nozione di equivalenza con la relazione chiamata isomorfismo riguardante due entità omogenee aventi comportamenti molto simili e con la relazione chiamate criptomorfismo, relazione che associa due entità di natura diversa, cioè collocate in ambienti diversi, le quali si rivelano logicamente intercambiabili o conoscitivamente equivalenti.

In particolare si individuerà un criptomorfismo tra relazioni di equivalenza e partizioni di insiemi [B54b02].

B19 d.08 Una relazione-P binaria $\boldsymbol{R}$ si dice **relazione-P d'ordine** sse è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. La relazione tra insiemi $\subseteq$ è anche una relazione-P d'ordine.

Esempi di relazioni-P d'ordine sono la relazione $\leq$ tra numeri reali, la relazione di ordine lessicografico tra i punti del piano reale o dello spazio sui reali e la relazione di dominanza tra funzioni-RtR.

Le relazioni d'ordine in generale saranno esaminate con una certa ampiezza in B55.

Si osserva che, mentre le relazioni di equivalenza presentano una struttura complessiva facilmente comprnsibile e classificabile in quanto riconducibile ad una partizione dell'insieme entro il quale sono definite, viceversa si incontra una grande varietà di relazioni d'ordine.

In particolare si distinguono le relazioni d'ordine totale, tali che per ogni loro coppia di membri diversi accade che aut il primo precede il secondo aut viceversa (cioè tali che due elementi diversi ponibili in relazione sono sempre comparabili), dalle relazioni nelle quali si trovano coppie di membri noncomparabili.

Tra gli esempi dati in precedenza solo l'ordinamento dei numeri reali è un ordine totale.
Si constata che riducendo un terreno di una relazione d'ordine a un suo sottoinsieme qualsiasi si ottiene una relazione d'ordine più ridotta; in particolare riducendo il terreno di un ordine totale si ottiene un ordine totale più ridotto.

B19 e. funzioni-P

B19 e.01 Per **relazione-P funzionale** dall'insieme-P D nell'insieme-P C si intende una relazione-P f con $\boldsymbol{Prj}_1(f) \subseteq D$ e $\boldsymbol{Prj}_2(f) \subseteq C$ tale che a un elemento di D può associare al più un elemento di C.
Questo insieme-P di coppie appartenenti a $D \times C$ si dice anche **funzione-P** da D in C.

Denotiamo con $\lceil D \longrightarrow C \rceil$ l'insieme-P delle funzioni da D in C.

Una $f \in \lceil D \longrightarrow C \rceil$ viene anche chiamata **trasformazione**, **applicazione** o **mappa** da D in C. ;T B19e01

Come per le relazioni, si dice **dominio** o coimmagine della f l'insieme-P $\mathsf{dom}(f) := \mathrm{coim}(f) := \boldsymbol{Prj}_1(f)$, mentre si dice **codominio** o immagine della f l'insieme-P $\mathsf{cod}(f) := \mathrm{img}(f) := \boldsymbol{Prj}_2(f)$.

Se si conviene di usare la lettera x per rappresentare la variabile i cui valori appartengono all'insieme D, una funzione f avente D come dominio può essere individuata dalla scrittura della forma $f(x)$, scrittura che, lo ripetiamo, dipende da quanto si è convenuto sulla x.

Al termine "funzione" si attribuisce il significato di manovra, di azione o di meccanismo in grado di trasformare un valore della variabile indipendente x nel valore $f(x)$ appartenente al codominio della funzione stessa.

Le definizioni e le notazioni precedenti sono estensioni, risp., delle definizioni e delle notazioni omonime introdotte per le funzioni-G.
In effetti la portata delle funzioni-P vuole essere più ampia della portata delle funzioni-G in quanto richiede solo la possibilità di caratterizzare le coppie $\langle x, f(x) \rangle$ con una proprietà alla quale si chiede solo di essere espressa in modo accurato e condivisibile.

B19 e.02 Similmente a quanto è stato fatto per le funzioni finite in B13b, si definiscono i vari generi di funzioni-P e le notazioni per i corrispondenti insiemi.

Rer questo facciamo riferimento alla funzione-P $f \in \lceil D \longrightarrow C \rceil$.

Se $\mathsf{dom}(f) = D$ la f si dice funzione-P di D, ovvero dall'intero D, in C.
L'insieme delle funzioni di D in C si denota con $\lceil D \longmapsto C \rceil$.

La f si dice **funzione-P suriettiva** o **suriezione** da D su C sse $\boldsymbol{Prj}_2(f) = C$.

L'insieme delle funzion-P suriettive da D su C si denota con $\lceil D \longrightarrow\!\!\triangleright C \rceil$.

A sua volta l'insieme delle funzioni-P suriettive di D (cioè dall'intero D) su C si denota con $\lceil D \longmapsto\!\!\triangleright C \rceil$.

La f si dice **funzione-P iniettiva** o **iniezione-P** da D in C sse $\forall x_1, x_2 \in \mathsf{dom}(f) \ : \ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
L'insieme delle funzioni-P iniettive da D in C si denota con $\lceil D \longleftrightarrow C \rceil$.

La f è funzione-P iniettiva sse la relazione trasposta della f, cioè la $f^\top := \{x \in \mathsf{dom}(f) :| \langle f(x), x \rangle\}$ è funzionale.

Le funzioni iniettive sono chiamate anche **funzioni invertibili** e la relazione $f^\top$ viene chiamata più precisamente **funzione inversa** della f e viene denotata con f^{-1} .

Anche la funzione inversa di una funzione-P va considerata una funzione-P.

L'insieme delle funzioni-P iniettive di D (cioè dall'intero D) in C si denota con $\lceil D \longleftrightarrow C \rceil$.

L'insieme delle funzioni iniettive da D su C (ossia delle funzioni iniettive e suriettive da D su C) si denota con $\lceil D \longleftrightarrow\!\!\triangleright C \rceil$.

La funzione f si dice **funzione-P biiettiva** o **biiezione-P** di D su C sse è iniettiva dall'intero D e suriettiva sull'intero C.
L'insieme delle biiezioni-P di D su C si denota con $\lceil D \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd C \rceil$.

Per enunciare che una f appartiene a un insieme $\lceil D \longrightarrow C \rceil$ diremo anche che f appartiene al **genere di funzioni** $\lceil D \longrightarrow C \rceil$.
Similmente parleremo di funzioni del genere $\lceil D \longmapsto C \rceil$, del genere $\lceil D \longrightarrow\!\!\rhd C \rceil$, del genere $\lceil D \longmapsto\!\!\rhd C \rceil$, del genere $\lceil D \longleftrightarrow C \rceil$, del genere $\lceil D \lhd\!\!\longrightarrow C \rceil$, del genere $\lceil D \longleftarrow\!\!\rhd C \rceil$ e del genere $\lceil D \lhd\!\!\longleftarrow \rhd C \rceil$.

B19 e.03 Consideriamo una funzione-P $f \in \lceil D \longrightarrow C \rceil$; si dice **estensione booleana della funzione** f la funzione

$$f^{be} \;:=\; \lceil X \subseteq D \mapsto \{x \in D :| f(x)\} \rceil \;. \tag{1}$$

Chiaramente $f^{be} \in \lceil \mathfrak{P}(D) \longrightarrow \mathfrak{P}(C) \rceil$ e va considerata una funzione-P.

Spesso il contesto consente di semplificare la notazione f^{be} con la f stessa. Anche questa semplificazione sarà adottata quando si ritiene di non rischiare di generare ambiguità.

Per le funzioni estensioni booleane si trovano le proprietà che seguono.

(2) Prop.: $\forall S \subseteq T \subseteq D \;:\; f(S) \subseteq f(T)$ ∎

(3) Prop.: $S \subseteq D \wedge S \neq \emptyset \iff f(S) \neq \emptyset$ ∎

(4) Prop.: $f(S \cup T) \;=\; f(S) \cup f(T)$ ∎

(5) Prop.: $f(S \cap T) \;\subseteq\; f(S) \cap f(T)$ ∎

Si osserva che può accadere che $S \cap T = \emptyset$, mentre $f(S) \cap f(T) \neq \emptyset$.

B19 e.04 Consideriamo la generica funzione-P $f \in \lceil D \longrightarrow C \rceil$ e un $Y \subseteq C$; definiamo inoltre **immagine reciproca di un insieme** di Y ottenibile dalla f la relazione tra D e C

$$f^{\intercal}(E) \;:=\; \Big\{ x \in D \;\big|\; f(x) \in Y \Big\} \;.$$

Questa relazione può essere considerata una applicazione da $\mathfrak{P}(C)$ in $\mathfrak{P}(D)$ e può chiamarsi **estensione reciproca di una funzione** f agli insiemi delle parti, risp., del codominio e del dominio.
Anch'essa va considerata una relazione-P.

Consideriamo un insieme $f^{\intercal}(\{y\})$ ricavato da un elemento $y \in \mathsf{cod}(f)$, ossia consideriamo l'insieme degli $x \in \mathsf{dom}(f)$ tali che $f(x) = y$.
In genere la sua espressione si può semplificare nella notazione $f^{\intercal}(y)$.

Consideriamo un $S \subseteq D$; si dice **applicazione canonica** di S in D la funzione $\lceil s \in S \mapsto s \rceil$; essa chiaramente è una iniezione-P di S in D.

Per **traccia di un insieme-P** $S \subseteq D$ sullo stesso D si intende l'immagine reciproca di S fornita dall'applicazione canonica di S in D.

B19 e.05 Consideriamo ancora la generica funzione-P $f \in \lceil D \longrightarrow C \rceil$.

(1) Prop.: $\forall Y_1, Y_2 \subseteq C \;:\; Y_1 \subseteq Y_2 \implies f^{\intercal}(Y_1) \subseteq f^{\intercal}(Y_2)$ ∎

(2) Prop.: $\forall Y_1, Y_2 \subseteq C \;:\; f^{\intercal}(Y_1 \cup Y_2) \;=\; f^{\intercal}(Y_1) \cup f^{\intercal}(Y_2)$ ∎

(3) Prop.: $\forall Y_1, Y_2 \subseteq C \;:\; f^{\intercal}(Y_1 \cap Y_2) \;=\; f^{\intercal}(Y_1) \cap f^{\intercal}(Y_2)$ ∎

(4) Prop.: $\forall Y \subseteq C \;:\; f^{\mathsf{T}}(\complement(Y)) \;=\; \complement(f^{\mathsf{T}}(Y)$ ∎

(5) Prop.: Se $f \in \lceil\!\lceil D \longmapsto C \rceil\!\rceil$, allora $\forall X_1, X_2 \subseteq D \;:\; f(X_1 \cap X_2) \;=\; f(X_1) \cap f(X_2)$ ∎

(6) Prop.: Se $f \in \lceil\!\lceil D \lhd\!\longrightarrow\!\rhd C \rceil\!\rceil$, allora
$y = f(x)$ e $x = f^{\mathsf{T}}(y)$ sono relazioni equivalenti come proprietà: $y = f(x) \iff x = f^{\mathsf{T}}(x)$ ∎
$\forall X \subseteq D \;:\; f(\complement_D(X)) \;=\; \complement_C f(X)$ ∎
$f^{be} \in \lceil\!\lceil \mathfrak{P}(D) \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathfrak{P}(C) \rceil\!\rceil$ ∎

Diciamo **quaterna di biunivocità** una lista $\langle D, C, f, g \rangle$, dove D e C sono insiemi-P, $f \in \lceil\!\lceil D \lhd\!\longrightarrow\!\rhd C \rceil\!\rceil$, $g := f^{\mathsf{T}} \in \lceil\!\lceil C \lhd\!\longrightarrow\!\rhd D \rceil\!\rceil$ ed f e g sono funzioni-P.

B19 e.06 **(1) Prop.**: Consideriamo la funzione-P $f \in \lceil\!\lceil D \longrightarrow C \rceil\!\rceil$ e gli insiemi-P $X \subseteq D$ e $Y \subseteq C$.
$f^{\mathsf{T}}(Y) \;=\; f^{\mathsf{T}}(Y \cap f(D))$;
$X \subseteq f^{\mathsf{T}}(f(X))$;
$f(f^{\mathsf{T}}(Y) = Y$ ∎

(2) Prop.: Sono equivalenti le proprietà $f \in \lceil\!\lceil D \longrightarrow\!\rhd C \rceil\!\rceil$ e $\forall Y \subseteq C \;:\; f(f^{\mathsf{T}}(Y) = Y$ ∎

(3) Prop.: Sono equivalenti le proprietà $f \in \lceil\!\lceil D \longleftrightarrow C \rceil\!\rceil$ e $\forall X \subseteq D \;:\; f^{\mathsf{T}}(f(X)) = X$ ∎

(4) Prop.: Sono equivalenti la proprietà $f \in \lceil\!\lceil D \longleftarrow\!\rhd C \rceil\!\rceil$ e la proprietà
$$\big(\forall X \subseteq D \;:\; f^{\mathsf{T}}(f(X)) = X\big) \;\wedge\; \big(\forall Y \subseteq C \;:\; f(f^{\mathsf{T}}(Y) = Y\big)$$ ∎

B19 e.07 Si dice funzione-P multivariata una funzione-P cha ha come dominio un prodotto cartesiano di insiemi-P. In particolare le funzioni-P bivariate hanno come dominio il prodotto cartesiano di due insiemi-P e le funzioni-P trivariate hanno come dominio il prodotto cartesiano di tre insiemi-P.

Diciamo **operazione-P binaria** una operazione binaria che come funzione bivariata viene considerata una funzione-P.

Consideriamo quattro insiemi-P (non necessariamente diversi) D, C, B ed A e le tre funzioni-P $f \in \lceil\!\lceil D \longrightarrow C \rceil\!\rceil$, $g \in \lceil\!\lceil C \longrightarrow B \rceil\!\rceil$ ed $h \in \lceil\!\lceil B \longrightarrow A \rceil\!\rceil$.

Si dice **funzione composta** o **prodotto di Peirce di due funzioni** f e g la funzione:

$$f \circ_{lr} g \;:=\; \lceil\!\lceil x \in D \mapsto g(f(x)) \rceil\!\rceil \in \lceil\!\lceil D \longrightarrow B \rceil\!\rceil \;. \tag{1}$$

Questa applicazione va considerata una funzione-P, mentre l'operazione binaria $\circ_{lr}$ che l'ha prodotta si qualifica come una operazione-P; essa è associativa e in genere è noncommutativa.

B19 e.08 Consideriamo ancora un insieme-P D.
Le funzioni-P di $\lceil\!\lceil D \longrightarrow D \rceil\!\rceil$ si dicono **endofunzioni-P** entro D. Il loro insieme-P $\lceil\!\lceil D \longrightarrow D \rceil\!\rceil$ si denota anche con $\mathbf{Endo}_D$.

In particolare si hanno le **endofunzioni iniettive** entro D, cioè le funzioni facenti parte di $\lceil\!\lceil D \longleftrightarrow D \rceil\!\rceil$ e le **endofunzioni suriettive** entro D, cioè le funzioni facenti parte di $\lceil\!\lceil D \longrightarrow\!\rhd D \rceil\!\rceil$.

Una endofunzione-P iniettiva nonsuriettiva è: $\lceil\!\lceil n \in \mathbb{Z} \mapsto 2\,n \rceil\!\rceil$.
Una endofunzione-P noniniettiva nonsuriettiva è: $\left\lceil\!\left\lceil n \in \mathbb{N} \mapsto 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rceil\!\right\rceil$.
Una endofunzione-P noniniettiva suriettiva è: $\left\lceil\!\left\lceil n \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rceil\!\right\rceil$.
Un'altra endofunzione-P noniniettiva suriettiva: $\left\lceil\!\left\lceil n \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor 3 + n\%3 \right\rceil\!\right\rceil \;=$

$$\left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & \cdots \end{matrix} \right\downarrow .$$

Si osservi che abbiamo segnalate endofunzioni-P appartenenti a $\lceil\, D \triangleleft\!\longrightarrow\, D \,\rceil \setminus \lceil\, D \triangleleft\!\longrightarrow\!\triangleright D \,\rceil$ ed endofunzioni-P appartenenti a $\lceil\, D \longmapsto\!\triangleright\, D \,\rceil \setminus \lceil\, D \triangleleft\!\longrightarrow\!\triangleright D \,\rceil$.

Ancor più particolari sono le **endofunzioni-P biiettive** entro D, ossia le endofunzioni entro D iniettive e suriettive, cioè le funzioni facenti parte di $\lceil\, D \triangleleft\!\longrightarrow\!\triangleright D \,\rceil$.

Esse si dicono anche **permutazioni dell'insieme** D e il loro insieme si denota con Perm_D.

Esempi di tali funzioni sono: $\lceil\, n \in \mathbb{N} \lceil\, n + (-1)^n \,\rceil\,\rceil$, $\lceil\, n \in \mathbb{Z} \mapsto n + k \,\rceil$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$,
per ogni $h \in \mathbb{P}$ $\lceil\, n \in \mathbb{N} \lceil\, h\, \lfloor \frac{h}{4} \rfloor + h - 1 - n\%h \,\rceil\,\rceil$, che per $h = 4$ risulta

$$\left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \cdots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 & 19 & \cdots \end{matrix} \right\downarrow .$$

B19 e.09 Una endofunzione-P $f \in \lceil\, D \longmapsto D \,\rceil$ si dice **involuzione-P** entro D sse è una biiezione-P e $f = f^{-1}$, ovvero $f \circ_{lr} f = \mathsf{Id}_D$.

In geometria si incontrano molte interessanti involuzioni: per esempio le riflessioni rispetto a rette o rispetto a piani, simmetrie centrali e trasformazioni polari.

Una endofunzione-P $f \in \lceil\, D \longmapsto D \,\rceil$ si dice **funzione idempotente** sse $f \circ_{lr} f = f$.
Esempi di funzioni-P idempotenti in geometria sono le varie proiezioni ortogonali su rette o su piani.

Se $f \in \lceil\, D \longmapsto D \,\rceil$, un sottoinsieme-P del suo dominio S si dice **insieme stabile** per la f sse $f(S) \subseteq S$.

Per esempio consideriamo il numero intero positivo h maggiore di 1 e l'endofunzione suriettiva nonbiettiva

$$\lceil\, n \in \mathbb{N} \lceil\, \lfloor n/h \rfloor \,\rceil\,\rceil \in \lceil\, \mathbb{N} \longmapsto\!\triangleright\, \mathbb{N} \,\rceil \setminus \lceil\, \mathbb{N} \triangleleft\!\longrightarrow\!\triangleright \mathbb{N} \,\rceil .$$

La collezione degli insiemi stabili per questa endofunzione è costituita dalla collezione degli intervalli $[0 : n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

B19 e.10 Consideriamo una funzione-P $f \in \lceil\, D \longmapsto C \,\rceil$ e un sottoinsieme-P del suo dominio $S \subseteq D$. Si dice **restrizione di una funzione** f ad S la funzione-P

$$f_{|S} \;:=\; \lceil\, x \in S \mapsto f(x) \,\rceil \;=\; f \cap S \times C \,. \tag{1}$$

Equivalentemente la funzione f si può chiamare **prolungamento** o l'**estensione** da S a D della $f_{|S}$.

Si osserva che la restrizione $f_{|S}$ si può considerare la composizione della applicazione canonica di S in E con la f.

$$f_{|S} \;=\; \lceil\, x \in S \mapsto x \,\rceil \circ_{lr} f \,. \tag{2}$$

In alcune circostanze una funzione-P $f \in \lceil\, D \longleftarrow\!\triangleright C \,\rceil$ viene chiamata **rappresentazione parametrica** di C mediante D. In tal caso si dice che D può fornire l'insieme-P dei parametri per questa rappresentazione.

B19 f. cardinali degli insiemi

B19 f.01 Due insiemi-P S e T si dicono essere **insiemi-P equicardinali** sse esiste una biiezione di S su T, ossia sse $\lceil\, S \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd T \,\rceil \neq \emptyset$. In questa situazione si dice che tra i due insiemi S e T sussiste la relazione di **equicardinalità**. La suddetta biiezione va considerata una biiezione-P e la equicardinalità va considerata una relazione-P.

L'equicardinalità è una relazione di equivalenza: infatti è evidente che sia una relazione riflessiva e simmetrica e per la transitività basta osservare che se S, T e V sono insiemi per i quali esistono le biiezioni $\beta \in \lceil\, S \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd T \,\rceil$ e $\gamma \in \lceil\, T \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd V \,\rceil$, allora la composizione $\beta \circ_{lr} \gamma$ costiuisce una biiezione appartenente e $\lceil\, S \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd V \,\rceil$.

Consideriamo un insieme-P S e la collezione di tutti gli insiemi-P equicardinali con S, ossia la classe della equivalenza equicardinalità comprendente S; anch'essa è un insieme-P.

Essa va considerata un insieme-P, viene chiamata **numero cardinale** di S e viene denotata equivalentemente con $\mathrm{card}(S)$, $|S|$, $S^{\#}$ e $\#(S)$.
In seguito in genere abbreviamo il termine "numero cardinale" con **cardinale**; come sinonimi di cardinale si usano anche i termini cardinalità, numerosità e **numero degli elementi** .

Affermare che due insiemi-P S e T hanno lo stesso cardinale, ovvero che si possono porre in biiezione, si esprime con l'uguaglianza $\mathrm{card}(S) = \mathrm{card}(T)$ o con una delle scritture equivalenti $|S| = |T|$, $S^{\#} = T^{\#}$ e $\#(S) = \#(T)$.

Evidentemente le definizioni di equicardinalità e di cardinale estendono le nozioni con tali nomi definite per gli insiemi finiti e gli insiemi-G.

Si osserva anche che la relazione di equicardinalità è l'equivalenza canonica della card, la funzione-P introdotta per associare a ogni insieme-P la collezione degli insiemi-P che con esso si possono porre in biiezione.

Conveniamo anche di denotare con Card l'insieme dei numeri cardinali, cioè l'insieme delle classi di equicardinalità costituite dagli insiemi-P ai quali abbia senso associare un cardinale.

Anche Card va considerato un insieme-P e, dato che ogni numero naturale esprime il cardinale di qualche insieme finito, vale la relazione

$$\mathbb{N} \subset \mathsf{Card} \ .$$

B19 f.02 Un insieme finito con un certo numero n di elementi individuato da una lista priva di ripetizioni di identificatori dei suoi membri, ha lo stesso cardinale dell'insieme numerico $\{1, 2, ..., n\}$.

Ogni S' sottoinsieme proprio di un insieme finito S ha il cardinale strettamente inferiore a quello di S: si può quindi affermare $\forall \mathsf{S} \in \mathbf{SetF}\ ,\ \mathsf{S}' \subset \mathsf{S}\ :\ |\mathsf{S}'| < |\mathsf{S}|$.

Vista la precedente caratterizzazione degli insiemi finiti, ricordiamo la caratterizzazione degli insiemi infiniti

Abbiamo visto che si trovano vari insiemi numerabili che hanno lo stesso cardinale di loro sottoinsiemi propri: ad esempio $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{R}_{\mathsf{C}}| = |\mathbb{E}\mathsf{ven}| = |\mathbb{O}\mathsf{dd}|$.

Il cardinale di $\mathbb{N}$ e degli altri insiemi precedenti viene denotato con $\aleph_0$ e chiamato "alef con 0".

Se si individuano due insiemi S e T tali che S è equicardinale con un $T' \subset T$ e non si possono mettere in biiezione S e T, diciamo che S ha cardinale inferiore a quello di T e scriviamo $\mathrm{card}(S) < \mathrm{card}(T)$.

Per esprimere il fatto che si strova solo una biiezione tra S e un sottoinsieme proprio di T scriviamo $\mathrm{card}(S) \leq \mathrm{card}(T)$.
Evidentemente $S' \subset S$ implica $\mathrm{card}(S') \leq \mathrm{card}(S)$.

B19 f.03 Oltre ai molti casi di insiemi numerabili, molti altri insiemi si possono porre in corrispondenza biunivoca con propri sottoinsiemi e quindi possono essere considerati insiemi infiniti.

Per arrivarea un primo chiarimento in questo senso prendiamo in considerazione i numeri reali iniziando a definire l'intervallo dei reali maggiori o uguali a 0 e minori o uguali a 1 $[0,1]$ come l'insieme delle entità (numeriche) espresse dalle scritture binarie $0, b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$, dove ogni b_1 può valere 0 o 1, ossia è un bit e dove si conviene che le scritture $0, b_1...0b_n = 111...$ equivalgono alle scritture $0, b_1...1000....$
Definiamo poi come insieme dei numeri reali l'insieme-P

$$\mathbb{R}_{0,+} := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1] ,$$

insieme sul quale si possono definire le quattro operazioni aritmetiche, le relazioni $\leq$, $<$, $\geq$ e $>$ e le applicazioni lineari tutte in sintonia con le definizioni omologhe per gli insiemi dei numeri interi $\mathbb{Z}$, dei numeri razionali e dei numeri reali costruibili.

Esaminiamo quindi i cardinali di $\mathbb{R}$ e dei suoi intervalli, dopo aver segnalato che $\mathbb{R}(\supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N})$, non si può porre in biiezione con $\mathbb{N}$ e quindi dobbiamo assegnare ad $\mathbb{R}$ un cardinale diverso da $\aleph_0$ e superiore ad esso; per questo carsinale scriviamo

$$\aleph_1 := \mathrm{card}(\mathbb{R}) .$$

Esso viene detto **cardinale del continuo**.

B19 f.04 (1) Prop.: L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ ha lo stesso cardinale di ciascuno dei suoi intervalli, limitati e illimitati, aperti, chiusi, aperti-chiusi e chiusi-aperti.

Dim.: I due intervalli reali chiusi $[0,1]$ e [a,b] sono posti in biiezione dalla funzione-P

$$\lceil\, x \in [0:1] \mapsto a + (b-a)\, x \,\rceil .$$

Quindi tutti gli intervalli limitati chiusi hanno lo stesso cardinale.

In particolare sono equicardinali $[0:1]$ e $[,1:0,9]$; dato che

$$[,1:0,9] \subset (0{:}1\ ),\ (0{:}1\ ],[0:1) \subset [0:1] ,$$

tutti i precedenti intervalli sono equicardinali e in conclusione tutti gli intervalli reali limitati hanno lo stesso cardinale.
Consideriamo ora La funzione-P $\lceil\, x \in (0:1) \mapsto \dfrac{1}{x} \,\rceil$ pone in biiezione l'intervallo limitato $(0,1)$ con l'intervallo illimitato $(1,+\infty)$

Per ogni a numero reale la funzione-P $\lceil\, x \in (1,+\infty) \mapsto (x-1)+a \,\rceil$ pone in biiezione i due intervalli illimitati $(1,+\infty)$ e $(a,+\infty)$

Per ogni a numero reale la funzione-P $\lceil\, x \in (1,+\infty) \mapsto (1-x)+b \,\rceil$ pone in biiezione i due intervalli illimitati $(1,+\infty)$ e $(-\infty, b)$

La funzione-P $\lceil\, x \in (a,+\infty) \mapsto \ln(x-a) \,\rceil$ pone in biiezione i due intervalli illimitati $(a,+\infty)$ e $\mathbb{R}$.

È evidente il seguente complesso di disuguaglianze

$$[0:1]^{\#} = [0.1:0.9]^{\#} \leq (0:1)^{\#} \leq (0:1]^{\#}, [0:1)^{\#} \leq [0:1]^{\#} .$$

Quindi tutti gli intervalli reali limitati hanno lo stesso cardinale.

Consideriamo la funzione poligonale crescente illimitata $\pi_{0,1}$ avente come vertici i punti

$$P_0 = \langle 0,0\rangle,\ P_1 = \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle,\ P_2 = \left\langle \frac{2}{3}, 2\right\rangle,\ ...,\ P_n = \left\langle \frac{n}{n+1}, n\right\rangle,\ ...$$

e la analoga funzione poligonale$\pi_{-1,1}$ ottenuta prolungando la precedente nei vertici $P_{-n} := -P_n$.

Esse individuano due funzioni crescenti; la prima pone in corrispondenza biunivoca $[0:1)$ e $(0:+\infty)$, mentre la seconda pone in biiezione $(-1:1)$ con l'intero $\mathbb{R}$.

Dunque si possono porre in biiezione due intervalli limitati con gli intervalli illimitati di $\mathbb{R}$ e con lo l'intero $\mathbb{R}$, mentre abbiamo visto che i vari intervalli limitati si possono porre in biiezione mediante semplici traslazioni.
Quindi $\mathbb{R}$ si può porre in biiezione con ciascuno dei suoi intervalli limitati e illimitati. ∎

B19 f.05 Il precedente risultato chiarisce la distinzione tra gli insiemi finiti, insiemi che non possono porsi in biiezione con loro sottoinsiemi propri, e insiemi infiniti, definiti come insiemi che si possono porre in biiezioni con loro sottoinsiemi propri.
La collezione degli insiemi infiniti si può considerare un insieme-P e la denotiamo con **SetI**.

I cardinali degli insiemi finiti si possono identificare con i numeri interi naturali e l'insieme dei numeri cardinali, che denotiamo con Card, si può considerare un'estensione di $\mathbb{N}$. Inoltre Card si può considerare un insieme-P.

I numeri cardinali che, come $\aleph_0$ e $\aleph_1$, non fanno parte di $\mathbb{N}$ vengono chiamati **numeri transfiniti**; la loro collezione la denotiamo con $\mathbb{T}$ransf.
Anche questa entità si può considerare in insieme-P e si può enunciare la seguente uguaglianza esprimente una bipartizione di insiemi-P:

$$\mathsf{Card} \ = \ \mathbb{N} \dot\cup \mathbb{T}\mathsf{ransf}\ .$$

Gli insiemi aventi come cardinale $\aleph_0$ sono detti **insiemi contabilmente infiniti**, e si riconoscono essere gli insiemi numerabili, mentre gli insiemi aventi come cardinale un intero naturale o $\aleph_0$ sono detti **insiemi contabili**.

B19 f.06 Ora ci proponiamo di introdurre tra i numeri cardinali un ordinamento totale che estende l'ordine dei numeri naturali e per il quale useremo ancora il segno "$\leq$" e i segni associati $<$, $\geq$, $>$, $\not<$, ...
Dati due insiemi S e T poniamo $|\mathsf{S}| \leq |\mathsf{T}|$ sse esiste una funzione iniettiva in $\lceil\, \mathsf{S} \lhook\joinrel\longrightarrow \mathsf{T}\, \rceil$.
Chiaramente questa relazione tra cardinali è riflessiva e transitiva.
La sua antisimmetria è garantita dal seguente teorema che dimostriamo seguendo Halmos (1960).

B19 f.07 Teorema (**teorema di Schroeder-Bernstein**)
Dati due insiemi S e T, vale l'implicazione

$$|S| \leq |T| \ \wedge\ |T| \leq |S| \implies |S| = |T|\ .$$

Dim.: Per ipotesi esistono $\sigma \in \lceil\, S \lhook\joinrel\longrightarrow T\, \rceil$ e $\tau \in \lceil\, T \lhook\joinrel\longrightarrow S\, \rceil$; a partire dalla iniettività di σ e τ si individuano tre sottoinsiemi disgiunti di S e tre sottoinsiemi disgiunti di T.
Diciamo discendenti di un $s \in S$ i seguenti elementi di $\mathsf{U} := S \cup T$:

$$s\,\sigma\ ,\ s\,\sigma\,\tau\ ,\ s\,\sigma\,\tau\,\sigma\ ,\ ...$$

e diciamo discendenti di un $t \in T$ gli elementi di $S \cup T$

$$t\,\tau\ ,\ t\,\tau\,\sigma\ ,\ t\,\tau\,\sigma\,\tau\ ,\ ...\ .$$

Per ciascuno degli elementi u di U si può risalire all'insieme-P dei suoi predecessori e si distinguono quelli che hanno un predecessore privo di predecessori e quelli che non ne hanno, ossia quelli per i quali la risalita ai predecessori non ha termine ma conduce a una successione illimitata di elementi di U.

Si individuano quindi i tre sottoinsiemi-P disgiunti di S: S_S, insieme degli elementi di S con un predecessore privo di predecessori appartenente a S; S_T, insieme degli elementi di S con un predecessore privo di predecessori appartenente a T; S_∞, insieme degli elementi di S senza predecessori privi di predecessori. Non escludiamo che qualcuno dei tre sottoinsiemi sia avuoto ma possiamo scrivere $S = S_S \dot\cup S_T \dot\cup S_\infty$.

Scambiando S con T, si individuano simmetricamente i tre sottoinsiemi-P disgiunti di T che consentono di scrivere $T = T_S \dot\cup T_T \dot\cup T_\infty$.

Per le due suddivisioni di S e T può essere utile riferirsi al seguente schema visivo:

Chiaramente $S_S,\sigma = T_S$, $T_S,\tau = S_S$, $T_T,\tau = S_T$, $S_T,\sigma = T_T$, $S_\infty,\sigma = T_\infty$ e $T_\infty,\tau = S_\infty$.
Di conseguenza $\sigma|_{S_S} \in \lceil\, S_S \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd T_S \,\rceil$, $\sigma|_{S_T} \in \lceil\, S_T \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd T_T \,\rceil$ e $\sigma|_{S_\infty} \in \lceil\, S_\infty \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd T_\infty \,\rceil$.
L'unione delle tre precedenti biiezioni costituisce la biiezione di $\lceil\, S \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd T \,\rceil$ cercata ∎

B19 f.08 Dunque la relazione $\leq$ tra cardinali è una relazione d'ordine totale ed evidentemente è un'estensione dell'ordinamento tra numeri naturali.

Consideriamo due insiemi S e T tali che $|S| \leq |T|$; se inoltre $|S| \neq |T|$ scriviamo $|S| < |T|$.

Si noti che la condizione $|S| \neq |T|$ è necessaria per garantire la disuguaglianza forte $|S| < |T|$; per esempio $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ implica $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$, ma si è visto che che $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$ e quindi che non è $|\mathbb{Z}| < |\mathbb{Q}|$.

Per quanto si è visto abbiamo anche $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, n < \aleph_0$.

B19 g. numeri transfiniti

B19 g.01 Cerchiamo ora di individuare numeri transfiniti superiori ad $\aleph_0$.

(1) Teorema (**teorema di Cantor**) Ogni insieme-P infinito S ha cardinale inferiore al proprio booleano: $|S| < \mathfrak{P}(S)|$.

Dim.: Ricordiamo che abbiamo definito **funzione di inclusione per un insieme** S la funzione

$$\mathrm{incl}_S \ := \ \lceil x \in S \mapsto \{x\} \rceil \ .$$

Dato che $\mathrm{incl}_S \in \lceil S \longmapsto \mathfrak{P}(S) \rceil$, si ha $|S| \leq |\mathfrak{P}(S)|$.
Dimostriamo che ogni funzione iniettiva del genere $\lceil S \hookleftarrow\!\!\longrightarrow \mathfrak{P}(S) \rceil$ non può essere suriettiva.
A questo fine introduciamo la scrittura $\mathcal{I} := \mathrm{incl}_S$ e cerchiamo di definire un ipotetico sottoinsieme-P di S

$$X_{\mathcal{I}} := \{x \in S \,\rceil\!\rceil\, x \notin \mathcal{I}(x)\} \quad (\in \mathfrak{P}(S)) \ .$$

Supponiamo che sia $X_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}(S)$; in tal caso esisterebbe un $\overline{x} \in S$ tale che $\mathcal{I}(\overline{x}) = X_{\mathcal{I}}$; se questo $\overline{x}$ appartenesse ad $X_{\mathcal{I}}$ la definizione di tale insieme implicherebbe $\overline{x} \notin X_{\mathcal{I}}$; se viceversa fosse $\overline{x} \notin X_{\mathcal{I}}$ la stessa definizione implicherebbe $\overline{x} \in X_{\mathcal{I}}$. Queste contraddizioni implicano $X_{\mathcal{I}} \notin \mathcal{I}(S)$ e quindi che $\mathcal{I}$ non è suriettiva ▮

A questo punto risulta individuata una successione di classi di equicardinalità di insiemi via via più estese, ovvero una successione crescente di numeri transfiniti:

$$\aleph_0 := |\mathbb{N}| < \aleph_1 := |\mathfrak{P}(\mathbb{N})| < \aleph_2 := |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))| < ... < \aleph_k < \aleph_{k+1} < ...$$

B19 g.02 Denotiamo con $\mathfrak{P}_F(S)$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di un insieme S.

Eserc. Dimostrare che per ogni insieme infinito S si ha $|\mathfrak{P}_F(S)| = 2^{|S|}$.

B19 g.03 Eserc. Dimostrare che $|\mathbb{R}| = |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$, dopo aver dimostrato che $|[0,1)| = |\mathfrak{P}([0,1))|$.

B19 g.04 Ci proponiamo ora di introdurre operazioni sui numeri cardinali che estendono le operazioni di somma, prodotto e potenza tra numeri naturali; vedremo che alcune di queste operazioni presentano proprietà uguali a quelle delle operazioni su $\mathbb{N}$, mentre e altre loro proprietà sono nettamente diverse. Le proprietà comuni contribuiscono a giustificare l'adozione del sostantivo numero per queste entità.

Siano μ e ν due numeri cardinali; Ricordiamo preliminarmente che l'insieme-P delle funzioni da un insieme T a un insieme S, $\lceil \mathsf{T} \longmapsto \mathsf{T} \rceil$, si può denotare anche con S^{T} .

Prendiamo in esame due insiemi-P S di cardinale μ e T di cardinale ν.

Se S e T sono disgiunti si definisce come somma $\mu + \nu$ il cardinale della loro unione $\mathsf{S} \dot\cup \mathsf{T}$.

Si definisce come prodotto $\mu \cdot \nu$ il cardinale dell'insieme prodotto cartesiano $\mathsf{S} \times \mathsf{T}$.

Si definisce come potenza μ^ν il cardinale dell'insieme S^{T}.

Va rilevato che queste definizioni richiedono che si dimostri che le composizioni di due numeri cardinali non dipendano dai due insiemi rappresentativi delle rispettive classi di equicardinalità.
Queste dimostrazioni si possono ottenere prendendo in esame due insiemi S' in biiezione σ con S e T' in biiezione τ con T e individuando senza difficoltà una biiezione tra $\mathsf{S} \dot\cup \mathsf{T}$ e $\mathsf{S}' \dot\cup \mathsf{T}'$, una biiezione tra $\mathsf{S} \times \mathsf{T}$ e $\mathsf{S}' \times \mathsf{S}'$ ed una biiezione tra S^{T} e $\mathsf{S}'^{\mathsf{T}'}$.

B19 g.05 Per le tre operazioni sopra i numeri cardinali si dimostrano le seguenti proprietà espresse da scritture coerenti con quelle riguardanti elementi di $\mathbb{N}$, cioè concernenti i cardinali degli insiemi finiti.

(1) Prop.: Somma e prodotto di numeri cardinali sono operazioni commutative:

$$\forall \mu, \nu \in \mathsf{Card} \ : \ \mu + \nu \ = \ \nu + \mu \quad , \quad \mu \cdot \nu \ = \ \nu \cdot \mu \ .$$

(2) Prop.: Somma e prodotto di numeri cardinali sono operazioni associative:

$$\forall \mu, \nu, \rho \in \mathsf{Card} \ : \ (\mu + \nu) + \rho \ = \ \mu + (\nu + \rho) \quad , \quad (\mu \cdot \nu) \cdot \rho \ = \ \mu \cdot (\nu \cdot \rho) \ .$$

(3) Prop.: Si ha distributività della somma rispetto al prodotto di numeri cardinali:

$$\forall \mu, \nu, \rho \in \mathsf{Card} \ : \ \mu \cdot (\nu + \rho) = \mu \cdot \nu + \mu \cdot \rho \ .$$

(4) Prop.: Valgono le seguenti uguaglianze per le potenze tra numeri cardinali:

$$\forall \mu, \nu, \rho \in \mathsf{Card} \ : \ \mu^{\nu+\rho} \ = \ \mu^{\nu} \cdot \mu^{\rho} \quad , \quad (\mu^{\nu})^{\rho} \ = \ \mu^{\nu \cdot \rho} \quad , \quad (\mu \cdot \nu)^{\rho} \ = \ \mu^{\rho} \cdot \mu^{\rho} \ .$$

B19 g.06 Enunciamo ora due proprietà dei numeri transfiniti ben diverse dalle corrispondenti valide per i cardinali degli insiemi finiti.

(1) Prop.: $\forall \mu, \nu \in \mathbb{T}\mathsf{ransf} \ : \ \mu + \nu \ = \ \max(\mu, \nu) \ .$

(2) Prop.: $\forall \mu, \nu \in \mathbb{T}\mathsf{ransf} \ : \ \mu \cdot \nu = \max(\mu, \nu) \ .$

f.13 Roman 12-14

B19 g.07 Abbiamo visto che rivestono interesse sia i sottoinsiemi di un insieme-P E, sia le funzioni che hanno come dominio un insieme-P E e codominio un insieme-P F.

È quindi utile fare riferimento all'insieme dei sottoinsiemi di E, all'insieme delle funzioni di E in F e conviene denotare questi insiemi-P, risp., con le notazioni $\mathfrak{P}(E)$ e $\lceil E \longmapsto F \rceil$, coerenti con quelle che si usano quando E ed F denotano insiemi finiti o insiemi-GI.

Entro $\mathfrak{P}(E)$ si distinguono l'insieme dei sottoinsiemi finiti di E, da denotare con $\mathfrak{P}_F(E)$ e il più particolare insieme dei singoletti; entro $\lceil E \longmapsto F \rceil$ si distinguono l'insieme delle endofunzioni di E, che denotiamo con $\mathsf{Endo}_E := \lceil E \longrightarrow E \rceil$, e l'insieme delle funzioni binarie, da denotare con $\lceil E \longrightarrow \{0,1\} \rceil$; tra queste ultime si trovano le funzioni caratteristiche dei singoletti, in corrispondenza biunivoca l'insieme dei singoletti che denotiamo con . $\mathfrak{P}_1(E)$.

È naturale chiedersi per ciascuna di queste entità se si possa considerare un insieme-G, trattabile con una lista-G, lista generata da una MSPG, oppure come entità di nuovo genere che si presume possa essere trattate con strumenti di nuovo genere.

Vediamo ora che, quale che sia E insieme-G, si possono individuare MSPG che permettono di generare $\mathfrak{P}_F(E)$, mentre questo risulta impossibile per $\mathfrak{P}(E)$.
Anche gli insiemi-P $\lceil E \longrightarrow E' \rceil$ con E insieme-G qualsiasi non possono essere generati da una MSPG: in effetti vediamo anche che il particolare insieme $\lceil E \longmapsto \{0,1\} \rceil$ si può porre in una corrispondenza biunivoca con $\mathfrak{P}(E)$ e se fosse un insieme procedurale lo sarebbe anche $\mathfrak{P}(E)$, cosa impossibile.

B19 g.08 Prop. Se E è un insieme-G, allora è tale anche $\mathfrak{P}_F(E)$.

Dim.: Per l'ipotesi E è ottenibile dalla lista generata da una MSPG che denotiamo con $\mathbf{M}$, ovvero che sia $E = \mathbf{M}^G cl$.
Procederemo a dimostrare che si può costruire una seconda MSPG $\mathbf{N}$ in grado di generare $\mathfrak{P}_F(\mathbf{M}^{\mathcal{L}})$.

Cominciamo con il supporre che $\mathbf{M}$ sia nonripetitiva e denotiamo la successione delle stringhe generate successivamente dalla $\mathbf{M}$ con $\mathsf{L} := \mathbf{M}^{\mathcal{L}} =: \left\langle e_1, e_2, ..., e_n, ... \right\rangle$.

Si tratta di individuare una MSPG $\mathbf{N}$ che si serve della $\mathbf{M}$ per generare gli elementi $\mathfrak{P}_F(E)$ secondo un ordine derivato da quello della $\mathbf{M}^{\mathcal{G}}$.

La $\mathbf{N}$ organizza la sua attività generativa in manovre successive; in ciascuna di queste attende che la $\mathbf{M}$ le fornisca una nuova componente e_j della L e, ottenutala, procede ad accodare sul suo nastro di uscita T_N $\{e_j\}$ e gli insiemi costituenti $\mathfrak{P}_F(E)$ precedentemente registrati su T_N ampliati con l'inclusione di e_j.
Esemplifichiamo per maggiore chiarezza.

Nella manovra 0 $\mathbf{N}$ emette su T_N l'insieme vuoto.
Nella manovra 1 $\mathbf{M}$ fornisce e_1 ed $\mathbf{N}$ accoda $\{e_1\}$ su T_N.
Nella manovra 2 $\mathbf{M}$ genera e_2 ed $\mathbf{N}$ accoda su T_N $\{e_2\}$ ed $\{e_1, e_2\}$.
Nella manovra 3 $\mathbf{M}$ fornisce e_3 ed $\mathbf{N}$ scorre T_N dall'inizio e procede a emettere su nuove caselle di T_N $\{e_3\}$, $\{e_1, e_3\}$, e $\{e_2, e_3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$, cioè gli insiemi ottenuti aggiungendo e_3 a ciascuno degli insiemi à generati precedentemente.

. . . . .

Nella manovra j, ricevuta la stringa e_j da $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ procede ad accodare su T_N i 2^{j-1} sottoinsiemi ottenuti aggiungendo e_j ai 2^{j-1} già generati e registrati su T_N, in modo che alla fine di questa fase su T_N siano elencati tutti i 2^j sottoinsiemi di $\{e_1, e_2, ..., e_j\}$.

. . . . .

L'esecuzione di queste fasi da parte di $\mathbf{N}$ può procedere illimitatamente sse la $\mathbf{M}$è in grado di procedere illimitatamente (se si suppone che le risorse disponibili lo permettano).

Si osserva che gli insiemi generati dalla macchina nonripetitiva nella fase j si possono far corrispondere biunivocamente alle sequenze binarie di lunghezza j che nell'ultima posizione presentano il bit 1.
Dunque si conclude che è un insieme-GI anche l'insieme delle sequenze binarie finite, sottoinsieme proprio di $\lceil E \longmapsto \{0,1\} \rceil$.

B19 g.09 (1) Prop.: Se E è un insieme ricorsivo, anche $\mathfrak{P}_F(E)$ lo è.

Dim.: Ancora ci serve una macchina $\mathbf{M}$ che genera E, cioè tale che $\mathbf{M}^{\mathcal{G}} = E$.
Sia A l'alfabeto del suo nastro di uscita e sia $\mathsf{U} := \mathsf{A}^*$; abbiamo quindi che $\mathbf{M}^{\mathcal{G}} \subseteq \mathsf{U}$. Sia inoltre $\mathbf{D}$ un algoritmo in grado di decidere per ogni $x \in \mathsf{U}$ se appartiene o meno ad E.

Un algoritmo in grado di decidere se un qualsiasi sottoinsieme finito di U $Y = \{y_1, y_2, ..., y_j\}$ appartiene a $\mathfrak{P}_F(E)$ organizza lo scorrimento degli elementi y_i per $i = 1, 2, ..., j$ ed applica $\mathbf{D}$ a ciascuno di essi in modo da decidere che $Y \subset E$ sse tutti gli y_i appartengono ad E ▮

Questo risultato consente di ampliare significativamente il repertorio degli insiemi ricorsivi noti.

(2) Eserc. Descrivere procedure progressive che generano l'insieme delle sequenze binarie, l'insieme dei linguaggi finiti su un dato alfabeto, l'insieme dei linguaggi finiti sopra un alfabeto numerabile $\langle \mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_n, ... \rangle$.

B19 g.10 Dimostriamo ora due teoremi dovuti a Georg Cantor che costituiscono varianti del teorema in g01 e per ogni insieme-G E negano la possibilità di servirsi di una MSPG per generare gli elementi di classi come $\mathfrak{P}(E)$ ed Endo_E.

(1) Teorema Un insieme-GI qualsiasi E non si può porre in biiezione con il proprio booleano $\mathfrak{P}(E)$.

Dim.: Supponiamo che si possa avere una biiezione β tra E e $\mathfrak{P}(E)$ e consideriamo il sottoinsieme di E

$$[*] \quad \overline{E} := \{x \in E \ \P \ x \notin \beta(x)\} .$$

Questo elemento di $\mathfrak{P}(E)$ dovrebbe potersi esprimere come $\overline{E} = \beta(\overline{x})$ per un qualche $\overline{x} \in E$.
Si constata però che $\overline{x}$ non si può trovare né in $\overline{E}$ né in $E \setminus \overline{E}$.
Infatti se fosse $\overline{x} \in \overline{E}$ per la [*] sarebbe $\overline{x} \notin \beta(\overline{x}) = \overline{E}$, mentre se fosse $\overline{x} \notin \overline{E}$ per la [*] sarebbe $x \in \beta(\overline{x}) = \overline{E}$. Queste conclusioni sono contradditorie e di conseguenza non può esistere $\overline{x}$ e con esso non può esistere la funzione β ipotizzata ∎

B19 g.11 Teorema Un insieme-GI E non si può porre in biiezione con l'insieme delle proprie endofunzioni $\mathbf{Endo}_E$.

Dim.: Procediamo ancora per assurdo supponendo che esista una biiezione $\beta \in \lceil E \lhd\!\!-\!\!\rhd \mathbf{Endo}_E \rceil$; consideriamo una endofunzione σ che scambia tra di loro due elementi diversi di E e la endofunzione associata definita come

$$\eta_\sigma \;:=\; \lceil\, e \in E \;\mapsto\; \sigma[(\beta(e))(e)] \,\rceil \;. \tag{1}$$

Questa dovrebbe essere esprimibile come $\beta(\overline{e})$ per un qualche $\overline{e} \in E$, ma questo non è possibile per alcun $\overline{e}$; infatti $\eta_\sigma = \beta(\overline{e})$ implica

$$\eta_\sigma(\overline{e}) \;=\; (\beta(\overline{e}))(\overline{e}) \;,$$

mentre (1) comporta $\eta_\sigma(\overline{e}) \;=\; \sigma[(\beta(\overline{e}))(\overline{e})]$, in conflitto con la precedente uguaglianza ∎

Osserviamo che le due precedenti affermazioni con le relative argomentazioni sono strettamente collegate; il secondo teorema può riformularsi per le funzioni da E in $\{0,1\}$ pur di definire

$$\eta \;:=\; \lceil\, e \in E \;\mapsto\; 1 - (\beta(e))(e) \,\rceil \;.$$

Inoltre l'insieme delle funzioni suddette è in corrispondenza biunivoca con la collezione dei sottoinsiemi dell'insieme E.

B19 g.12 Le argomentazioni svolte in g10(1) e in g11 costituiscono tipiche **dimostrazioni per assurdo**. Le dimostrazioni esposte in precedenza presentano anche fasi costruttive, cioè esaminano la possibilità di realizzare costruzioni formali effettive concluse dopo un numero finito di passi (sopra insiemi finiti) o costruzioni sviluppabili illimitatamente, cioè in grado di proporre insiemi-GI.

In effetti quando si va oltre l'ambito degli insiemi procedurali la costruibilità viene necessariamente a mancare: essa ha senso solo in relazione a insiemi di situazioni finiti o illimitatamente generabili.

In altre parole mediante meccanismi costruiti e osservabili, ossia mediante automatismi descrivibili finitamente e realizzabili, si possono trattare (costruttivamente) solo complessi di informazioni finite o illimitatamente ampliabili.

Per riuscire a trattare entità come le collezioni di tutti i sottoinsiemi di un insieme procedurale e le collezioni delle funzioni aventi come dominio un insieme procedurale o una entità ottenibile con costruzioni formali ancor più elaborate, si devono sviluppare altri procedimenti dimostrativi ed altre nozioni a partire da teorie assiomatiche e in particolare dalla teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel [B65].

Va osservato che anche gli insiemi astratti e le dimostrazioni che li riguardano, devono essere introdotti, analizzati e comunicati mediante stringhe finite, ma in modo meno diretto delle precedenti, attraverso costruzioni formali sostanzialmente più complesse di quelle presentate finora; tuttavia queste si possono ricondurre a procedure che possono anche essere presentate su un piano intuitivo.

Va anche osservato che i teoremi g10(1) e g11 riguardano insiemi non bene identificati: infatti prima di questi risultati erano stati definiti solo insiemi finiti e insiemi-GI e le due affermazioni che dovrebbero riguardare gli insiemi procedurali, risultando banali per gli insiemi finiti.

I teoremi sopra citati sono stati enunciati in forma generale perché le loro dimostrazioni prescindono dalle caratteristiche costruttive degli insiemi in causa; esse hanno piena validità solo per gli insiemi definiti con una teoria assiomatica.

B19 g.13 Dato che può essere utile poter trattare come insiemi-P i booleani di insiemi non finiti e le collezioni di funzioni tra insiemi non finiti, per esempio per fare riferimento ai risultati di operazioni insiemistiche su queste collezioni di insiemi, emerge l'opportunità di considerare altri insiemi oltre ai finiti e agli insiemi-GI e questi non possono essere che insiemi non trattabili costruttivamente.

Questi insiemi, come vedremo, risultano indispensabili già per poter trattare i numeri reali dell'intervallo $\mathbf{[}0,1\mathbf{)}$ e *a fortiori* sono necessari per introdurre la totalità dei numeri reali, tutti gli enti della geometria del continuo, le grandezze e i processi studiati più comunemente nella fisica, nella tecnologia, nell'economia, nelle scienze naturali e in ogni altra disciplina quantitativa.

Entità come numeri reali, funzioni continue, figure geometriche e simili sono state studiate anche in assenza di una impostazione rigorosa, impostazione in parte adottata dai grandi matematici dell'epoca greco-ellenistica (Eudosso, Euclide, Archimede, ...) in seguito quasi dimenticata e recuperata pienamente solo nella seconda metà del XIX secolo (Dedekind , Weierstrass , Cantor , Peano , Hilbert , Zermelo, Fraenkel , Goedel , Church , Turing , ...).

B19 g.14 Quando si vogliono evitare al lettore le questioni che abbiamo messo in rilievo, spesso si espongono i risultati della teoria generale degli insiemi che servono partendo da alcune nozioni assunte come "primitive": quelle di insieme, di appartenenza di un elemento a un insieme e la nozione di proprietà che caratterizza tutti e soli gli elementi di un insieme.
In queste pagine questo modo di fare si allaccia a quelli che abbiamo chiamati insiemi-P e che riprendiamo brevemente.

Una proprietà può esprimersi con una proposizione più o meno formalizzata, nella quale oltre a segni o espressioni di significato noto, interviene un segno o una espressione, denotiamola con a, che rappresenta il generico oggetto che la soddisfa. Se rappresentiamo una tale proposizione con $\mathcal{P}\left[\,a\,\right]$, l'insieme degli oggetti che soddisfano questa proprietà si denota $\left\{a \,\S\, \mathcal{P}\left[\,a\,\right]\right\}$ e $\mathcal{P}$ si dice **proprietà caratteristica** //g14 di questo insieme. Dato che il segno a esaurisce la sua funzione nella precedente scrittura (in B61 si dirà che è un segno saturato), si può sostituire con ogni altro segno x:

$$\left\{a \,\S\, \mathcal{P}\left[\,a\,\right]\right\} \;=\; \left\{x \,\S\, \mathcal{P}\left[\,x\,\right]\right\} .$$

Un oggetto che soddisfa la proprietà espressa da $\mathcal{P}\left[\,a\,\right]$ è detto elemento dell'insieme $\left\{a \,\S\, \mathcal{P}\left[\,a\,\right]\right\}$ e questo si esprime con la scrittura $b \in \{a \,\S\, \mathcal{P}\left[\,a\,\right]\}$ che utilizza il segno della relazione di appartenenza $\in$.
Per un oggetto c che invece non soddisfa $\mathcal{P}[a]$ si scrive $c \notin \left\{a \,\S\, \mathcal{P}\left[\,a\,\right]\right\}$.

B19 g.15 Denotiamo con **Set** la classe.E degli insiemi, cioè una entità che permette di usare scritture come $A, B, C :\in \mathbf{Set}$ per dichiarare che le lettere A, B e C saranno usate per denotare tre insiemi.
Usiamo inoltre la scrittura $x :\in A$ per convenire che il nuovo segno x denoti un elemento dell'insieme A. Scriviamo $B :\subseteq A$ per introdurre un sottoinsieme di A da identificare con B. Inoltre con $C :\subset A$ si dichiara che C è un simbolo usato per denotare un sottoinsieme proprio dell'insieme A.

Altri insiemi si introducono con scritture del tipo

$$\mathsf{A} = \left\{a \in \mathsf{S} \,\S\, \mathcal{P}\left[\,a\,\right]\right\} ;$$

qui $\mathcal{P}$ individua una proprietà che può essere soddisfatta o meno da ciascuno degli elementi dell'insieme S in qualche misura noto; l'insieme individuato dalla precedente scrittura è costituito da tutti e soli gli elementi di S che godono della proprietà $\mathcal{P}$.

Una semplice variante della forma precedente è una espressione del tipo

$$S = \left\{ \mathsf{B} \subseteq \mathsf{A} \between \mathcal{P}\left[\mathsf{B}\right] \right\} ,$$

per l'insieme dei sottoinsiemi di A che godono della proprietà $\mathcal{P}$.

Se a e $\mathcal{P}$ denotano, risp., un oggetto e una proprietà ben definita, la scrittura

$$\{a \text{ sse } a \text{ soddisfa } \mathcal{P}\}$$

fornisce il singoletto $\{a\}$ nel caso in cui a soddisfi effettivamente $\mathcal{P}$ e fornisce $\emptyset$ nel caso opposto.

Un'altro tipo di espressione insiemistica spesso utile ha la forma

$$\mathsf{S} \;=\; \{x \in X :|\; \mathcal{C}\left[x\right]\} :$$

qui $\mathcal{C}$ denota una costruzione dipendente da un oggetto x che può scegliersi arbitrariamente nell'insieme X, ovvero un meccanismo che può operare sopra questi x in modo da associare una entità a ciascun x. La formula precedente individua l'insieme degli oggetti che si ottengono considerando i diversi elementi di X e attuando per ciascuno di essi la costruzione espressa.

Osserviamo che le espressioni della forma $S = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$, usate spesso per gli insiemi numerabili, sono riconducibili alla forma precedente scrivendo

$$\mathsf{S} \;=\; \{n \in \mathbb{N} :|\; a_n\} ,$$

dove a_n si suppone denoti il risultato di una costruzione che si serve del generico intero positivo n.

Questo è un caso particolare del seguente più generale in cui gli oggetti di un insieme $\mathsf{A} = \left\{ a \between \mathcal{P}\left[a\right] \right\}$ sono individuati riferendoli agli oggetti di un'altro insieme $\mathsf{I} = \{i \between \mathcal{Q}\left[i\right]\}$ caratterizzato da una proprietà $\mathcal{Q}$ che conviene che sia più semplice della $\mathcal{P}$.
In questo caso si individua A come $\{i \in \mathsf{I} :|\; \alpha_i\}$, ovvero come $\{\alpha_i \between \mathcal{Q}(i)\}$, ove α_i è una espressione che individua un oggetto a partire da un generico elemento $i \in \mathsf{I}$.
In questo caso si dice che $\{i \in \mathsf{I} :|\; \alpha_i\}$ è una famiglia di oggetti avente I come insieme degli indici.

B19 g.16 Un cardinale si attribuisce a tutti gli insiemi. Conveniamo quindi conveniamo di denotare con Card la totalità dei cardinali, entità che evidentemente va considerata un insieme-P.

Se un insieme A si trova in corrispondenza biunivoca con una parte di un insieme B e se B si trova in biiezione con una parte di un insieme C, evidentemente A si può porre in biiezione con una parte di C.
Se A è in biiezione con una parte di B, un insieme A' è in biiezione con A e un insieme B' si trova in biiezione con B, allora A' si trova in biiezione con una parte di B'.

Questo rende lecito stabilire una relazione d'ordine totale tra i cardinali degli insiemi e descrivere le situazioni precedenti con le relazioni:

$$|\mathsf{A}| = |\mathsf{A}'| \leq |\mathsf{B}| = |\mathsf{B}'| \leq |\mathsf{C}| \ .$$

B19 g.17 Se si riesamina la dimostrazione del teorema di Cantor si vede che essa consente di enunciare la disuguaglianza generale.

(1) Teorema Per ogni insieme E diverso dal vuoto si ha $|\mathsf{E}| < |\mathfrak{P}(\mathsf{E})|$ ∎

Si individua quindi una successione illimitata di cardinali non finiti:
– $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$, il cardinale del numerabile;
– $\aleph_1 := |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$, il cardinale del continuo;
– $\aleph_2 := |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))|$, detto **cardinale delle funzioni**;

– . . . . . .

Le classi di equivalenza $\aleph_\alpha$ di questa successione si dicono **numeri transfiniti**; scriviamo

(1) $$\mathbb{T}\mathsf{ransf} \ := \ \{\alpha \in \mathbb{N} :| \ \aleph_\alpha\} \ .$$

Segnaliamo che occorre cautela nel considerare l'insieme deli cardinali, in quanto non è noto se esistano cardinali compresi tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$ e tanto meno cardinali compresi tra altri due transfiniti caratterizzati da deponenti successivi.

Conviene quindi prendere in considerazione $\mathbb{N} \dot\cup \mathbb{T}\mathsf{ransf}$ e chiamarlo **insieme dei cardinali definibili reiterando la costruzione $\mathfrak{P}$** .

B19 g.18 In seguito per ogni $n \in \mathbb{N}$ denoteremo con $\mathbf{Set}_n$ la classe.E degli insiemi con n elementi ($\mathbf{Set}_0 = \{\emptyset\}$).

Denoteremo poi con **SetF**, $\mathbf{Set}_\varphi$ o $\mathbf{Set}_\mathbb{N}$ la classe.E degli insiemi finiti, gli insiemi costituiti da un numero finito di elementi.

Più in generale per ogni insieme di interi naturali $\boldsymbol{N}$, denotiamo con $\mathbf{Set}_{\boldsymbol{N}}$ la classe.E degli insiemi con un numero di elementi appartenente ad $\boldsymbol{N}$.

Con **SetI** o con $\mathbf{Set}_\infty$ si denota la classe.E degli insiemi infiniti.

Scriveremo inoltre $\mathbf{Set}_{cof}(\mathsf{S})$ per denotare l'insieme dei sottoinsiemi dell'insieme S cofiniti, cioè ottenibili da S per eliminazione di uno dei suoi sottoinsiemi finiti.

Va segnalato che la collezione di tutti gli insiemi, che può denotarsi con **Set**, non può considerarsi un insieme: infatti questo consentirebbe di affermare $\mathbf{Set} \in \mathbf{Set}$, e da questo enunciato seguirebbero delle antinomie, ossia situazioni logicamente insostenibili in quanto contradditorie; queste spesso vengono. chiamate `paradossi (wi)`.

La scoperta dei paradossi verso la fine del XIX secolo ha condotto a un attento esame dei fondamenti della matematica ed a formulazioni molto accurate di sistemi di assiomi da porre alla base della teoria degli insiemi.

Se $k :\in \mathsf{cod}(\mathsf{Card})$, si individua la collezione dei sottoinsiemi di A aventi cardinale k scrivendo

$$\mathsf{A}^{\mathfrak{P}_k} \ := \ \left\{ B \in \mathsf{A}^{\mathfrak{P}} \ \P \ |B| = k \right\} \ .$$

Gli insiemi di cardinale k con k intero naturale li chiamiamo **insiemi-k**; va tuttavia segnalato che più spesso sono chiamati "k-insiemi".

Se $K :\subseteq \mathsf{cod}(\mathsf{Card})$ scriviamo $\mathsf{A}^{\mathfrak{P}_K} \ := \ \left\{ \mathsf{B} \in \mathsf{A}^{\mathfrak{P}} \ \P \ |\mathsf{B}| \in K \right\}$.

Con $\mathbf{Set}_k$ denotiamo la classe.E degli insiemi aventi cardinale uguale a k e denotiamo con $\mathbf{Set}_K$ la classe.E degli insiemi aventi cardinale nell'insieme K.

Si vede che il cardinale del continuo $\aleph_1$, cioè $\left(\mathbb{N}^{\mathfrak{P}}\right)^{\#}$, coincide con il cardinale dell'insieme $[0,1)$ dei numeri reali compresi tra 0 ed 1, quest'ultimo escluso. Questi sono definibili attraverso le loro notazioni binarie come successioni $0.b_1b_2...b_n...$ con $b_i \in \{0,1\}$, a esclusione delle sequenze della forma $0.b_1b_2...b_r111...1...$. Quindi introdotto l'insieme dei numeri reali, per esempio con la definizione

$$\mathbb{R} \ := \ \{z \in \mathbb{Z}, r \in [0,1)) :| \ z + r\} \ ,$$

si trova che anche questo insieme ha cardinale $\aleph_1$: infatti i due insiemi numerici sono posti in corrispondenza biunivova dalla trasformazione

$$\ulcorner \ x \in [0,1) \ \mapsto \ \frac{1}{2} \log_e \frac{x}{1-x} \ \urcorner \ .$$

Dunque l'insieme dei numeri reali non può essere posto in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ e quindi non è costruibile.

B19 g.19 Ricordiamo che $\mathsf{A} \in \mathbf{Set}_n \Longrightarrow (\mathsf{A}^{\mathfrak{P}})^\sharp = 2^n$ e che $\mathsf{A} \in \mathbf{Set}_{\aleph_i} \implies (\mathsf{A}^{\mathfrak{P}})^\sharp = \aleph_{i+1}$.
Più limitatamente se $\nu \in \mathbb{N} \dot\cup \{i \in \mathbb{N} :| \aleph_i\} \cup \{\mathbb{N}_0 \cup \{i \in \mathbb{N}_0 :| \aleph_i\}\}^{\mathfrak{P}}$, segue che
$\mathsf{A}^{\mathfrak{P}_\nu} := \{\mathsf{B} \between \mathsf{B} \subseteq \mathsf{A},\ \mathsf{B}^\sharp = \nu\} = \mathsf{A}^{\mathfrak{P}} \cap \mathbf{Set}_\nu$ in particolare $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathsf{A}^{\mathfrak{P}_n} := \mathsf{A}^{\mathfrak{P}} \cap \mathbf{Set}_n$;
$\mathsf{A}^{\mathfrak{P}_\varphi} := \mathsf{A}^{\mathfrak{P}} \cap \mathbf{Set}_\varphi$, $\mathsf{A}^{\mathfrak{P}_\infty} := \mathsf{A}^{\mathfrak{P}} \cap \mathbf{Set}_\infty$.

B19 g.20 Sugli insiemi si definiscono le seguenti relazioni:

$\mathsf{A} \subset_\varphi \mathsf{B}$ sse $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$ e $\mathsf{A} \in \mathbf{Set}_\varphi$;

$\mathsf{A} \subset_\infty \mathsf{B}$ sse $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{B}$ e $\mathsf{A} \in \mathbf{Set}_\infty$.

Con $\mathsf{A} \diamondsuit \mathsf{B}$ esprimiamo la relazione **disgiunzione** tra i due insiemi A e B tali che $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$.
Per la sua negazione scriviamo invece $\mathsf{A} \nmid \mathsf{B}$.

Diciamo che B e C sono **insiemi noncomparabili [rispetto alla inclusione]** sse $\mathsf{B} \not\subset \mathsf{C} \wedge \mathsf{C} \not\subset \mathsf{B}$, ovvero sse $(\mathsf{B} \setminus \mathsf{C} \neq \emptyset) \ \wedge \ (\mathsf{C} \setminus \mathsf{B} \neq \emptyset)$.
Enunceremo concisamente questa relazione scrivendo $\mathsf{B} \lesseqgtr \mathsf{C}$ //Ng20

Scriveremo più specificamente $\mathsf{A} \between \mathsf{B}$ sse $\mathsf{A} \lesseqgtr \mathsf{B}$ e $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \emptyset$, cioè sse i due insiemi sono noncomparabili e non disgiunti.

Scriviamo $\mathsf{A} \dot\cup \mathsf{B}$ per esprimere sia la affermazione che gli insiemi A e B sono disgiunti, sia il risultato della composizione $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

B19 h. composizioni su famiglie di insiemi

B19 h.01 Procediamo ora a introdurre la nozione di famiglia, nozione che si serve delle definizioni di funzione e di collezione e che costituisce uno strumento lessicale che consente di definire agevolmente varie utili costruzioni formali.
In particolare alcune composizioni di insiemi viste in precedenza possono essere estese in misura rilevante servendosi della nozione di famiglia di insiemi.

Una terna della forma $\mathsf{F} = \langle \mathsf{L},\ \mathsf{U},\ \Phi \rangle$, dove L ed U denotano due insiemi e Φ una funzione del genere $\Phi \in \lceil \mathsf{L} \longmapsto \mathsf{U} \rceil$, si dice **famiglia di elementi** di U etichettati dagli elementi di L. L viene chiamato **insieme degli indici** di F o anche **insieme delle etichette di tale famiglia**.

Spesso non si incontrano difficoltà usando la semplificazione che sostituisce una famiglia $\langle \mathsf{L},\ \mathsf{U},\ \Phi \rangle$ con la sola corrispondente funzione Φ.

Se per ogni $\lambda \in \mathsf{L}$ si introduce $A_\lambda := \Phi(\lambda)$, la famiglia F viene individuata più mnemonicamente dalle due espressioni equivalenti

$$\langle \lambda \in \mathsf{L} :| \mathsf{A}_\lambda \rangle \qquad \text{e} \qquad \lceil \lambda \in \mathsf{L} \mapsto \mathsf{A}_\lambda \rceil \ .$$

Le entità A_λ si dicono **membri della famiglia F**.

Nel seguito denotiamo con **Fam** la classe.E delle famiglie di elementi, le famiglie più generali.

Generi particolari di famiglie di elementi sono le sequenze della forma $\langle i = 1, 2, ..., n :| \mathsf{A}_i \rangle$ per n intero positivo e le successioni di elementi $\langle i = 1, 2, ... :| \mathsf{A}_i \rangle$; esse riguardano, risp., insiemi di etichette finiti e numerabili.

Se $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{L}$ la famiglia $\langle \mathsf{M},\ \mathsf{U},\ \Phi_{\restriction \mathsf{M}} \rangle$ viene detta **sottofamiglia** della famiglia $\langle \mathsf{L},\ \mathsf{U},\ \Phi \rangle$.

Utilizzando $\mathsf{E}_\lambda := F(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathsf{L}$ la famiglia viene individuata più mnemonicamente dalle due espressioni equivalenti

$$\langle \lambda \in \mathsf{L} :| \mathsf{E}_\lambda \rangle \qquad \text{e} \qquad \lceil \lambda \in \mathsf{L} \mapsto \mathsf{E}_\lambda \rangle \ .$$

B19 h.02 Si dice **famiglia di insiemi** una terna della forma $\mathsf{S} = \langle \mathsf{M},\ \mathsf{T},\ F \rangle$, dove M e T denotano due insiemi ed F una funzione del genere $F \in \lceil \mathsf{M} \longmapsto \mathfrak{P}(\mathsf{T}) \rceil$.
T viene detto **terreno della famiglia S** e questa viene detta famiglia su T; membri di questa famiglia sono gli insiemi $\mathsf{E}_\mu := F(\mu)$, per i vari $\mu \in M$.

Chiaramente la famiglia di insiemi $\langle \mathsf{M},\ \mathsf{T},\ F \rangle$ si può considerare come una famiglia di elementi avente la forma $\langle \mathsf{M},\ \mathfrak{P}(\mathsf{A}),\ F \rangle$.

Si dice **collezione di insiemi** associata alla famiglia di insiemi $\mathsf{M} = \langle \mathsf{M},\ \mathsf{E},\ F \rangle$ sul terreno U l'insieme-P di insiemi

$$\mathbf{SetY}(\mathsf{M}) := \mathsf{cod}(F) = \{\mu \in \mathsf{M} :| F(\mu)\} \ . \tag{1}$$

Nel seguito denotiamo con **FamS** la classe.E delle famiglie di insiemi; più in particolare denotiamo con **FamSF** la classe.E delle famiglie di insiemi finiti, con **FamG** la classe.E delle famiglie di insiemi-G e con **FamN** la classe.E delle famiglie di insiemi numerabili.

B19 h.03 Le operazioni insiemistiche e in particolare l'unione e l'intersezione, si estendono agli insiemi membri di delle famiglie di insiemi, per ogni possibile insieme degli indici.

Per definire queste operazioni consideriamo una generica famiglia di insiemi facenti parte dell'insieme T etichettata da una variabile, μ, che corre in un insieme M, $\mathbf{M} = \langle \mathsf{M}, \mathsf{T}, F \rangle$ individuabile anche come $\ulcorner \mu \in \mathsf{M} \mapsto S_\mu \urcorner$, essendo $\mathsf{S}_\mu := F(\mu) \subseteq \mathsf{T}$..

Si dice **unione della famiglia di insiemi M** l'insieme definito come

(1) $$\bigcup_{\mu \in \mathsf{M}} \mathsf{S}_\mu \ := \ \{x \ \P \ \exists \nu \in \mathsf{M} \ \P \ x \in \mathsf{S}_\nu\} \ .$$

Si dice **intersezione della famiglia di insiemi M** l'insieme definito come

(2) $$\bigcap_{\mu \in \mathsf{M}} S_\mu \ := \ \{x \ \P \ \forall \mu \in \mathsf{M} : \ x \in \mathsf{S}_\mu\} \ .$$

Va rilevato che sia l'unione che l'intersezione di una famiglia $\mathbf{M}$ dipendono solo dalla corrispondente collezione di insiemi

$$\{\mu \in \mathsf{M} :| \ \mathsf{S}_\mu\} \ = \ \{\nu \in \mathsf{M} :| \ F(\nu)\} \ .$$

In altri termini se due famiglie $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{M}'$ di insiemi contenuti in T riguardano la stessa collezione di insiemi, sottocollezione di $\mathfrak{P}(\mathsf{T})$, le rispettive unioni coincidono e le rispettive intersezioni coincidono.

Talune composizioni si possono effettuare servendosi di collezioni di insiemi, sistemi che possiamo individuare con espressioni della forma $\{\lambda \in \mathsf{L} :| \ \mathsf{A}_\lambda\}$ e che sono un poco più semplici e meno versatili delle espressioni delle famiglie di insiemi.
Infatti per una famiglia può accadere che a due diversi valori dell'etichetta corrispondano membri (insiemi) coincidenti e per utilizzare la sua unione e la sua intersezione si devono far intervenire l'idempotenza, risp., dell'unione e dell'intersezione.
Se si trova che queste coincidenzetra membri sono assenti è sufficiente servirsi della collezione di insiemi ricavabile dalla famiglia, mentre se per unione o intersezione si utilizza la famiglia si può evitare lo studio delle coincidenze tra i membri.

B19 h.04 La proprietà di **mutua disgiunzione**, introdotta per le famiglie discrete di insiemi, si può estendere a collezioni di insiemi con enunciati della forma

(1) $$\Diamond\{\lambda \in \mathsf{L} :| \ \mathsf{A}_\lambda\} \quad \text{sse} \quad \lambda, \mu \in_{\neq} \mathsf{L} \Longrightarrow \mathsf{A}_\lambda \Diamond \mathsf{A}_\mu \ .$$

Similmente si può estendere a collezioni di insiemi la proprietà di **mutua noncomparabilità** con enunciati come

(2) $$\not\sqsubseteq\{\lambda \in \mathsf{L} :| \ \mathsf{A}_\lambda\} \quad \text{sse} \quad \lambda, \mu \in_{\neq} \mathsf{L} \Longrightarrow \mathsf{A}_\lambda \not\sqsubseteq \mathsf{A}_\mu \ .$$

Inoltre può essere vantaggioso adottare una scrittura della forma

$$\overset{:}{\bigcup} \{\lambda \in \mathsf{L} :| \ \mathsf{A}_\lambda\}$$

per individuare l'insieme $\bigcup\{\lambda \in \mathsf{L} :| \ \mathsf{A}_\lambda\}$ e per asserire la mutua disgiunzione degli insiemi che vengono uniti, cioè il fatto che sia $\Diamond\{\lambda \in \mathsf{L} :| \ \mathsf{A}_\lambda\}$.

Le proprietà di distributività per unione e intersezione si estendono alle cosiddette **proprietà di distributività generalizzate** per intersezioni e unioni di famiglie di insiemi-P.

(3) $$\forall \ \mathsf{U}, \mathsf{M} \in \mathbf{SetP} \ , \ \ulcorner \mu \in \mathsf{M} \mapsto \mathsf{S}_\mu \urcorner \in \mathbf{FamS} \ : \ \left(\bigcup_{\mu \in \mathsf{M}} \mathsf{S}_\mu \right) \cap \ \mathsf{U} \ = \ \bigcup_{\mu \in \mathsf{M}} (\mathsf{S}_\mu \cap \mathsf{U}) \ ;$$

(4) $\qquad \forall\, \mathsf{U}, \mathsf{M} \in \mathbf{SetP}\ ,\ \lceil\, \mu \in \mathsf{M} \mapsto \mathsf{S}_\mu \,\rceil \in \mathbf{FamS}\ :\ \left(\bigcap_{\mu\in\mathsf{M}} \mathsf{S}_\mu\right) \cup \mathsf{U} = \bigcap_{\mu\in\mathsf{M}} (\mathsf{S}_\mu \cup \mathsf{U})\ .$

(5) Eserc. Formulare le proprietà per l'operazione booleana generalizzata differenza simmetrica [c07].

Per una arbitraria famiglia di insiemi $\langle \lambda \in \mathsf{L} :|\ \mathsf{A}_\lambda \rangle$ si introduce anche il **prodotto cartesiano generalizzato**

(1) $\qquad \mathsf{X}\{\lambda \in \mathsf{L} :|\ \mathsf{A}_\lambda\} := \{\langle \lambda \in \mathsf{L} :|\ a_\lambda \rangle \,[\!]\, \forall \lambda \in \mathsf{L} :\ a_\lambda \in \mathsf{A}_\lambda\}\ .$

In particolare si hanno le sequenze delle forme

$$\langle i \in (\mathrm{n}\,] :|\ a_i \rangle \ \text{ e } \ \langle i \in [\mathrm{n}\,) :|\ a_i \rangle\ ,$$

le successioni delle forme

$$\langle i \in \mathbb{P} :|\ a_i \rangle \ \text{ e } \ \langle i \in \mathbb{N} :|\ a_i \rangle$$

e le successioni bilatere della forma

$$\langle i \in \mathbb{Z} :|\ a_i \rangle\ .$$

Conviene ribadire che la n-upla $\langle a_1,\ ...,\ a_n \rangle$ è diversa dall'n-upletto $\{a_1,\ ...,\ a_n\}$, che la successione $\langle i \in \mathbb{N} :|\ a_i \rangle = \langle a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n,\ ... \rangle$ è diversa dall'insieme-G $\{a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n,\ ...\}$ e che la famiglia $\langle \lambda \in \mathsf{L} :|\ a_\lambda \rangle$ è diversa dall'insieme $\{\lambda \in \mathsf{L} :|\ a_\lambda\}$.

B19 h.06 Diciamo **ipergrafo** o spazio di blocchi sul terreno U ogni coppia $\langle \mathsf{U}, \boldsymbol{C} \rangle$ con $\mathsf{U} \in \mathbf{Set}$ e $\boldsymbol{C} \subseteq \mathsf{U}^{\mathfrak{P}}$. Con $\mathbf{Hygrf}_{\mathsf{U}}$ denotiamo la classe.E degli ipergrafi aventi come terreno U.

Se $\boldsymbol{C}$ è una collezione di insiemi ed $N \subseteq \mathsf{Card}$, la scrittura $\mathsf{C} \in_N \boldsymbol{C}$ denota concisamente che $\mathsf{C} \in \boldsymbol{C}$ e $|C| \in N$.

In particolare $\mathsf{C} \in_\varphi \boldsymbol{C}$ enuncia che C è un sottoinsieme finito della collezione $\boldsymbol{C}$, mentre $\mathsf{C} \in_\infty \boldsymbol{C}$ asserisce che C è un sottoinsieme infinito della $\boldsymbol{C}$.

Rivestono notevole importanza per la combinatorica esue applicazioni gli ipergrafi finiti, ossia gli ipergrafi su un terreno finito.

Non è raro che vengano esaminati aggregati di collezioni di sottoinsiemi di un universo U, cioè elementi di un insieme della forma $\left(\mathsf{U}^{\mathfrak{P}}\right)^{\mathfrak{P}}$.
Potrebbe essere opportuno usare per una tale entità il termine distintivo aggregato di collezioni di insiemi.
Osserviamo che $\left(\mathsf{U}^{\mathfrak{P}}\right)^{\mathfrak{P}}$ è un caso particolare di $\mathbf{Hygrf}_{\mathsf{U}^{\mathfrak{P}}}$.

B19 h.07 Definiamo ora altre due operazioni che riguardano famiglie di insiemi o collezioni di insiemi.
Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di A $\mathsf{F} := \{\lambda \in \mathsf{L} :|\ \mathsf{A}_\lambda\} \subseteq \mathsf{A}^{\mathfrak{P}}$.
Si dice **maggiorazione booleana di una famiglia di insiemi** o **chiusura per unione di una famiglia di insiemi F**

(1) $\qquad \{\lambda \in \mathsf{L} :|\ \mathsf{A}_\lambda\}\ [\ \cup\ ] := \{\mathsf{M} \subseteq \mathsf{L} :|\ \cup_{\mu\in\mathsf{M}} \mathsf{A}_\mu\}\ .$

Si dice **minorazione booleana di una famiglia di insiemi** o **chiusura per intersezione di una famiglia di insiemi F**

(2) $\qquad \{\lambda \in \mathsf{L} :|\ \mathsf{A}_\lambda\}\ [\ \cap\ ] := \left\{M \subseteq \mathsf{L} :|\ \cap_{\mu\in\mathsf{M}} \mathsf{A}_\mu\right\}\ .$

Una collezione di insiemi $\boldsymbol{C}$ si dice **chiusa rispetto all'unione** sse $\boldsymbol{C}[\ \cup\ ] = \boldsymbol{C}$ JP Con $\mathsf{Stabs}(\cup)$ denotiamo l'aggregato delle collezioni chiuse rispetto all'unione.

La collezione di insiemi $\boldsymbol{C}$ si dice **chiusa rispetto all'intersezione** sse $\left[\ \cap\ \right] = \mathcal{C}$.
Con $\mathsf{Stabs}(\cap)$ denotiamo l'aggregato delle collezioni chiuse rispetto all'intersezione.

La collezione di insiemi $\boldsymbol{C}$ si dice **collezione discendente** sse $\mathsf{H} \in \boldsymbol{C},\ \mathsf{H} \supseteq \mathsf{K} \implies \mathsf{K} \in \boldsymbol{C}$.
Con $\mathsf{Stabs}(\supseteq)$ denotiamo la classe.E delle collezioni discendenti.
Queste collezioni sono anche chiamate **complessi simpliciali** e la loro classe.E si denota anche con **Simplcmp**.

La collezione di insiemi $\boldsymbol{C}$ si dice **collezione ascendente** sse $\mathsf{A} \in \boldsymbol{C},\ \mathsf{H} \subseteq \mathsf{K} \implies \mathsf{K} \in \boldsymbol{C}$.
Con $\mathsf{Stabs}(\subseteq)$ denotiamo la classe.E delle collezioni ascendenti.
Queste vengono dette anche **filtri** e la loro collezione si denota anche con **Fltr**.

Segnaliamo le seguenti relazioni tra insiemi-P:

$$\mathsf{Stabs}(\subseteq) \subset \mathsf{Stabs}(\cup)\ \ ,\quad \mathsf{Stabs}(\supseteq) \subset \mathsf{Stabs}(\cap)\ .$$

B19 h.08 Ancora $\boldsymbol{C}$ denoti una collezione di insiemi.
Un suo elemento H si dice **insieme minimale** in $\boldsymbol{C}$ sse

$$\mathsf{H}' \subset \mathsf{H} \implies \mathsf{H}' \notin \boldsymbol{C}\ .$$

Con $\boldsymbol{C}^{\mathsf{Mnml}}$ denotiamo la sottocollezione degli insiemi minimali di $\boldsymbol{C}$.

L'insieme $\mathsf{K} \in \boldsymbol{C}$ si dice **insieme massimale** in $\boldsymbol{C}$ sse

$$\mathsf{K} \subset \mathsf{K}' \implies \mathsf{K}' \notin \boldsymbol{C}\ .$$

Con $\boldsymbol{C}^{\mathsf{Mxml}}$ denotiamo la sottocollezione degli insiemi massimali in $\boldsymbol{C}$.
Una collezione di insiemi $\boldsymbol{K} \subseteq \mathsf{U}^{\mathfrak{P}}$ si dice **copertura di un insieme** $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{U}$ sse

$$\bigcup\{\mathsf{K} \in \boldsymbol{K} :|\ \mathsf{K}\}\ \supseteq \mathsf{S}\ .$$

Una copertura $\boldsymbol{K}$ dell'insieme $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{U}$ si dice **copertura nondebordante** sse

$$\textstyle\bigcup_{\mathsf{K}\in\boldsymbol{K}} \mathsf{H}\ =\ \mathsf{S}\ \ ,\quad \text{ovvero sse}\quad \forall \mathsf{K} \in \boldsymbol{K} :\ \mathsf{K} \subseteq \mathsf{S}\ .$$

Una copertura $\boldsymbol{K}$ di $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{U}$ nondebordante si dice **partizione** sse $\forall \mathsf{K}, \mathsf{K}' \in_{neq} \boldsymbol{K}\ :\ \mathsf{K} \diamondsuit \mathsf{K}'$.

Consideriamo una collezione $\boldsymbol{N}$ di insiemi contenuti in un insieme U, ossia una collezione $\boldsymbol{N} \subseteq \mathfrak{P}(\mathsf{U})$.
Essa è chiamata **collezione di insiemi mutuamente noncomparabili** sse

$$\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2 \in_{\neq} \boldsymbol{N} \implies \mathsf{N}_1 \nsubseteq \mathsf{N}_2\}\ .$$

Per la collezione di queste collezioni usiamo la notazione $NCSC(\mathsf{U})$.

Possiamo quindi affermare:

$$NCSC(\mathsf{U})\ :=\ \left\{\mathbf{N} \subseteq \mathsf{U}^{\mathfrak{P}}\ \left[\!\right]\ \mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2 \in_{\neq} \boldsymbol{N} \implies \mathsf{N}_1 \nsubseteq \mathsf{N}_2\right\}\ .$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php